Известия вузов. Математика
2018, № 3, с. 79–90

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Б. ХАСАНОВ, У.А. ХОИТМЕТОВ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Метод обратной задачи рассеяния применяется к интегрированию уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе комплекснозначных быстроубывающих функций.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза, оператор Штурма–Лиувилля, решения Йоста, обратная задача теории рассеяния, интегральное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко.

УДК: 517.956

Введение. В работе рассматривается система нелинейных уравнений вида

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_j^l \phi_j^{m_j-1-l}\right), \tag{1}$$

$$L(t)\phi_j^l = k_j^2\phi_j^l + l\phi_j^{l-1} \quad (\operatorname{Im} k_j > 0), \quad l = \overline{0,\, m_j-1}, \quad j = \overline{1,\, N}, \tag{2}$$

где

$$L(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}.$$

Функции $\phi_j^l = \phi_j^l(x,\, t)$ при каждом неотрицательном t принадлежат пространству квадратично суммируемых функций $L^2(\mathbb{R})$, а $\phi_j^0 = \phi_j^0(x,\, t)$ — собственная функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_j(t) = k_j^2(t)$ $(\operatorname{Im} k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $l = \overline{0,\, m_j - 1}$, $j = \overline{1,\, N}$.

Система уравнений (1), (2) рассматривается при начальном условии

$$q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где начальная функция $q_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q_0(x)| e^{\varepsilon |x|} dx < \infty; \tag{4}$$

2) несамосопряженный оператор $L(0)$ имеет ровно N комплексных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$ соответственно, и не имеет спектральных особенностей.

Поступила 12.12.2016

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j-1-l)!}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j^{m_j-1}(x,\,t)\phi_j^{m_j-1-l}(x,\,t)dx=A^j_{m_j-1-l}(t),\ \ l=\overline{0,\,m_j-1},\quad j=\overline{1,\,N}. \tag{5}$$

Здесь $A^j_{m_j-1-l}(t)$ — изначально заданные непрерывные функции.

Требуется найти комплекснозначную функцию $q(x,\,t)$, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, в том числе

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^j q(x,t)}{\partial x^j}\right|e^{\varepsilon|x|}dx<\infty,\quad j=0,\,1,\,2,\,3. \tag{6}$$

В данной работе получено представление для решения $q(x,t)$ задачи Коши (1)–(6) в рамках метода обратной задачи рассеяния для несамосопряженного оператора $L(t)$, $t\geq 0$.

Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начало с работы К. Гарднера, И. Грина, М. Крускала и Р. Миура [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) сведением ее к обратной задаче рассеяния для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля. Эта обратная задача рассеяния впервые была решена в работе Л.Д. Фаддеева [2], затем в работах В.А. Марченко ([3], с. 264), Б.М. Левитана ([4], с. 30) и др.

В [5] П. Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ.

В.К. Мельников [6] показал, что уравнение КдФ с самосогласованным источником может быть решено с помощью метода обратной задачи рассеяния для самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля.

Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал $q(x,t)$ — комплекснозначная функция. В работах [7], [8] В.А. Блащаком была решена обратная задача рассеяния для несамосопряженного оператора $L(0)$ с комплекснозначным потенциалом на всей прямой. Хорошо известно, что несамосопряженный оператор $L(t)$ может иметь спектральные особенности [9], которые лежат на непрерывном спектре. Предполагаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей. Кроме того, при выполнении вышеуказанных условий оператор $L(t)$ имеет конечное число кратных комплексных собственных значений.

Известно, что данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ состоят из коэффициента отражения, собственных значений и цепочек нормировочных чисел. Как нам известно, в цитируемых выше работах не найдена динамика изменения по t эволюции цепочки нормировочных чисел, возникающих в случае присутствия присоединенных функций несамосопряженного оператора $L(t)$.

Основным результатом данной работы является нахождение уравнения динамики по времени t данных рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ с потенциалом, являющимся решением уравнения КдФ в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. При этом будем использовать методы и обозначения работ [7], [8].

1. Необходимые сведения. Рассмотрим уравнение

$$L(0)y:=-y''+q_0(x)y=k^2y,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

где потенциал $q_0(x)$ предполагается комплекснозначным и удовлетворяет условию (4). В этом разделе будут приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения (7). Определим решения Йоста уравнения (7):

$$f_{\pm}(x,k) = e^{\pm ikx} \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x,\, y) e^{\pm iky} dy. \tag{8}$$

Эти решения при выполнении условии (4) существуют, единственны и голоморфны по k в полуплоскости $\operatorname{Im} k > -\frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, ядра $K_{\pm}(x,\, y)$ связаны с потенциалом $q_0(x)$:

$$q_0(x) = \mp 2 \frac{dK_{\pm}(x,x)}{dx}. \tag{9}$$

Отметим также, что пары функций $\{f_{\pm}(x,k),\ f_{\pm}(x,-k)\}$ образуют в полосе $|\operatorname{Im} k| < \frac{\varepsilon}{2}$ фундаментальные системы решений, вронскианы которых равны

$$W\{f_{\pm}(x,k),\quad f_{\pm}(x,-k)\} = \mp 2ik.$$

Запишем вронскианы

$$w(k) := f_-(x,k) f'_+(x,k) - f'_-(x,k) f_+(x,k),$$

$$v(k) := f_+(x,-k) f'_-(x,k) - f_-(x,k) f'_+(x,-k).$$

Функция $w(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} k > -\frac{\varepsilon}{2}$ и обладает асимптотикой

$$w(k) = 2ik\left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right], \quad |k| \to \infty, \tag{10}$$

равномерно в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq \eta$, $\eta > -\frac{\varepsilon}{2}$. Из асимптотики (10) и аналитичности $w(k)$ следует, что в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$ функция $w(k)$ имеет конечное число нулей (в общем случае кратных). Требование отсутствия спектральных особенностей оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $w(k)$, т. е. $w(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$. Пусть невещественные нули $w(k)$ есть $k_1, k_2, \ldots, k_N$ ($\operatorname{Im} k_j > 0$, $j = \overline{1,\, N}$), тогда $\lambda_j = k_j^2$, $j = \overline{1,\, N}$, — собственные значения оператора $L(0)$. Кратность корня k_j уравнения $w(k) = 0$ обозначим через m_j, $j = \overline{1,\, N}$.

В отличие от $w(k)$ функция $v(k)$ задана только в полосе $|\operatorname{Im} k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Функции $w(k)$ и $v(k)$ в полосе $|\operatorname{Im} k| < \frac{\varepsilon}{2}$ удовлетворяют равенству

$$w(k)w(-k) - v(k)v(-k) = 4k^2. \tag{11}$$

Кроме того, в полосе $|\operatorname{Im} k| < \frac{\varepsilon}{2}$ справедливо равенство

$$f_-(x,\, k) = \frac{v(k)}{2ik} f_+(x,k) + \frac{w(k)}{2ik} f_+(x,-k). \tag{12}$$

Существуют так называемые нормировочные цепочки чисел

$$\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\} \ \text{ и } \ \{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}, \quad j = \overline{1,\, N},$$

такие, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^s f_-(x,k)\right)_{k=k_j} = \sum_{\nu=0}^{s} \chi_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^\nu f_+(x,k)\right)_{k=k_j},$$

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s f_-(x,\, \sqrt{\lambda})\right)_{\lambda=k_j^2} = \sum_{\nu=0}^{s} \theta_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\nu f_+(x,\, \sqrt{\lambda})\right)_{k=k_j^2}, \tag{13}$$

$$s = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,\, N},$$

при этом $\chi_0^j \neq 0$, $\theta_0^j \neq 0$.

Цепочки нормировочных чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ и $\{\theta_0^j, \theta_1^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j\}$, $j=\overline{1,N}$, связаны между собой с помощью рекуррентных соотношений.

Обозначим через $\widehat{f}(x,k)$ решение уравнения (7), обладающее асимптотикой $\widehat{f}(x,k) = e^{-ikx} + o(1)$ при $x \to \infty$, и голоморфное по k в области $|k| > |k_0|$, $\operatorname{Im} k > 0$ (где k_0 выбрано так, что $k_0 < \min\{\operatorname{Im} k_1, \operatorname{Im} k_2, \ldots, \operatorname{Im} k_N\}$). Существование такого решения показано в работе М.А. Наймарка ([10], с. 447). Функции $\{f_+(x,k), \widehat{f}(x,k)\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (7).

Введем обозначение $U(k) := W\{\widehat{f}(x,k), f_-(x,k)\}$. Легко показать, что

$$f_-(x,k) = \frac{U(k)}{2ik} f_+(x,k) + \frac{w(k)}{2ik} \widehat{f}(x,k),$$

$$\chi_s^j = \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dk}\right)^s \frac{U(k)}{2ik}\bigg|_{k=k_j}, \quad \theta_s^j = \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s \frac{U(k)}{2i\sqrt{\lambda}}\bigg|_{\lambda=\lambda_j}, \quad s=\overline{0, m_j-1}, \quad j=\overline{1,N}.$$

Известно [7], [8], что ядро $K_+(x,y)$ оператора преобразования (8) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K_+(x,y) + F_+(x+y) + \int_x^\infty K_+(x,s) F_+(s+y) ds = 0, \quad x \le y, \tag{14}$$

где

$$F_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(k) e^{ikx} dk + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{m_j-1} \chi_{m_j-\nu-1}^j \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dk^\nu}\left(\frac{2k(k-k_j)^{m_j}}{w(k)} e^{ikx}\right), \tag{15}$$

$$S(k) := \frac{v(k)}{w(k)},$$

при этом потенциал $q_0(x)$ находится по формуле (9).

Определение 1. Набор

$$\{S(k), \lambda_j, \chi_0^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j, \ j=\overline{1,N}\} \text{ или } \{S(k), \lambda_j, \theta_0^j, \ldots, \theta_{m_j-1}^j, \ j=\overline{1,N}\}$$

называется данными рассеяния для оператора $L(0)$.

Нахождение комплекснозначного потенциала $q_0(x)$ по данным рассеяния называют обратной задачей.

В дальнейшем часто будем пользоваться результатами следующих утверждений.

Лемма 1. *Если функции $y(x,\zeta)$ и $z(x,\eta)$ являются решениями уравнений $Ly = \zeta^2 y$ и $Lz = \eta^2 z$, то справедливо равенство*

$$\frac{d}{dx} W\{y,z\} = (\zeta^2 - \eta^2) yz.$$

Лемма 2. *Пусть функции f_-, ϕ_j^l, $l=0,1,\ldots,m_j-1$, являются решениями уравнений*

$$Lf_- = \lambda f_-, \quad L\phi_j^l = \lambda_j \phi_j^l + l\phi_j^{l-1}, \quad l = 0,1,\ldots,m_j-1, \quad \lambda = k^2.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} W\{\phi_j^l, f_j\} = (\lambda_j - \lambda)\phi_j^l f_- + l\phi_j^{l-1} f_-.$$

Следствие 1. При выполнении условий леммы 2 и $\lambda \neq \lambda_j$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \phi_j^l f_- &= \sum_{r=0}^{l} \frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{r+1}} \frac{l!}{(l-r)!} \frac{d}{dx} W\{f_-, \phi_j^{l-r}\}, \\ \phi_j^{m_j-1-l} f_- &= \sum_{r=0}^{m_j-1-l} \frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^{m_j-r}} \frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!} \frac{d}{dx} W\{f_-, \phi_j^{m_j-1-l-r}\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Дифференцируя (16) n раз по λ, и полагая $\lambda = \lambda_j$, получим

Следствие 2. Справедливо

$$\phi_j^{l-1} f_-^{(n)}(x,k_j) = \frac{n}{l}\phi_j^l f_-^{(n-1)}(x,k_j) - \frac{1}{l}\frac{d}{dx} W\{f_-^{(n)}(x,k_j), \phi_j^l(x,k_j)\}, \quad l = \overline{1, m_j-1}. \tag{17}$$

Непосредственной проверкой доказывается

Лемма 3. *Если ϕ_j — собственная функция оператора $L(0)$ с потенциалом $q_0(x)$, соответствующая собственному значению k_j^2, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_0(x)\phi_j'\phi_j dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} q_0'(x)\phi_j^2 dx = 0.$$

2. Эволюция данных рассеяния. Рассмотрим уравнение КдФ с правой частью

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = G(x,t), \tag{18}$$

где

$$G(x,t) = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^l \frac{\partial}{\partial x}(\phi_j^l \phi_j^{m_j-1-l}). \tag{19}$$

Для уравнения (18) пару Лакса [11] ищем в виде

$$-\Phi_{xx} + (q-\lambda)\Phi = 0, \tag{20}$$

$$\Phi_t = (-q_x + 4i\lambda\sqrt{\lambda})\Phi + (2q+4\lambda)\Phi_x + F(x,t). \tag{21}$$

Используя тождество $\Phi_{xxt} = \Phi_{txx}$, на основании равенств (18)–(21) получим

$$-F_{xx} + (q(x,t)-\lambda)F = -G. \tag{22}$$

Положив $\Phi(x,t) = f_-(x,\sqrt{\lambda};t)$, ищем решение уравнения (22) в виде

$$F = B(x) f_-(x,\sqrt{\lambda};t) + C(x) f_-(x,-\sqrt{\lambda};t).$$

Тогда для определения $B(x)$ и $C(x)$ получим систему

$$\begin{aligned} B'(x) f_-(x,\sqrt{\lambda};t) + C'(x) f_-(x,-\sqrt{\lambda};t) &= 0, \\ B'(x) f_-'(x,\sqrt{\lambda};t) + C'(x) f_-'(x,-\sqrt{\lambda};t) &= G f_-(x,\sqrt{\lambda};t), \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$B(x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{x} f_-(s,\sqrt{\lambda};t) f_-(s,-\sqrt{\lambda};t) G ds, \quad C(x) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{x} f_-^2(s,\sqrt{\lambda};t) G ds.$$

Следовательно, в этом случае второе уравнение пары Лакса запишется как

$$\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial t} = (-q_x + 4i\lambda\sqrt{\lambda}) f_-(x,\sqrt{\lambda};t) + (2q+4\lambda)\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial x} -$$

$$-\frac{f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{x} f_-(s,\sqrt{\lambda};t)f_-(s,-\sqrt{\lambda};t)Gds+\frac{f_-(x,-\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{x} f_-^2(s,\sqrt{\lambda};t)Gds. \quad (23)$$

Переходя в равенстве (23) к пределу при $x\to\infty$, в силу (11), (12) и асимптотики решения Йоста выводим

$$\frac{dw(\sqrt{\lambda};t)}{dt}=-\frac{w(\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} f_-(x,\sqrt{\lambda};t)f_-(x,-\sqrt{\lambda};t)G(x,t)dx-$$
$$-\frac{v(-\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} f_-^2(x,\sqrt{\lambda};t)G(x,t)dx, \quad (24)$$

$$\frac{dv(\sqrt{\lambda};t)}{dt}=8i\lambda\sqrt{\lambda}v(\sqrt{\lambda};t)-\frac{v(\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} f_-(x,\sqrt{\lambda};t)f_-(x,-\sqrt{\lambda};t)G(x,t)dx-$$
$$-\frac{w(-\sqrt{\lambda};t)}{2i\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} f_-^2(x,\sqrt{\lambda};t)G(x,t)dx. \quad (25)$$

Умножая (25) на w и вычитая из него (24), умноженное на v, согласно (15) имеем

$$\frac{ds(\sqrt{\lambda};t)}{dt}=8i\lambda\sqrt{\lambda}s(\sqrt{\lambda};t)-\frac{2i\sqrt{\lambda}}{w(\sqrt{\lambda};t)}\int_{-\infty}^{\infty} f_-^2(x,\sqrt{\lambda};t)G(x,t)dx.$$

Лемма 4. *Справедливы тождества*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)f_-^2(x,\sqrt{\lambda};t)dx=0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)f_-(x,\sqrt{\lambda};t)f_-(x,-\sqrt{\lambda};t)dx=0, \quad (26)$$

где функция $G(x,t)$ определена равенством (19).

Доказательство. Действительно, используя выражение (19), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gf_-^2(x,\sqrt{\lambda};t)dx=2\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_j^l\phi_j^{m_j-1-l})f_-^2dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\Big[\phi_j^l f_-^2\frac{\partial}{\partial x}\phi_j^{m_j-1-l}+$$
$$+\phi_j^{m_j-1-l}f_-^2\frac{\partial}{\partial x}\phi_j^{m_j-1-l}\phi_j^l-2\phi_j^l\phi_j^{m_j-1-l}\frac{\partial}{\partial x}f_-\Big]\Bigg)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}[\phi_j^l f_-W\{f_-,\phi_j^{m_j-1-l}\}+\phi_j^{m_j-1-l}f_-W\{f_-,\phi_j^l\}]\Bigg)dx.$$

Согласно (16) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gf_-^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{l}\frac{l!}{(l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}\big(W\{f_-,\phi_j^{l-r}\}\big)+$$

$$+\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}W\{f_-,\phi_j^l\}\frac{d}{dx}\left(W\{f_-,\phi_j^{m_j-1-l-r}\}\right)\Big]dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left(W\{f_-,\phi_j^l\}\right)W\{f_-,\phi_j^{m_j-1-l-r}\}dx=0.$$

Аналогично доказывается равенство (26). □

Согласно лемме 4 и (24) имеем $w_t(\sqrt{\lambda},t)=0$. Следовательно,

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0, \tag{27}$$

$$S_t(\sqrt{\lambda},t)=8i\lambda\sqrt{\lambda}S(\sqrt{\lambda},t). \tag{28}$$

Теперь перейдем к нахождению эволюции нормировочной цепочки $\{\theta_0^n,\theta_1^n,\ldots,\theta_{m_n-1}^n\}$, соответствующей комплексному собственному значению λ_n, $n=\overline{1,N}$. Для этого перепишем равенство (23) в виде

$$\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial t}=(-q_x+4i\lambda\sqrt{\lambda})f_-(x,\sqrt{\lambda};t)+(2q+4\lambda)\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial x}-$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\left[f_-(x,\sqrt{\lambda};t)\int_{-\infty}^{x}f_-(s,\sqrt{\lambda};t)f_-(s,-\sqrt{\lambda};t)G(s,t)ds-\right.$$

$$\left.-f_-(x,\sqrt{\lambda};t)\int_{-\infty}^{x}f_-^2(s,\sqrt{\lambda};t)G(s,t)ds\right]=(-q_x+4i\lambda\sqrt{\lambda})f_-+(2q+4\lambda)\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial x}+$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\sum_{r=0}^{m_j-1-l}\frac{(m_j-1-l)!\frac{d}{dx}\left(W\{f_-(s,\sqrt{\lambda};t),\phi_j^{m_j-1-l-r}\}\right)}{(m_j-1-l-r)!(\lambda-\lambda_j)^{r+1}}ds\cdot\phi_j^l=$$

$$=(-q_x+4i\lambda\sqrt{\lambda})f_-(x,\sqrt{\lambda};t)+(2q+4\lambda)\frac{\partial f_-(x,\sqrt{\lambda};t)}{\partial x}+$$

$$+\phi_j^l\int_{-\infty}^{x}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1}C_{m_j-1}^{l}\phi_j^{m_j-1-l}f_-(s,\sqrt{\lambda};t)ds. \tag{29}$$

Дифференцируя (29) m_n-1 раз по λ, полагая $\lambda=\lambda_n$ и учитывая асимптотику решения Йоста при $x\to+\infty$, получим

$$\frac{\partial f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)}{\partial t}=4i\Big[\lambda_n^{\frac{3}{2}}f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)+\frac{3}{2}C_{m_n-1}^{1}\lambda_n^{\frac{1}{2}}f_-^{(m_n-2)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)+$$

$$+\frac{3}{4}C_{m_n-1}^{2}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}f_-^{(m_n-3)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)-\frac{3}{8}C_{m_n-1}^{3}\lambda_n^{-\frac{3}{2}}f_-^{(m_n-4)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)+$$

$$+3\sum_{r=4}^{m_n-1}C_{m_n-1}^{r}\frac{(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{(r-3)!}\lambda_n^{-\frac{2r-3}{2}}f_-^{(m_n-1-r)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)\Big]+$$

$$+4\lambda_n\frac{\partial}{\partial x}f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)+4(m_n-1)\frac{\partial}{\partial x}f_-^{(m_n-2)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)+$$

$$+\sum_{l=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^l \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{m_n-1-l} f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)dx\cdot\phi_n^l. \quad (30)$$

Используя формулы (17) можно показать, что

$$\sum_{l=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^l \int_{-\infty}^{x} \phi_n^{m_n-1-l} f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)dt\cdot\phi_n^l =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^l \int_{-\infty}^{x} \phi_n^{m_n-1} f_-^{(m_n-1-l)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)ds\cdot\phi_n^l + \sum_{l=0}^{m_n-1} Q_l(x)\phi_n^l,$$

где $Q_l(x)$ — линейная комбинация выражений вида $W\{\phi_n^r, f_-^{(q)}\}$, $r-q=l$, и поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} Q_l(x)=0$. Согласно определению функций ϕ_n^s и f_-^s, f_-^s, $s=0,1,2,\ldots,m_n-1$, существуют числа $d_0,d_1,\ldots,d_{m_n-1}$ такие, что $\phi_n^l=\sum\limits_{s=0}^{l} C_l^s d_{l-s} f_-^s$, $l=0,1,2,\ldots,m_n-1$. Поэтому

$$\sum_{l=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^l \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{m_n-1-l} f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)dx\cdot\phi_n^l = \sum_{s=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^s \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{m_n-1}\phi_n^{m_n-1-s}dx\cdot f_-^{(s)}.$$

Таким образом, равенство (30) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)}{\partial t} = 4i\Big[\lambda_n^{\frac{3}{2}} f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) + \frac{3}{2}C_{m_n-1}^1\sqrt{\lambda_n} f_-^{(m_n-2)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) +$$

$$+\frac{3}{4}C_{m_n-1}^2\lambda_n^{-\frac{1}{2}} f_-^{(m_n-3)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) - \frac{3}{8}C_{m_n-1}^3\lambda_n^{-\frac{3}{2}} f_-^{(m_n-4)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) +$$

$$+3\sum_{r=4}^{m_n-1} C_{m_n-1}^r \frac{(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{(r-3)!}\lambda_n^{-\frac{2r-3}{2}} f_-^{(m_n-1-r)}(x,\sqrt{\lambda_n};t)\Big] +$$

$$+4\lambda_n\frac{\partial}{\partial x} f_-^{(m_n-1)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) + 4(m_n-1)\frac{\partial}{\partial x} f_-^{(m_n-2)}(x,\sqrt{\lambda_n};t) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^s \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{m_n-1}\phi_n^{m_n-1-s}dx\cdot f_-^{(s)}(x,\sqrt{\lambda_n};t).$$

Используя (13) и приравнивая коэффициенты при $(ix)^l\cdot e^{i\sqrt{\lambda_n}x}$, $l=m_n-1,m_n-2,...,1,0$, найдем аналог уравнений Гарднера–Грина–Крускала–Миуры

$$\frac{d\theta_0^n(t)}{dt} = \big(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\big)\theta_0^n(t),$$

$$\frac{d\theta_1^n(t)}{dt} = \big(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\big)\theta_1^n(t) + \big(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\big)\theta_0^n(t),$$

$$\frac{d\theta_2^n(t)}{dt} = \big(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\big)\theta_2^n(t) + \big(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\big)\theta_1^n(t) + \big(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\big)\theta_0^n(t),$$

$$\frac{d\theta_3^n(t)}{dt} = \big(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\big)\theta_3^n(t) + \big(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\big)\theta_2^n(t) +$$

$$+\big(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\big)\theta_1^n(t) + \left(\frac{i}{2}\lambda_n^{-\frac{3}{2}} + A_3^n(t)\right)\theta_0^n(t), \quad (31)$$

$$\frac{d\theta_p^n(t)}{dt} = \big(8i\lambda_n^{\frac{3}{2}} + A_0^n(t)\big)\theta_p^n(t) + \big(12i\lambda_n^{\frac{1}{2}} + A_1^n(t)\big)\theta_{p-1}^n(t) +$$
$$+ \big(3i\lambda_n^{-\frac{1}{2}} + A_2^n(t)\big)\theta_{p-2}^n(t) + \left(\frac{i}{2}\lambda_n^{-\frac{3}{2}} + A_3^n(t)\right)\theta_{p-3}^n(t) +$$
$$+ \sum_{r=4}^{p}\left(\frac{24i(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{r!(r-3)!}\lambda_n^{-\frac{2r-3}{3}} + A_r^n(t)\right)\theta_{p-r}^n(t),$$
$$p = 4, 5, \ldots, m_n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если система функций $q(x,t)$, $\phi_j^l(x,t)$, $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$, $j = \overline{1,N}$, является решением задачи* (1)–(6), *то данные рассеяния*

$$\left\{S(\sqrt{\lambda}, t), \lambda_n(t), \theta_0^n(t), \theta_1^n(t), \ldots, \theta_{m_n-1}^n(t),\ n = \overline{1,N}\right\}$$

оператора $L(t)$ с потенциалом $q(x,t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (27), (28) *и* (31).

Отметим, что в случае уравнения КдФ без источника

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{32}$$

$$q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

где начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию (4), имеет место

Теорема 2. *Если комплекснозначная функция $q(x,t)$ является решением задачи Коши* (32), (33), *то данные рассеяния $\left\{S(k,t), \lambda_j(t), \chi_0^j(t), \chi_1^j(t), \ldots, \chi_{m_j-1}^j(t) : j = \overline{1,N}\right\}$ несамосопряженного оператора $L(t)$, $t > 0$, с потенциалом $q(x,t)$ меняются по t следующим образом:*

$$\frac{dS(k,t)}{dt} = 8ik^3 S(k,t), \quad \frac{d\lambda_n(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d\chi_0^n(t)}{dt} = 8ik^3\chi_0^n(t),$$
$$\frac{d\chi_1^n(t)}{dt} = 8ik_n^3\chi_1^n(t) + 24ik_n^2\chi_0^n(t),$$
$$\frac{d\chi_2^n(t)}{dt} = 8ik_n^3\chi_2^n(t) + 24ik_n^2\chi_1^n(t) + 24ik_n\chi_0^n(t),$$
$$\frac{d\chi_p^n(t)}{dt} = 8ik_n^3\chi_p^n(t) + 24ik_n^2\chi_{p-1}^n(t) + 24ik_n\chi_{p-2}^n(t) + 8i\chi_{p-3}^n(t),$$
$$n = 1, 2, \ldots, N; \quad p = 3, 4, \ldots, m_n - 1.$$

3. Примеры применения теоремы 2.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \tag{34}$$

$$q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{35}$$

$$q_0(x) = \frac{8a^2 e^{2iax}}{(1 + e^{2iax})^2}, \quad \operatorname{Im} a > 0.$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda(0) = k^2 = a^2; \quad v(k,0) = 0, \quad S(k,0) = 0, \quad \chi_0(0) = 1.$$

В силу теоремы 2 имеем

$$\lambda(t)=\lambda(0)=a^2;\quad S(k,t)=0,\quad \chi_0(t)=\chi_0(0)e^{8ia^3t}=e^{8ia^3t}.$$

Подставляя эти данные в формулу (15) найдем ядро $F_+(x,t)=-2iae^{8ia^3t}e^{iax}$ интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y;t)-2iae^{8ia^3t}\cdot e^{ia(x+y)}-2iae^{8ia^3t}e^{iay}\int_x^\infty K_+(x,s;t)e^{ias}ds=0,$$

получим

$$K_+(x,y;t)=\frac{2iae^{8ia^3t}e^{ia(x+y)}}{1+e^{8ia^3t}e^{2iax}}.$$

Отсюда находим решение задачи Коши (34), (35)

$$q(x,t)=-2\frac{dK_+(x,t)}{dx}=\frac{8a^2e^{2i(ax+4a^3t)}}{\left(1+e^{2i(ax+4a^3t)}\right)^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$q_t-6qq_x+q_{xxx}=0, \tag{36}$$

$$q(x,0)=q_0(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{37}$$

$$q_0(x)=\frac{4\left((A+2Bx)\,ia+B\right)e^{2iax}-\frac{4B^2}{a^2}e^{4iax}+\frac{B^2}{4a^4}\left((A+2Bx)\,ia-3B\right)e^{6iax}}{\left(1+\frac{1}{2a^2}\left((A+2Bx)ia-\frac{B^2}{16a^4}e^{4iax}\right)\right)^2}, \tag{38}$$

где $\operatorname{Im}a>0$, $A=-4ia(a\chi_1^1+\chi_0^1)$, $B=4a^2\chi_0^1$.

Положим

$$v(k)=0,\quad w(k)=\frac{2ik(k-a^2)}{(k+a)^2};\quad k_{1,2}=a,\quad \chi_0^1=\chi_0,\quad \chi_1^1=\chi_1,\quad S(k)=\frac{v(k)}{w(k)}=0.$$

Этим данным рассеяния соответствует единственный безотражательный комплекснозначный потенциал $q_0(x)$, определяемый равенством (38). Действительно, по формуле (15) находим $F_+(x)=(A+Bx)e^{iax}$. Далее, решая интегральное уравнение (14) с ядром $F_+(x)$, находим комплекснозначный безотражательный потенциал $q_0(x)=-2K'(x,x)$, который совпадает с (38). Поэтому данные рассеяния оператора $L(0)$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(0)=a^2,\quad \operatorname{Im}a>0;\quad S(k,0)=0,\quad \chi_0^1(0)=\chi_0,\quad \chi_1^1(0)=\chi_1.$$

В силу теоремы 2 находим данные рассеяния оператора $L(t)$, $t>0$, с потенциалом $q(x,t)$:

$$\lambda(t)=\lambda(0)=a^2;\quad S(k,t)=0,\quad \chi_0^1(t):=\chi_0(t),\quad \chi_1^1(t):=\chi_1(t).$$

При этом $\chi_0^1(t)$ и $\chi_1^1(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{d\chi_0^1(t)}{dt}=8ia^3\chi_0^1(t),\quad \chi_0^1(0)=\chi_0^1;$$

$$\frac{d\chi_1^1(t)}{dt}=8ia^3\chi_1^1(t)+24ia^3\chi_0^1(t),\quad \chi_1^1(0)=\chi_1^1.$$

Решая эту систему, получим

$$\chi_0^1(t)=\chi_0^1(0)=e^{8ia^3t},\quad \chi_1^1(t)=[24ia^2\chi_0^1(0)t+\chi_1^1(0)]e^{8ia^3t}.$$

Подставляя эти данные в формулу (15) найдем $F_+(x,t)=[A(t)+B(t)x]e^{iax}$, где $A(t)=-4ai\,(a\chi_1(t)+\chi_0(t))$, $B=4a^2\chi_0(t)$. Далее, решая интегральное уравнение

$$K_+(x,y;t)+[A(t)+B(t)(x+y)]e^{ia(x+y)}+$$

$$+\int_x^{\infty} K_+(x,s;t)[A(t)+B(t)(s+y)]e^{ia(s+y)}ds = 0, \quad (39)$$

получим решение задачи Коши (36), (37)

$$q(x,t) = -2\frac{dK_+(x,x;t)}{dx} =$$
$$= \frac{4\left(\left(A(t)+2B(t)x\right)ia+B(t)\right)e^{iax}-\frac{4B^2(t)}{a^2}e^{4iax}+\frac{B^4(t)}{4a^4}\left(\left(A(t)+2B(t)x\right)ia-3B(t)\right)e^{6iax}}{\left(1+\frac{1}{2a^2}\left((A(t)+2B(t)x)ia-B(t)\right)e^{2iax}-\frac{B^2(t)}{16a^4}e^{4iax}\right)^2}.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 2\frac{\partial}{\partial x}(\phi^2), \quad L\phi = k^2\phi, \quad (40)$$

$$q(x,0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

где

$$q_0(x) = \frac{8a^2e^{2iax}}{(1+e^{2iax})^2}, \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad L(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Функция $\phi = \phi(x,t)$ при каждом неотрицательном t принадлежит пространству квадратично суммируемых функций $L^2(\mathbb{R})$. Предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x,t))^2 dx = A(t), \quad (42)$$

где $A(t)$ — изначально заданная непрерывная функция от t. Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$\lambda(0) = k^2 = a^2; \quad v(k,0) = 0, \quad S(k,0) = 0, \quad \theta_0(0) = \chi_0(0) = 1.$$

В силу теоремы 1 имеем

$$\lambda(t) = \lambda(0) = a^2; \quad S(k,t) = 0, \quad \theta_0(t) = B(t)e^{8ia^3t}, \quad B(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}.$$

Подставляя эти данные в формулу (15) найдем $F_+(x,t) = C(t)e^{iax}$, где $C(t) = -2iaB(t)e^{8ia^3t}$. Решая интегральное уравнение (39), получим

$$K_+(x,y;t) = -\frac{C(t)e^{ia(x+y)}}{1-\frac{C(t)}{2ia}e^{2iax}}.$$

Отсюда находим решение задачи (40)–(42)

$$q(x,t) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x;t) = \frac{8a^2\exp\left\{2iax+8ia^3t+\int\limits_0^t A(\tau)d\tau\right\}}{\left(1+\exp\left\{2iax+8ia^3t+\int\limits_0^t A(\tau)d\tau\right\}\right)^2},$$

$$\phi^2(x,t) = \frac{A(t)C(t)e^{2iax}}{\left(1-\frac{C(t)}{2ia}e^{2iax}\right)^2}.$$

Литература

[1] Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. *Method for solving the Korteweg–de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (19), 1095–1097 (1967).

[2] Фаддеев Л.Д. *Обратная задача квантовой теории рассеяния*, УМН. Вып. 4, 14(88) (1959).

[3] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения* (Наук. думка, Киев, 1977).

[4] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля* (Наука, М., 1984).

[5] Lax P.D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math. **21** (5), 467–490 (1968).

[6] Mel'nikov V.K. *Exact solutions of the Kortewed–de Vries equation with a selfconsistent source*, Phys. Lett. A **128** (9), 488–492 (1988).

[7] Блащак В.А. *Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора* I, Дифференц. уравнения **4** (8), 1519–1533 (1968).

[8] Блащак В.А. *Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора* II, Дифференц. уравнения **4** (10), 1915–1924 (1968).

[9] Наймарк М.А. *Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси*, Тр. ММО **3**, 181–270 (1954).

[10] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (Наука, М., 1969).

[11] Fokas A.S., Ablowitz M.J. *Forced monlinear equations and the inverse scattering transform*, Stud. Appl. Math. **80** (3), 253–272 (1989).

Акназар Бекдурдиевич Хасанов

Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимджана, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,

e-mail: ahasanov2002@mail.ru

Умид Азадович Хоитметов

Ургенчский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
ул. Аль-Хорезми, д. 110, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,

e-mail: x_umid@mail.ru

A.B. Khasanov and U.A. Khoitmetov

On integration of Korteweg–de Vries equation in a class of rapidly decreasing complex-valued functions

Abstract. We apply the inverse scattering method to the integration of the Korteweg-de Vries equation with self-consistent source in the class of complex-valued rapidly decreasing functions.

Keywords: Korteweg-de Vries equation, Sturm–Liouville operator, Jost solutions, inverse scattering problem, Gelfand–Levitan–Marchenko integral equation.

Aknazar Bekdurkievich Khasanov

Urgench State University,
14 Alimdzhana str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: ahasanov2002@mail.ru

Umid Azadovich Khoitmetov

Urgench Branch of Tashkent University of Informational Technologies,
110 Al-Khorezmi str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: x_umid@mail.ru