Построение инвариантных торов, систем дифференциальных уравнений с малым параметром

Кодирбеков Т., Нишонбоев К.

Ташкентский химико-технологический институт, ТИМИ

Исследование инвариантных тороидальных многообразных систем дифференциальных уравнений конечномерных пространствах посвящено много работ [1;2].

Потоки на торе класс динамических систем. Примером может служить поток порожденный групповыми сдвигами тора на элементы количество однопараметрических подгруппы тора. В терминах «угловых» или «циклических» координат на торе, отсчитываемых по модулю 1 (их можно рассматривать как обычные координаты в евклидовом пространстве Rm из которого тор Tnполучается как факторгруппа по целочисленной решетке Zn, этот поток описывается так за время точка x(x1,x2,…,xn) переходит в точку T (w1,w2,…,wn)

X(x1,x2,...,xn)→T(w1,w2,...,wn), (1)

где X,T,n-мерные вектора функции, w (w1,w2,…,wn)-набор базисных частот. Все траектории этого потока являются квазипериодическими функциями времени; их свойства определяются арифметическими свойствам базисных частот. Траектории периодичные, если все wi (i,n) кратные одному и тому же числу. В другом случае, когда wiлинейнонезависимы над Z,T,e никакая нетривиальная линейная комбинация Σkjwj с целыми kjне равна нулю, каждая траектория всюду плотно заполняет тор, поток эргодичен.

Подобные потоки возникают для интегрируемых гамильтоновжских систем, остающиеся в конечной области фазового пространства движения. Обычно такие инвариантные торы с с иррациональными обмотками имеются также и у гамильтоновых систем, достаточно близким к интегрируемым.

Для двумерного тора T2, если на поверхности имеется двусвязная область, котрая ограниченна замкнутыми траекториями и внутри которой, траектории свиваются с одной из них, и навиваются на другую в противоположном направлении, то качественное поведение траектории на поверхности, напоминает поведение траекторий в ограниченной области на плоскости. Все непериодические траектории в обе стороны по времени стремятся к периодическим.(см.рис.)

Пусть n-натуральное число. Рассмотрим a-мерную систему дифференциальных уравнений, зависящую от малого параметра ε≥0

$\boldsymbol{X}*=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon})+\boldsymbol{X}*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon})$; (ẋ=$\boldsymbol{dxdt}$) (2)

В (1) X(x,ε)-векторный полином, X(0,0)=0, $X*:M\to Rd$(M{(x,ε):‖x‖<d, 0≤ε>ε0})-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $X*(\sqrt{\varepsilon x},\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon 3n}+2$ X(x,ε), X(x,ε)-непрерывная функция класса $Cx\varepsilon$10(M). Положим P=DxX(0,0) и пусть дет.P≠0.

По теореме 0 неявной функции система (2) имеет при каждом достаточно малом ε≥0 положении равновесия x*(ε), x*(0)=0.

При таких ε будем искать инвариантные многообразия системы (1), гомеоморфные торам положительной размерности. Если таковые существуют, то говорят, из положения равновесия. Если P-некритическая матрица, т.е. не имеет собственных чисел на мнимой оси, то инвариантных торов положительной размерности нет. Поэтому мы предполагаем, что спектр P содержит точно m пар чисто мнимых собственных чисел.

Нормальная форма системы (2) на центральном многообразии содержит консервативную и диссипативную части. Как показано в работе (3), покоординатно неотрицательное квазистатическое положение равновесия диссипативной части, которому соответствует некритическая матрица P1, коэффициентов системы в вариациях, порождает инвариантные тор системы (1). Мы отказываемся от требования не критичности матрицы P1, допуская чисто мнимое собственных чисел. Указывается процедура, приводящая в случае общего положения за n шагов к построению инвариантного тора.

Системы (1) с большим числом частот, причем дополнительные частоты являются малыми порядками ε или выше. Вместо квазестатического положения равновесия можно использовать инвариантный тор E в частности, замкнутую траекторию диссипативной части нормальной формы, тогда размерность раздающеюся инвариантного тора увеличится. Если система (1) зависит от многомерного малого параметра μ имеет место независимо от того является P1 критической матрицей или нет. При этом указывающую процедуру можно использовать, пологая ε=‖μ‖.

Литература

1. Самойленко А.М., Элементы математической теории колебаний, М.: Наука. 1987. с.302.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А, Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. Киев: Вита школа. 1987. с.287.
3. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Многочастотные колебания слабо нелинейных систем второго порядка. УМЖ. 1976.-28, №6, с.745-762.