

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи  
УДК 539.3

**БУТАЕВ НОРБЕК**

**РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕЗОНАНСА В  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ПАКЕТАМИ**

5A140302 – Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
для получения академической степени магистра

Работа обсуждена и рекомендована к  
защите на заседание кафедры от “\_\_\_”  
мая 2018 г., протокол №\_\_\_

Научный руководитель  
\_\_\_\_\_ доц. Ш.Д.Бердиев

Зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ доц. Ш.Д.Бердиев

Научный консультант  
\_\_\_\_\_ доц. А.Абдирашидов

Декан факультета  
\_\_\_\_\_ проф. А.Х.Бегматов

Магистрант  
\_\_\_\_\_ Н.Бутаев

М.П.

Работа обсуждена на заседание ГЭК от «\_\_\_» июня 2018 г., протокол №\_\_\_,  
оценена на «\_\_\_» балл.

Председатель ГЭК \_\_\_\_\_

Члены комиссии \_\_\_\_\_

Самарканд – 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ.....	7
1.1. Линейные колебания.....	7
1.2. Нелинейные колебания.....	17
1.3. Системы нелинейных дифференциальных уравнений.....	28
1.4. Классификация особых точек.....	36
II. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MAPLE .....	38
2.1. Решение дифференциальных уравнений в Maple .....	38
2.2. Решение системы дифференциальных уравнений в Maple.....	44
III. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА.....	50
3.1. Создание модели нелинейных колебаний.....	50
3.2. Тестирование команд.....	53
Заключение.....	62
Список использованной литературы.....	63

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** Все реальные физические системы нелинейные, их можно считать линейными лишь приближённо при малой интенсивности колебательных и волновых процессов. Математическим образом нелинейных систем являются нелинейные уравнения.

В современных условиях возрастает сложность проектируемых технических объектов, совершенствуются методы их расчета при сложных динамических режимах нагружения. Использование высокопроизводительных машин приводит к увеличению амплитуд колебаний и расширению спектра вибрационных нагрузок. Интенсификация колебаний может привести к полной расстройке и отказу динамической системы, с другой стороны колебания с большими амплитудами являются рабочим режимом большого числа современных машин. Для изучения этих явлений необходимо применять методы нелинейной теории колебаний.

**Цель работы состоит:** в разработке модели резонансного колебания; в выявлении возможностей реализации междисциплинарных связей физика-математика-информатика при изучении пакета Maple.

**Основные задачи** данной работы:

1. Создание динамической модели резонанса в нелинейных системах с использованием математического пакета Maple;
2. Рассмотрение качественных и численных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений в математическом пакете Maple.

**Выбор метода решения задач.** При использовании вычислительной техники встает проблема реализации необходимых алгоритмов в виде так называемых программ. Для решения этой проблемы в различные годы использовались следующие средства:

- программирование в машинных кодах* (включая языки типа Ассемблер);
- программирование на языках высокого уровня* (включая объектно-ориентированное программирование);
- системы компьютерной математики.*

Разработка программы требует и *соответствующей подготовки* (*назовем ее программистской*), и *достаточно большего количества времени*. И то и другое часто отсутствует у обычного пользователя, который является специалистом в своей предметной области, но не в программировании. Поэтому начиная с 90-х годов прошлого века широкую известность и заслуженную популярность приобрели так называемые *системы компьютерной математики*, или *математические пакеты*. Сейчас эти системы получили широкое распространение не только в научных исследованиях, но и при решении широкого круга инженерных задач.

**Предметом исследования** является реализация междисциплинарных связей как средство развития познавательного интереса нелинейному теории колебаний, математическому моделированию и программированию.

**Аннотация работы.** Рассмотрены решение задач по теории колебаний некоторых механических систем с применением пакета символьной математики Maple. Рассмотрены качественные и численные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Ознакомлены с командами в математическом пакете Maple для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Построена модель резонанса нелинейных колебаний. Решены конкретные тестовые задачи из теории колебаний, где наблюдается случаи резонанса при колебательных процессах.

# ГЛАВА I

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

### I.1. Линейные колебания

Одномерные движения, совершающееся частицей в потенциальной яме, является периодическим, т.е. повторяется через равные промежутки времени. Такой промежуток времени, по истечении которого движение повторяется, называется периодом движения. Если  $T$  - период движения, то в моменты времени  $t$  и  $t + T$  частица имеет одно и тоже положение и одну и ту же скорость.

Величина, обратная периоду, называется частотой, и обозначается  $\nu$ ,

$$\nu = \frac{1}{T},$$

определяет, сколько раз в секунду повторяется движение. Эта величина имеет размерность  $1/sec$ . Единица измерения частоты, соответствующая 1 секунде периода, является *герцем*.

Существует бесчисленное множество различных видов периодического движения. Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции синус и косинус. Поэтому простейшим периодическим движением будет такое движение, при котором координаты материальной точки изменяются по закону

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $A$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  - некоторые постоянные величины. Такое периодическое движение называется гармоническим периодическим движением.

Величины,  $A$  и  $\omega$  имеют простой физический смысл. Так как период косинуса равен  $2\pi$ , то период движения  $T$  связан с  $\omega$  отношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Отсюда видно, что  $\omega$  отличается множителем  $2\pi$  от частоты  $v$ :

$$\omega = 2\pi v.$$

Величина  $\omega$  называется циклической (круговой) частотой; в физике обычно пользуются обычно для характеристики колебаний именно этой величиной и обычно говорят о ней просто как о частоте.

Так как максимальное значение косинуса равно единице, то максимальное значение координаты  $x$  равно  $A$ . Это максимальное значение называется амплитудой колебания. Величина  $x$  изменяется от  $-A$  до  $A$ .

Аргумент косинуса  $\omega t + \alpha$  носит название фазы колебания;  $\alpha$  есть начальная фаза (в момент  $t = 0$ ).

Скорость частицы равна

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha).$$

Мы видим, что скорость изменяется по гармоническому закону, но только вместо косинуса сюда входит синус. Написав это выражение в виде

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

из этой формулы следует, что изменение скорости "опережает по фазе" изменение координаты на величину  $\pi/2$ . Амплитуда же скорости равна произведению амплитуды смещения на частоту  $\omega$ .

Выясним, какова должна быть сила, действующая на частицу, для того что бы она совершала гармонические колебания. Найдем ускорение частицы при таком движении:

$$\omega = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Эта величина изменяется по такому же закону, что и координаты частицы, но отличается от нее по фазе на  $\pi$ . Умножим  $\omega$  на массу частицы  $m$  и замечая, что  $A\cos(\omega t + \alpha) = x$ , получаем выражение для силы:

$$F = -m\omega^2 x.$$

Таким образом, для того чтобы частица совершала гармонические колебания, действующая на нее сила должна быть пропорциональна

величине смещения частицы и направлена в сторону, противоположную этому смещению. Простой пример: сила, действующая на тело со стороны растянутой (или сжатой) пружины, пропорциональна ее удлинению (или укорочению) и всегда направлена так, что пружина стремится принять свою нормальную длину. Такую силу называют восстанавливающей.

Зависимость силы от положения частицы, имеющая описанный характер, встречается в физических задачах очень часто. Если какое-либо тело находится в положении устойчивого равновесия (пусть это будет точка  $x = 0$ ), немногого сместим его из этого положения в ту или другую сторону, то возникает сила  $F$ , стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Как функция положения тела  $x$  сила  $F = F(x)$  изобразится некоторой кривой, пересекающей начало координат: в точке  $x = 0$  сила  $F = 0$ , а по обе стороны от этой точки она имеет противоположные знаки. В небольшом интервале значений  $x$  эта кривая может быть приближенно представлена в виде отрезка прямой линий, так что сила оказывается пропорциональной величине отклонения  $x$ . Таким образом, если тело испытalo небольшое отклонение от положения равновесия, после чего предоставлено самому себе, то при его возвращении в положение равновесия возникнут гармонические колебания.

Движения, при которых тело мало смещается относительно положения равновесия, называются малыми колебаниями. Мы видим, что малые колебания являются гармоническими. Частота этих колебаний определяется жесткостью закрепления тела, характеризующей связь между силой и смещением. Если сила связана со смещением соотношением

$$F = -kx,$$

где  $k$  - некоторый коэффициент, называемый жесткостью, то из сравнения этого выражения с выражением для силы при гармоническом колебательном движении  $F = -m\omega^2x$  следует, что частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Подчеркнем то обстоятельство, что частота оказывается зависящей только от свойств колеблющейся системы (жесткости закрепления тела и от его массы), но не от амплитуды колебаний. Одно и то же тело, производя колебания с разным размахом, совершает их с одинаковой частотой. Это - очень важное свойство малых колебаний. Напротив, амплитуда колебаний определяется не свойствами самой системы, а начальными условиями ее движения, т. е. начальным «толчком», выводящим систему из состояния покоя. Колебания системы, возникающие в результате начального толчка, после которого система предоставляется самой себе, называют собственными колебаниями.

Потенциальную энергию колеблющейся частицы легко найти, заметив, что

$$\frac{dU}{dx} = -F = kx.$$

Отсюда,

$$U = \frac{kx^2}{2} + \text{const.}$$

Выбрав постоянную так, чтобы потенциальная энергия была равна нулю в положении равновесия ( $x = 0$ ), получим окончательно

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

т.е. потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения частицы.

Складывая потенциальную энергию с кинетической, найдем полную энергию колеблющейся частицы

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha),$$

или

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Таким образом, полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Обратим внимание на то, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются как  $\sin^2(\omega t + \alpha)$  и  $\cos^2(\omega t + \alpha)$ , так, что когда одна из них

увеличивается, другая - уменьшается. Другими словами, процесс колебаний связан с периодическим переходом энергии из потенциальной в кинетическую и обратно. Средние (за период колебания) значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы и каждое из них равно  $E/2$ .

$$f_{\text{тр}} = -\alpha x'$$

где  $\alpha$  - положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую сторону уравнения движения, получим

$$mx'' = -kx - \alpha x'$$

разделим на  $m$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{\alpha}{m} = 2\lambda.$$

$\omega_0$  есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина  $\lambda$  называется коэффициентом затухания. Уравнение принимает вид

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0.$$

По правилу решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем  $x = e^{rt}$  и находим характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Общее решение есть

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Во всякой реальной колебательной системе всегда происходят те или иные процессы трения. Поэтому свободные колебания, возникающие в системе под влиянием начального толчка, с течением времени затухают.

Для того что бы возбудить в системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии, обусловленные трением. Такая компенсация может производиться внешними (по отношению к колебательной системе) источниками энергии.

Простейшим случаем является возникшее на систему переменной внешней силы  $F_{\text{вн}}$

$$F_{\text{вн}} = F_0 \cos \omega t$$

с некоторой частотой  $\omega$  (в отличие от этой частоты мы будем обозначать теперь частоту собственных, свободных колебаний системы через  $\omega_0$ ). Под влиянием этой силы в системе могут возникнуть колебания, происходящие в такт с изменением силы; эти колебания называются вынужденными. Движение системы будет при этом представлять собой, наложение обоих колебаний - собственных с частотой  $\omega_0$  и вынужденных с частотой  $\omega$ .

Рассмотрим вынужденные колебания и определим их амплитуду. Запишем эти колебания в виде

$$x = B \cos(\omega t - \beta)$$

где  $B$  - амплитуда,  $\beta$  - некоторый, пока неизвестный сдвиг фаз между внешней (вынуждающей) силой и вызываемыми ею колебаниями. Мы написали  $\beta$  со знаком минус, т.е. как запаздывание по фазе.

Ускорение  $\omega$  тела, совершающего вынужденные колебания, определяется одновременным действием трех сил: восстанавливающей силы  $-kx$ , внешней силы  $F_{\text{вн}}$  и силы трения  $F_{\text{тр}} = -bv$ . Поэтому

$$m\omega^2 = -kx - bv + F_{\text{вн}}.$$

Разделив это равенство на массу  $m$ , вспомнив, что  $k/m = \omega_0^2$ , обозначив  $b/m = 2\gamma$ , переписав его в виде

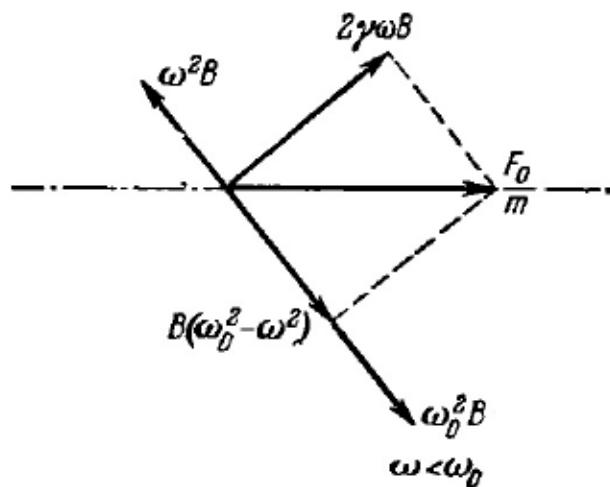
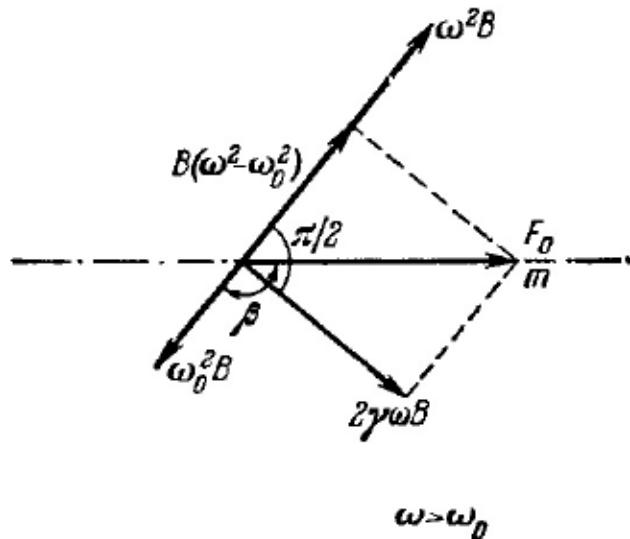
$$\omega^2 = -\omega_0^2 + 2\gamma v + \frac{1}{m} F_{\text{тр}}.$$

Рассмотрим момент времени  $t = 0$ , когда фаза внешней силы  $F_{\text{тр}} = F_0 \cos \omega t$  равна нулю, так что величина  $F_{\text{тр}}/m$  изобразится горизонтальным вектором длины  $F_0/m$ .

Величина  $\omega^2 x = \omega_0^2 B \cos(\omega t - \beta)$  колеблется с опозданием по фазе на  $\beta$ ; она изобразится вектором длины  $\omega_0^2 B$ , повернутым на угол  $\beta$  (против часовой стрелки) по отношению к вектору силы. Ускорение  $\omega$  имеет амплитуду  $\omega^2 B$  и знак, противоположный знаку координаты  $x$ ; оно изобразится на графике

вектором, противоположным  $x$ . Скорость  $v$  имеет амплитуду  $\omega B$  и опережает  $x$  по фазе на угол  $\pi/2$ ; величина  $2\gamma v$  изобразится вектором длины  $2\gamma\omega B$ , перпендикулярным вектору  $x$ . Согласно равенству

$$\frac{F_{\text{тр}}}{m} = \omega + \omega_0^2 x + 2\gamma v$$



колебание величины  $F_{\text{тр}}/m$  должно совпадать с суммой колебаний трех членов в правой стороне равенства. На графике это означает, что сумма горизонтальных проекций трех последних векторов должна совпадать с  $F_0/m$ . Для этого, векторная сумма этих векторов  $F_{\text{тр}}/m$  должна быть равна вектору.

Из рисунка видно, что такое равенство выполняется, если

$$(2\gamma\omega B)^2 + B^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

Отсюда находим искомую амплитуду колебаний

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Из тех же графиков можно определить и фазовый сдвиг  $\beta$ : угол запаздывания колебаний  $x$  относительно вынуждающей силы острый или тупой соответственно при  $\omega < \omega_0$  или  $\omega > \omega_0$ .

Мы видим, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы  $F_0$  и существенно зависит от соотношения между частотой этой силы  $\omega$  и собственной частотой системы  $\omega_0$ . Если затухание  $\gamma$  мало, то наибольшего значения амплитуда колебаний достигает приблизительно при совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_0$  или, как говорят, при резонансе; это максимальное значение

$$B_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega_0\gamma}.$$

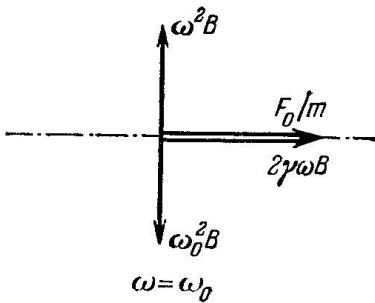
Оно обратно пропорционально коэффициенту затухания  $\gamma$ . По этой причине в явлении резонанса нельзя пренебрегать трением в системе, даже если оно мало.

Сравним значение  $B_{\max}$  с тем смещением, которое испытала бы тело под действием постоянной силы  $F_0$ . Это смещение обозначим за  $B_{\text{стат}}$  и можно получить из общей формулы для  $B$ , положив в ней  $\omega = 0$ :  $B_{\text{стат}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ . Отношение резонансного смещения к статическому

$$\frac{B_{\max}}{B_{\text{стат}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Мы видим, что относительное увеличение амплитуды колебаний при резонансе определяется отношением частоты собственных колебаний к коэффициенту затухания. Для систем с малым затуханием это отношение может быть очень большим. Это обстоятельство разъясняет огромное значение явления резонанса в физике и технике. Им хорошо пользуются, если хотят усилить колебания, и всячески избегают, если резонанс может привести к нежелательному росту колебаний.

Происхождение резонансного усиления колебаний можно уяснить себе, обратив внимание на соотношение между фазами вынуждающей силы  $F_{\text{вн}}$  и скорости  $v$ . При  $\omega \neq \omega_0$  между ними существует определенный сдвиг фаз. Поэтому в течение некоторой доли каждого периода сила  $F_{\text{вн}}$  направлена противоположно скорости, т.е. стремится замедлить движение, вместо того чтобы ускорять его. При резонансе же фазы силы и скорости совпадают, так что сила всегда действует в направлении движения, постоянно "подталкивая" его.



Вблизи резонанса (т.е. когда разность  $|\omega - \omega_0|$  мала по сравнению с самой резонансной частотой  $\omega_0$ ) формулу для амплитуды вынужденных колебаний можно представить в более простом виде. Написав в ее знаменателе  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)$ , мы можем приближенно заменить сумму  $\omega + \omega_0$  на  $2\omega_0$ , а также заменить  $\omega$  на  $\omega_0$  в члене  $4\gamma^2\omega^2$ . В результате получим

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_0 \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}.$$

Эту формулу можно переписать также в виде

$$B = \frac{B_{\max} \gamma}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}$$

где  $B_{\max}$  - максимальное значение амплитуды при резонансе.

Незатухающие колебания могут возбуждаться не только под действием внешней и периодической силы, но и при периодическом изменении параметров колебательной системы. Такое возбуждение колебаний называют параметрическим резонансом. В качестве примера можно привести раскачивание качелей человеком, регулярно приседающим и

поднимающимся и тем самым периодически перемещающим положение центра тяжести системы.

Для выяснения механизма этого способа возбуждения колебаний обратимся к простому примеру -маятнику, длину подвеса которого можно менять, подтягивая и отпуская нить, переброшенную через блок. Представим, что в момент каждого прохождения через равновесное положение, маятник подтягивается внешней силой  $F$  на некоторую небольшую высоту  $a$ , а в каждом крайнем положении нить отпускается на ту же длину  $a$ . В течение каждого периода, следовательно, маятник будет дважды удлинен и дважды укорочен; частота периодического изменения параметра будет вдвое больше частоты его собственных колебаний.

Поскольку удлинение нити происходит при наклонном положении маятника, то в эти моменты он опускается на высоту  $a \cos \phi_0$  ( $\phi_0$  - угловая амплитуда колебаний маятника), меньшую высоты  $a$  его подъема в моменты подтягивания нити. Поэтому за каждое подтягивание и отпускание нити действующая на нить внешняя сила производит против силы тяжести работу, равную

$$mga(1 - \cos \phi_0) \approx \frac{1}{2}mga\phi_0^2$$

(так как угол  $\phi_0$  предполагается малым, то  $\cos \phi_0 \approx 1 - \frac{\phi_0^2}{2}$ ). Кроме того, внешняя сила  $F$  производит работу против центробежной силы, равной  $\frac{mv_0^2}{l}(v_0$  - максимальная скорость маятника) в нижнем положении маятника и равной нулю в его крайних положениях. В итоге суммарная работа внешней силы за период колебаний маятника равна

$$A = 2 \left( \frac{1}{2}mga\phi_0^2 + \frac{mv_0^2}{l}a \right).$$

но  $v_0 = l\phi_0\omega$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  - частота колебаний маятника; поэтому

$$A = 6\frac{a}{l}\frac{mv_0^2}{2}.$$

Работа производимая внешней силой над маятником, положительна и пропорциональна его энергии. Поэтому энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии и величине  $\frac{a}{l}$

В этом и заключается механизм параметрического резонанса. Периодическое изменение параметров колебательной системы (с частотой, удвоенной по сравнению с собственной частотой системы) приводит к систематическому возрастанию ее средней энергии  $E$ , причем скорость этого возрастания пропорциональна  $E$ :

$$\frac{dE}{dt} = 2\chi E,$$

где  $\chi$  - некоторая (малая) постоянная. Это соотношение такого же вида, как и при затухающих колебаниях, с тем, однако, отличием, что производная  $\frac{dE}{dt}$  положительна, а не отрицательна. Это значит, что энергия (а с ней и амплитуда) колебаний экспоненциально возрастает со временем.

Для того, чтобы действительно происходило параметрическое возбуждение колебаний, коэффициент усиления  $\chi$  должен превосходить некоторое минимальное значение, равное коэффициенту затухания, обусловленного трением.

## I.2. Нелинейные колебания

Теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергии системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о линейных колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемой

ангармотичности и нелинейности колебаний) приводит к появлению некоторых хотя и слабых, но качественно новых особенностей движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам  $x_i$ , в кинетической же энергии - члены, содержащие произведения скоростей и координат вида  $x'_i, x'_k x_i$ . Таким образом функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{i,k} x'_i x'_k - k_{i,k} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{i,k,l} x'_i x'_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{i,k,l} x_i x_k x_l \quad (1.2.1)$$

где  $n_{i,k,l}, l_{i,k,l}$  - новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат  $x_i$  перейти к нормальным координатам (линейного приближения)  $Q_\alpha$  то в силу линейности этого преобразования третья и четвертая суммы в (1.1) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат  $x_i$  и  $x'_i$  будут стоять  $Q_\alpha$  и  $Q'_\alpha$ . Обозначив коэффициенты в этих суммах через  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  и  $\mu_{\alpha\beta\gamma}$  получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum (Q_\alpha^{2'} - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} Q'_\alpha Q'_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha\beta\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \quad (1.2.2)$$

Уравнение движения теперь имеет вид

$$Q''_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, Q', Q'') \quad (1.2.3)$$

где  $f_\alpha$  - однородные функции второго порядка от координат  $Q$  и их производные по времени.

Применяя метод последовательных приближений, ищем решение этих уравнений в виде

$$Q_\alpha = Q(1)\alpha + Q(2)\alpha, \quad (1.2.4)$$

где  $Q^{(2)}\alpha \ll Q^{(1)}\alpha$ , а функции  $Q^{(1)}\alpha$  удовлетворяют "невозмущенным" уравнениям

$$Q''^{(1)}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q^{(1)}_\alpha = 0,$$

т.е. представляют обычные гармонические колебания

$$Q^{(1)}_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + a_\alpha), \quad (1.2.5)$$

Сохраняя в следующем приближении в правой стороне уравнений (1.2.3) лишь члены второго порядка малости, получим для величин  $Q_\alpha^{(2)}$  уравнения

$$Q_\alpha''^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, Q'^{(1)}, Q''^{(1)}) \quad (1.2.6)$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (1.2.5). В результате получаем линейные неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых можно преобразовать к суммам простых периодических функций. Например,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} &= a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + a_\alpha) \cos(\omega_\beta t + a_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta (\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + a_\alpha + a_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + a_\alpha - a_\beta]) \end{aligned}$$

Таким образом, в правых частях уравнений (1.2.6) находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Решение уравнений следует искать в виде, содержащем такие же периодические множители, приходим к выводу, что во втором приближении на нормальные колебания системы с частотами  $\omega_\alpha$  накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \quad (1.2.7)$$

в том числе удвоенные частоты  $2\omega_\alpha$  и частота 0, соответствующая постоянному смещению). Эти частоты называются комбинационными. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям  $a_\alpha a_\beta$  соответствующих нормальных колебаний.

В следующих приближениях при учете членов более высокого порядка в разложении функции Лагранжа возникают комбинационные колебания с частотами, являющимися суммами и разностями большего числа частот  $\omega_\alpha$ . Кроме того, однако, возникает еще и новое явление.

В третьем приближении среди комбинационных частот появляются частоты, совпадающие с исходными  $\omega_\alpha(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta)$ . При применении описанного выше метода в правой части уравнений движения будут находиться, следовательно, резонансные члены, которые приведут к возникновению в решении членов с возрастающей со временем амплитудой.

Между тем, физически очевидно, что в замкнутой системе в отсутствие внешнего источника энергии не может происходить самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний.

В высших приближениях происходит изменение остальных частот  $\omega_\alpha$  по сравнению с их "невозмущенными" значениями  $\omega_\alpha^{(0)}$ , фигуриирующими в квадратичном выражении потенциальной энергии. Появление же возрастающих членов в решении связано с разложением типа

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

явно незаконным при достаточно больших  $t$ .

Поэтому при переходе к следующим приближениям метод последовательных приближений должен быть видоизменен так, чтобы фигурирующие в решении периодические множители с самого начала содержали точные, а не приближенные значения частот. Изменения же частот сами определяются в результате решения уравнений как раз из условия отсутствия резонансных членов.

Продемонстрируем этот метод на ангармонических колебаниях с одной степенью свободы, написав функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{mx'^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4 \quad 12 \quad (1.2.8)$$

Соответствующее уравнение движения

$$x'' + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (1.2.9)$$

Будем искать его решение в виде ряда последовательных приближений

$$x = x(1) + x(2) + x(3),$$

причем

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (1.2.10)$$

с точным значением  $\omega$ , которое само будем затем искать в виде ряда  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  (начальную фазу в  $x^{(1)}$  можно всегда обратить в нуль надлежащим выбором начала отсчета времени). При этом, однако, уравнение движения в виде (1.2.9) не вполне удобно, так как при подстановке в него

(1.2.10) левая сторона равенства не обратится строго в нуль. Поэтому переписываем его предварительно в эквивалентном виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}x'' + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)x''. \quad (1.2.11)$$

Положив здесь  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  и опустив члены выше второго порядка малости, получим для  $x^{(2)}$  уравнение

$$\begin{aligned} x''^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t = \\ &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t. \end{aligned}$$

Условие отсутствия резонансного члена в правой стороне равенства дает просто  $\omega^{(1)} = 0$ . После этого, решая обычным способом неоднородное линейное уравнение, получим:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (1.2.12)$$

Положив в (1.2.11)  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$ , получим уравнение для  $x^{(3)}$

$$x''^{(3)} + \omega_0^2 x''^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)} x^{(3)} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

или, подставив в правую часть выражения (1.2.10) и (1.2.12) после простого преобразования:

$$\begin{aligned} x''^{(3)} + \omega_0^2 x''^{(3)} &= \\ &= -a^3 \left[ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2 \alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} \alpha^2 \beta \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициент при резонансном множителе  $\cos \omega t$ , найдем поправку к основной частоте, пропорциональную квадрату амплитуды колебания:

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^3. \quad (1.2.13)$$

Комбинационное же колебание третьего порядка

$$x^{(3)} = \left( \frac{a^3}{16\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos \omega t.$$

Учет ангармонических членов при вынужденных колебаниях системы приводит к появлению существенно новых особенностей в резонансных явлениях.

Добавив в правой стороне уравнения (1.2.9) внешнюю периодическую силу (с частотой  $\gamma$ ) силу, получим:

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_j^2 x = \frac{f}{m} \sin \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \quad (1.2.15)$$

здесь написана также сила трения с показателем затухания  $\gamma$  (предполагаемым ниже малым). Строго говоря, при учете нелинейных членов в уравнении свободных колебаний должны учитываться также члены высших порядков в амплитуде вынуждающей силы, соответствующие возможной зависимости ее от смещения  $x$ . Пусть

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(с малым  $\varepsilon$ ) т. е. мы находимся вблизи обычного резонанса. Для выяснения характера возникающего движения можно обойтись без непосредственного исследования уравнения (1.2.15)

В линейном приближении зависимость амплитуды  $b$  вынужденного колебания от амплитуды  $f$  и частоты  $\gamma$  внешней силы дается вблизи резонанса в виде

$$b^2(\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (1.2.16)$$

Нелинейность колебаний приводит к появлению зависимости их собственной частоты от амплитуды; напишем ее в виде

$$\omega_0 + \chi b^2, \quad (1.2.17)$$

где постоянная  $\chi$  выражается определенным образом через коэффициент ангармоничности. Соответственно этому заменяем в формуле (1.2.16) (точнее в малой разности  $\gamma - \omega_0$ )  $\omega_0$  на  $\omega_0 + \chi b^2$ .

Сохранив обозначение  $\varepsilon = \gamma - \omega_0$ , получим в результате уравнение

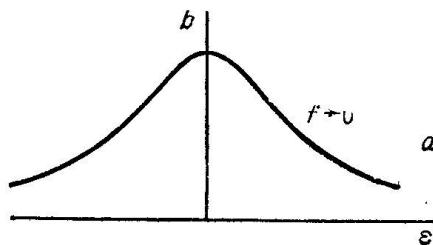
$$b^2[(\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (1.2.18)$$

или

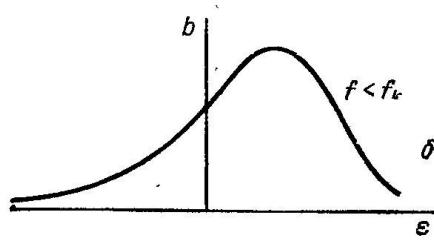
$$\varepsilon = \chi b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}$$

Уравнение (1.2.18), кубическое по отношению к  $b^2$ , и его вещественные корни определяют амплитуду вынужденных колебаний. Рассмотрим зависимость этой амплитуды от частоты внешней силы при заданной амплитуде силы  $f$ .

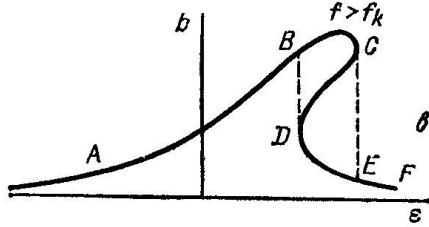
При достаточно малых значениях  $f$  амплитуда  $b$  тоже мала, так что можно пренебречь в (1.2.18) степенями  $b$  выше второй, и мы возвращаемся к зависимости  $b(\varepsilon)$  (1.2.16), изображающейся симметричной кривой с максимумом в точке  $\varepsilon = 0$ .



По мере увеличения  $f$  кривая деформируется, сохраняя сначала свой характер - с одним максимумом, последний смещается в сторону положительных  $\varepsilon$ . Из трех корней уравнения (1.2.18) при этом веществен лишь один.



Однако с определенного значения  $f = f_k$  характер кривой меняется. При каждом значении  $f > f_k$  существует определенная область частот, в которой уравнение (1.2.18) имеет три вещественных корня; ей отвечает участок BCDE кривой.



Границы этой области определяются условием

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \chi b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\chi\varepsilon b^2 + 3\chi b^4} = 0.$$

Поэтому положение точек определяется совместным решением уравнений

$$\varepsilon^2 - 4\chi b^2 \varepsilon + 3\chi b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (1.2.19)$$

и (1.2.18); соответствующие значения  $\varepsilon$  оба положительны. Наибольшее значение амплитуды достигается в точке, где  $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$ . При этом  $\varepsilon = \chi b^2$ , и из (1.2.18) имеем:

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda};$$

это значение совпадает с максимумом, даваемым зависимостью (1.2.16).

Замечательной особенностью является при этом наличие области частот, допускающих две различные амплитуды колебаний. Так, при постепенном увеличении частоты внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет возрастать.

Для вычисления значения  $f_k$  замечаем, что это есть то значение  $f$ , при котором оба корня квадратного (по  $b^2$ ) уравнения (1.2.19) совпадают; при  $f = f_k$  сводится к одной точке перегиба. Приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения (1.2.19), получим  $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$ ; соответствующий корень уравнения:  $\chi b^2 = \frac{2\varepsilon}{3}$ . Подставляя эти значения  $b$  и  $\varepsilon$  в (1.2.18), найдем:

$$f_k^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3}\sqrt{3}|\chi|. \quad (1.2.20)$$

Наряду с изменением характера резонансных явлений при частотах  $\gamma \approx \omega_0$  нелинейность колебаний приводит так же к появлению новых резонансов, в которых колебания с частотой, близкой к  $\omega_0$ , возбуждаются внешней силой с частотой, существенно отличающейся от  $\omega_0$ .

Пусть частота внешней силы  $\gamma \approx \frac{\omega_0}{2}$ , т.е.

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

В первом, линейном приближении она возбуждает в системе колебания с той же частотой и с амплитудой, пропорциональной амплитуде силы:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right)t.$$

Но при учете нелинейных членов, о втором приближении, эти колебания приведут к появлению в правой стороне уравнения движения (1.2.15) члена с частотой  $2\gamma \approx \omega_0$ .

Подставив  $x^{(1)}$  в уравнение

$$x''(2) + 2\lambda x'(2) + \omega_0^2 x(2) + \alpha x(2)^2 + \beta x(2)^3 = -\alpha x(1)^2,$$

введя косинус удвоенного угла и сохраняя в правой стороне лишь резонансный член, получим:

$$\begin{aligned} x''(2) + 2\lambda x'(2) + \omega_0^2 x(2) + \alpha x(2)^2 + \beta x(2)^3 &= \\ = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.2.15) лишь тем, что вместо амплитуды силы  $f$  в нем стоит выражение, пропорциональное квадрату  $f^2$ . Это значит, что возникает резонанс такого же характера, как и рассмотренный выше резонанс на частотах  $\gamma \approx \omega_0$ , но с меньшей интенсивностью.

Зависимость  $b(\varepsilon)$  получается заменой  $f$  на  $\frac{-8\alpha f^2}{9m\omega_0^4}$  (и  $\varepsilon$  на  $2\varepsilon$ ) в уравнении (1.2.18):

$$b^2[(2\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}} \quad (1.2.22)$$

Пусть теперь частота внешней силы

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon.$$

В первом приближении имеем:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

При подстановке  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$  в уравнение (1.2.15) мы не получим членов, имеющих характер резонансной внешней силы, как это было в предыдущем случае. Возникает, однако, резонанс параметрического типа от члена третьего порядка, пропорционального произведению  $x^{(1)}x^{(2)}$ . Если из всех нелинейных членов сохранить лишь этот, то для  $x^{(2)}$  получим уравнение

$$x''^{(2)} + 2\lambda x'^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

или

$$x''^{(2)} + 2\lambda x'^{(2)} + \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (1.2.23)$$

такое уравнение приводит к неустойчивости колебаний в определенном интервале частот.

Однако, для определения результирующей амплитуды колебаний это уравнение недостаточно. Установление конечной амплитуды связано с эффектами нелинейности, для учета которых в уравнении движения должны быть сохранены также нелинейные по  $x^{(2)}$  члены:

$$x''^{(2)} + 2\lambda x'^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t x^{(2)}. \quad (1.2.24)$$

Исследование этой задачи можно упростить, заметив обстоятельство. Положив в правой стороне уравнения (1.2.24)

$$x^{(2)} = b \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t + \sigma \right]$$

(где  $b$  - искомая амплитуда резонансных колебаний,  $\sigma$  - несущественный для дальнейшего постоянный сдвиг фазы) и представив произведение двух периодических множителей в виде суммы двух косинусов, мы получим здесь член

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[ \left( \omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \sigma \right]$$

обычного резонансного (по отношению к собственной частоте  $\omega_0$ ) характера. Поэтому задача снова сводится к рассмотренной задаче об обычном резонансе в нелинейной системе с тем лишь отличием, что роль амплитуды внешней силы играет теперь величина  $\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2}$  (а вместо  $\varepsilon$  стоит  $\frac{\varepsilon}{2}$ ). Произведя эту замену в уравнении (1.2.18), получим:

$$b^2 \left[ \left( \frac{\varepsilon}{2} - \chi b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2 \omega_0^6}.$$

Решая это уравнение относительно  $b$ , найдем следующие возможные амплитуды:

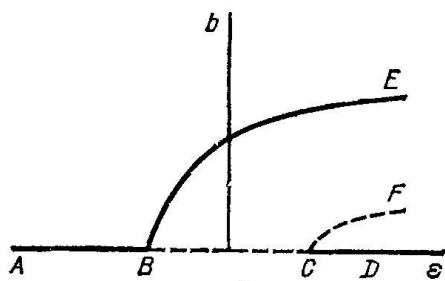
$$b = 0, \quad (1.2.25)$$

$$b^2 = \frac{1}{\chi} \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6m\omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (1.2.26)$$

$$b^2 = \frac{1}{\chi} \left[ \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{6m\omega_0^3} \right)^2 - \lambda^2} \right]. \quad (1.2.27)$$

Ниже изображена зависимость  $b$  от  $\varepsilon$  (для  $\chi > 0$ ). Точки В и С отвечают значениям

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha f}{3m\omega_0^3} \right)^2 - 4\lambda^2}$$



Слева от точки В возможно лишь значение  $b = 0$ , т.е. резонанс отсутствует и колебания с частотой  $\approx \omega_0$  не возбуждаются. В интервале между В и С имеем два корня:  $b = 0$  (отрезок BC) и выражение (1.2.26) (ветвь BE). Справа от точки С существуют все три корня (1.2.25)-(1.2.27), но значение  $b = 0$  неустойчиво на участке BC.

### 1.3. Системы нелинейных дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение - это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала.

Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным.

Максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Задача Коши состоит в нахождение решения(интеграла) дифференциального уравнения  $y'(x) = f(x,y)$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in G$ .

*Теорема существования и единственности задачи Коши:*

Пусть вектор-функция  $f(x,y) \in C_n(G)$  удовлетворяет на каждом компакте области  $G$  условию Липшица

$$\exists L > 0 : \forall (x,y_1), (x,y_2) \in G \mid f(x,y_1) - f(x,y_2) \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid$$

тогда:

- 1) найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $|x - x_0| \leq \delta$  решение задачи Коши при начальных условиях существует.
- 2) решение задачи Коши единствено.

Система дифференциальных уравнений называется линейной, если она линейна относительно всех неизвестных функций и производных. Система  $n$  линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)x_i + f_i(t), (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3.1)$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \quad (1.3.2)$$

где  $X$  есть  $n$  - мерный вектор с координатами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ,  $F$  есть  $n$  - мерный вектор с координатами  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ , которые удобно в дальнейшем рассматривать как одностолбцовые матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц строки первого множителя должны умножаться на столбец второго, следовательно,

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{i=1}^n a_{2j}x_j \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix}, AX + F = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц означает равенство всех их элементов, следовательно, одно матричное уравнение (1.3.2) или

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{pmatrix}$$

эквивалентно системе (1.3.1).

Если все функции  $a_{ij}(t), f_i(t)$  в (1.3.1) непрерывны на отрезке  $a \leq t \leq b$ , то в достаточно малой окрестности каждой точки  $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , где  $a \leq t_0 \leq b$  выполнены условия теоремы существования и единственности и, следовательно, через каждую такую точку проходит единственная интегральная кривая системы (1.3.1).

В рассматриваемом случае правые части системы (1.3.1) непрерывны, и их частные производные по любому  $x_j$  ограничены, так как эти частные производные равны непрерывным на отрезке  $a \leq t \leq b$  коэффициентам  $a_{ij}(t)$ .

Определим линейный оператор  $L$  равенством

$$L[X] = \frac{dX}{dt} - AX,$$

тогда уравнение (1.3.2) еще короче можно записать в виде

$$L[X] = F. \quad (1.3.3)$$

Если все  $f_i(t) \equiv 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , или, что то же самое , матрица  $F = 0$  , то система (1.3.1) называется линейной однородной. В краткой записи линейная однородная система имеет вид

$$L[X] = 0. \quad (1.3.4)$$

Оператор  $L$  обладает следующими свойствами:

1.  $L[cX] = cL[X]$ ,
2.  $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$ .

Теорема 1.3.1. Если  $X$  является решением линейной однородной системы  $L[X] = 0$ , то  $cX$ , где  $c$  - произвольная постоянная, является решением той же системы.

Теорема 1.3.2. Сумма  $X_1 + X_2$  двух решений  $X_1$  и  $X_2$  однородной линейной системы уравнений является решением той же системы.

Теорема 1.3.3. Если линейная однородная система с действительными коэффициентами  $a_{ij}(t)$  имеет комплексное решение  $X = U + iV$ , то действительная и мнимая части

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

в отдельности являются решениями той же системы.

Теорема 1.3.4. Если  $X^*$  является решением линейной неоднородной системы  $L[X] = F$ , а  $X_1$  - решением соответствующей однородной системы  $L[X] = 0$ , то сумма  $X_1 + X^*$  будет решением неоднородной системы  $L[X] = F$ .

линейной системой с постоянными коэффициентами называется линейная система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(t)x_i + f_i(t), (i = 1, 2, \dots, n)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = AX + F,$$

в которой все коэффициенты  $a_{ij}$  постоянны, или матрица A постоянна.

Проще всего система линейных однородных или неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами интегрируется путем сведения ее к одному уравнению более высокого порядка будет линейным с постоянными коэффициентами.

Однако можно и непосредственно найти фундаментальную систему решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Будем искать решение системы

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{array} \right\} \quad (1.3.5)$$

где все  $a_{ij}$  постоянны, в виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, x_n = \alpha_n e^{kt},$$

с постоянными  $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ . Подставляя в систему (1.3.5), сокращая на  $e^{kt}$  и перенося все члены в одну часть равенства, получим

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{array} \right\} \quad (1.3.6)$$

Для того что бы эта система n линейных однородных уравнений с n неизвестными  $\alpha_i (j = 1, 2, \dots, n)$  имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно , что бы определитель системы (1.3.6) был равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (1.3.7)$$

(1.3.7)

| |

Из этого уравнения значения  $k$ , при которых система (1.3.6) будет иметь нетривиальные решения. Уравнение (1.3.7) называется характеристическим. Если все корни характеристического уравнения  $k_i (j = 1, 2, \dots, n)$  различны, то, подставляя их по очереди в систему (1.20), определяем соответствующие им нетривиальные значения  $\alpha_j^{(i)} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  и, следовательно, находим  $n$  решений исходной системы (1.3.5) в виде

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} e^{k_i t}, x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} e^{k_i t}, \dots, x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.8)$$

где верхний индекс указывает номер решения, а нижний индекс - номер неизвестной функции.

Пользуясь векторными обозначениями, получим тот же результат еще короче:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \quad (1.3.9)$$

$$X = \tilde{A}e^{kt}, \text{ где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

ищем решение в виде

$$\tilde{A}ke^{kt} = A\tilde{A}e^{kt}$$

$$Ake^{kt} = AAke^{kt}$$

или

$$(1.3.10) \quad (A - kE)\tilde{A} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

где,  $E$  - единичная

матрица:

$$\tilde{A} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Для того чтобы уравнению (1.3.10) удовлетворяла нетривиальная матрица  $\tilde{A}$  необходимо и достаточно, что бы матрица  $A - kE$  была бы особой., т.е. чтобы ее определитель был равен нулю:  $|A - kE| = 0$ . Для каждого корня  $k_i$  этого характеристического уравнения  $|A - kE| = 0$  из (1.3.10) определяем не равную нулю матрицу  $\tilde{A}^{(i)}$  и, если все корни  $k_i$  характеристического уравнения различны, получаем  $n$  решений:

$$X_1 = \tilde{A}^{(1)} e^{k_1 t}, X_2 = \tilde{A}^{(2)} e^{k_2 t}, \dots, X_n = \tilde{A}^{(n)} e^{k_n t},$$

где

$$\tilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Эти решения, как нетрудно показать, линейно независимы.

Действительно, если бы существовала линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t} = 0,$$

или в развернутой форме

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_1^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \end{array} \right\} \quad (1.3.11)$$

то, в силу линейной независимости функции  $e^{k_i t}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) из (1.3.11) следовало бы, что

$$\left. \begin{array}{l} \beta_i \alpha_1^{(i)} = 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} = 0, \\ \dots \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} = 0. \end{array} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.12)$$

Но так как при каждом  $i$ , хотя бы одно из  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$  отлично от нуля, то из (1.3.12) следует, что  $\beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Итак, решения  $A^{\sim(i)} e^{kit} (i = 1, 2, \dots, n)$  линейно независимы и общее решение системы (1.3.5) имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

где  $c_i$  - произвольные постоянные.

Постоянныe  $\alpha_j^{(i)} (j = 1, 2, \dots, n)$  определяются из системы (1.3.7) при  $k = k_i$  неоднозначно, так как определитель системы равен нулю и, следовательно, по крайней мере одно уравнение является следствием остальных. Неоднозначность определения  $\alpha_j^{(i)}$  связана с тем, что решение системы линейных однородных уравнений остается решением той же системы при умножении на произвольный постоянный множитель.

Комплексному корню характеристического уравнения (1.3.8)  $k_j = p + qi$  соответствует решение

$$X_j = A^{\sim(j)} e^{k_j t}, \quad (1.3.13)$$

которое, если все коэффициенты  $a_{ij}$  действительны, может быть заменено двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями решения (1.3.13). Комплексный сопряженный корень характеристического уравнения  $k_j = p - qi$  не даст новых линейно независимых действительных решений.

Если характеристическое уравнение имеет кратный корень  $k_s$  кратности  $\gamma$ , то, принимая во внимание, что систему уравнений (1.3.5) можно свести к одному линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами  $n$ -го или более низкого порядка, можно утверждать, что решение системы (1.3.5) имеет вид

$$X(t) = \left( \tilde{A}_0^{(s)} + \tilde{A}_1^{(s)} t + \dots + \tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1} \right) e^{k_s t}, \quad (1.3.14)$$

где

$$\tilde{A}_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$\alpha_{ji}^{(s)}$  - постоянные.

Следует заметить, что и в тех случаях, когда система п уравнений (1.3.5) сводится к уравнению порядка ниже n), характеристические уравнение последнего необходимо имеет корни, совпадающие с корнями уравнения (1.3.7) (так как уравнение, к которому свелась система, должно иметь решения  $e^{k_s t}$  где  $k_s$  - корни уравнения (1.3.7)). Но, возможно, что кратности этих корней, если порядок полученного уравнения ниже n, будут ниже кратностей корней уравнения (1.3.7), и следовательно, возможно, что в решении (1.3.14) степень первого множителя будет ниже, чем  $\gamma - 1$ , т.е. если мы будем искать решение в виде (1.3.14), то может обнаружиться, что некоторые коэффициенты  $\tilde{A}_i^{(s)}$ , в том числе и при старшем члене , обращаются в нуль.

Итак, решение системы (1.3.5), соответствующее кратному корню характеристического уравнения, следует искать в виде (1.3.14). Подставив (1.3.14) в уравнение  $\frac{dX}{dt} = AX$  и, требуя, чтобы оно обратилось в тождество , определим матрицы  $A_i^{(s)}$ , причем некоторые из них, в том числе и  $A_{\gamma-1}^{(s)}$ , могут оказаться равными нулю.

Теорема 1.3.5. Существует единственное решение  $y = y(x)$ ,  $x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0$ , где  $h_0$  достаточно мало, уравнения

$$F(x, y, y') = 0,$$

удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , для которого  $y'(x_0) = y'_0$ , где  $y'_0$  - один из действительных корней уравнения  $F(x_0, y_0, y') = 0$ , если в замкнутой окрестности точки  $(x_0, y_0, y'_0)$  функция  $F(x_0, y_0, y')$  удовлетворяет условиям:

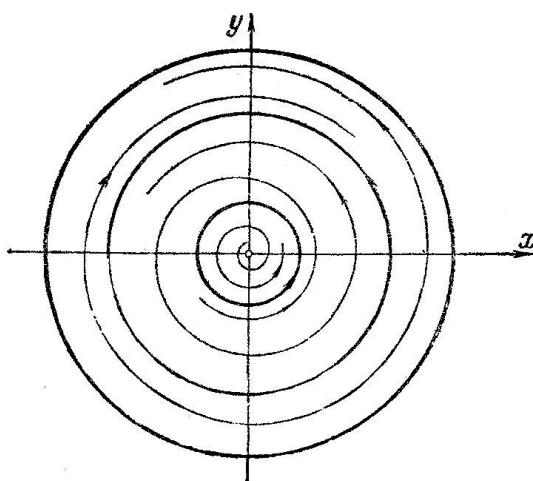
1.  $F(x_0, y_0, y')$  непрерывна по всем аргументам;
2. производная  $\frac{dF}{dy'}$  существует и отлична от нуля; 3. существует ограниченная по модулю производная  $\frac{dF}{dy}$ ,

$$\left| \frac{dF}{dy} \right| \leq N_1$$

## 1.4 Классификация особых точек в качественной теории дифференциальных уравнений

Пусть точка  $O$  - особая изолированная точка. Различают два класса особых точек: устойчивые и неустойчивые. Особую точку называют устойчивой, если существуют замкнутые интегральные кривые произвольно малого диаметра, окружающие особую точку, во всех остальных случаях точку называют неустойчивой.

**Теорема 1.4.1.** В достаточно малой окрестности изолированной особой точки не может содержаться замкнутых траекторий, не заключающих внутри себя эту особую точку. Данная теорема позволяет провести анализ возможного поведения интегральных кривых в окрестности устойчивой особой точки. Пусть  $O$  - устойчивая особая точка и пусть  $S(O,r)$  - столь малый круг, описанный около собой точки, что внутри него и на границе нет других особых точек. Расположение интегральных кривых называется центро-фокусом если область замкнутых кривых представляет собой спираль, навивающуюся на эти кривые.



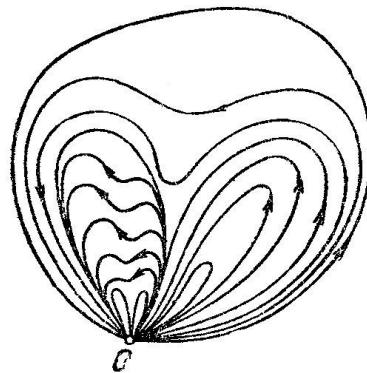
**Теорема 1.4.2.** Если изолированная особая точка неустойчива, то всегда существует полутраектория, имеющая эту особую точку единственной своей предельной точкой.

Теорема 1.4.3. Около неустойчивой особой точки всегда можно найти столь малую окрестность, что каждая полутраектория будет либо входить в особую точку, либо покидать окрестность через конечный промежуток времени.

Все траектории, которые могут наблюдаться в достаточно малой окрестности неустойчивой особой точки, могут быть разделены на три класса:

1. Параболические - одним концом входящие в особую точку, другим - выходящие за границу окрестности.
2. Гиперболические - в обе стороны выходящие за границу окрестности.
3. Эллиптические - обоими концами входящие в особую точку.

Теорема 1.4.4. Точки из достаточно малой окрестности изолированной особой точки, лежащие на эллиптических и гиперболических траекториях, если таковы имеются, заполняют множества, содержащие внутренние точки, причем лежащие на гиперболических заполняют области.



## **Выводы по главе I**

Работа, производимая внешней силой над маятником, положительна и пропорциональна его энергии. Поэтому энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии и величине  $a/l$ .

Для того, чтобы действительно происходило параметрическое возбуждение колебаний, коэффициент усиления  $\chi$  должен превосходить некоторое минимальное значение, равное коэффициенту затухания, обусловленного трением.

Замечательной особенностью является при этом наличие области частот, допускающих две различные амплитуды колебаний. Так, при постепенном увеличении частоты внешней силы амплитуда вынужденных колебаний будет возрастать.

Все траектории, которые могут наблюдаться в достаточно малой окрестности неустойчивой особой точки, могут быть разделены на три класса:

1. Параболические - одним концом входящие в особую точку, другим - выходящие за границу окрестности.
2. Гиперболические - в обе стороны выходящие за границу окрестности.
3. Эллиптические - обоими концами входящие в особую точку.

## ГЛАВА II.

# РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MAPLE

Пакет Maple способен решать большое число, прежде всего, математически ориентированных задач вообще без программирования в общепринятом смысле. Вполне можно ограничиться лишь описанием алгоритма решения своей задачи, разбитого на отдельные последовательные этапы, для которых Maple имеет уже готовые решения. При этом Maple располагает довольно большим набором процедур и функций, непосредственно решающих совсем не тривиальные задачи как то интегрирование, дифференциальные уравнения и др. Тем не менее, это вовсе не означает, что Maple не предполагает программирования. Имея собственный достаточно развитый язык программирования, пакет позволяет программировать в своей среде самые разнообразные задачи из различных приложений.

Программирование в среде Maple в большинстве случаев не требует особого программистского навыка, ибо в отличие от языков универсального назначения, Maple включает большое число математически ориентированных функций, позволяя одним вызовом функции решать достаточно сложные самостоятельные задачи, например: вычислять минимум или максимум выражения, решать системы дифференциальных уравнений или алгебраических уравнений, вычислять производные и интегралы, выводить графики сложных функций и др.

### 2.1. Решение дифференциальных уравнений в Maple

Пакет Maple позволяет решать одиночные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в аналитическом и численном виде.

Для решения системы обычных дифференциальных уравнений применяется функция `dsolve` в разных формах записи:

$$\begin{aligned} & \text{dsolve(ODE)} \\ & \text{dsolve(ODE,y(x),extra\_args)} \\ & \text{dsolve(ODE,ICs,y(x),extra\_args)} \\ & \text{dsolve(sysODE,ICs,funcs,extra\_args)} \end{aligned}$$

В этих записях *ODE* - обычное дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений с указанием начальных условий, *y(x)* - функция одной переменной, *ICs* - выражение обозначающее начальные условия, *sysODE* - множество дифференциальных уравнений, *funcs* - множество неопределенных функций, *extra\_args* опция, задающая тип решения.

Для решения задачи Коши в параметр `dsolve` нужно добавлять начальные условия, а при решении краевых задач - краевые условия. Данные пакет может найти решение при числе начальных или краевых условий меньше порядка системы, то в решении появятся неопределенные константы вида  $C_1, C_2$  и т.д. Они же могут появляться при аналитическом решении системы, когда начальные условия не указаны. Если решение найдено в неявном виде, то в решении появится параметр  $T$ . По умолчанию функция `dsolve` автоматически выбирает наиболее подходящий метод решения дифференциальных уравнений.

Для обычного графического вывода результатов решения дифференциальных уравнений обычно используется оператор `odeplot` из пакета `plots`. Эта функция используется в виде:

$$\text{odeplot}(s,\text{vars},r,o)$$

где *s* - дифференциальное уравнение или системы дифференциальных уравнений, решаемых оператором `dsolve`, *vars* - переменные, *r* - параметр, задающий пределы решения, *o* - дополнительные опции.

Приведем пример решения дифференциальных уравнений в аналитическом виде:

> d1:=diff(y(x),x)=exp(x+y(x));

$$d1 := \frac{d}{dx}y(x) = e^{x+y(x)}$$

> dsolve(d1,y(x));

$$y(x) = \ln(-e^x + _C1)^{-1}$$

> d2:=diff(y(x),x\$2)-diff(y(x),x)-2\*y(x)=sin(x);

$$d2 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{d}{dx}y(x) - 2y(x) = \sin(x)$$

> dsolve(d2,y(x));

$$y(x) = e^{2x}_C2 + e^{-x}_C1 + 1/10 \cos(x) - 3/10 \sin(x)$$

Для получения частного решения дифференциального уравнения, мы задаем начальные условия при помощи оператора *ics*.

> eq3:=diff(y(x),x,x)+4\*y(x)=x;

$$eq3 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4y(x) = x$$

> ics3:=y(Pi/4)=Pi/4,D(y)(Pi/4)=1/2; ics3 := y(1/4\pi) = 1/4\pi, D(y)(1/4\pi) = 1/2

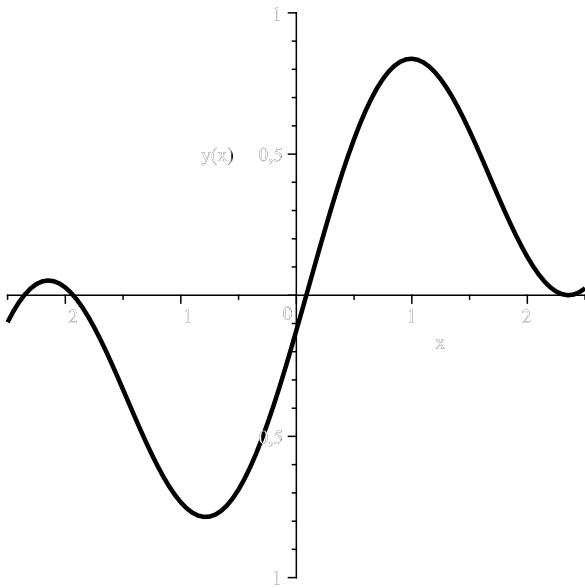
> dsolve({eq3,ics3});  $y(x) = 3/16 \sin(2x)\pi - 1/8 \cos(2x) + 1/4x$

Для графического представления решения дифференциального уравнения нужно подключить пакет *DEtools*, указать данное уравнение, начальные условия, пределы по координатным осям.

> with(DEtools):

> DEplot(eq3,y(x),x=-2.5..2.5,y=-1..1,[ics3],

> linecolor=black,stepsize=.05,color=black);



> eq4:=diff(y(x),x,x)-diff(y(x),x)+y(x)=2\*exp(x);

$$eq4 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{d}{dx}y(x) + y(x) = 2e^x$$

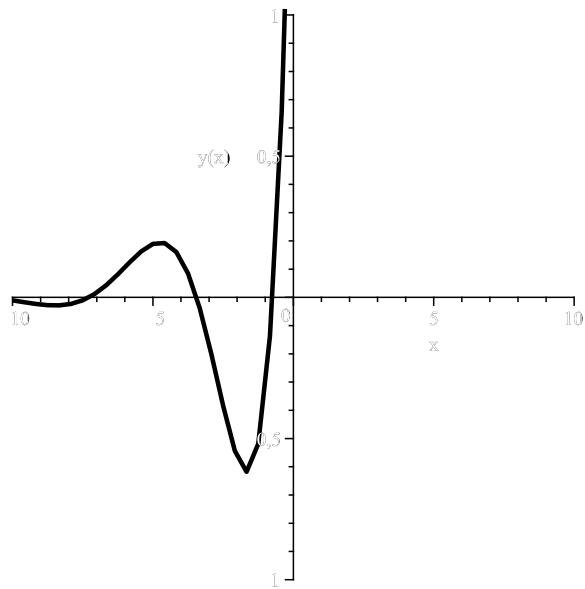
> ics4:=y(0)=2,D(y)(0)=4; ics4 := y(0) = 2, D(y)(0) = 4

> dsolve({eq4,ics4});

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{1/2x} \sin(1/2\sqrt{3}x)\sqrt{3} + 2e^x$$

> DEplot(eq4,y(x),x=-10..10,y=-1..1,[ics4],

> linecolor=black,stepsize=1.00,color=black);

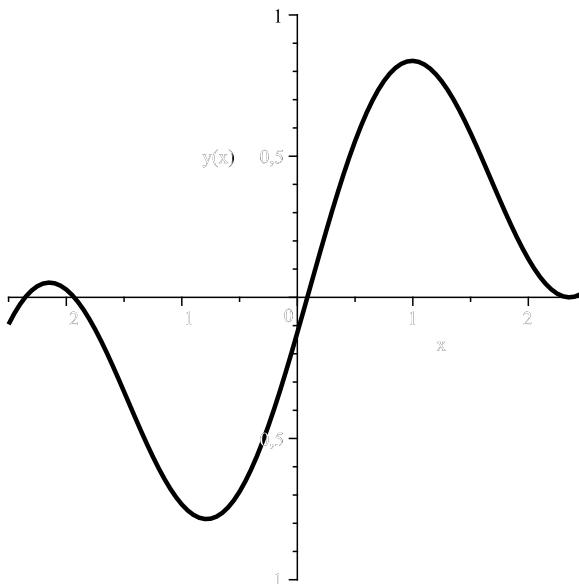


> d5:=diff(y(x),x)=exp(x+y(x));

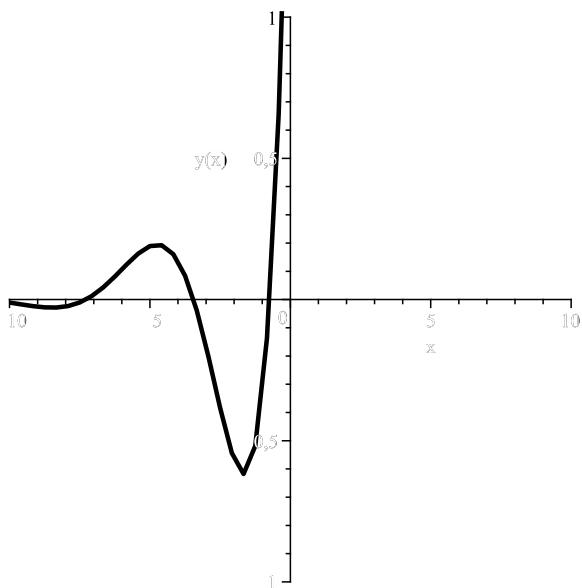
$$d5 := \frac{d}{dx}y(x) = e^{x+y(x)}$$

> dsolve(d5,y(x));

$y(x) = \ln(-(\text{e}^x + _C1)^{-1})$   
> d6:=diff(y(x),x\$2)-diff(y(x),x)-2\*y(x)=sin(x);  
 $d6 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{d}{dx}y(x) - 2y(x) = \sin(x)$   
> dsolve(d6,y(x));  $y(x) = \text{e}^{2x} - C2 + \text{e}^{-x} - C1 + 1/10 \cos(x) - 3/10 \sin(x)$   
> eq7:=diff(y(x),x,x)+4\*y(x)=x;  
 $eq7 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4y(x) = x$   
> ics7:=y(Pi/4)=Pi/4,D(y)(Pi/4)=1/2; ics7 :=  $y(1/4\pi) = 1/4\pi, D(y)(1/4\pi) = 1/2$   
> dsolve({eq7,ics7});  $y(x) = 3/16 \sin(2x)\pi - 1/8 \cos(2x) + 1/4x$   
> with(DEtools):  
> DEplot(eq7,y(x),x=-2.5..2.5,y=-1..1,[ics7],  
linecolor=black,stepsize=.05,color=black);



> eq8:=diff(y(x),x,x)-diff(y(x),x)+y(x)=2\*exp(x);  
 $eq8 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{d}{dx}y(x) + y(x) = 2\text{e}^x$   
> ics8:=y(0)=2,D(y)(0)=4; ics8 :=  $y(0) = 2, D(y)(0) = 4$   
> dsolve({eq8,ics8});  
 $y(x) = 4/3\text{e}^{1/2x} \sin(1/2\sqrt{3}x)\sqrt{3} + 2\text{e}^x$   
> DEplot(eq8,y(x),x=-10..10,y=-1..1,[ics8],  
linecolor=black,stepsize=1.00,color=black);



## 2.2. Решение системы дифференциальных уравнений в Maple

Для того чтобы решить систему дифференциальных уравнений, нужно задать уравнения данной системы, затем использовать оператор *dsolve* и задать переменные.

```
eq9:=diff(x(t),t)=y(t),diff(y(t),t)=-2*x(t)+3*y(t);
```

$$eq9 := \frac{d}{dt}x(t) = y(t), \frac{d}{dt}y(t) = -2x(t) + 3y(t)$$

```
> dsolve({eq9},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = _C1 e^{2t} + _C2 e^t, y(t) = 2_C1 e^{2t} + _C2 e^t\}$$

Чтобы получить частные решения дифференциальной системы уравнений, нужно к перечисленным уравнениям добавить оператор *ics* для добавления начальных условий. При решении данной системы в оператор *dsolve* добавить начальные условия *{eq10,ics10}* и переменные.

```
> eq10:=diff(x(t),t)=x(t)+3*y(t),diff(y(t),t)=-x(t)+5*y(t); ics10:=x(0)=3 > ,y(0)=1;
```

$$eq10 := \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + 3y(t), \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) + 5y(t)$$

$$ics10 := x(0) = 3, y(0) = 1$$

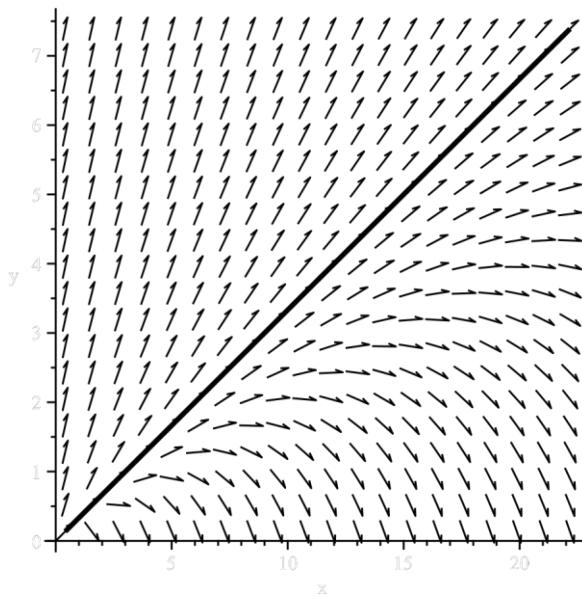
```
> dsolve({eq10,ics10},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = 3e^{2t}, y(t) = e^{2t}\}$$

Что бы при решении системы дифференциальных уравнений выводился график решения необходимо применить оператор *DPlot* при этом нужно указать систему дифференциальных уравнений, переменные, начальные условия, при желании цвет графика, цвет координатных осей, масштаб.

```
> DEplot({eq10},[x(t),y(t)],t=-1..1,[ics10]),
```

```
> linecolor=black,stepsize=.05,color=black);
```



```
> eq11:=diff(x(t),t)=-x(t)+2*y(t),diff(y(t),t)=-2*x(t)-5*y(t); ics11:=x(0)=0,
```

$$eq11 := \frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + 2y(t), \frac{d}{dt}y(t) = -2x(t) - 5y(t)$$

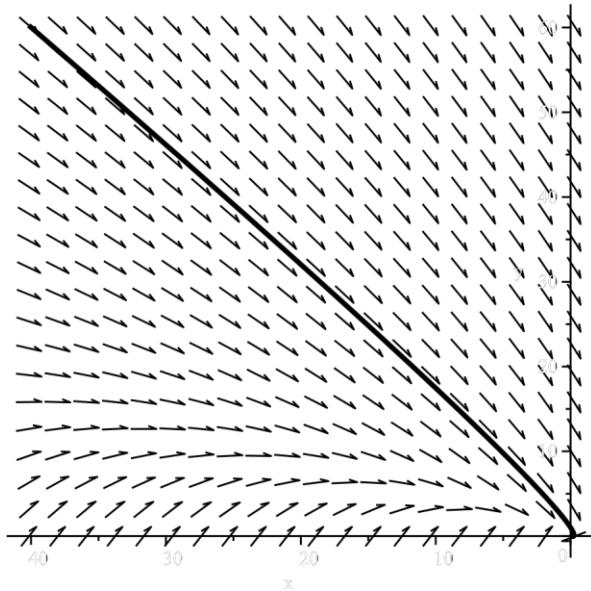
*ics11* :=  $x(0) = 0, y(0) = 1$

```
> dsolve({eq11,ics11},{x(t),y(t)});
```

$$\{x(t) = 2e^{-3t}, y(t) = -1/2e^{-3t}(-2 + 4t)\}$$

```
> DEplot({eq11},[x(t),y(t)],t=-1..1,[ics11]),
```

```
linecolor=black,stepsize=.05,color=black);
```



Приведем пример решения дифференциальных уравнений, состоящее из трех уравнений и трех переменных. Сначала зададим поочередно три уравнения, затем используем оператор *dsolve*, зададим начальные условия, переменные. Для вывода графика решения заданной системы воспользуемся оператором *odeplot* с указанием промежутков на координатных осях.

```
> with(plots):
```

```
> e1:=diff(x(t),t)=5*x(t)-6*y(t);
```

$$e1 := \frac{d}{dt}x(t) = 5x(t) - 6y(t)$$

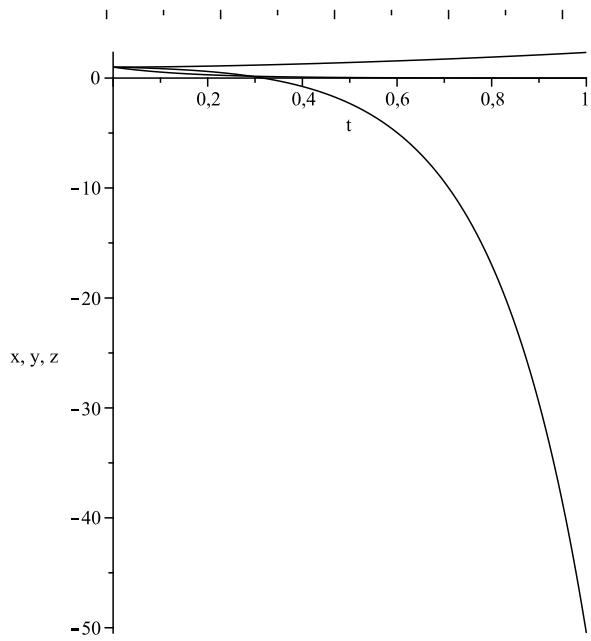
```
> e2:=diff(y(t),t)=y(t)-z(t);
```

$$e2 := \frac{d}{dt}y(t) = y(t) - z(t)$$

```
> e3:=diff(z(t),t)=-6*z(t);
```

$$e3 := \frac{d}{dt}z(t) = -6z(t)$$

```
> s:=dsolve({e1,e2,e3,x(0)=1,y(0)=1,z(0)=1},{x(t),y(t),z(t)},type=numeric):
odeplot(s,[[t,x(t)],[t,y(t)],[t,z(t)]],0..1,numpoints=500,color=black);
```



Приведем примеры решения нелинейных дифференциальных уравнений с выводом графика решения. Для этого мы подключим пакет *plots*, перечислим все уравнения системы, зададим искомые функции и придели вывода графика решения системы.

> restart:

> with(plots):

> sys:=diff(y(x),x)=x/z(x),diff(z(x),x)=-x/y(x);fcns:={y(x),z(x)};

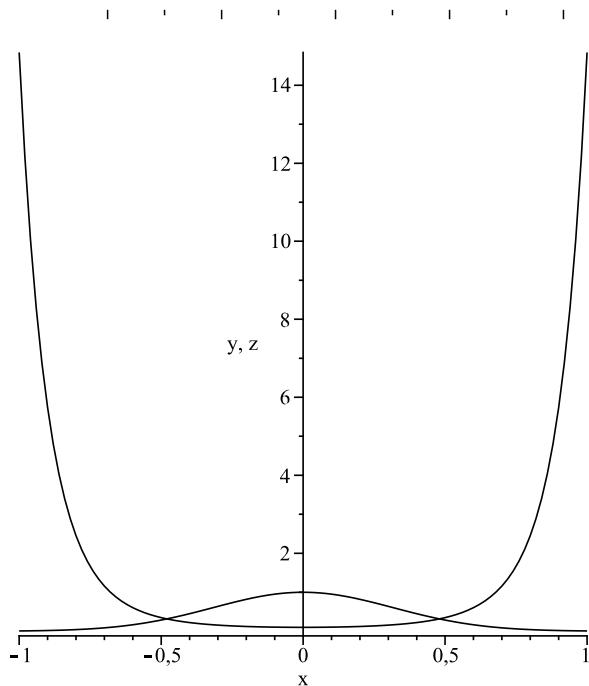
$$sys := \frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{z(x)}, \frac{d}{dx}z(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

*fcns := {y(x),z(x)}*

> p:=dsolve({sys,y(0)=0.1,z(0)=1},fcns,type=numeric); p :=

proc(*x\_rkf45*)...endproc

> odeplot(p,[[x,y(x)],[x,z(x)]],-1..1,numpoints=100,color=black);



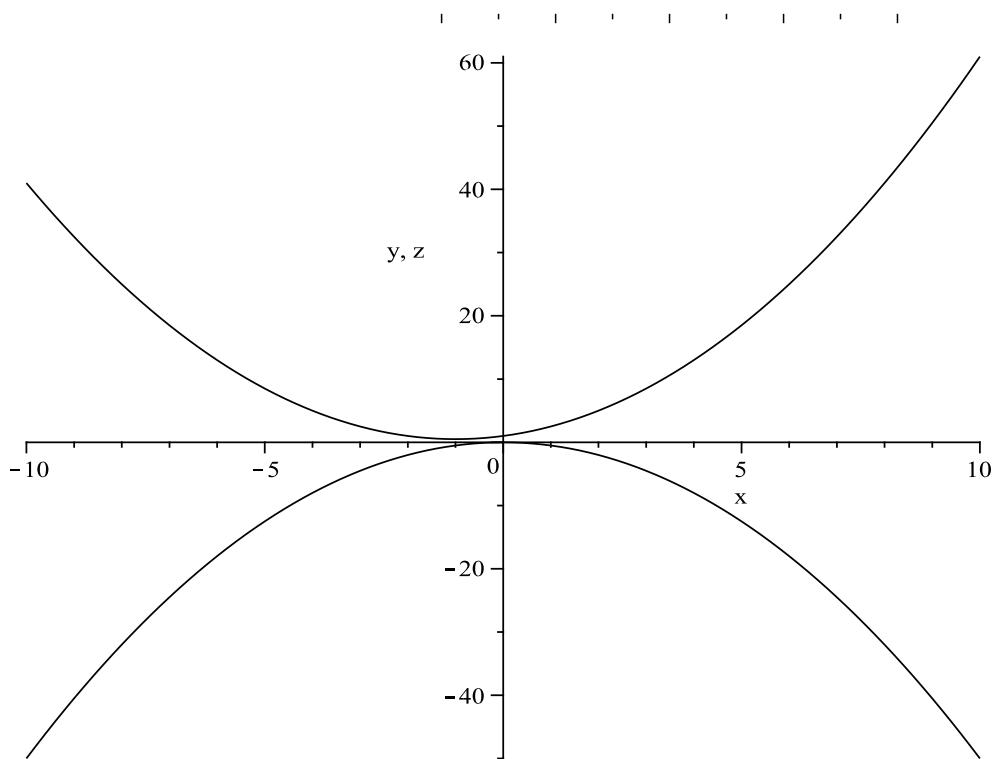
```

sys1:=2*z(x)*diff(y(x),x)=y(x)^2-z(x)^2+1,
diff(z(x),x)=z(x)+y(x):fcns:={y(x),z(x)};

$$fcns := \{y(x), z(x)\}$$

> p1:=dsolve(\{sys1,y(0)=0,z(0)=1\},fcns,type=numeric); p1 :=
proc(x_rkf45)...endproc
> odeplot(p1,[x,y(x)], [x,z(x)]],-10..10,numpoints=100,color=black);

```



## **Выводы по главе II**

Пакет Maple способен решать большое число, прежде всего, математически ориентированных задач вообще без программирования в общепринятом смысле. Вполне можно ограничиться лишь описанием алгоритма решения своей задачи, разбитого на отдельные последовательные этапы, для которых Maple имеет уже готовые решения. При этом Maple располагает довольно большим набором процедур и функций, непосредственно решающих совсем не тривиальные задачи как то интегрирование, дифференциальные уравнения и др. Тем не менее, это вовсе не означает, что Maple не предполагает программирования. Имея собственный достаточно развитый язык программирования, пакет позволяет программировать в своей среде самые разнообразные задачи из различных приложений. Программирование в среде Maple в большинстве случаев не требует особого программистского навыка, ибо в отличие от языков универсального назначения, Maple включает большое число математически ориентированных функций, позволяя одним вызовом функции решать достаточно сложные самостоятельные задачи.

## ГЛАВА III.

### НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ MAPLE

#### 3.1. Создание модели нелинейных колебаний

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_j^2 x = \frac{f}{m} \sin \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3.$$

( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила).

Использую компьютерную программу Maple, создадим процедуру решения данного дифференциального уравнения.

> restart:

> Oscilations:=table():

> Oscilations[Eqs2]:=

> proc(x,u,t,alpha,beta,gamma,omega,lambda,f) local X,U,T,EQS:

> X:=(T)->subs(t=T,x):

> U:=(T)->subs(t=T,u):

> EQS:=[

> diff(X(t),t)=U,

> diff(U(t),t)=-2\*lambda\*U(t)-omega^2\*X(t)+f\*sin(gamma\*t) -alpha\*(X(t)^2)-beta\*(X(t)^3) ]:

```

> subs({X(t)=x,U(t)=u,U=u},EQS): > end proc:
> Oscilations[Eqs2](x(t),u(t),t,alpha,beta,gamma,omega,lambda,a);

$$\left[ \frac{d}{dt}x(t) = u(t), \frac{d}{dt}u(t) = -2\lambda u(t) - \omega^2 x(t) + a \sin(\gamma t) - \alpha (x(t))^2 - \beta (x(t))^3 \right]$$

> Oscilations[Eqs2](x(t),u(t),t,1,2,3,4,0.1,6);

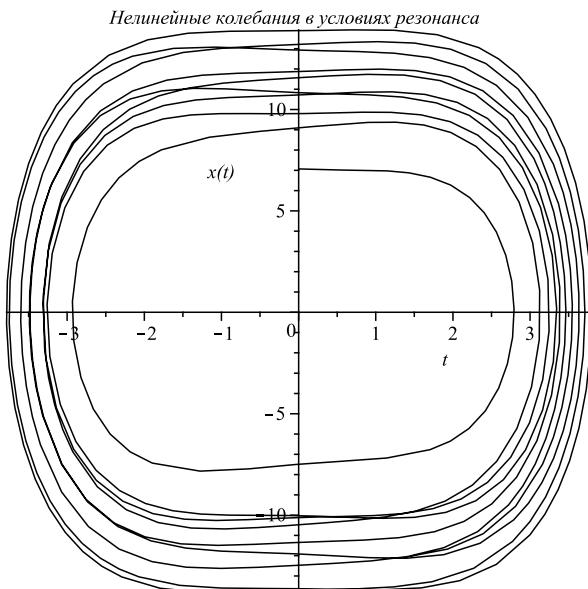
$$\left[ \frac{d}{dt}x(t) = u(t), \frac{d}{dt}u(t) = -0.2 u(t) - 16 x(t) + 6 \sin(3t) - (x(t))^2 - 2 (x(t))^3 \right]$$

> Oscilations[Inits2]:=(z1,z2)->[x(0)=0,u(0)=z1*cos(z2)];
OscilationsInits2 := (z1,z2) 7→ [x(0) = 0, u(0) = z1 cos(z2)]
Oscilations[Inits2](5,Pi/4);
[x(0) = 0, u(0) = 5/2 √2]
> Oscilations[DDDS2]:=proc(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t) > local
ALPHA,BETA,GAMMA,OMEGA,LAMBDA,F,T,Z1,Z2,ss,sss:
> ss:=(ALPHA,BETA,GAMMA,OMEGA,LAMBDA,F,Z1,Z2)->dsolve({op(
> Oscilations[Eqs2](x(T),u(T),T,ALPHA,BETA,GAMMA,OMEGA,LAMBDA,F
> )})
> union {op(Oscilations[Inits2](Z1,Z2))},{x(T),u(T)},numeric,>
output=listprocedure):
> sss:=subs(ss(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2),[x(T),u(T)]):
> subs(T=t,sss):
> % (t):
> end proc:
> Oscilations[DDDS2](1,2,3,4,5,6,7,8,Pi/4);
[0.177991133394274498, 0.278683276598598150]
> Oscilations[X]:=proc(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t)->
```

```

Oscilations[DDDS2](alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t)[1];
> Oscilations[U]:=(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t)->
Oscilations[DDDS2](alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t)[2];
> Oscilations[GG]:=(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,T,np)->
plot([Oscilations[X](alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t),
Oscilations[U](alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,t),t=0..T],
color=black,caption="Нелинейные колебания в условиях резонанса",
captionfont=[TIMES,14],labels=[t,'x(t)'],
numpoints=np);
> Oscilations[GG](0.01,2,4,0.01,0.1,5,10,Pi/4,15);

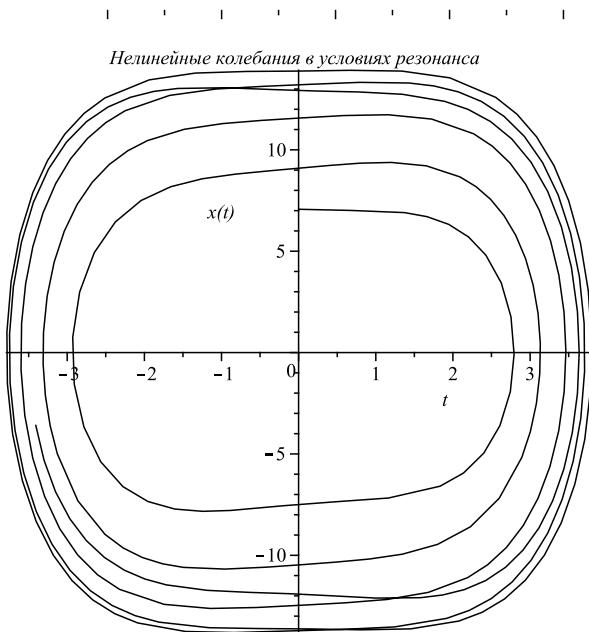
```



```

> Oscilations[GGAn]:=proc(alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,z2,T1,np,N) local
dt,i: dt:=(i)->i*T1/N:
plots[display](seq(Oscilations[GG](alpha,beta,gamma,omega,lambda,f,z1,
z2,dt(i),np),i=0..N),insequence=true): end proc:
> Oscilations[GGAn](0.01,2,4,0.01,0.1,5,10,Pi/4,15,35);

```



```
> save(Oscilations,'Ocs.m');
```

Получив процедуру решения нелинейного дифференциального уравнения, в текущем разделе создадим модели нелинейных колебаний, изменяя при этом параметры ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f$ ).

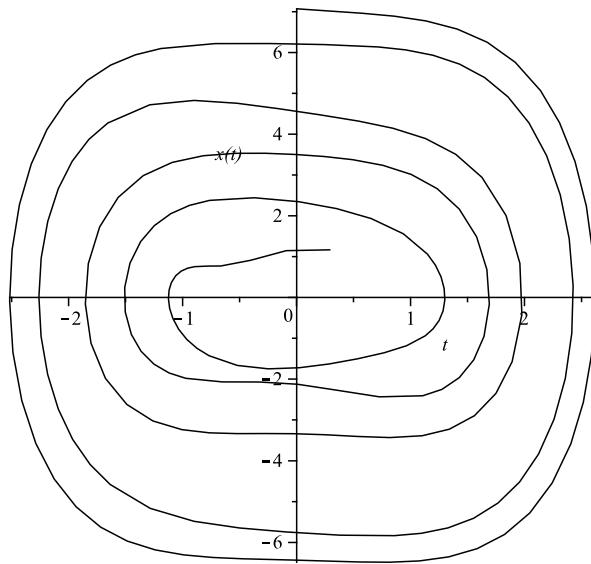
```
> read "../Diplom2014/Ocs.m":
```

```
> with(Oscilations);
```

```
[DDDS2,Eqs2,GG,GGAn,Inits2,U,X]
```

### 3.2. Тестирование команд

Рассмотрим пример модели нелинейных колебаний, изменив предел значения  $f$  с 5 до 1, тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 0.01,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 2,  $\gamma$  - показатель



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

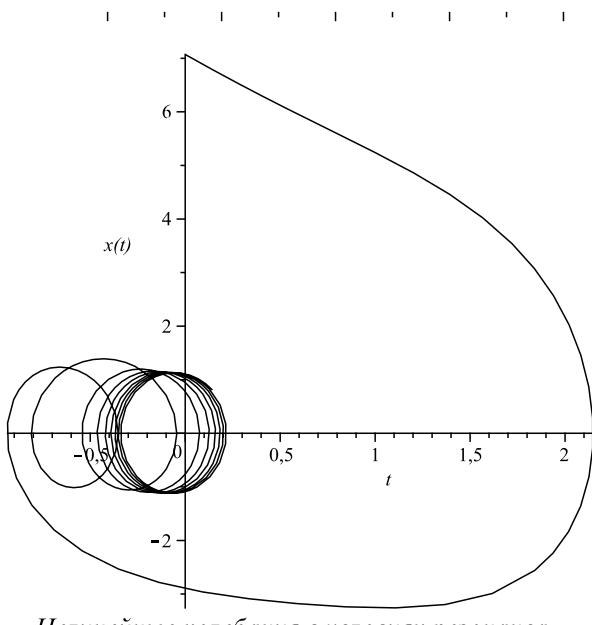
затухания силы трения равен 4,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна 0.01,  $\lambda$  - коэффициент трения равен 0.1,  $f$  - вынужденная сила равна 1).

GG(0.01,2,4,0.01,0.1,1,10,Pi/4,15,5000);

График имеет область замкнутых кривых, которые стремятся к фокусу равному нулю.

Далее рассмотрим случай, когда изменим предел значения  $\lambda$  с 0.1 до 1, тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 0.01,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 2,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения равен 4,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна 0.01,  $\lambda$  - коэффициент трения равен 1,  $f$  - вынужденная сила равна 5):

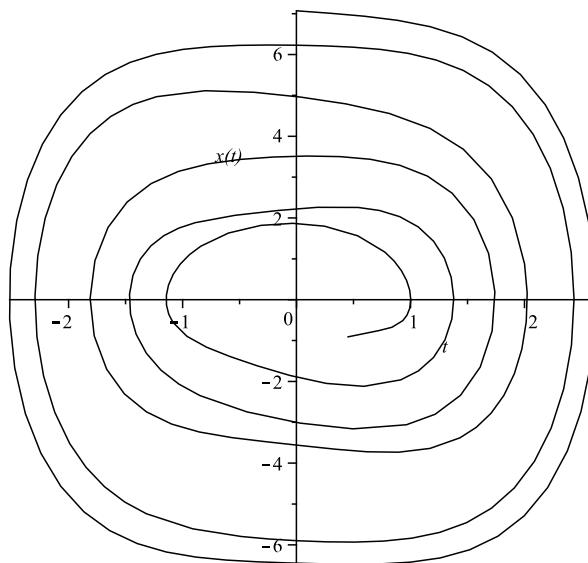
> GG(0.01,2,4,0.01,1,5,10,Pi/4,15,500);



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

Анализируя данную модель колебаний, отметим, что график имеет область замкнутых кривых, представляет собой спираль, навивающихся на эти кривые в начале координат.

Следующая модель связана с изменением параметра  $\omega$  с 0.1 до 1, тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 0.01,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 2,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения равен 4,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна 0.01,  $\lambda$  - коэффициент трения равен 0.1,  $f$  - вынужденная сила равна 1).:  
 $GG(0.01, 2, 1, 1, 0.1, 1, 10, \text{Pi}/4, 15, 5000);$

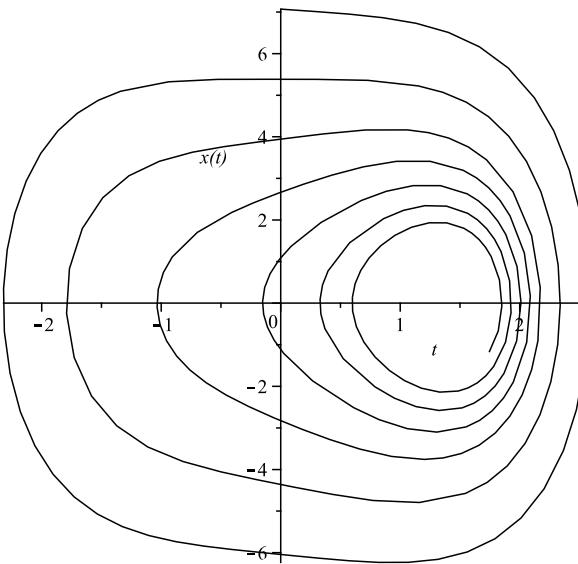


Нелинейные колебания в условиях резонанса

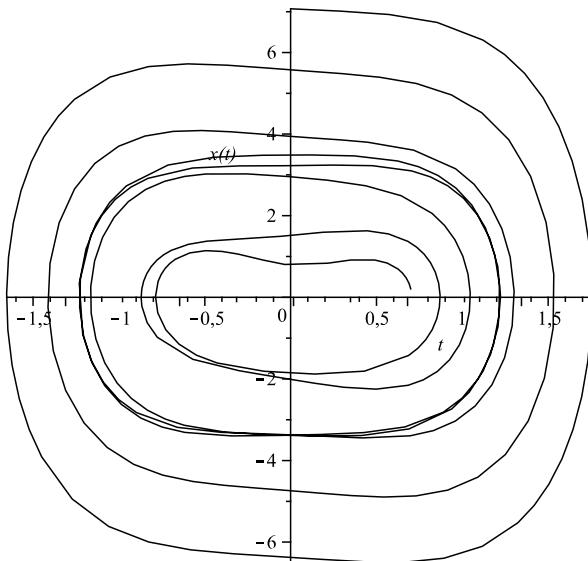
В получившейся модели колебания имеют предельный цикл и их фокус стремится к нулю.

Далее изменим предел значений  $\gamma$  с 4 до 0.1 тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 0.01,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 2,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения равен 0.1,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна 0.01,  $\lambda$  - коэффициент трения равен 0.1,  $f$  - вынужденная сила равна 5).

> GG(0.01,2,0.1,0.01,0.1,5,10,Pi/4,15,5000);



Нелинейные колебания в условиях резонанса



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

В получившийся модели мы наблюдаем, что фокус сместился в право, относительно начала координат, колебания будут затухать в окрестности точки  $x \approx 1.5$

Рассмотрим изменение предела значений  $\beta$  с 2 до 10, тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 0.01,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 10,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения равен 4,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна

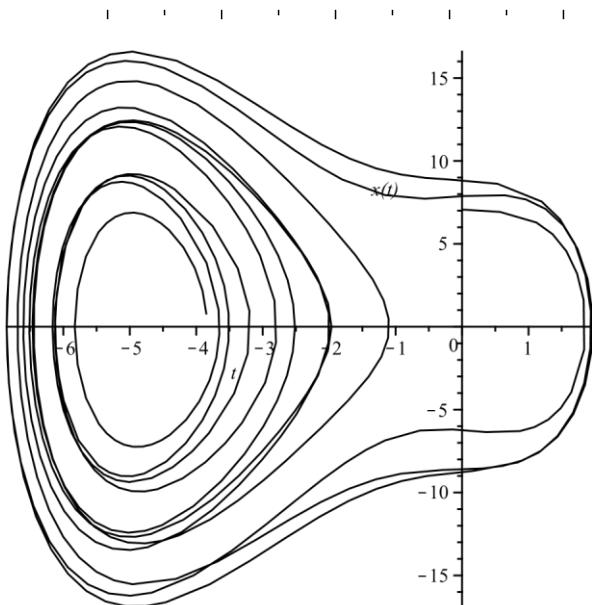
$0.01$ ,  $\lambda$  - коэффициент трения равен  $0.1$ ,  $f$  - вынужденная сила равна  $5$ ).:

$GG(0.01, 10, 4, 0.01, 0.1, 5, 10, \text{Pi}/4, 15, 5000);$

В получившейся модели мы наблюдаем, что график имеет свой предельный цикл и фокус стремится к нулю.

Теперь изменим предел значения  $\alpha$  с 0.01 до 10, тогда ( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент равен 10,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент равен 2,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения равен 4,  $\omega$  - собственная частота колебаний равна 0.01,  $\lambda$  коэффициент трения равен 0.1,  $f$  - вынужденная сила равна 5).:

$> GG(10, 2, 4, 0.01, 0.1, 5, 10, \text{Pi}/4, 15, 5000);$



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

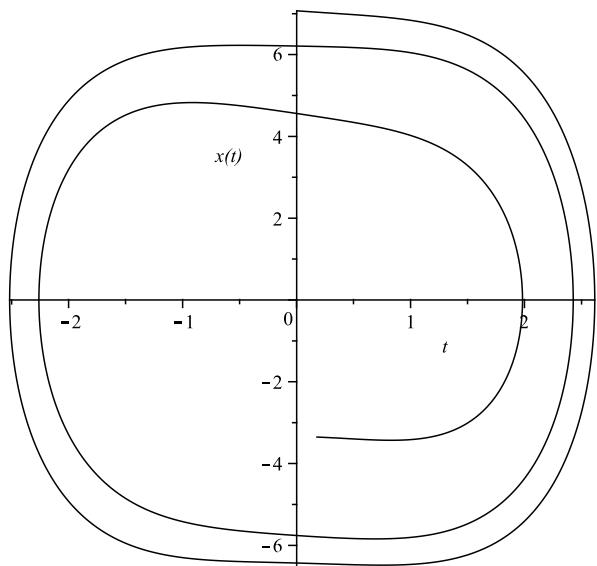
В данной модели мы видим, что график имеет предельный цикл и фокус сместился влево, а именно в точку  $x \approx -5$ .

Далее покажем анимированную модель изменения траектории при изменении пределов значений параметров, показанных ранее:

( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила, N- количество кадров), на графике представлен 15 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )

GGAn(0.01,2,4,0.01,0.1,1,10,Pi/4,15,5000,35);

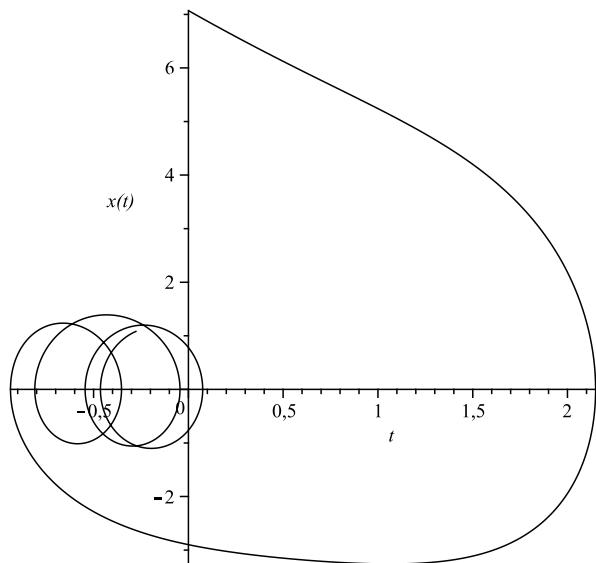
( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

сила, N - количество кадров), на графике представлен 14 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )

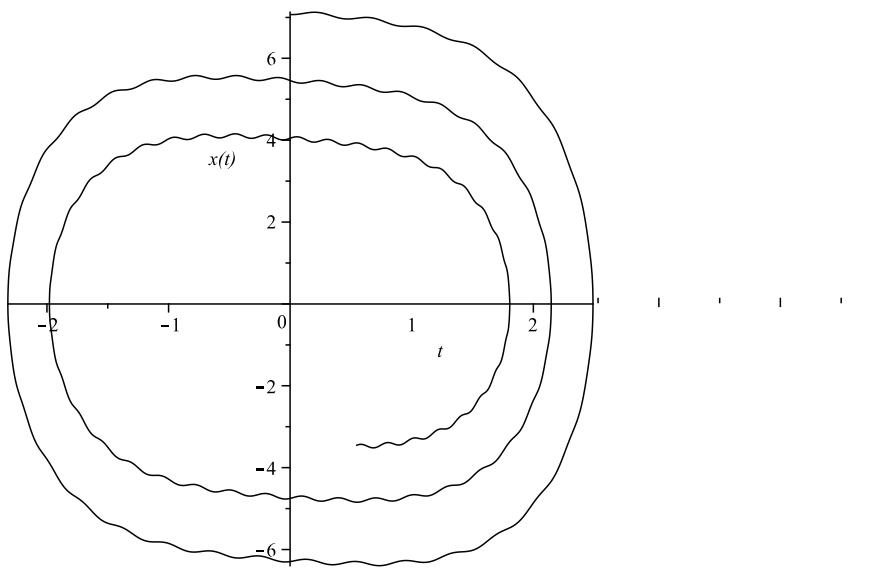
> GGAn(0.01,2,4,0.01,1,5,10,Pi/4,15,5000,35);



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

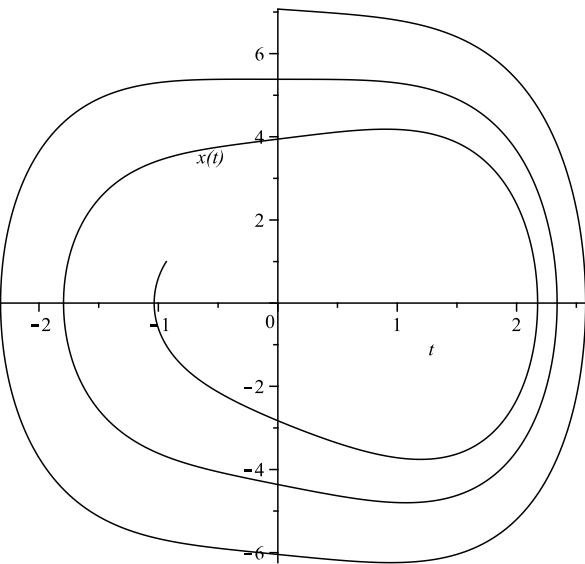
( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила, N - количество кадров), на графике представлен 15 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )

GGAn(0.01,2,100,1,0.1,5,10,Pi/4,15,5000,35);



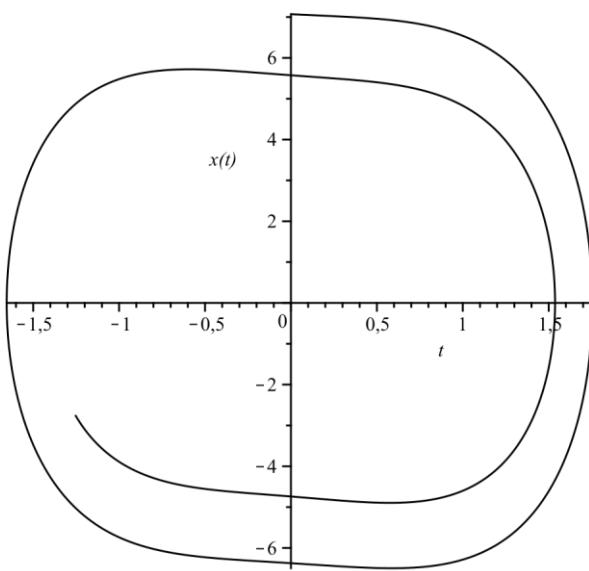
Нелинейные колебания в условиях резонанса

( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила,  $N$  - количество кадров), на графике представлен 14 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )  
 $> GGAn(0.01, 2, 0.1, 0.01, 0.1, 5, 10, Pi/4, 15, 5000, 35);$



Нелинейные колебания в условиях резонанса

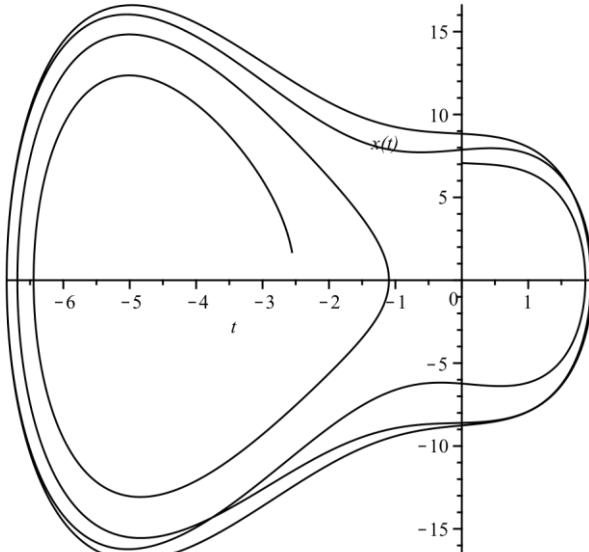
( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила,  $N$ - количество кадров), на графике представлен 14 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )  
 $GGAn(0.01, 10, 4, 0.01, 0.1, 5, 10, Pi/4, 15, 2000, 35);$



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

( $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила, N- количество кадров), на графике представлен 14 кадр ( $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f, z1, z2, T, np, N$ )

> GGAn(10,2,4,0.01,0.1,5,10,Pi/4,15,5000,35);



*Нелинейные колебания в условиях резонанса*

## Выходы по главе III

Получив процедуру решения нелинейного дифференциального уравнения, создана модели нелинейных колебаний, изменяя при этом параметры  $(\alpha, \beta, \gamma, \omega, \lambda, f)$ , где  $\alpha$  - нелинейный квадратичный коэффициент,  $\beta$  - нелинейный кубический коэффициент,  $\gamma$  - показатель затухания силы трения,  $\omega$  - собственная частота колебаний,  $\lambda$  - коэффициент трения,  $f$  - вынужденная сила.

Показаны, что:

- изменения предел значения  $f$  с 5 до 1: в такой модели график имеет область замкнутых кривых, которые стремятся к фокусу равному нулю;
- изменение предел значения  $\lambda$  с 0.1 до 1: в данной модели график имеет область замкнутых кривых, представляет собой спираль, навивающихся на эти кривые в начале координат;
- изменение параметра  $\omega$  с 0.1 до 1: в получившейся модели колебания имеют предельный цикл и их фокус стремится к нулю;
- изменение предел значений  $\gamma$  с 4 до 0.1: в получившийся модели мы наблюдаем, что фокус сместился в право, относительно начала координат, колебания будут затухать в окрестности точки  $x \approx 1.5$ ;
- изменение предел значения  $\alpha$  с 0.01 до 10: в данной модели мы видим, что график имеет предельный цикл и фокус сместился влево, а именно в точку  $x \approx -5$ .

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

За последние десятилетия занятия в компьютерной лаборатории и ведение научно исследовательские работы стали неотъемлемой частью учебного и научного процесса в учебных заведениях. Решение задач по механике с применением систем символьной математики обладает некоторыми особенностями. Поэтому в данной работе рассмотрены решение задач по теории колебаний некоторых механических систем с применением пакета символьной математики Maple.

Мы рассмотрели качественные и численные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений, ознакомились с командами в математическом пакете Maple для решения нелинейных дифференциальных уравнений, а так же построили модель резонанса нелинейных колебаний.

Решены конкретные тестовые задачи из теории колебаний, где наблюдается случаи резонанса при колебательных процессах.

Показаны конкретные случаи появления резонанса при колебательных процессах.

Также показаны возможности появления предельного цикла и фокуса некоторых точках.

Далее показаны анимированные модели изменения траектории при изменении пределов значений параметров.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Articolo G.A. Partial differential equations and boundary value problems with Maple. – 2nd ed./ 2009, Elsevier Inc. - 733 p.
2. L.Ridgway Scott. Numerical Analysis. Princeton University Press, 2011. - 342 p.
3. Richard L. Burden and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. Ninth Edition, Boston, USA, 2011. – 895 p.
4. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения, Москва, “МГТУ им. Н.Э. Баумана”, 2004. – 348 с.
5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
6. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990.– 336 с.
7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
8. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
9. Говорухин В.Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. -Москва: Мир, 1997.
10. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. – 566 б.
11. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, “Наука и техника”, 1979. –744 с.
12. Загретдинов Р.В., Аблаев Ф.М., Гаврилова Т.М., Перфилов С.Н.: Издательская система LaTeХ. - Казань, 1994.

13. Заусаев А.Ф. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособ. - Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2010. - 100 с.
14. Игнатьев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр. Компьютерная версия, Казань, 2002.
15. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
16. Ландау Л.Д. Механика. Москва: “Наука”, – 1988. Том 1, – 214 с.
17. Львовский С.: ТЕХ - Москва, 1996.
18. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.
19. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. Изд-во “БХВ-Петербург”, Санкт-Петербург, 2001.
20. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование Matlab.: Пер. с англ. – М.: Изд-во дом «Вильямс», 2001. - 720 с.
21. Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.
22. Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В., Коваленко Л.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению, Москва, “ЮНИМЕДИАСТАЙЛ”, 2002. –256с.
23. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
24. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

25. Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 304 с.
26. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения, Москва, Гостехиздат, 1958.

### **Internet ресурсы**

1. <http://www.edu.uz> – образовательный сайт.
2. <http://www.edu.ru> – образовательный сайт.
3. <http://www.intuit.ru> – сайт дистанционного обучения.
4. <http://www.eqworld.ru> – электронная база литературы.
5. <http://ru.wikipedia.org> – свободная энциклопедия «Vikipedia».
6. <http://www.twirpx.com> – электронная база литературы.
7. <http://www.ziyonet.uz> - электронная база литературы

## **Список публикации магистранта**

1.

2.