

УДК 621.01

**Разработка математической модели
и аналитическое решение уравнения управляемого
вращения ведомого колеса фрикционного механизма.**

К.А. Каримов, А.Х.Ахмедов (ТашГТУ)

В статье разработана математическая модель фрикционного механизма, в котором закон вращения ведомого колеса управляется под действием силы сухого трения. Приводится аналитическое решение полученного нелинейного дифференциального уравнения при упрощающих допущениях. Построены закономерности изменения основных кинематических параметров исследуемого механизма с использованием программного продукта ЭВМ Maple 9,5.

Мақолада қуруқ ишқаланиш кучи орқали фрикцион боғланишда бўлган гилдиракларнинг етакланувчи звеносини бошқариладиган айланишини ифодаловчи математик модел яратилган. Чизиқсиз бўлган дифференциал тенгламанинг баъзи бир хусусий ҳоллардаги даврий ечими келтирилган. ЭВМнинг Maple 9,5 дастури ёрдамида асосий кинематик параметрларнинг ўзгариш қонуниятларининг графиклари келтирилган

This article presents

В общей теории машин и систем машин актуальным является проведение теоретико-экспериментальных исследований механизмов с высшими и низшими кинематическими парами с управляемыми параметрами и связями. При этом представляется необходимым разработка новых и усовершенствование существующих методов расчета исследуемых механизмов с управляемыми законами движения ведомых звеньев при учете технологических требований с целью создания нового поколения их конструкций [1-3].

Во фрикционно сопряженных механизмах с целью управления геометрическими, кинематическими и динамическими параметрами ведомых звеньев применяются различные способы. В работе [4] была разработана общая классификация и способы управления параметрами и связями фрикционных механизмов технологических машин. В частности, приводятся действия высокочастотных вибраций и сил сухого трения на фрикционные характеристики кинематических пар.

В настоящее время полезное применение вибрации в механических системах позволили получить значительные эффекты. Было установлено, что под действием вибрации сила сухого трения во фрикционно-сопряженных механизмах ведомые звенья изменяют свои характеристики. Следует подчеркнуть, что в силах трения могут быть изменены нормальные составляющие упругими колебаниями типа «бегущая волна», а также

возбуждением высокочастотных упругих колебаний типа «стоячая волна» в зоне контакта. При этом скорость распространения волн в твердых телах можно регулировать в широких диапазонах от сотен КГц до сотен МГц. Одним из эффективных методов при разработке теоретических основ управляемых механизмов и на их основе нового поколения их конструкций является применение принципов прецизионной вибромеханики [4-6]. .

Рассмотрим следующий механизм, который представляет собой два фрикционно сопряженных друг с другом колеса радиусов r_1 и r_2 (рис. 1). При этом управляемое вращение ведомого колеса осуществляется за счет переменного трения, т.е. – переменная сила сухого (кулоново) трения.

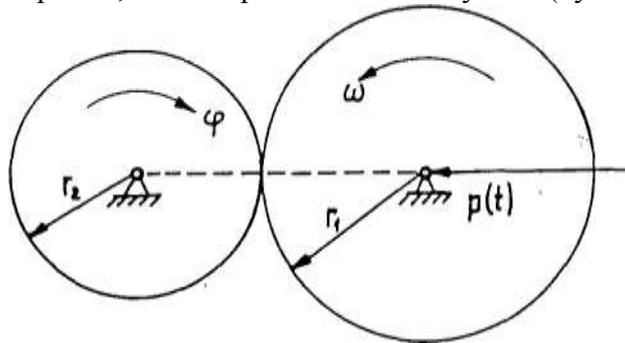


Рис. 1. Кинематическая схема фрикционно сопряженных колес.

Будем считать, что ведущее колесо вращается равномерно с угловой скоростью ω . Ведомое колесо подключается к ведущему с помощью переменной силы $P(t)$. Именно благодаря этому и обеспечивается требуемый закон изменения трения скольжения между колесами. Уравнение вращения ведомого колеса при наличии проскальзывания ($r_1\omega - r_2\dot{\varphi} \neq 0$) может быть представлено в виде

$$J\ddot{\varphi} = r_2 f \rho(t) \text{sign}(r_1\omega - r_2\dot{\varphi}) - M \quad (4.1)$$

здесь J - момент инерции ведущего колеса, а коэффициент трения скольжения f и момент сопротивления вращению M будем в первом приближении считать постоянными. Введем новую координату

$$x = r_2\varphi - r_1\omega t \quad (4.2)$$

имеющую смысл величины проскальзывания. Кроме того, будем в начале полагать, что управляющая функция изменяется по следующему гармоническому закону

$$P(t) = P_0 - \Delta P \sin \omega t \quad (4.3)$$

причем для наличия постоянного контакта между колесами необходимо, очевидно выполнение неравенства $\Delta P < P_0$. Тогда уравнение (4.1) может быть переписано в виде

$$\frac{J}{r_2^2} \ddot{x} = -f(P_0 - \Delta P \sin \omega t) \text{sign} \dot{x} - \frac{M}{r_2} \quad (4.4)$$

Рассмотрим возможности и варианты построения аналитического решения данного уравнения. Полученное уравнение вращения ведомого колеса фрикционно сопряженных колес при учете введенной новой координаты $x = r_2 \varphi - r_1 \omega t$ и за счет сигнатуры $\text{sign}(\dot{x})$ является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Общеизвестно, что 2π -периодическое решение данного уравнения не может быть построено в квадратурах.

При учете свойств $\text{sign}(\dot{x})$ рассмотрим некоторые решения данного уравнения при следующих упрощающих допущениях.

а) При вращении фрикционно сопряженных колес в определенных промежутках времени $t = t_i$ ($i = \overline{1..n}$) необходимым является выполнение следующего неравенства $\text{sign}(\dot{x}) \succ 0$. В этом случае и за этот промежуток времени уравнение (4.4) примет следующий более упрощенный вид:

$$\frac{J}{r_2^2} \ddot{x} = -f(P_0 - \Delta P \sin \omega t) - \frac{M}{r_2}. \quad (5)$$

Полученное уравнение является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Дважды интегрируя по времени уравнение (5) получим следующие выражения.

$$\frac{J}{r_2^2} \dot{x} = -fP_0 t - \frac{f \Delta P}{\omega} \cos \omega t - \frac{M}{r_2} t + c_1 \quad (6)$$

$$\frac{J}{r_2^2} x = -fP_0 \frac{t^2}{2} - \frac{f \Delta P}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{M}{r_2} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad (7)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Из уравнения (7) находим следующие закономерности изменения управляемого вращения ведомого колеса фрикционного механизма для переменной $x(t)$ и $\varphi(t)$.

$$x(t) = -\left(\frac{r_2^2 f P_0}{2J} + \frac{M r_2}{2J}\right) t^2 - \frac{r_2^2 f \Delta P}{J \omega^2} \sin \omega t + \frac{c_1 r_2^2}{J} t + \frac{c_2 r_2^2}{J}. \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \frac{x(t) + r_1 \omega t}{r_2} = -\left(\frac{r_2 f P_0}{2J} + \frac{M}{2J}\right) t^2 - \frac{r_2 f \Delta P}{J \omega^2} \sin \omega t + \frac{c_1 r_2}{J} t + \frac{c_2 r_2}{J} + \frac{r_1 \omega t}{r_2} \quad (9)$$

а) Рассмотрим случай, когда при вращении фрикционно сопряженных колес в определенных промежутках времени $t = t_i$ ($i = \overline{1..n}$) необходимым является выполнение следующего неравенства $\text{sign}(\dot{x}) > 0$.

В этом случае и за этот промежуток времени уравнение (4.4) примет следующий более упрощенный вид:

$$\frac{J}{r_2^2} \ddot{x} = f(P_0 - \Delta P \sin \omega t) - \frac{M}{r_2} \quad (10)$$

Это уравнение для случая $\text{sign}(\dot{x}) > 0$, как и уравнение (5) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Для получения 2π -периодического решения в квадратурах проинтегрируем по времени уравнение (10) и получим следующие функциональные зависимости.

$$\frac{J}{r_2^2} \dot{x} = f P_0 t + \frac{f \Delta P}{\omega} \cos \omega t - \frac{M}{r_2} t + c_1 \quad (11)$$

$$\frac{J}{r_2^2} x = f P_0 \frac{t^2}{2} + \frac{f \Delta P}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{M}{r_2} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad (12)$$

В соответствии с уравнением (12) находим следующие закономерности изменения управляемого вращения ведомого колеса фрикционного механизма для переменных $x(t)$ и $\varphi(t)$

$$x(t) = \left(\frac{r_2^2 f P_0}{2J} - \frac{M r_2}{2J} \right) t^2 + \frac{r_2^2 f \Delta P}{J \omega^2} \sin \omega t + \frac{c_1 r_2^2}{J} t + \frac{c_2 r_2^2}{J} \quad (13)$$

$$\varphi(t) = \frac{x(t) + r_1 \omega t}{r_2} = \left(\frac{r_2 f P_0}{2J} - \frac{M}{2J} \right) t^2 + \frac{r_2 f \Delta P}{J \omega^2} \sin \omega t + \frac{c_1 r_2}{J} t + \frac{c_2 r_2}{J} + \frac{r_1 \omega t}{r_2}$$

14)

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 в полученных выше закономерностях движения определяются из начальных условий по положению и скорости.

Вычисляя первую и вторую производные функциональных зависимостей законов движения (13) и (14) можем получить закономерности изменения траектории, скорости и ускорения.

С использованием программного продукта ЭВМ Maple 9,5 построим соответствующие графики основных кинематических параметров – закономерности движения, скорости и ускорения для различных промежутков времени.

Для траектории:

X(t):=eval(X,[f=0.1,r[2]=6,P[0]=100,P=50,J=2,M=50,v=2,c=5])

X(t) := 15t^2+22*sin(2*t)+5*t

plot(X(t),t=0..5);

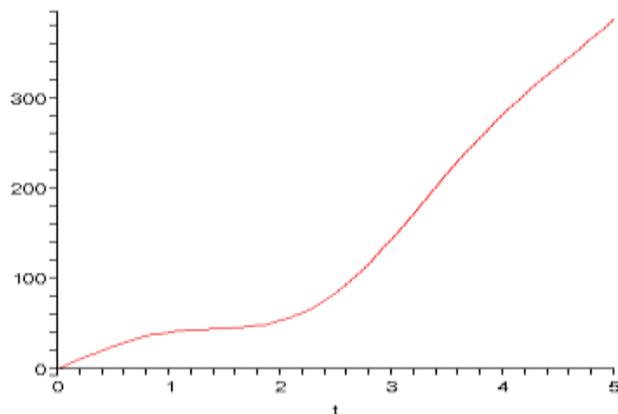


Рис 1. Закономерности изменения траектории:

Для скорости:

V:=diff(X(t),t);

V := 30.00000000 t + 45.00000000 cos(2 t) + 5

> plot(V,t=0..15);

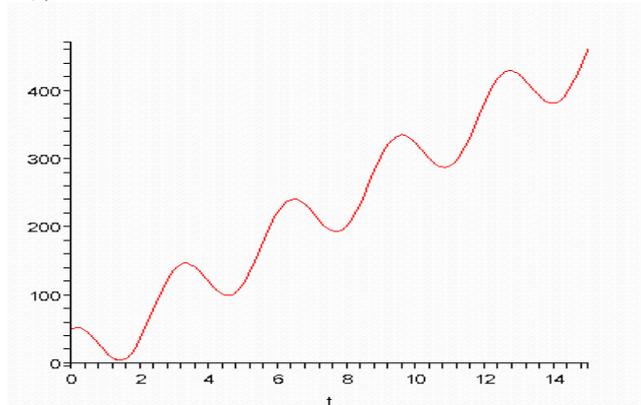


Рис 2. Закономерности изменения скорости.

Для ускорения:

A:=diff(V,t); $A := 30.00000000 - 90.00000000 \sin(2 t)$

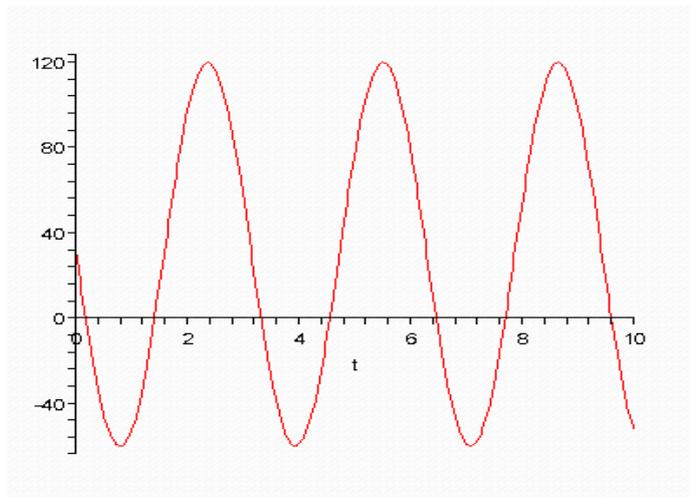


Рис 3. Закономерности изменения ускорения.

Используя высокочастотные микровибрации для изменения величины силы кулоново трения можно добиться синхронности вращения фрикционно сопряженных колес и управлять фазовым углом между ними.

Полученные выше результаты дадут возможность для проведения дальнейших теоретических исследований. В частности, рассматриваемая задача математически эквивалентна задаче о вибрационном перемещении без подбрасывания точечной частицы на вибрирующей шероховатой наклонной плоскости.

На основании теоретических исследований при широком использовании принципов прецизионной вибромеханики представляется возможным создать новое поколение механизмов с высокими техническими показателями. Они широко применяются в прецизионном машиностроении, приборостроении, робототехнике и т.д.

Литература

1. Фролов К.В. Некоторые проблемы колебаний систем с переменными и управляемыми параметрами. Колебания и устойчивость машин. - М.: Наука, 1968, стр. 84-93.
2. Рагульскис К.М., Бансявичюс Р.Ю., Вибродвигатели. //Вильнюс: Мокслас, 1991. - 195 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т. //под редакцией академика К.В.Фролова – М.: Машиностроение, 1978-1981. т.1-6.
4. Промежуточный отчет о научно-исследовательской работе по фундаментальному гранту Ф2-29 «Создание теоретических основ механизмов с управляемыми параметрами и связями с целью разработки нового поколения их конструкций». Ташкент, ТашГТУ, 2012 г., 72 с.
5. Karimov K.A., Bansevichus R.J. Analysis and synthesis of friction mechanisms with the controlled and ties. The theory of mechanisms and machines. Proceedings of the 9-th World congress, August 29/ september 1-2, 1995. Milano, ITALY. Vol. 1, p. 71-74.
6. Каримов К.А. Разработка управляемых механических систем, основанных на изменении силы трения. Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики». Ташкент, 23-24 сентября 2009 г., Часть II. стр. 123-126.

Муаллифлар ҳақида маълумот

1. Каримов Камолхон Аббасович – ТошДТУ
“Материаллар қаршилиги ва механика” кафедраси
профессори, техника фанлари доктори.

Тел. + 998 90 901-70-00.

2. Ахмедов Азамат Хайитович – ТошДТУ
“Материаллар қаршилиги ва механика” кафедраси
ассистенти.

Тел. + 998 90 123-22-87.