МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА: «МАШИНЫ И АППАРАТЫ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ – ОСНОВЫ МЕХАНИКИ»

КУРС ЛЕКЦИЙ

по предмету

МЕХАНИКА-1

Ташкент – 2017

Данное методическое пособие предназначено для студентов Ташкентского Химико-технологического института и студентов немеханических специальностей ВУЗов по курсу «Механика-1» и соответствует программам этих курсов.

Целью настоящего учебного пособия является самостоятельное закрепление и углубление знаний, полученных при изучении основ теоретическая механика является одной из важнейших фундаментальных общенаучных дисциплин. Она играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей. На результатах теоретической механики базируются общеинженерные дисциплины: сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин и другие.

Основной задачей теоретической механики является изучение движения материальных тел под действием сил. Важной частной задачей представляется изучение равновесия тел под действием сил.

.

Составители: доц. Тавбаев Ж.С., Сапаров Б.Ж.

Рецензент: проф. Сафаров И.И

Методической пособие обсуждено и одобрено на заседании кафедры «Машины и аппараты пищевой промышленности - основы механики »

протокол № от « » 2017 г.

Заведующий кафедрой доц. Т.Т.Сафаров

Данное методической пособие обсуждено и одобрено научно-методическим советом факультета «Технология пищевых продуктов» ТКТИ.

Протокол № от « » 2017 г.

Председатель научно-
методического совета доц. О.Қ.Юнусов.

ВВЕДЕНИЕ

Механика-1 изучает законы механического движения и взаимодействия материальных тел.

Механическое движение – это происходящее с течением времени изменение относительного положения тел в пространстве. Для определения положения тела используют системы отсчета. *Система отсчета* представляет собой некоторое тело и связанную с ним систему координат.

В теоретической механике рассматривают тела, движущиеся со скоростями, значительно меньшими скорости света, и имеющие размеры, превосходящие во много раз межмолекулярные расстояния. Рассматриваемые тела считают идеализированными (материальные точки, абсолютно твердые тела и пр.), что позволяет абстрагироваться от второстепенных факторов и выявлять наиболее общие законы механического движения.

Механика – одна из древнейших наук, возникшая в связи с потребностями практики. Зарождение механики связано с именами Аристотеля (384–322 гг. до н.э.) и Архимеда (287–212 гг. до н.э.). Однако наукой в современном смысле слова механика стала лишь с выходом в свет в 1687 году знаменитой работы И.Ньютона «Математические начала натуральной философии».

Механика-1 традиционно делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Лекция 1. МЕХАНИКА. СТАТИКА. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ СТАТИКИ. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы

1. Введение.
2. Элементы векторной алгебры.
3. Основные понятия статики.
4. Аксиомы статики.
5. Связи и их реакции.

Изучение этих вопросов необходимо в дальнейшем для изучения центра тяжести, произвольной пространственной системы сил, сил трения скольжения, моментов трения качения, решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т. п.), с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т. п. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется ***теоретической механикой.*** Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. В качестве материальных объектов помимо дискретных тел могут выступать среды – например, жидкость или газ и поля, поэтому круг объектов, изучаемых механикой очень широк.

В зависимости от физических свойств этих объектов и их размеров всю механику можно разделить на классическую или ньютонову и неклассическую.

Неклассическая механика – это действительно часть физики, в которой исследуются объекты микро- и макромира с учетом пространственно-временной зависимости.

Классическая механика имеет дело с объектами, протяженность которых приблизительно и с точностью до нескольких порядков заключена в интервале от 10^{-10} до 10^{10} метра. При их изучении свойства пространства и времени можно считать постоянными. Именно такую ньютонову механику мы и будем рассматривать в дальнейшем.

В зависимости от особенностей модели реальных объектов классическая механика делится на теоретическую механику – с моделью абсолютно твердого тела и механику сплошной среды с моделью деформируемого тела.

Основным методом исследования в механике является **гипотетико-дедуктивный.** Его суть заключается в выдвижении гипотезы, которая подтверждается или опровергается опытом.

Схематически место механики в системе естествознания можно определить так, как показано на рисунке ниже. При этом механика деформируемого тела или механика сплошной среды, образующая ядро этой науки, окружена тремя сегментами, представляющими собой теоретическую механику, неклассическую механику микро- и макромира и прикладную механику, которые примыкают соответственно: к математике, физике и практике в широком смысле этого слова.

Под прикладной механикой понимают раздел механики, в котором ее выводы и методы применяют для решения задач проектирования, строительства и эксплуатации сооружений. Этот термин близок к понятиям «техническая» или «строительная» механика.

Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел, т.е. те законы, которые, например, справедливы и для движения Земли вокруг Солнца и для полета ракеты или артиллерийского снаряда и т. п.

Под движением в механике мы понимаем механическое движение, т.е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.

Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике силой.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику.

Статика рассматривает частный случай механического движения, когда оно не зависит от времени – речь идет о рассмотрении равновесия твердого тела, загруженного системой сил и находящегося в состоянии покоя.

Кинематика рассматривает внешнюю сторону механического движения независимо от причин, вызвавших его. Это не что иное, как геометрия в четырехмерном пространстве, где время играет роль четвертого измерения.

Если известно положение движущейся точки в каждый момент времени, то кинематика позволяет построить ее траекторию и определить такие кинематические параметры, как скорость или ускорение.

Динамика исследует общий случай механического движения твердого тела с учетом причин, вызвавших его.

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 до н. э.) и происходит от греческого слова μηχαυή, означающего по современным понятиям «сооружение», «машина», «изобретение»

В древние времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о так называемых простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статика). Обоснование начал статики содержится уже в сочинения одного из великих ученых Архимеда (287 – 212 г. но н. э.).

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды гениального ученого и мыслителя М. В. Ломоносова (1711—1765). Из многочисленных отечественных ученых, внесших значительный вклад в развитие различных областей теоретической механики, прежде всего, должны быть названы: М. В. Остроградский (1801—1861), которому принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики; П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший новое направление в исследовании движения механизмов; С. В. Ковалевская (1850—1891), решившая одну из труднейших задач динамики твердого тела; И. В. Мещерский (1859—1935), заложивший основы механики тел переменной массы; К. Э. Циолковский (1857—1935), сделавший ряд фундаментальных открытий в теории реактивного движения; А. Н. Крылов (1863—1945), разработавший теорию корабля и много внесший в развитие теории гироскопических приборов.

Выдающееся значение для развития механики имели труды «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского (1847—1921) и его ближайшего ученика С.

А. Чаплыгина (1869—1942). Характерной чертой в творчестве Н. Е. Жуковского было приложение методов механики к решению актуальных технических задач. Большое влияние идеи Н. Е. Жуковского оказали и на преподавание теоретической механики в высших технических учебных заведениях нашей страны.

Стоящая в наши дни перед отечественной наукой и техникой задача непрерывного роста и внедрения в производство новой техники требует дальнейшего повышения качества подготовки инженерных кадров, расширения теоретической базы их знаний. Известную роль в решении этой задачи должно сыграть и изучение одной из научных основ современной техники – теоретической механики.

Элементы векторной алгебры

Теоретической механике рассматриваются такие векторные величины как сила, моменты силы относительно точки и оси, момент пары сил, скорость, ускорение и другие.

1. Понятие вектора.

Для определенности рассматриваем прямоугольную декартову систему координат.

Вектор - это направленный отрезок, который характеризуется длиной и направлением.

Операции над векторами. Вектора можно складывать и умножать на число.

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$ - сумма двух векторов есть вектор

$\alpha\cdot\bar{a}=\bar{b}$ - произведение вектора на действительное число есть вектор

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$ - существует нулевой вектор

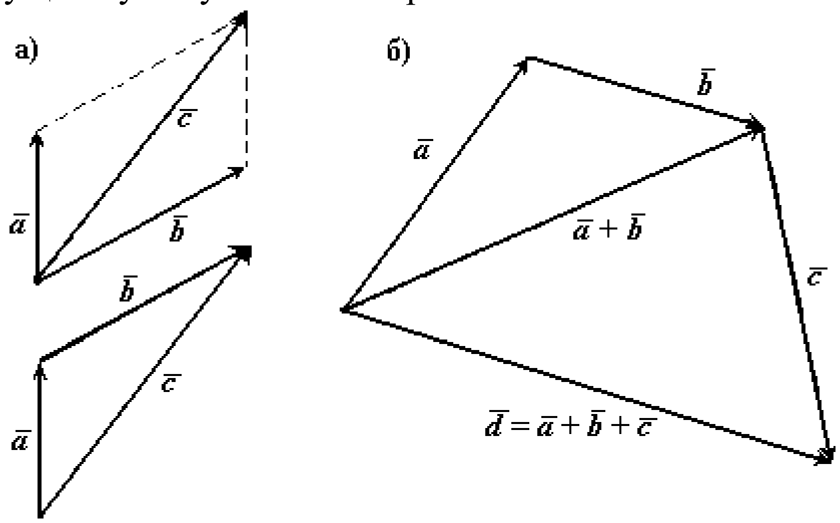


Рис.1

В математике все вектора являются свободными, их можно переносить параллельно самим себе.

В сумме двух векторов (рис.1,*а*) начало второго вектора можно поместить в конец первого вектора, тогда сумму двух векторов можно представить как вектор, имеющий начало в начале первого вектора, а конец в конце второго вектора. Применяя это правило для суммы нескольких векторов (рис.1,*б*) получаем, что суммой нескольких векторов является вектор замыкающий ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов.

Операции над векторами подчиняются следующим законам (см. рис.2):

$$\bar a+\bar b=\bar b+\bar a \qquad \bar a+\left(\bar b+\bar c\right)+\bar c=\bar a+b+\bar c$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\bar a)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\bar a \qquad (\alpha+\beta)\cdot\bar a=\alpha\cdot\bar a+\beta\cdot\bar a$$

$$\alpha\cdot\left(\bar a+\bar b\right)=\alpha\cdot\bar a+\alpha\cdot\bar b \qquad 0\cdot\bar a=\bar 0$$

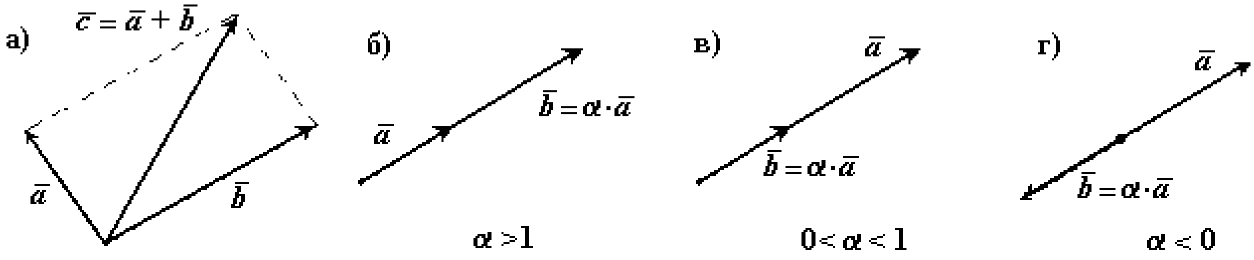


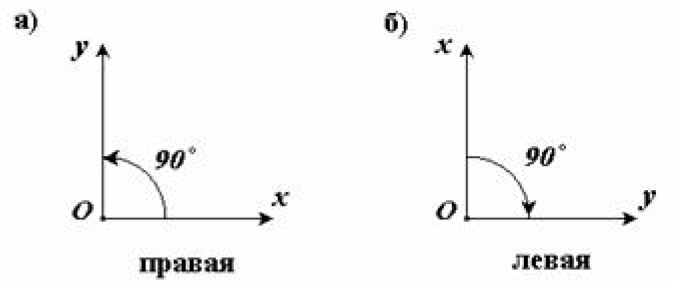
Рис.2

2. Правые и левые системы координат.

Декартовы системы координат делятся на два вида: правую и левую.

Рассмотрим декартовы системы координат на плоскости (см. рис. 3).

При повороте оси Ox правой системы координат на 90^o против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .



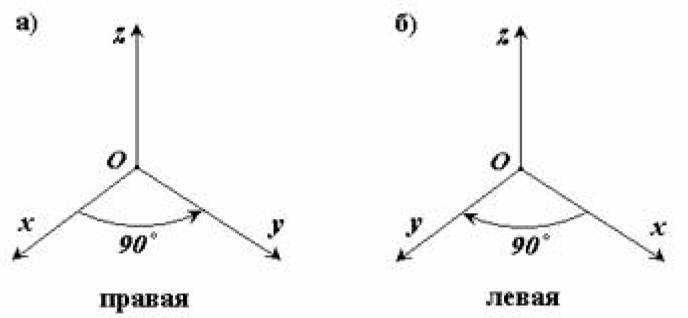


Рис.3 **Рис.4**

Рассмотрим декартовы системы координат в пространстве (см. рис.4).

При повороте оси Ox правой системы координат вокруг оси Oz на 90^0 против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .

3. Длина, проекции и направляющие косинусы вектора.

В дальнейшем будем рассматривать правую декартову систему координат. Единичные вектора вдоль осей Ox, Oy и Oz образуют систему единичных (или базисных) векторов. Любой вектор, имеющий начало в точке O, можно представить как сумму $\bar a=a_x\cdot\bar\imath+a_y\cdot\bar\jmath+a_z\cdot\bar k$, числа (a_x, a_y, a_z) - это проекции вектора $\bar a$ на оси координат (см. рис.5).

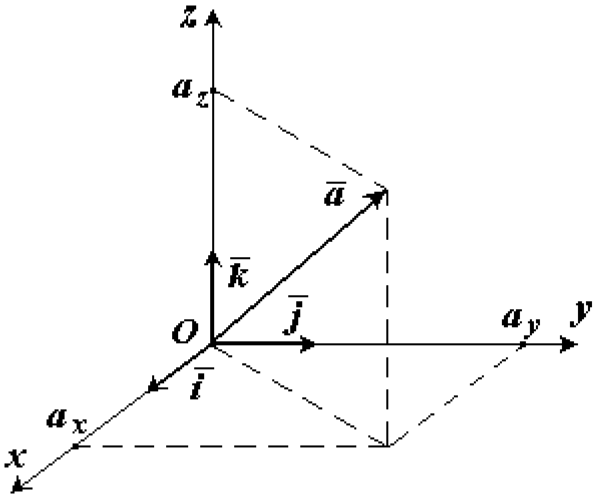


Рис.5

Длина (или модуль) вектора $\bar{a}$ определяется формулой $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и обозначается *a* или $|\bar{a}|$.

Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, которая определяется отрезком, отсекаемым перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на эту ось. Проекция вектора считается положительной (+), если направление ее совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной (-), если проекция направлена в противоположную сторону (см. рис.6).

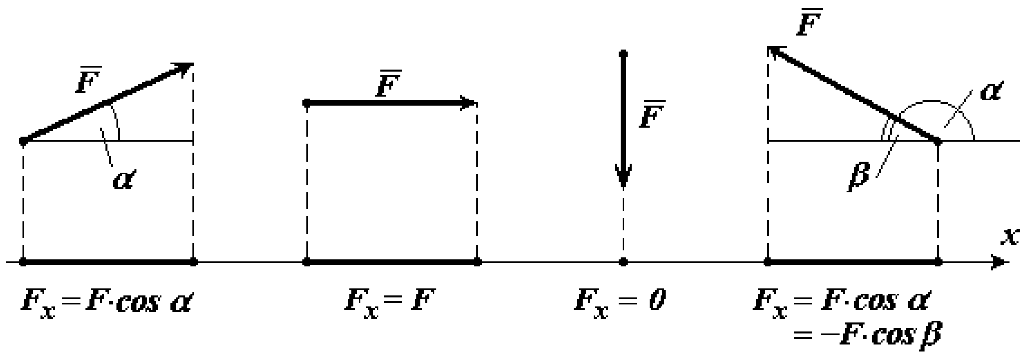


Рис.6

<u>Направляющими косинусами</u> $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора называются косинусы углов между вектором и положительными направлениями осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

Любая точка пространства с координатами (x, y, z) может быть задана своим радиус-вектором

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Координаты (x, y, z) это проекции вектора $\bar{r}$ на оси координат.

4. Скалярное произведение двух векторов

Имеется два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),$$
$$\bar{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

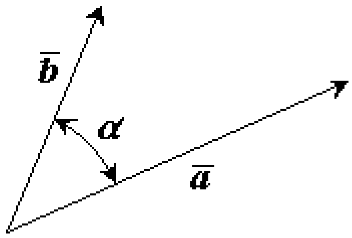


Рис.7

Результатом скалярного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является скалярная величина (число).

Записывается как $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $(\bar{a},\ \bar{b})$. Скалярное произведение двух векторов равно $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\alpha)$

Свойства скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a} \qquad \bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2\geq 0$$

$$\bar{\imath}\cdot\bar{\jmath}=\bar{\jmath}\cdot\bar{\jmath}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1 \qquad \bar{\imath}\cdot\bar{\jmath}=\bar{\imath}\cdot\bar{k}=0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\cdot\bar{\imath}+a_y\cdot\bar{\jmath}+a_z\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\bar{\imath}+b_y\cdot\bar{\jmath}+b_z\cdot\bar{k}\right)=$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

5. Векторное произведение двух векторов

Имеется два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\bar{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),$$
$$\bar{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right).$$

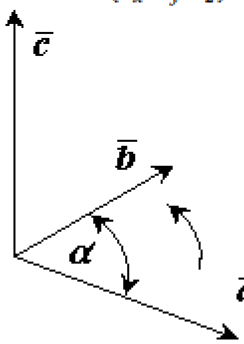


Рис.8

Результатом векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является вектор $\bar{c}$. Записывается как $\bar{a}\times\bar{b}$ или $[\bar{a},\bar{b}.]$.

Векторное произведение двух векторов это вектор $\bar{c}$, перпендикулярный к обоим этим векторам, и направленный так, чтобы с его конца поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ был виден против часовой стрелки.

Длина (или модуль) векторного произведения равна $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\alpha)$

Свойства векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a} \qquad \bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$$

$$(\alpha\cdot\bar{a})\times\bar{b}=\alpha\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right) \qquad \bar{a}\times\bar{a}=0$$

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=0$$

Векторное произведение двух векторов вычисляется через их проекции следующим образом:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{\imath}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\cdot\bar{\jmath}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=$$

$$= \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right) \cdot \bar{\imath} + \left(a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\right) \cdot \bar{\jmath} + \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right) \cdot \bar{k}$$

$$c_x = \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right)$$

$$c_y = \left(a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\right)$$

$$c_z = \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right)$$

Основные понятия статики

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучается условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Твердое тело. В статике и вообще в теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. То есть предполагается, что эти тела не деформируются, не изменяют свою форму и объем, какое бы действие на них не было оказано. ***Материальной точкой*** будет называться абсолютно твердое тело, размерами которого можно пренебречь.

Исследованием движения нетвердых тел – упругих, пластичных, жидких, газообразных, занимаются другие науки (сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика и т.д.).

Под равновесием будем понимать состояния покоя тела по отношению к другим материальным телам.

Основные понятия:

1. Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике ***силой.***

В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах (Н), килоньютонах (кН).

Сила является величиной векторной.

Ее действие на тело определяется: 1) численной величиной или модулем силы, 2) направлением силы, 3) точкой приложения силы (рис.9).

Например, будем прикладывать к стулу одну и ту же по модулю силу *F*. При приложении силы сверху вниз стул остается в состоянии покоя; при положении силы снизу вверх - стул поднимается; изменим направление нагружения, приложим силу горизонтально к спинке стула - стул опрокинется. Так как во всех случаях направление и место приложения силы различны, то и результат действия силы на стул разный, несмотря на то, что модуль силы *F* во всех случаях одинаков.

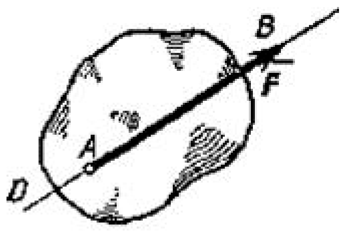


Рис.9

Силу, как и другие векторные величины, изображают в виде направленного отрезка со стрелкой на конце, указывающей его направление.

Прямая *DE*, вдоль которой направлена сила, называется ***линией действия силы.***

Понятия «линия действия» и «направление» близки, но не тождественны. Очевидно, что по линии действия можно определить направление с точностью до противоположного. Аналогично связаны понятия «модуль» и «величина» для вектора.

В тексте вектор силы обозначается латинскими буквами $\bar{F}, \bar{R}, \bar{P}$ и др., с черточками над ними. Если черточки нет, значит у силы известна только ее численная величина - модуль.

Рис. 1.2.

Предполагается, что действие силы на тело не изменится, если ее перенести по линии действия в любую точку тела (конечно – твердого тела). Поэтому вектор силы называют ***скользящим вектором***. Если силу перенести в точку, не расположенную на этой линии, действие ее на тело будет совсем другим.

2. Совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть ***системой сил.***

3. Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется ***свободным.***

4. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются ***эквивалентными.***

Например, если системы сил, изображенных на рис. 9.1, *а* и рис. 9.1, *б,* уравновешены, то эти две системы сил будут эквивалентны друг другу.

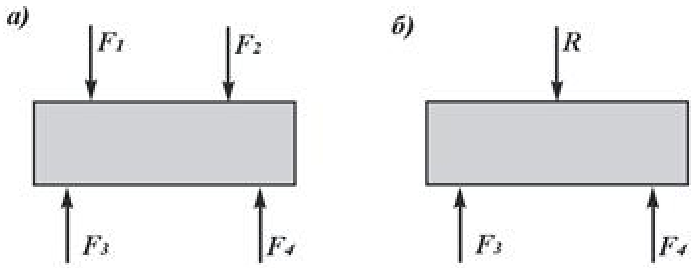


Рис.9.1. Система сил:

а – заданная система сил; *б* – эквивалентная система сил

5. Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется ***уравновешенной или эквивалентной нулю.***

6. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется ***равнодействующей данной системы сил.*** Таким образом, равнодействующая - это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело. Так как система сил F_1 и F_2 эквивалентна одной силе R (рис. 9.1, *б*), то сила R называется равнодействующей данной системы сил. Силы F_1 и F_2 в свою очередь могут называться составляющими силы R.

7. Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется ***уравновешивающей силой.***

8. Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на внешние и внутренние. ***Внешними*** называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. ***Внутренними*** называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

9. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется ***сосредоточенной.*** Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются ***распределенными.***

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

В частности, обычно рассматриваемая в механике сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собою равнодействующую сил тяжести его частиц. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести тела.

Аксиомы статики.

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами или принципами статики. Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Часть из этих аксиом является следствиями основных законов механики, с которыми мы познакомимся в динамике.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 10).

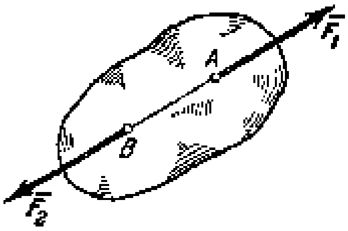


Рис.10

Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

Аксиома 2. Действие данной системы, сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

Следствие из 1-й и 2-й аксиом. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

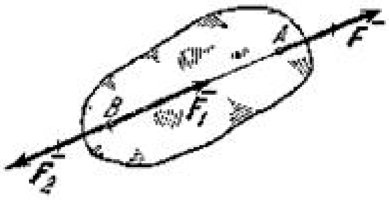


Рис.11

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила $\bar{F}$ (рис.11). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим к ней две уравновешенные силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, такие, что $\bar{F}_1 = \bar{F}$, $\bar{F}_2 = -\bar{F}$. От этого действие силы $\bar{F}$ на тело не изменится. Но силы $\bar{F}$ и $\bar{F}_2$ согласно аксиоме 1 также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело. Будет действовать только одна сила $\bar{F}_1$, равная $\bar{F}$, но приложенная в точке B.

Таким образом, вектор, изображающий силу $\bar{F}$, можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется скользящим).

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор $\bar{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ (рис.12), называется геометрической суммой векторов $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$: $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

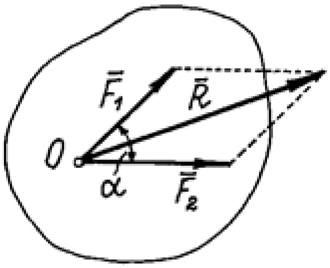


Рис.12

Величина равнодействующей

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2cos\alpha}.$$

Конечно, $R \neq F_1 + F_1$. Такое равенство будет соблюдаться только при условии, что эти силы направлены по одной прямой в одну сторону. Если же векторы сил окажутся перпендикулярными, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Следовательно, аксиому 3 можно еще формулировать так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Аксиома 4 (принцип противодействия). При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Закон о равенстве действия и противодействия является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело A действует на тело В с силой $\bar{F}$, то одновременно тело B действует на тело A с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но противоположную сторону силой

$\bar{F} = -\bar{F}$ (рис. 13). Однако силы $\bar{F}$ и $\bar{F}'$ не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам. Эта аксиома соответствует третьему закону Ньютона: действие всегда равно и противоположно противодействию. При этом необходимо помнить, что в аксиоме 4 рассматривается случай, когда силы приложены к разным телам и в этом случае система сил не является уравновешенной в отличие от случая действия сил в аксиоме 2.

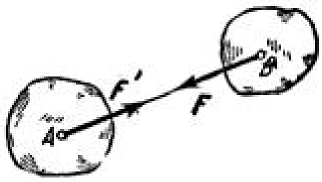


Рис.13

Этот принцип утверждает, что в природе не существует односторонних явлений. На рис. 13.1 изображена балка, опирающаяся на стены концами *A* и *B*. Для выявления сил действия и противодействия отделим балку от стен. Тогда силы действия балки на стену выражаются силами D_A и D_B, приложенными к стенам, а силы противодействия - силами R_A и R_B, приложенными к балке, которые в дальнейшем будем называть ***реакциями***.

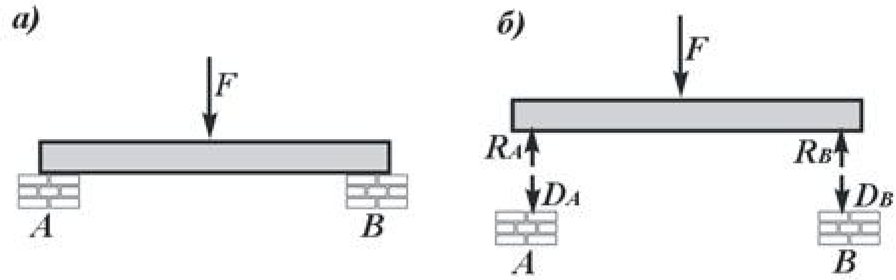


Рис. 13.1. Опирание балки на опоры:
а – схема загружения балки; *б* – силы действия балки на опоры и противодействия со стороны опор на балку

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым). Из принципа отвердения следует, что условия, необходимые и достаточные для равновесия абсолютно твердого тела, необходимы, но не достаточны для равновесия деформируемого тела, по форме и размерам тождественного с данным.

Высказанное в этой аксиоме утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом и т. д.

Аксиома 6 (аксиома связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если механическое действие связей заменить реакциями этих связей (пояснения к этой аксиоме в следующем параграфе).

Приведенные принципы и аксиомы положены в основу методов решения задач статики. Все они широко используются в инженерных расчетах.

Связи и их реакции.

По определению, тело, которое не скреплено с другими телами и может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется ***свободным*** (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется ***несвободным.*** Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, будем называть ***связью.***

Например, тело лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый ***принцип освобождаемости***, которым будем пользоваться в дальнейшем. Записывается он так.

Любое несвободное тело можно сделать свободным, если связи убрать, а действие их на тело заменить силами, такими, чтобы тело оставалось в равновесии.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем ила иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто ***реакцией связи.***

Так у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной, конечно, весу тела.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции связи также наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Если в качестве физического тела рассматривать какой-либо элемент инженерного сооружения (балка, ферма, колонна, плита и т. п.), который передает давление на опоры, то реакции опор (связей) называют ***опорными реакциями.*** Реакции связей носят вторичное происхождение, они возникают как противодействие другим силам.

Все силы, кроме реакции связей, называют ***заданными силами.*** Термин «заданные силы» имеет глубокий смысл. Заданные силы чаще всего являются ***активными***, т.е. силами, которые могут вызвать движение тел, например: сила тяжести, снеговая или ветровые нагрузки и т.п. Учитывая сказанное выше, будем подразделять силы на активные силы и реакции связей.

Одна из главных задач статики твердого тела - нахождение реакции связей. Для определения реакции связей необходимо найти величину этой реакции, линию и направление ее действия. Линия действия реакции обычно проходит через точку касания тела и связи. Численное значение реакции определяется расчетом, а направление реакции зависит от вида (конструкции) связи.

Для определения направления реакции необходимо установить особенности взаимодействия твердого тела со связями различного вида. Следует иметь в виду, что реакция всегда направлена противоположно направлению возможного перемещения тела при удалении связи.

Рассмотрим, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

1. ***Гладкая плоскость (поверхность) или опора.*** Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис.14,*а*). Поэтому реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 14,*б*), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

Если поверхности не гладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения $\bar{F}_{тр}$, которая направлена перпендикулярно нормальной реакции $\bar{N}$ в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

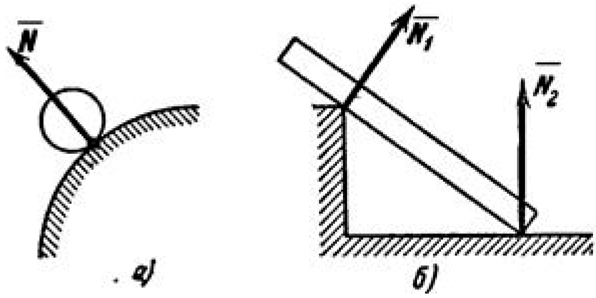


Рис.14

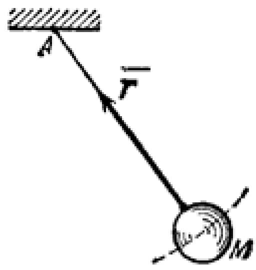


Рис.15

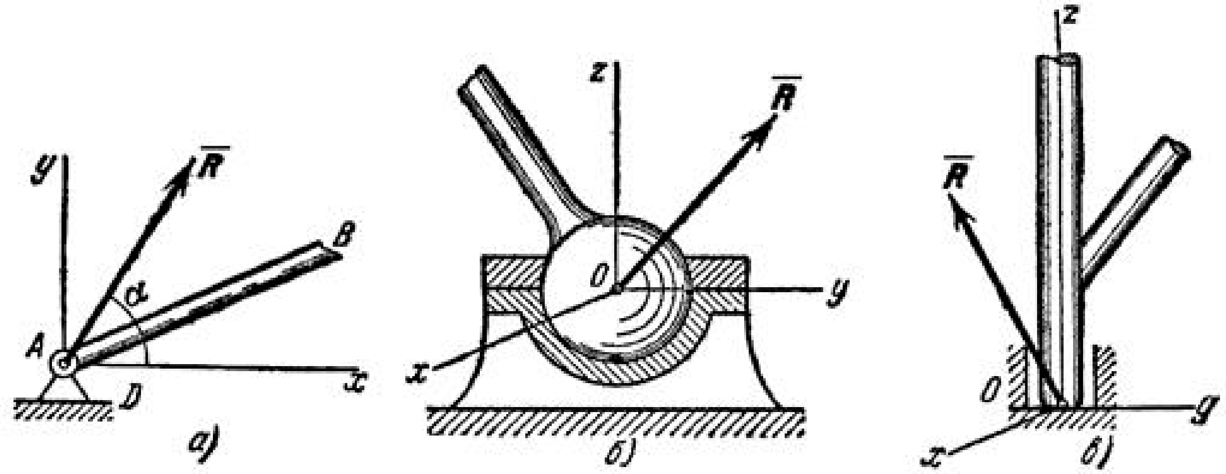


Рис.16

2. ***Нить (гибкие связи).*** Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис.15), не дает телу *M* удаляться от точки подвеса нити по направлению *AM*. Поэтому реакция *T* натянутой нити направлена вдоль нити от тела к точке ее подвеса. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило. Оно избавляет от лишних и ненужных предположений и, как убедимся далее, помогает установить сжат стержень или растянут.

3. ***Цилиндрический шарнир (подшипник).*** Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстия в этих телах, то такое соединение называется шарнирным или просто шарниром; осевая линия болта называется осью шарнира. Тело *AB*, прикрепленное шарниром к опоре *D* (рис.16,*а*), может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа); при

этом конец A тела не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира. Поэтому реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, т.е. в плоскости A_{xy}. Для силы R в этом случае наперед не известны ни ее модуль R, ни направление (угол α).

4. ***Шаровой шарнир и подпятник.*** Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Примерами таких связей служат шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу (рис.16,*б*) и подшипник с упором (подпятник) (рис. 16,*в*). Реакция R шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление в пространстве. Для нее наперед неизвестны ни модуль реакции R, ни углы, образуемые ею с осями x, y, z.

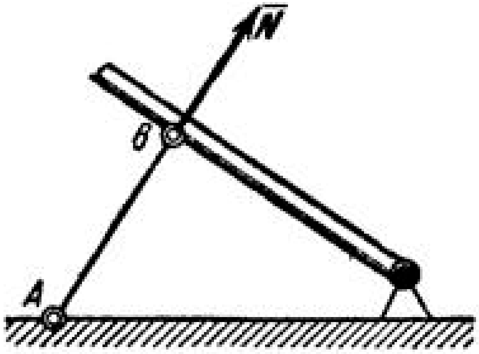


Рис.17

5. ***Стержень.*** Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень AB, закрепленный на концах шарнирами (рис.17). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы приложенные в шарнирах A и B. Но если стержень AB находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках A и B силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня. Следовательно, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то реакция $\bar{N}$ стержня будет направлена вдоль оси стержня.

6. ***Подвижная шарнирная опора*** (рис.17.1). Это устройство представляет собой опорный элемент (подшипник), внутри которого вращается палец (ось) шарнира. Такая опора не препятствует вращению вокруг оси, но препятствует движению тела в любом направлении в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира. Реакция $\vec{R}$ такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры. На схемах эту связь изображают так, как показано на рис. 17.1.

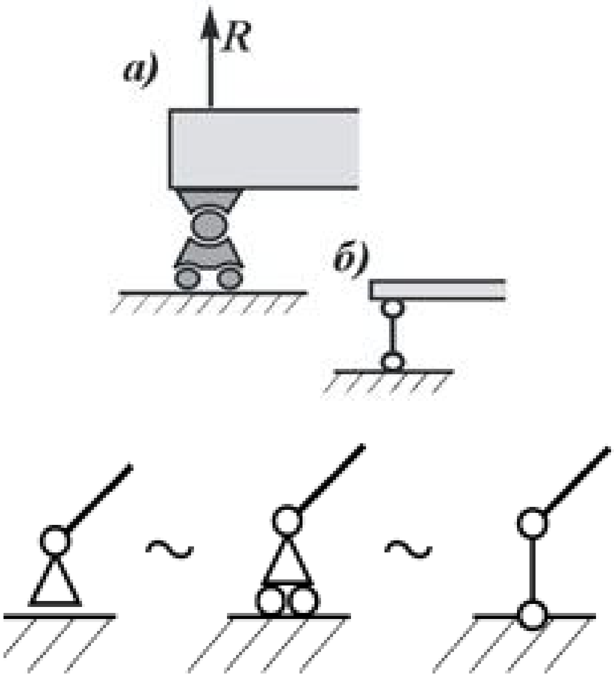


Рис.17.1. Шарнирно подвижная опора:
а – вид катковой опоры; *б* – расчетная схема шарнирно-подвижных опор

7. ***Неподвижная шарнирная опора*** (рис.18). Реакция R шарнирно-неподвижной опоры расположена в плоскости, перпендикулярной оси возможного вращения, и ее направление определяют две взаимно перпендикулярные составляющие R_x и R_y, соответствующие направлению выбранных осей (рис. 18, *а*). В строительной механике шарнирно-неподвижную опору изображают в виде двух шарнирных стержней пересекающихся в точке опоры (рис.18, *б*) или шарнира (рис 18, *в*). При решении задач будем реакцию $\bar{R}$ изображать ее составляющими $\bar{R}_y$ и $\bar{R}_x$ по направлениям осей координат. Если мы, решив задачу, найдем $\bar{R}_y$ и $\bar{R}_x$, то тем самым будет определена и реакция $\bar{R}$; по модулю $\mathrm{R} = \sqrt{R_y^2 + R_x^2}$.

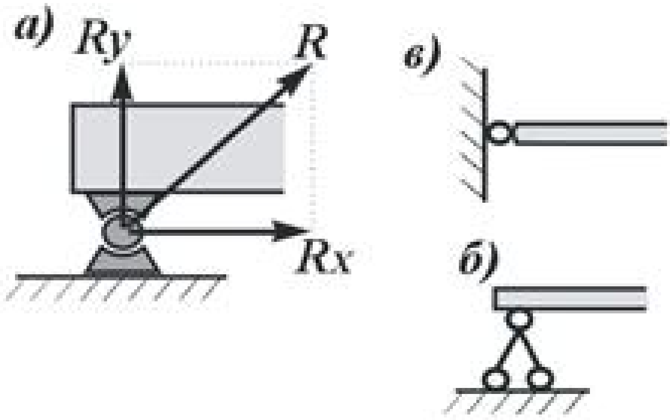
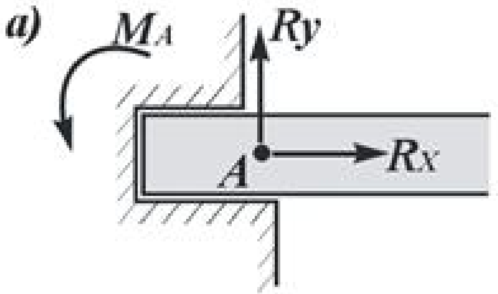


Рис.18. Шарнирно-неподвижная опора:
а – вид шарнирно-неподвижной опоры;
б, *в* – расчетные схемы шарнирно-неподвижных оп

Способ закрепления, показанный на рис.18, употребляется для того, чтобы в балке не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

8. ***Неподвижная защемляющая опора или жесткая заделка*** (рис.19, а). Это соединение исключает возможность каких-либо перемещений абсолютного твердого тела. Балка, изображенная на рис.19, *а*, жестко заделана в стену в точке А. Перемещению ее в вертикальном направлении, препятствует реакция R_y, перемещению в горизонтальном направлении препятствует реакция R_x и повороту вокруг точки А - опорный момент M_A. Характерным для данной опоры является наличие опорного момента сил, исключающего вращение тела вокруг любой оси. Схематическое изображение такой опоры в теоретической механике показано на рис. 1.9, *б.* Если под такую балку где-нибудь в точке *В* подвести еще одну опору, то балка станет статически неопределимой.

С помощью указанных опорных связей сооружения прикрепляются к фундаментам или отдельные элементы соединяются между собой.



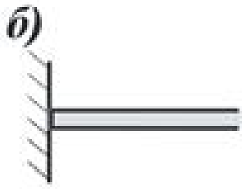


Рис. 19. Жесткая заделка:
а – вид жесткой заделки; б – расчетная схема жесткой заделки

При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению – показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

Иногда приходится исследовать равновесие нетвердых тел. При этом будем пользоваться предположением, что если это нетвердое тело находится в равновесии под действием сил, то его можно рассматривать как твердое тело, используя все правила и методы статики.

Связи, как и другие понятия, встречающиеся в аксиомах, являются абстракциями, весьма условно отражающими свойства реальных объектов. Например, рассмотренная выше гибкая невесомая нить может быть моделью подвесных и вантовых систем, у которых масса погонного метра троса составляет десятки и сотни килограммов. Однако усилия, возникающие в таких тросах, во столько раз больше их собственного веса, что при расчете последним можно пренебречь, считая их невесомыми.

Лекция 2. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СИЛ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы

1. Проекция силы на ось и на плоскость.
2. Геометрический способ сложения сил.
3. Равновесие системы сходящихся сил.
4. Момент силы относительно центра или точки.
5. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
6. Решение задач.

Изучение этих вопросов необходимо в дальнейшем для изучения центра тяжести, произвольной пространственной системы сил, сил трения скольжения, моментов трения качения, решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Проекция силы на ось и на плоскость.

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

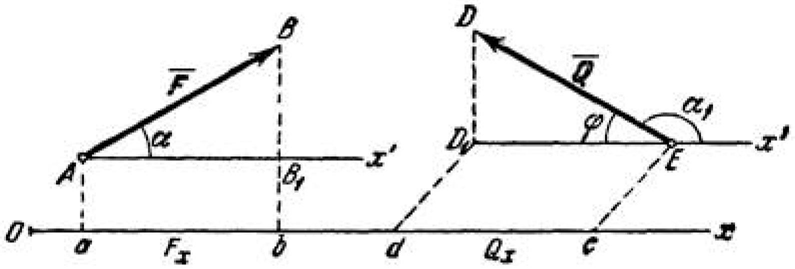


Рис. 1

Обозначать проекцию силы $\bar{F}$ на ось *Ox* будем символом F_x. Тогда для сил, изображенных на рис.1, получим:

$$F_x = AB_1 = ab, \ \ Q_x = -ED_1 = -ed.$$

Но из чертежа видно, что $AB_1 = Fcos\alpha, \ \ ED_1 = Qcos\beta = -Qcos\alpha_1$.

Следовательно,

$$F_x = Fcos\alpha, \ \ Q_x = -Qcos\varphi = Qcos\alpha_1,$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

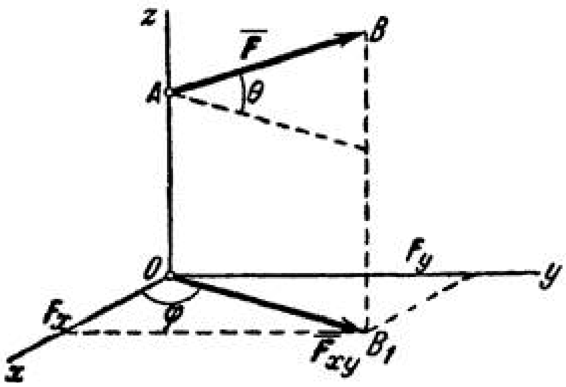


Рис.2

Проекцией силы $\bar{F}$ на плоскость *Oxy* называется вектор $F_{xy} = OB_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\bar{F}$ на эту плоскость (рис. 2). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости *Oxy*. По модулю $F_{xy} = F\cos\theta$, где θ — угол между направлением силы $\bar{F}$ и ее проекции F_{xy}.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

Например, в случае, изображенном на рис. 2, найдем таким способом, что

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$$

Геометрический способ сложения сил.

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3, *а*), откладываем от произвольной точки *O* (рис. 3, *б*) вектор *Oa*, изображающий в выбранном масштабе силу F_1, от точки *a* откладываем вектор $\overline{ab}$, изображающий силу F_2, от точки *b* откладываем вектор *bc*, изображающий силу F_3 и т. д.; от конца *m* предпоследнего вектора откладываем вектор *mn*, изображающий силу F_n. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On} = \bar{R}$**,** изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$$

 или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$.

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление $\bar{R}$ не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

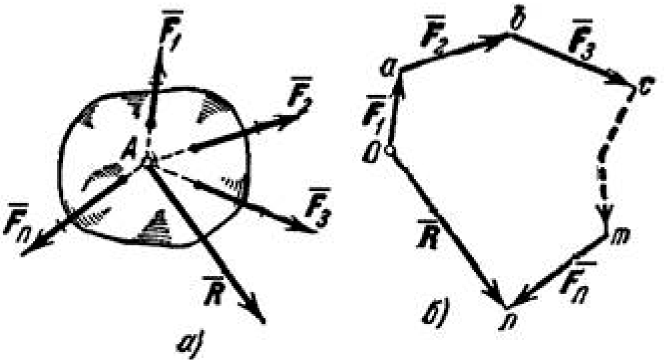


Рис.3

Фигура, построенная на рис. 3,*б*, называется ***силовым (в общем случае векторным) многоугольником.*** Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора $\bar{R}$ - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил.

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы (см. рис. 3, *а*).

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 3, *а* в точке *А*).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ сходятся в точке А (рис. 3, *а*), то сила, равная главному вектору $\bar{R}$, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке *А*, будет равнодействующей этой системы сил.

Примечания.

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник – отличный от первого.

2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.

3. Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Равновесие системы сходящихся сил.

Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода:

1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции».

2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. ***Геометрическое условие равновесия.*** Так как равнодействующая $\bar{R}$ сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то $\bar{R}$ может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы, сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. ***Аналитические условия равновесия.*** Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

Равенства выражают ***условия равновесия в аналитической форме:*** для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0,$$

Равенства выражают также необходимые условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

Теорема о трех силах. *Уравновешенная плоская система трех непараллельных сил является сходящейся.*

Условие «плоская» в формулировке теоремы не является необходимым – можно убедиться, что любая уравновешенная система трех сил всегда будет плоской. Это следует из условий равновесия произвольной пространственной системы сил, которые будут рассмотрены далее.

Пример 1. На рис.4 показаны три силы. Проекции сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ на оси *x, y, z* очевидны:

$$X_1 = -F_1;\ Y_1 = 0;\ Z_1 = 0;\ X_2 = F_2 sin\alpha;\ Y_2 = 0;\ Z_2 = -F_2 cos\alpha.$$

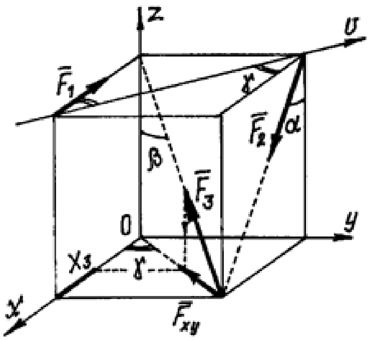


Рис.4

А чтобы найти проекцию силы $\bar{F}_3$ на ось *x* нужно использовать ***правило двойного проектирования***.

Проектируем силу сначала на плоскость *x*O*y*, в которой расположена ось (рис.4), получим вектор $\bar{F}_{xy}$, величиной $F_{xy} = F_3 sin\beta$, а затем его проектируем на ось *x*: $X_3 = -F_{xy} cos\gamma = -F_3 sin\beta \cdot cos\gamma$.

Аналогично действуя, найдём проекцию на ось *y*: $Y_3 = -F_{xy} sin\gamma = -F_3 sin\beta \cdot sin\gamma$.

Проекция на ось z находится проще: $Z_3 = F_3 cos\beta$.

Нетрудно убедиться, что проекции сил на ось *V* равны:

$$V_1 = F_1 cos\gamma;\ V_2 = -F_2 sin\alpha \cdot cos\gamma;$$
$$V_3 = F_{xy} \cos(180^0 - 2\gamma) = -F_3 sin\beta \cdot cos2\gamma.$$

При определении этих проекций удобно воспользоваться рис.5, видом сверху на расположение сил и осей.

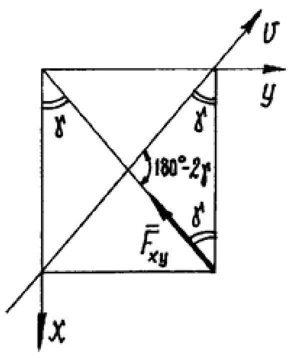


Рис.5

Вернёмся к системе сходящихся сил (рис. 6). Проведём оси координат с началом в точке пересечения линий действия сил, в точке *O*.

Мы уже знаем, что равнодействующая сил $\bar{R} = \sum \bar{F}_i$. Спроектируем это векторное равенство на оси. Получим проекции равнодействующей $\bar{R}$ на оси *x*, *y*, *z*:

$$R_x = \sum X_i, \ R_y = \sum Y_i, \ R_z = \sum Z_i.$$

Они равны алгебраическим суммам проекций сил на соответствующие оси. А зная проекции равнодействующей, можно определить и величину её как диагональ прямоугольного параллелепипеда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ или

$$R = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}.$$

Направление вектора $\bar{R}$ найдём с помощью направляющих косинусов (рис.6):

$$cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

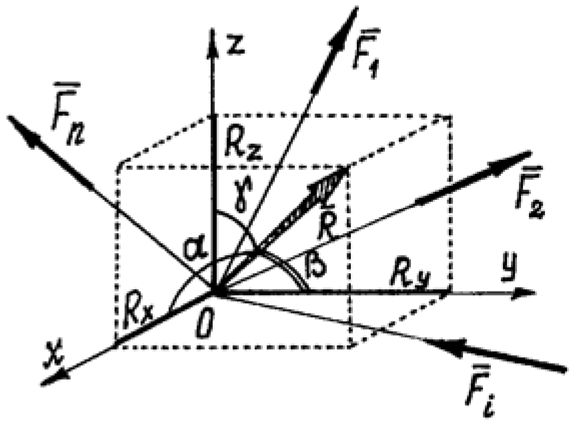


Рис.6

Пример 2. На шар, вес которого *P,* лежащий на горизонтальной плоскости и привязанный к ней нитью *AB*, действует сила *F* (рис.7). Определим реакции связей.

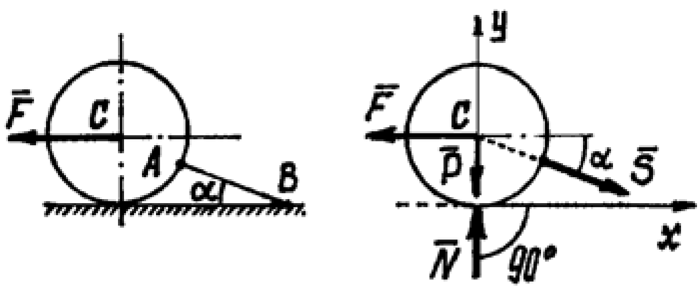


Рис.7

Следует сразу заметить, что все задачи статики решаются по одной схеме, в определённом порядке.

Продемонстрируем ее на примере решения этой задачи.

1. Надо выбрать (назначить) объект равновесия – тело, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы найти неизвестные.

В этой задаче, конечно, объект равновесия – шар.

2. Построение расчётной схемы. Расчётная схема – это объект равновесия, изображённый отдельно, свободным телом, без связей, со всеми силами, действующими на него: реакциями и остальными силами.

Показываем реакцию нити $\bar{S}$ и нормальную реакцию плоскости – $\bar{N}$ (рис.7). Кроме них на шар действуют заданные силы $\bar{F}$ и $\bar{P}$.

3. Надо установить какая получилась система сил и составить соответствующие уравнения равновесия.

Здесь получилась система сходящихся сил, расположенных в плоскости, для которой составляем два уравнения (оси можно проводить произвольно):

$$\sum X_i = 0;\ -F + Scos\alpha = 0,$$
$$\sum Y_i = 0;\ -P + N - Ssin\alpha = 0.$$

4. Решаем систему уравнений и находим неизвестные.

$$S = \frac{F}{cos\alpha}, \qquad N = Ssin\alpha + P = Ftg\alpha + P.$$

По условию задачи требовалось найти давление шара на плоскость. А мы нашли реакцию плоскости на шар. Но, по определению следует, что эти силы равны по величине, только давление на плоскость будет направлено в противоположную сторону, вниз.

Пример 3. Тело весом *P* прикреплено к вертикальной плоскости тремя стержнями (рис.8). Определим усилия в стержнях.

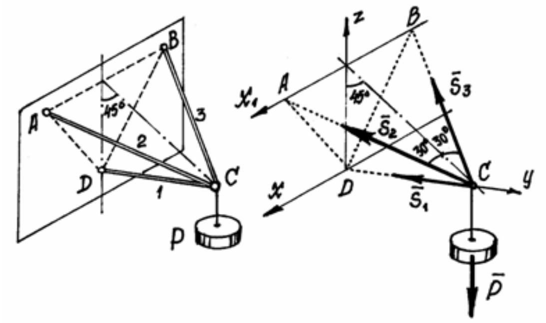


Рис.8

В этой задаче объект равновесия – узел *C* вместе с грузом. Он нарисован отдельно с реакциями, усилиями в стержнях $\bar{S_1}, \bar{S_2}, \bar{S_3}$, и весом $\bar{P}$. Силы образуют пространственную систему сходящихся сил. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0;\ S_2cos60^0 - S_3cos60^0 = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\ -S_1 - S_2cos30^0 \cdot cos45^0 - S_3cos30^0 \cdot cos45^0 = 0;$$
$$\sum Z_i = 0;\ S_2cos30^0 \cdot cos45^0 + S_3cos30^0 \cdot cos45^0 = 0.$$

Из первого уравнения следует: $S_2 = S_3$. Тогда из третьего:

$S_2 = S_3 = P/2cos30^0 \cdot cos45^0 = 2P/\sqrt{6}$, а из второго: $S_1 = -2S_2cos30^0 \cdot cos45^0 = -P$.

Когда мы направляли усилие в стержне от узла, от объекта равновесия, предполагали, что стержни работают на растяжение. Усилие в стержне *CD* получилось отрицательным. Это значит – стержень сжат. Так что знак усилия в стержне указывает как работает стержень: на растяжение или на сжатие.

Пример 4. Определить реакции стержней, соединенных шарниром *B*, если к нему подвешен груз весом *Q* (рис.9,*а*).

Решение. В соответствии с предложенным выше планом выбираем тело, равновесие которого мы будем рассматривать. Этот выбор, в основном, определяется условиями задачи. Если в этой задаче рассмотреть равновесие подвешенного груза, то мы сумеем найти только силу натяжения нити, которая равна весу тела: $T = Q$ (рис.9,*б*).

Чтобы определить реакции стержней, рассмотрим равновесие точки B. Можно считать, что к ней посредством нити приложена активная сила Q и реакции отброшенных стержней S_A и S_C (рис.9,*в*).

Решим эту задачу аналитически. Выбирая начало отсчета в точке B, составим уравнения равновесия, которые примут вид:

$-S_A \cos\alpha + S_C \cos\beta = 0;$

$S_A \sin\alpha + S_C \sin\beta = Q.$

Чтобы найти отсюда S_C сложим полученные уравнения, умножив предварительно первое из них на $\sin\alpha$, а второе – на $\cos\alpha$:

$S_C (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) = Q \cos\alpha.$

Отсюда следует, что $S_C = Q \cos\alpha/\sin(\alpha+\beta)$, а поскольку α и β в эти уравнения входят симметрично, то $S_A = Q \cos\beta/\sin(\alpha+\beta)$.

Для проверки правильности аналитического решения задачи воспользуемся графическим методом.

Треугольник, образованный из трех сил: Q, S_A и S_C должен быть замкнут, поэтому решение сводится к построению треугольника по известной стороне (Q) и направлению двух других сторон (S_A и S_C). Для этого нужно в масштабе построить вектор Q, а затем из начала и из конца этого вектора провести прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (рис.9,*г*).

Измерив длины найденных отрезков и пересчитав в масштабе, можно считать поставленную задачу решенной. Направление полученных векторов определяется из условия замкнутости силового многоугольника, то есть конец последнего вектора должен совпадать с началом первого.

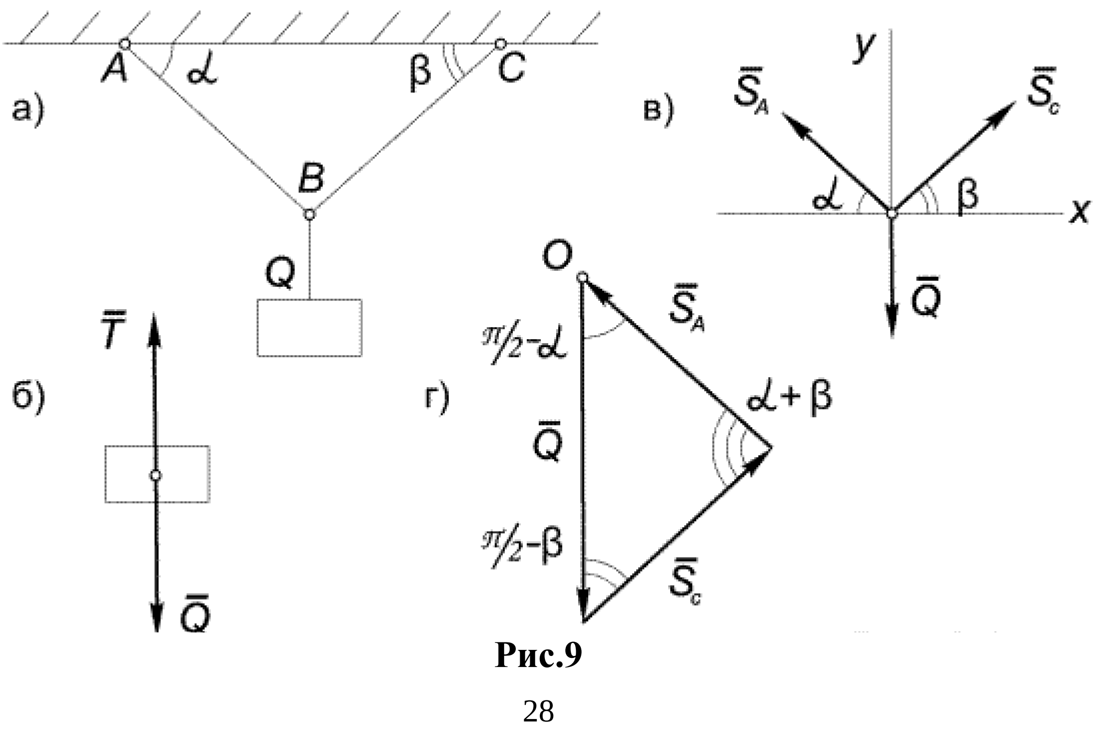


Рис.9

Можно, впрочем, определить величину S_A и S_C и без масштабной линейки, если просто решить построенный треугольник.

С этой целью воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{Q}{sin(\alpha+\beta)}=\frac{S_A}{sin(\pi/2-\beta)}=\frac{S_c}{sin(\pi/2-\alpha)},$$

откуда, заменяя синус дополнительного угла косинусом, получим:

$$S_A=\frac{Qcos\beta}{sin(\alpha+\beta)};\quad S_c=\frac{Qcos\alpha}{sin(\alpha+\beta)}.$$

То есть, результат графического решения совпадает с аналитическим, значит задача решена правильно.

Пример 5. Центр невесомого идеального блока удерживается при помощи двух стержней, соединенных шарнирно в точке *B*. Через блок переброшена нить, один конец которой закреплен, а к другому – подвешен груз весом *Q* (рис.10,*а*). Определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

Решение. Рассмотрим равновесие блока *B*, к которому приложены силы натяжения нитей T_1 и T_2 и реакции отброшенных стержней S_A и S_C, которые, как и в предыдущем примере мы считаем растянутыми (рис.10,*б*).

Фактически в качестве активной силы выступает вес груза *Q*, который приложен к блоку с помощью нити, поэтому $T_1 = Q$. По поводу силы T_2 надо отметить, что идеальным – то есть без трения блоком называется механизм, который меняет направление силы натяжения нити, но не ее величину, поэтому $T_1 = T_2 = Q$.

Пренебрегая размерами блока, получим уравновешенную систему сходящихся сил, приложенных в точке *B* (рис.10,*в*).

Определим реакции S_A и S_C аналитически. Отметим, что если в первое из аналитических уравнений равновесия входят оба неизвестных, то в уравнение $\Sigma Y_i = 0$ неизвестная реакция S_C не войдет, поэтому имеет смысл начать решение задачи именно с этого уравнения:

$$S_A\cos 30°+T_2\cos 60°-T_1=0.$$

Подставляя сюда значения тригонометрических функций и $T_1 = T_2 = Q$, получим:

$$S_A\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{Q}{2},$$

Откуда

$$S_A=Q\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь вернемся к уравнению $\Sigma X_i = 0$:

$$-S_A\cos 60°+T_2\cos 30°+S_C=0,$$

или

$$S_c=\frac{S_A}{2}-Q\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив найденное выше значение S_A, получим:

$$S_c=Q\frac{\sqrt{3}}{6}-Q\frac{\sqrt{3}}{2}=-Q\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

При этом минус в последнем выражении означает, что стержень *BC* не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Для проверки полученного результата решим эту задачу графически. С этой целью от центра *O* последовательно откладываем в масштабе известные силы T_1 и T_2, затем от начала первого и от конца последнего вектора проводим прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (рис.10,*г*).

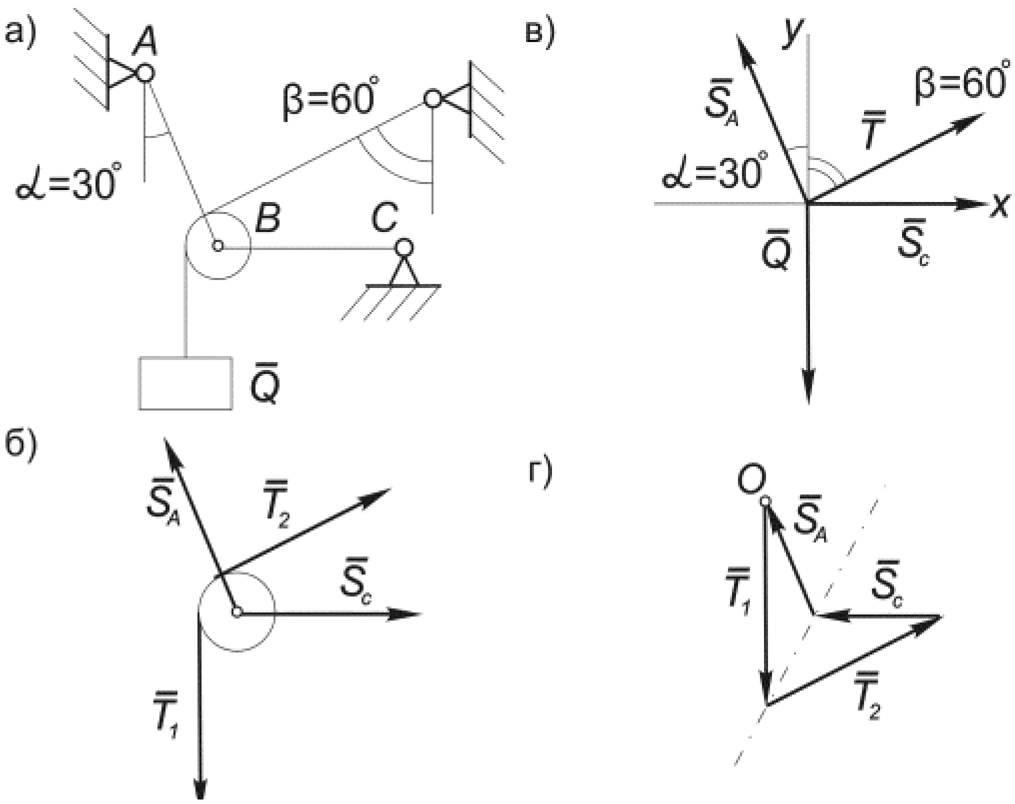


Рис.10

Нетрудно видеть, что построенный силовой многоугольник имеет ось симметрии и $|S_A|=|S_C|$. При этом направление вектора S_C на силовом многоугольнике противоположно первоначальному направлению, указанному на чертеже, то есть стержень *BC* не растянут, а сжат.

Примечания.

1. В системе аналитических уравнений равновесия оси координат не обязательно должны быть взаимно перпендикулярными, поэтому, если в последнем примере выбрать ось *Ox*, совпадающую по направлению с силой T_2, мы получим систему уравнений, из которых неизвестные S_A и S_C находятся *независимо одно от другого*.

2. Впоследствии мы увидим, что аналитическое решение можно проверить не только с помощью графического решения, но и аналитически. Впрочем, для системы сходящихся сил изложенный метод решения задач является, по-видимому, оптимальным.

Момент силы относительно центра (или точки).

Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра. *Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом.*

Рассмотрим силу $\bar{F}$, приложенную в точке A твердого тела (рис. 11). Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O. Перпендикуляр h, опущенный из центра O на линию действия силы $\bar{F}$, называется ***плечом силы*** $\bar{F}$ относительно центра O. Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h; 2) от положения плоскости поворота OAB, проходящей через центр O и силу F; 3) от направления поворота к этой плоскости.

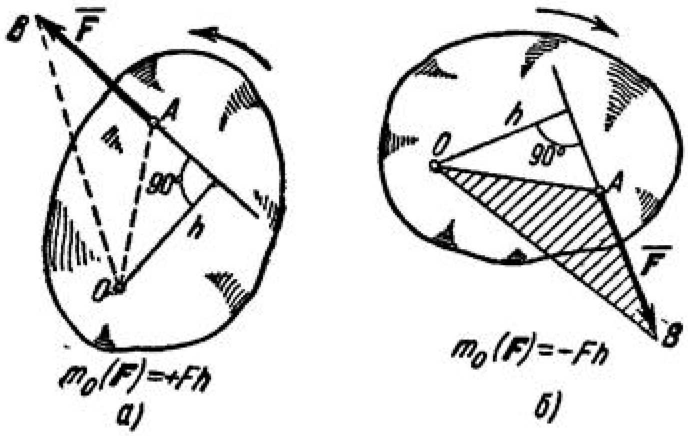


Рис.11

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие о моменте силы: моментом силы $\bar{F}$ относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Момент силы $\bar{F}$ относительно центра O будем обозначать символом $m_0(F)$. Следовательно,

$$m_0(\bar{F}) = \pm Fh.$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, - если по ходу часовой стрелки. Так, для силы $\bar{F}$, изображенной на рис.20,*а*, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис.20,*б*, - знак минус.

Отметим следующие свойства момента силы:

1) Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.

2) Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

3) Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис. 20,*б*)

$$m_0(\bar{F}) = \pm 2\text{пл}\,\Delta OAB$$

Этот результат следует из того, что

$$\text{пл}\Delta OAB = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}Fh.$$

Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Докажем следующую ***теорему Вариньона***: *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.*

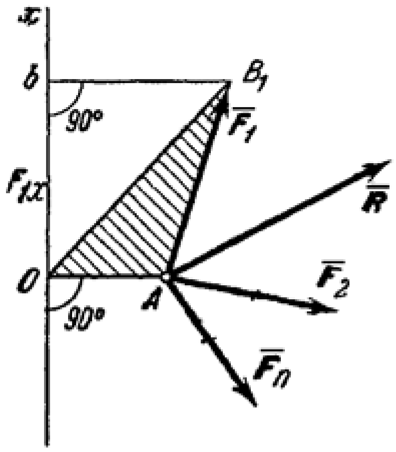


Рис.12

Рассмотрим систему сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, сходящихся в точке A (рис.12). Возьмем произвольный центр O и проведем через него ось Ox, перпендикулярную к прямой OA; положительное направление оси Ox выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра O.

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов $m_0(\bar{F}_1)$, $m_0(\bar{F}_2)$, … . По формуле $m_0 = (\bar{F}_1) = +2\text{пл.}\Delta OAB_1$. Но, как видно из рисунка, $2\text{пл.}\Delta OAB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, где F_{1x} - проекция силы $\bar{F}_1$ на ось Ox; следовательно

$$m_0(\bar{F}_1) = OA \cdot F_{1x}.$$

Аналогично вычисляются моменты всех других сил.

Обозначим равнодействующую сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, через $\bar{R}$, где $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$. Тогда, по теореме о проекции суммы сил на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$. Умножая обе части этого равенства на OA, найдем:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx})$$

или,

$$m_0(\bar{R}) = \sum m_0(\bar{F}_k).$$

ЛЕКЦИИ 3. ПАРА СИЛ. МОМЕНТ ПАРЫ.

Пара сил.

1. Момент пары.
2. Свойства пар.
3. Сложение пар.
4. Теорема о параллельном переносе силы.
5. Приведение плоской системы сил к данному центру.
6. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.
7. Случай параллельных сил.
8. Равновесие плоской системы параллельных сил.
9. Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил.
10. Понятие о распределенной нагрузке.
11. Расчет составных систем. Статически определимые и статически неопределимые задачи.
12. Графическое определение опорных реакций.

Пара сил. Момент пары.

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные в противоположные стороны (рис.13). Очевидно,

$$F_1 = F_2,\ \overline{F_1} = -\overline{F_2}$$

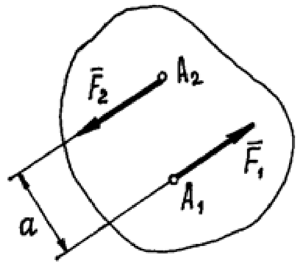


Рис.1

Несмотря на то, что сумма сил равна нулю, эти силы не уравновешиваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнёт вращаться. И вращательный эффект будет определяться моментом пары:

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a.$$

Расстояние *а* между линиями действия сил называется ***плечом пары.***

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент её считается положительным (как на рис.13), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того, чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары $\overline{m}$ направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 14).

Нетрудно доказать, что вектор момента пары $\overline{m} = \overline{r} \times \overline{F_1}$ – есть вектор этого векторного произведения (рис. 14). И заметим, что он равен вектору момента силы $\overline{F_1}$ относительно точки *А*, точки приложения второй силы:

$$\overline{m} = \overline{M}_A(\overline{F_1}).$$

О точке приложения вектора $\overline{m}$ будет сказано ниже. Пока приложим его к точке *А*.

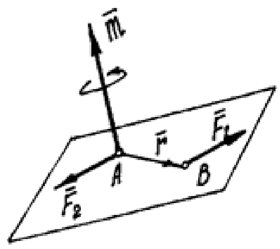


Рис.2

Свойства пар

1) Проекция пары на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары сил.

2) Найдём сумму моментов сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ оставляющих пару, относительно какой-либо точки O (рис.15).

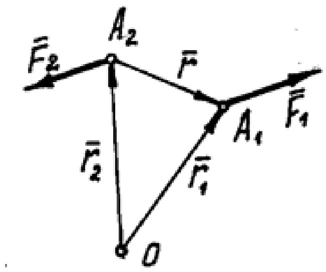


Рис.3

Покажем радиусы-векторы точек A_1 и A_2 и вектор $\bar{r}$, соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки O

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \overline{M_0}(\overline{F}_1) + \overline{M_0}(\overline{F_2}) = \overline{r_1} \times \overline{F}_1 + \overline{r_2} \times \overline{F_2}..$$

Но $\overline{r_1} = \overline{r_2} + \bar{r}$. Поэтому $\overline{M}_0(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = (\overline{r_2} + \bar{r}) \times \overline{F}_1 + \overline{r_2} \times \overline{F_2} = \overline{r_2} \times (\overline{F}_1 + \overline{F_2}) + \bar{r} \times \overline{F}_1$.

Но $\overline{F}_1 + \overline{F_2} = 0$, а $\bar{r} \times \overline{F}_1 = \overline{m}$.

Значит $\overline{M_0}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \overline{m}$.

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка O и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повёрнута в своей плоскости, действие её на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары $\overline{m}$.

Поэтому можно сформулировать ещё два свойства.

3) Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4) Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь её моментом, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним. Например, при силах F_1=F_2=5 Н и плече a = 4 см момент пары m = 20 Н·см. Можно силы сделать равными 2 Н, а плечо a = 10 см. При этом момент останется прежним 20 Нсм и действие пары на тело не изменится.

Все эти свойства можно объединить и, как следствие, сделать вывод, что пары с одинаковым вектором момента $\overline{m}$ и неважно где расположенные на теле, оказывают на него равное действие. То есть такие пары ***эквивалентны.***

Исходя из этого, на расчётных схемах пару изображают в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом пишут величину момента m (рис.15.1). Или, если это пространственная конструкция, показывают только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит вектор момента пары $\bar{m}$ – свободный вектор. Такое упрощенное изображение оправдано тем, что пара сил характеризуется моментом, а не ее положением в плоскости. Но если необходимо определять не внешние силы, а внутренние в разных сечениях элемента, как это делается в сопротивлении материалов, то важен знак и место приложения пары сил.

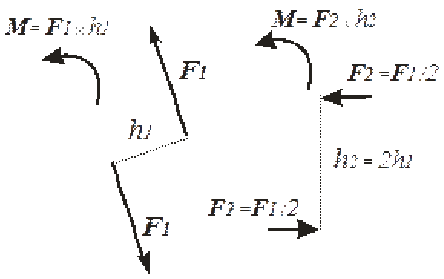


Рис.3.1 Эквивалентные пары сил

И ещё одно дополнительное замечание. Так как момент пары равен вектору момента одной из сил её относительно точки приложения второй силы, то момент пары сил относительно какой-либо оси z – есть проекция вектора момента пары $\bar{m}$ на эту ось:

$$m_z = m \cdot cos\gamma,$$

где γ – угол между вектором $\bar{m}$ и осью z.

Сложение пар.

Пусть даны две пары с моментами m_1 и m_2, расположенные в пересекающихся плоскостях (рис.4).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными $a = AB$. Тогда модули сил, образующих первую пару, должны быть равны: $F_1 = F_1' = m_1/a$, а образующих вторую пару: $F_2 = F_2' = m_2/a$.

Эти пары показаны на рис.5, где $\overline{F_1'} = -\bar{F_1}, \overline{F_2'} = -\overline{F_2}$. И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой AB на линии пересечения плоскостей.

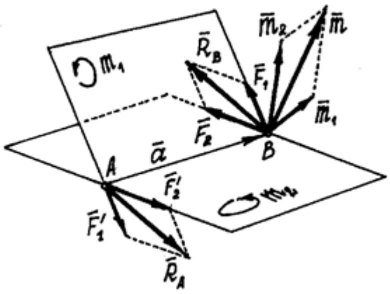


Рис.4

Сложив силы, приложенные к точкам A и B, построением параллелограммов, получим их равнодействующие $\overline{R_B} = \bar{F_1} + \overline{F_2}$ и $\overline{R_A} = \overline{F_1'} + \overline{F_2'}$. Так как $\overline{R_B} = -\overline{R_A}$, то эти силы $\overline{R_A}$ и $\overline{R_B}$ будут образовывать пару, момент которой $\bar{m} = \bar{a} \times \overline{R_B}$, где $\bar{a}$ – радиус-вектор точки B, совпадающий с AB.

Так как $\bar{R}_B = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, то момент полученной пары

$$\bar{m} = \bar{a} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{a} \times \bar{F}_1 + \bar{a} \times \bar{F}_2 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2.$$

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент её будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом

$$\bar{m} = \sum \bar{m}_i.$$

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости перпендикулярной вектору $\bar{m}$.

Равенство нулю результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравновешиваются. Следовательно, условие равновесия пар

$$\sum \bar{m}_i = 0.$$

Это является необходимым и достаточным условием равновесия систем пар.

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

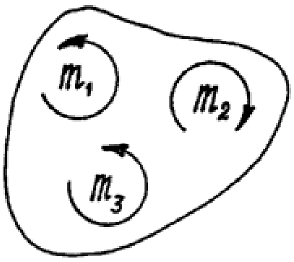


Рис.5

Например, пары, показанные на рис.17, расположены в одной плоскости и моменты их:

m_1=2 Нсм , m_2=5 Нсм, m_3=3 Нсм. Пары уравновешиваются, потому что алгебраическая сумма их моментов равна нулю:

$$\sum \bar{m}_i = m_1 - m_2 + m_3 = 2 - 5 + 3 = 0$$

Теорема о параллельном переносе силы.

Одной из основных задач, решаемых статикой, является замена одной системы сил другой – эквивалентной ей.

Такая процедура позволяет все многообразие систем сил свести к простейшим *каноническим* системам, классифицировать их и получить уравнения равновесия, необходимые для решения практических задач. Ключевую роль в проведении таких преобразований систем сил играет следующая теорема, называемая ***Лемма Пуансо***.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам. Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке.

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу $\bar{F}$ (рис. 19) перенести в какую-нибудь точку O, не расположенную на линии действия.

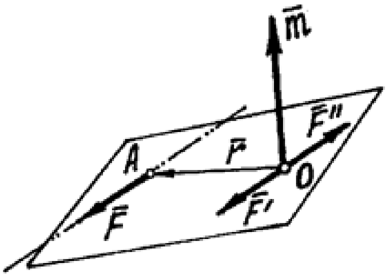


Рис.7

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные силе $\bar{F}$ и равные ей по величине: $F' = F'' = F$

В результате получим силу $\bar{F}' = \bar{F}$, приложенную к точке O. То есть мы как бы перенесли заданную силу $\bar{F}$ из точки A в точку O, но при этом появилась пара, образованная силами $\bar{F}$ и $\bar{F}''$. Момент этой пары $\bar{m} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F})$, равен моменту заданной силы $\bar{F}$ относительно точки O.

Этот процесс замены силы $\bar{F}$ равной ей силой $\bar{F}'$ и парой называется приведением силы к точке O.

Точка O называется ***точкой приведения***; сила $\bar{F}'$, приложенная к точке приведения, – ***приведённой силой***. Появившаяся пара – ***присоединённой парой***.

Приведение плоской системы сил к данному центру.

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O, которую назовем центром приведения, и, перенесем все силы в центр O (рис. 20, *а*). В результате на тело будет действовать система сил $\bar{F}_1' = \bar{F}_1, \bar{F}_2' = \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n' = \bar{F}_n$ приложенных в центре O, и система пар, моменты которых будут равны: $m_1 = m_0(\bar{F}_1),\ \ m_2 = m_0(\bar{F}_2),\ m_n = m_0(\bar{F}_n)$

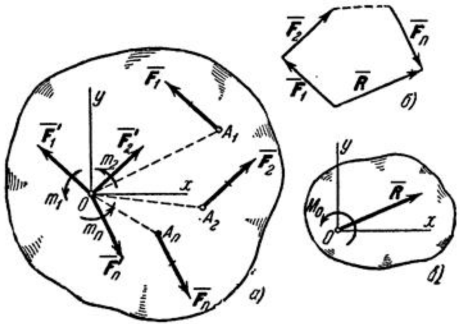


Рис.8

Силы, приложенные в центре O, можно заменить одной силой $\bar{R}$, приложенной в том же центре; при этом $\bar{R} = \sum \bar{F}_k'$ или $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$

Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_0 = \sum m_k$ или $M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k)$.

Величина $\bar{R}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, ***главным вектором системы***; величину M_o, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O, будем называть ***главным моментом системы*** относительно центра O.

В результате мы доказали следующую теорему: всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом M_0, равным главному моменту системы относительно центра O (рис. 20, *в*).

Примечания:

1. Для плоской системы сил под главным моментом системы часто также понимают величину этого момента.

2. Очевидно, что главный вектор R_0 не зависит, а главный момент M_0 зависит от выбора центра приведения.

Частные случаи приведения плоской системы сил.

В зависимости от значений главного вектора R_0 и главного момента M_0 возможны следующие случаи приведения плоской системы сил.

1) $R_0 = 0$, $M_0 = 0$ – система сил находится в равновесии;

2) $R_0 = 0$, $M_0 \neq 0$ – система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;

3) $R_0 \neq 0$, $M_0 = 0$ – система эквивалентна равнодействующей R, равной и эквивалентной главному вектору системы R_0 , линия действия которой проходит через центр приведения: $R = R_0$, $R \sim R_0$;

4) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ – система эквивалентна равнодействующей R, равной главному вектору системы R_0, ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_0| / R_0$ от центра приведения (рис.20, *б*).

Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия: $R = 0$, $M_0 = 0$.

Здесь O - любая точка плоскости.

Из этого условия следуют ***уравнения равновесия произвольной плоской системы сил,*** которые можно записать в трех различных формах:

1) Первая форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma X = 0$;

$\Sigma Y = 0$.

2) Вторая форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma M_B = 0$;

$\Sigma Y = 0$, где ось Oy неперпендикулярна отрезку AB.

3) Третья форма:

$\Sigma M_A = 0$;

$\Sigma M_B = 0$;

$\Sigma M_C = 0$, где точки А, В и С не лежат на одной прямой.

Равенства выражают, следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Теорема о трех моментах. Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \ \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \ \sum M_C(\bar{F}_i) = 0.$$

Равновесие плоской системы параллельных сил.

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось *Ox* перпендикулярно к силам, а ось *Oy* параллельно им (рис. 21). Тогда проекция каждой из сил на *Ox* будет равна нулю и первое из 3-х равенств обратится в тождество вида 0 = 0. В результате для параллельных сил останется два условия равновесия: $\sum F_{ky} = 0, \ \sum m_0(\bar{F}_k) = 0$.

Где ось *Oy* параллельна силам.

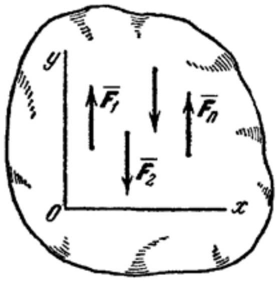


Рис.9

Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил.

Пусть даны две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис.10).

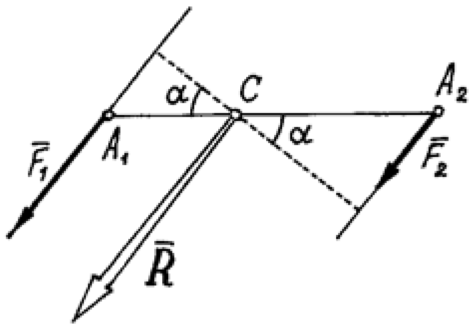


Рис.10

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор её параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона найдём точку приложения равнодействующей – точку *C*. По этой теореме $M_C(\vec{R}) = \sum M_C(\vec{F_i})$.

Значит $0 = F_1 \cdot A_1C \cdot cos\alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot cos\alpha.$

Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$. То есть точка приложения равнодействующей делит расстояние между точками A_1 и A_2 на части обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис.23), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке *C*. А расстояния от точки *C* до точек приложения сил обратно пропорциональны силам: $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$

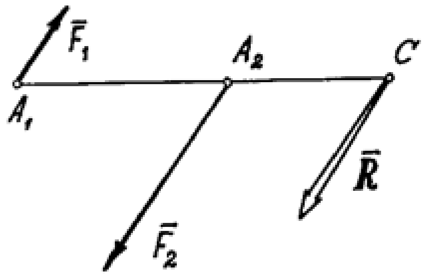


Рис.11

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2, точками приложения сил, то, при повороте этих сил в одну сторону на одинаковый угол, равнодействующая также повернётся вокруг точки приложения *C* в том же направлении, и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется ***центром параллельных сил***.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Центром нескольких параллельных сил, найденный последовательным сложением каждых двух сил, будем называть точку *C*, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\vec{r}_c = \sum F_i \vec{r}_i / \sum F_i = \sum F_i \vec{r}_i / R \ , \qquad (1)$$

где $\vec{r}_i$ - радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$– величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя (1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны их координатам. Поэтому, проектируя векторное равенство (1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \sum \frac{F_i y_i}{R}; \quad z_c = \sum \frac{F_i z_i}{R}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

Понятие о распределенной нагрузке.

Наряду с рассмотренными выше сосредоточенными силами строительные конструкции и сооружения могут подвергаться воздействию *распределенных нагрузок* – по объему, по поверхности или вдоль некоторой линии – и определяемых ее *интенсивностью.*

Примером нагрузки, *распределенной по площади*, является снеговая нагрузка, давление ветра, жидкости или грунта. Интенсивность такой поверхностной нагрузки имеет размерность давления и измеряется в кН/м^2 или килопаскалях (кПа = кН/м^2).

При решении задач очень часто встречается нагрузка, *распределенная по длине балки*. Интенсивность q такой нагрузки измеряется в кН/м.

Рассмотрим балку, загруженную на участке [a, b] распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону q=q(x). Для определения опорных реакций такой балки нужно заменить распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной. Это можно сделать по следующему правилу:

Рассмотрим частные случаи распределенной нагрузки.

а) **общий случай распределенной нагрузки** (рис.12)

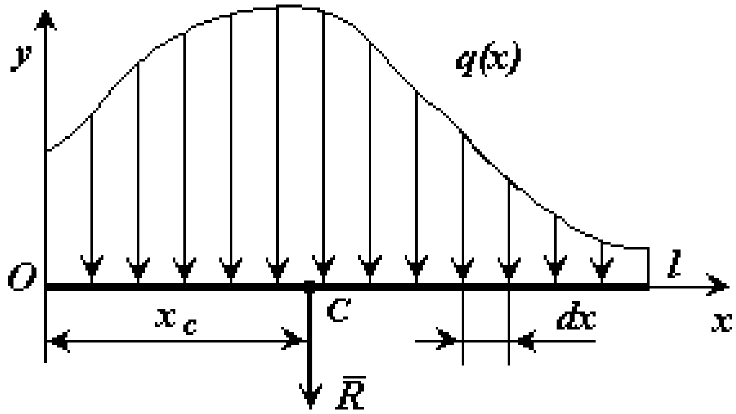


Рис.12

q(x) - интенсивность распределенной силы [Н/м],

$dR = q(x) \cdot dx$ - элементарная сила.

l – длина отрезка

Распределенная по отрезку прямой сила интенсивности q(x) эквивалентна сосредоточенной силе $R = \int_0^l q(x)dx.$

Сосредоточенная сила прикладывается в точке C (центре параллельных сил) с координатой

$$x_C = \int_0^l xq(x)dx\,/R$$

б) **постоянная интенсивность распределенной нагрузки** (рис.25)

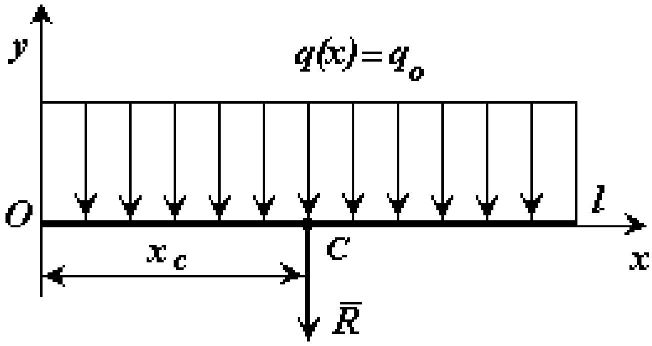


Рис.13

$$R = \int_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l$$

$$\int_0^l x q_0 dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$x_C = l/2$$

в) **интенсивность распределенной нагрузки, меняющаяся по линейному закону** (рис.14)

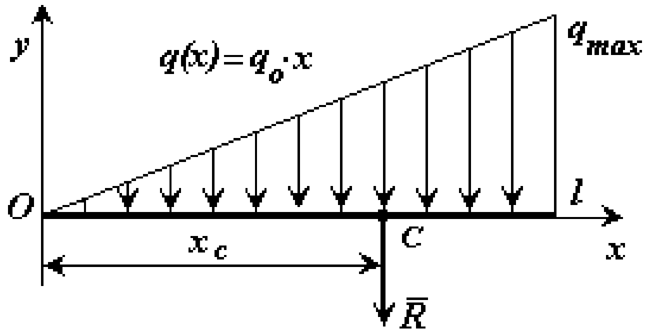


Рис.14

$$R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$R = \int_0^l q_0 x dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$x_C = 2 \cdot l/3$$

Расчет составных систем.

Под ***составными системами*** будем понимать конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных друг с другом.

Прежде, чем переходить к рассмотрению особенностей расчета таких систем, введем следующее определение.

Статически определимыми *называются такие задачи и системы статики, для которых число неизвестных реакций связей не превышает максимально допустимого числа уравнений.*

Если число неизвестных больше числа уравнений, соответствующие *задачи и системы называются* ***статически неопределимыми****. При этом разность между числом неизвестных и числом уравнений называется* ***степенью статической неопределимости*** *системы.*

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых условия равновесия. Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных реакций связи.

В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условия равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более шести неизвестных реакций связи.

Поясним это на следующих примерах.

1. Пусть центр невесомого идеального блока (пример 4) удерживается при помощи не двух, а трех стержней: AB, BC и BD и нужно определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

С учетом условий задачи мы получим систему сходящихся сил, где для определения трех неизвестных: S_A, S_C и S_D можно составить по-прежнему систему только двух уравнений: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y=0$. Очевидно, поставленная задача и соответствующая ей система будут статически неопределимыми.

2. Балка, жестко защемленная на левом конце и имеющая на правом конце шарнирно-неподвижную опору, загружена произвольной плоской системой сил (рис.15).

Для определения опорных реакций можно составить только три уравнения равновесия, куда войдут 5 неизвестных опорных реакций: X_A, Y_A, M_A, X_B и Y_B. Поставленная задача будет дважды статически неопределимой.

Такую задачу нельзя решить в рамках теоретической механики, предполагая рассматриваемое тело абсолютно твердым.

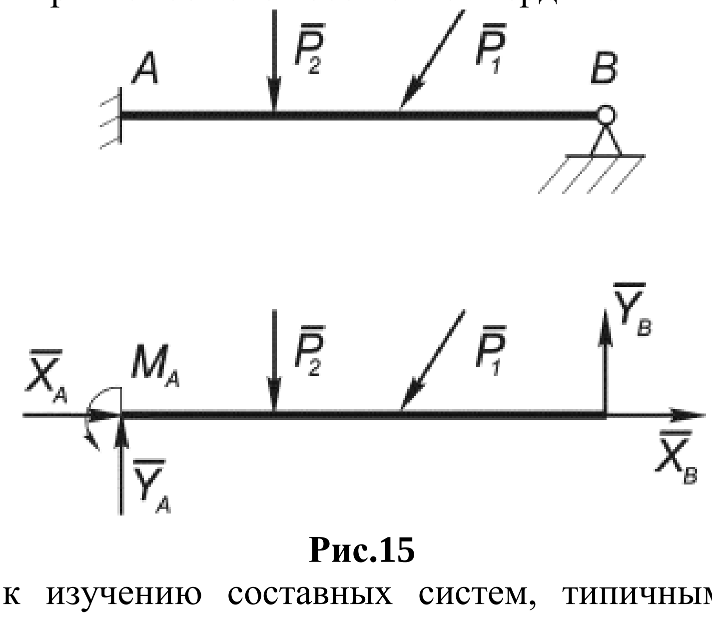


Рис.15

Вернемся к изучению составных систем, типичным представителем которых является трехшарнирная рама (рис. 16,*а*). Она состоит из двух тел: AC и BC, соединенным *ключевым* шарниром C. На примере этой рамы рассмотрим ***два способа определения опорных реакций составных систем.***

1 способ. Рассмотрим тело AC, загруженное заданной силой P, отбросив в соответствии с аксиомой 7 все связи и заменив их соответственно реакциями внешних (X_A, Y_A) и внутренних (X_C, Y_C) связей (рис. 16,*б*).

Аналогично можно рассмотреть равновесие тела BC под действием реакций опоры B – (X_B, Y_B) и реакций в соединительном шарнире C – (X_C’, Y_C’) , где в соответствии с аксиомой 5: X_C = X_C’, Y_C = Y_C’.

Для каждого из этих тел можно составить три уравнения равновесия, таким образом, общее число неизвестных: X_A, Y_A , X_C =X_C’, Y_C =Y_C’, X_B , Y_B равняется суммарному числу уравнений, и задача является статически определимой.

Напомним, что по условию задачи требовалось определить только 4 опорные реакции, нам же пришлось проделать дополнительную работу, определяя реакции в соединительном шарнире. В этом и заключается недостаток данного способа определения опорных реакций.

2 способ. Рассмотрим равновесие всей рамы ABC, отбросив только внешние связи и заменив их неизвестными опорными реакциями X_A, Y_A, X_B , Y_B .

Полученная система состоит из двух тел и не является абсолютно твердым телом, поскольку расстояние между точками A и B может изменяться вследствие взаимного поворота обеих частей относительно шарнира C. Тем не менее можно считать, что совокупность сил, приложенных к раме ABC образует систему, если воспользоваться аксиомой отвердевания (рис.16,*в*).

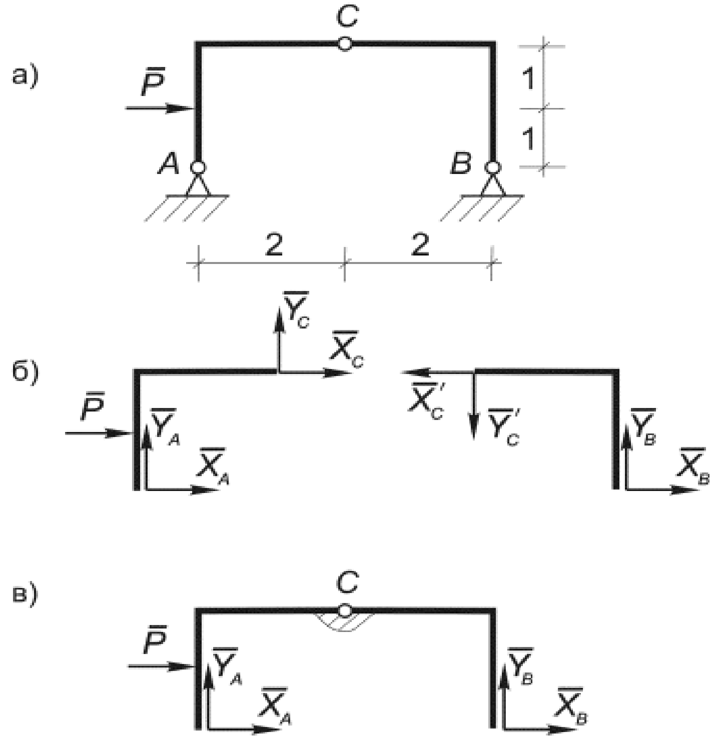


Рис.16

Итак, для тела ABC можно составить три уравнения равновесия. Например:

$\Sigma M_A = 0;$

$\Sigma X = 0;$

$\Sigma Y = 0.$

В эти три уравнения войдут 4 неизвестных опорных реакции X_A, Y_A, X_B и Y_B . Отметим, что попытка использовать в качестве недостающего уравнения, например такое: $\Sigma M_B = 0$ к успеху не приведет, поскольку это уравнение будет линейно зависимым с предыдущими. Для получения линейно независимого четвертого уравнения необходимо рассмотреть равновесие другого тела. В качестве него можно взять одну из частей рамы, например – BC. При этом нужно составить такое уравнение, которое содержало бы «старые» неизвестные X_A, Y_A, X_B , Y_B и не содержало новых. Например, уравнение: $\Sigma X^{(BC)} = 0$ или подробнее: $-X_C' + X_B = 0$ для этих целей не подходит, поскольку содержит «новое» неизвестное X_C', а вот уравнение $\Sigma M_C^{(BC)} = 0$ отвечает всем необходимым условиям. Таким образом, искомые опорные реакции можно найти в следующей последовательности:

$\Sigma M_A = 0; \rightarrow Y_B = P/4;$

$\Sigma M_B = 0; \rightarrow Y_A = -P/4;$

$\Sigma M_C^{(BC)} = 0; \rightarrow X_B = -P/4;$

$\Sigma X = 0; \rightarrow X_A = -3P/4.$

Для проверки можно использовать уравнение: $\Sigma M_C^{(AC)} = 0$ или, подробнее: $-Y_A{\cdot}2 + X_A{\cdot}2 + P{\cdot}1 = P/4{\cdot}2 - 3P/4{\cdot}2 + P{\cdot}1 = P/2 - 3P/2 + P = 0.$

Отметим, что в это уравнение входят все 4 найденные опорные реакции: X_A и Y_A – в явной форме, а X_B и Y_B – в неявной, поскольку они были использованы при определении двух первых реакций.

Графическое определение опорных реакций.

Во многих случаях решение задач можно упростить, если вместо уравнений равновесия или в дополнение к ним непосредственно использовать условия равновесия, аксиомы и теоремы статики. Соответствующий подход и получил название графического определения опорных реакций.

Прежде чем перейти к рассмотрению графического метода отметим, что, как и для системы сходящихся сил, графически можно решить только те задачи, которые допускают аналитическое решение. При этом графический метод определения опорных реакций удобен при небольшом числе нагрузок.

Итак, графический метод определения опорных реакций основан главным образом на использовании:

– аксиомы о равновесии системы двух сил;

– аксиомы о действии и противодействии;

– теоремы о трех силах;

– условия равновесия плоской системы сил.

При графическом определении реакций составных систем рекомендуется следующая *последовательность рассмотрения*:

– выбрать тело с минимальным числом алгебраических неизвестных реакций связей;

– если таких тел два или больше, то начать решение с рассмотрения тела, к которому приложено меньшее число сил;

– если таких тел два или больше, то выбрать тело, для которого большее число сил известно по направлению.

ЛЕКЦИИ 4-5. СИСТЕМЫ СИЛ РАСПОЛОЖЕННЫЕ В ПЛОСКОСТИ. СИСТЕМЫ СИЛ РАСПОЛОЖЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СИЛ В АНАЛИТИЧЕСКОМ СПОСОБОМ. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы

1. Расчет ферм.
2. Понятие о ферме.
3. Аналитический расчет плоских ферм.
4. Графический расчет плоских ферм.
5. Трение.
6. Законы трения скольжения.
7. Реакции шероховатых связей.
8. Угол трения.
9. Равновесие при наличии трения.
10. Трение качения и верчения.
11. Момент силы относительно центра как вектор.
12. Момент пары сил как вектор.
13. Момент силы относительно оси.
14. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси.
15. Приведение пространственной системы сил к данному центру.
16. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
17. Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для изучения динамики движении тел с учетом трения скольжения и трения качения, динамики движения центра масс механической системы, кинетических моментов, для решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Расчет ферм. Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм.

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k=2n-3.$$

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Перейдем к определению усилий в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Ход расчетов поясним на конкретном примере.

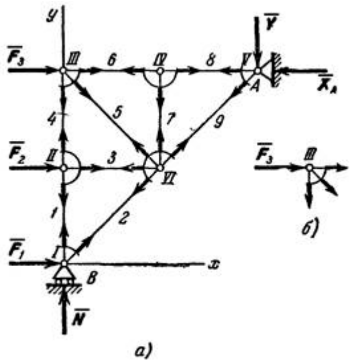


Рис.1

Рассмотрим изображенную на рис. 1,*а* ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; действующие на ферму силы параллельны оси *x* и равны: $F_1 = F_2 = F_3 = F = 2$.

В этой ферме число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней.

Составляя уравнения равновесия для фермы в целом, найдем, что реакции опор направлены, как показано на рисунке, и численно равны;

$$X_A=3F=6\ H.$$

$$Y_A=N=3/2F=3\ H.$$

Переходим к определению усилий в стержнях.

Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни — арабскими. Искомые усилия будем обозначать S_1 (в стержне 1), S_2 (в стержне 2) и т. д. Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям S_1, S_2, ... Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их от узлов, т. е. считая, все стержни растянутыми (рис. 1,*а*; изображенную картину надо представлять себе для каждого узла так, как это показано на рис. 1,*б* для узла III). Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательной, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Буквенных обозначений для сил, действующих вдоль стержней, ни рис. 23 не вводам, поскольку ясно, что силы, действующие вдоль стержня 1, равны численно S_1, вдоль стержня 2 — равны S_2 и т. д.

Теперь для сил, сходящихся в каждом узле, составляем последовательно уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0.$$

Начинаем с узла 1, где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Составляя уравнения равновесия для узла 1, получим

$$F_1+S_2\cos45^0=0, \qquad N+S_1+S_2\sin45^0=0.$$

Отсюда находим

$$S_2 = -F\sqrt{2} = -2{,}82\ H,$$

$$S_1 = -N - S_2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -1\ H.$$

Теперь, зная S_1, переходим к узлу II. Для него уравнения равновесия дают

$$S_3+F_2=0, \qquad S_4-S_1=0,$$

откуда

$$S_3=-F=-2\ \text{Н}, \qquad S_4=S_1=-1\ \text{Н}.$$

Определив S_4, составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла III, а затем для узла IV. Из этих уравнений находим:

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 1{,}41\ H, \qquad S_6 = S_8 = -3\ H, \qquad S_7 = 0.$$

Наконец, для вычисления S_9 составляем уравнение равновесия сил, сходящихся в узле V, проектируя их на ось Ву. Получим $Y_A+S_9\cos45^0=0$ откуда $S_9 = -3\sqrt{2} = -4{,}23\ H$

Второе уравнение равновесия для узла V и два уравнения для узла VI можно составить как поверочные. Для нахождения усилий в стержнях эти уравнения не понадобились, так как вместо них были использованы три уравнения равновесия всей фермы в целом при определении N, X_A, и Y_A.

Окончательные результаты расчета можно свести в таблицу:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в Н	-1	-2,82	-2	-1	+1,41	-3	0	-3	-4,23

Как показывают знаки усилий, стержень 5 растянут, остальные стержни сжаты; стержень 7 не нагружен (нулевой, стержень).

Наличие в ферме нулевых стержней, подобных стержню 7, обнаруживается сразу, так как если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Этот результат получается из уравнения равновесия в проекции на ось, перпендикулярную к упомянутым двум стержням.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия, беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Графический расчет плоских ферм.

Расчет фермы методом вырезания узлов может производиться графически. Для этого сначала, определяют опорные реакции. Затем, последовательно отсекая от фермы каждый из ее узлов, находят усилия в стержнях, сходящихся в этих узлах, строя соответствующие замкнутые силовые многоугольники. Все построения проводятся в масштабе, который должен быть заранее выбран. Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня (иначе не удастся определить неизвестные усилия).

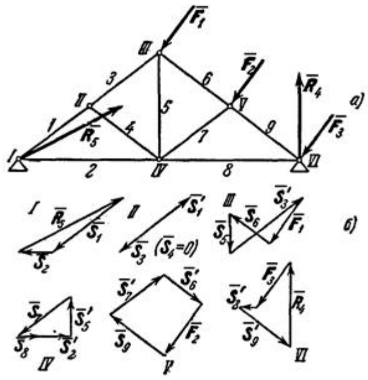


Рис.2

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 2,*а*. В этой ферме число узлов n = 6, а число стержней k = 9. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней. Опорные реакции $\vec{R}_4$ и $\vec{R}_5$ для рассматриваемой фермы, изображаем наряду с силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, как известные.

Определение усилий в стержнях начинаем с рассмотрения стержней, сходящихся в узле I (узлы нумеруем римскими цифрами, а стержни - арабскими). Мысленно отрезав от этих стержней остальную часть фермы, отбрасываем ее действие отброшенной части также мысленно заменяем силами $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, которые должны быть направлены вдоль стержней 1 и 2. Из сходящихся в узле I сил $\vec{R}_5$, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ строим замкнутый треугольник (рис. 2,*б*). Для этого изображаем сначала в выбранном масштабе известную силу $\vec{R}_5$, а затем проводим через ее начало и конец прямые, параллельные стержням 1 и 2. Таким путем будут найдены силы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, действующие на стержни 1 и 2. Затем рассматриваем равновесие стержней, сходящихся в узле II. Действие на эти стержни отброшенной части фермы мысленно заменяем силами $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, и $\vec{S}_4$, направленными вдоль соответствующих стержней; при этом сила $\vec{S}_1$ нам известна, так как по равенству действия и противодействия $\vec{S}_1 = -\vec{S}_1$. Построив из сил, сходящихся в узле II, замкнутый треугольник (начиная с силы $\vec{S}_1$), найдем величины S_3 и S_4 (в данном случае S_4 = 0). Аналогично находятся усилия в остальных стержнях. Соответствующие силовые многоугольники для всех узлов показаны на рис. 2,*б*. Последний многоугольник (для узла VI) строится для проверки, так как все входящие в него силы уже найдены.

Из построенных многоугольников, зная масштаб, находим величины всех усилий. Знак усилия в каждом стержне определяется следующим образом. Мысленно вырезав узел по сходящимся в нем стержням (например, узел III), прикладываем к обрезам стержней найденные силы (рис. 3); сила, направленная от узла ($\vec{S}_5$ на рис. 3), растягивает стержень, а сила, направленная к узлу ($\vec{S}_3$ и $\vec{S}_6$ на рис. 3) сжимает его.

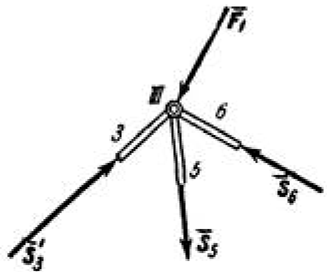


Рис.3

Согласно принятому условию растягивающим усилиям приписываем знак «+», а сжимающим - знак «-». В рассмотренном примере (рис.3) стержни 1, 2, 3, 6, 7, 9 сжаты, а стержни 5, 8 растянуты.

Трение.

Почему звучит скрипичная струна, когда по ней ведут смычком? Ведь смычок движется, а колебания струны периодические. А как разгоняется автомобиль, и какая сила замедляет его при торможении? Почему автомобиль «заносит» на скользкой дороге? Ответы на все эти и многие другие важные вопросы, связанные с движением тел, дают законы трения.

Вы видите, как разнообразно и порой неожиданно проявляется трение в окружающей нас обстановке. Трение принимает участие, и притом весьма существенное, там, где мы о нём даже и не подозреваем. Если бы трение внезапно исчезло из мира, множество обычных явлений протекало бы совершенно иным образом.

Очень красочно пишет о роли трения французский физик Гильом:

«Всем нам случалось выходить в гололедицу; сколько усилий стоило нам удерживаться от падения, сколько смешных движений приходилось нам проделать, чтобы устоять! Это заставляет нас признать, что обычно земля, по которой мы ходим, обладает драгоценным свойством, благодаря которому мы сохраняем равновесие без особых усилий. Та же мысль возникает у нас, когда мы едем на велосипеде по скользкой мостовой или когда лошадь скользит по асфальту и падает. Изучая подобные явления, мы приходим к открытию тех следствий, к которым приводит трение. Инженеры стремятся по возможности устранить его в машинах – и хорошо делают. В прикладной механике о трении говорится как о крайне нежелательном явлении, и это правильно, - однако лишь в узкой специальной области. Во всех прочих случаях мы должны быть благодарны трению: оно даёт нам возможность ходить, сидеть и работать без опасения, что книги и чернильница упадут на пол, что стол будет скользить, пока не упрётся в угол, а перо выскальзывать из пальцев.

Трение представляет настолько распространенное явление, что нам, за редкими исключениями, не приходится призывать его на помощь: оно является к нам само.

Трение способствует устойчивости. Плотники выравнивают пол так, что столы и стулья остаются там, куда их поставили. Блюдца, тарелки, стаканы, поставленные на стол, остаются неподвижными без особых забот с нашей стороны, если только дело не происходит на пароходе во время качки.

Вообразим, что трение может быть устранено совершенно. Тогда никакие тела, будь они величиною с каменную глыбу или малы, как песчинки, никогда не удержатся одно на другом: всё будет скользить и катиться, пока не окажется на одном уровне. Не будь трения, Земля представляла бы шар без неровностей, подобно жидкому».

К этому можно прибавить, что при отсутствии трения гвозди и винты выскальзывали бы из стен, ни одной вещи нельзя было бы удержать в руках, никакой вихрь никогда бы не прекращался, никакой звук не умолкал бы, а звучал бы бесконечным эхом, неослабно отражаясь, например, от стен комнаты.

Наглядный урок, убеждающий нас в огромной важности трения, даёт нам всякий раз гололедица. Застигнутые ею на улице, мы оказываемся беспомощными, и всё время рискуем упасть. Вот поучительная выдержка из газеты (декабрь 1927 г.):

«Лондон, 21. Вследствие сильной гололедицы уличное и трамвайное движение в Лондоне сильно затруднено. Около 1400 человек поступило в больницы с переломами рук, ног и т. д.».

«При столкновении вблизи Гайд-Парка трёх автомобилей и двух трамвайных вагонов машины были уничтожены из-за взрыва бензина…»

«Париж, 21. Гололедица в Париже и его пригородах вызвала многочисленные несчастные случаи…»

Однако, ничтожное трение на льду может быть успешно использовано технически. Уже обыкновенные сани служат тому примером. Ещё лучше свидетельствуют об этом так называемые ледяные дороги, которые устраивали для вывозки леса с места рубки к железной дороге или к пунктам сплава. На такой дороге, имеющей гладкие ледяные рельсы, две лошади тащат сани, нагруженные 70 тоннами брёвен.

Трение покоя, скольжения.

Прежде думали, что механизм трения не сложен: поверхность покрыта неровностями и трение есть результат подъёма скользящих частей на эти неровности; но это неправильно, ведь тогда не было бы потерь энергии, а на самом деле энергия на трение тратится.

Механизм потерь иной. И здесь крайне неожиданным оказывается, что эмпирически это трение можно приближенно описать простым законом. Сила нужная для того, чтобы преодолевать трение и тащить один предмет по поверхности другого, зависит от силы, направленной по нормали к поверхностям соприкосновения.

Поверхность твёрдого тела обычно обладает неровностями. Например, даже у очень хорошо отшлифованных металлов в электронный микроскоп видны «горы» и «впадины» размером в 100-1000А. При сжатии тел соприкосновение происходит только в самых высоких местах и площадь реального контакта значительно меньше общей площади соприкасающихся поверхностей. Давление в местах соприкосновения может быть очень большим, и там возникает пластическая деформация. При этом площадь контакта увеличивается, а давление падает. Так продолжается до тех пор, пока давление не достигнет определённого значения, при котором деформация прекращается. Поэтому площадь фактического контакта оказывается пропорциональной сжимающей силе.

В месте контакта действуют силы молекулярного сцепления (известно, например, что очень чистые и гладкие металлические поверхности прилипают друг к другу).

Эта модель сил сухого трения (так называют трение между твёрдыми телами), по-видимому, близка к реальной ситуации в металлах.

Если тело, например, просто лежит на горизонтальной поверхности, то сила трения на него не действует. Трение возникает, если попытаться сдвинуть тело, приложить к нему силу. Пока величина этой силы не превышает определённого значения, тело остаётся в покое и сила трения равна по величине и обратна по направлению приложенной силе. Затем начинается движение.

Может показаться удивительным, но именно сила трения покоя разгоняет автомобиль. Ведь при движении автомобиля колеса не проскальзывают относительно дороги, и между шинами и поверхностью дороги возникает сила трения покоя (рис.4). Как легко видеть, она направлена в сторону движения автомобиля. Величина этой силы не может превосходить максимального значения трения покоя. Поэтому если на скользкой дороге резко нажать на газ, то автомобиль начнет буксовать. А вот если нажать на тормоза, то вращение колёс прекратится, и автомобиль будет скользить по дороге. Сила трения изменит своё направление и начнёт тормозить автомобиль.

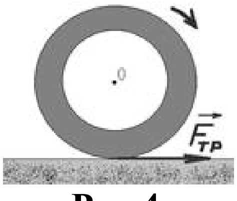


Рис.4

Сила трения при скольжении твёрдых тел зависит не только от свойств поверхностей и силы давления (это зависимость качественно такая же, как для трения покоя), но и от скорости движения. Часто с увеличением скорости сила трения сначала резко падает, а затем снова начинает возрастать.

Эта важная особенность силы трения скольжения как раз и объясняет, почему звучит скрипичная струна. Вначале между смычком и струной нет проскальзывания, и струна захватывается смычком. Когда сила трения покоя достигнет максимального значения, струна сорвется, и дальше она колеблется почти как свободная, затем снова захватывается смычком и т.д.

Подобные, но уже вредные колебания могут возникнуть при обработке металла на токарном станке вследствие трения между снимаемой стружкой и резцом. И если смычок натирают канифолью, чтобы сделать зависимость силы трения от скорости более резкой, то при обработке металла приходится действовать наоборот (выбирать специальную форму резца, смазку и т.п.). Так что важно знать законы трения и уметь ими пользоваться.

Кроме сухого трения существует ещё так называемое жидкое трение, возникающее при движении твёрдых тел в жидкостях и газах и связанное с их вязкостью. Силы жидкого трения пропорциональны скорости движения и обращаются в нуль, когда тело останавливается. Поэтому в жидкости можно заставить тело двигаться, прикладывая даже очень маленькую силу. Например, тяжелую баржу на воде человек может привести в движение, отталкиваясь то дна шестом, а на земле такой груз ему, конечно, не сдвинуть. Эта важная особенность сил жидкого трения объясняет, например, тот факт, почему автомобиль «заносит» на мокрой дороге. Трение становится жидким, и даже небольшие неровности дороги, создающие боковые силы, приводят к «заносу» автомобиля.

Резюмируя вышесказанное можно заключить, что возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собою довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое (законами Кулона), можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), величина которой может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого предельной силой трения.

$$0 < \bar{F} < \bar{F}_{пр}.$$

Силой трения скольжения $\bar{F}$ (или просто силой трения) называется составляющая силы реакции связи, которая лежит в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел (рис.5).

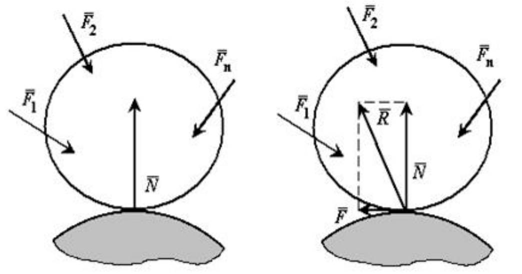


Рис.5

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

В теоретической механике предполагается, что между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Сухим трением называется трение, когда между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Будем рассматривать два случая: трения при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле:

$$\bar{F} = -\sum \bar{F}_{ri}$$

Аналогично при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы:

$$\bar{N} = -\sum \bar{F}_{ni}.$$

При движении одного тела по поверхности другого сила трения является постоянной величиной.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию:

$$F_{пр} = f_0 N.$$

Статический коэффициент трения f_0 — число отвлеченное $0<f_0<1$; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.). Считается, что коэффициент трения не зависит от скорости движения.

3. Предельная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например кирпич, надо приложить одну и туже, силу, независимо, от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.

Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии сила трения покоя (сила сцепления)

$$F \le F_{пр} \text{ или } F \le f_0 N.$$

Реакции шероховатых связей. Угол трения.

До сих пор при решении задач статики мы пренебрегали трением и считали поверхности связей гладкими, а их реакции направленными по нормалям к этим поверхностям. Реакция реальной (шероховатой) связи будет слагаться из двух составляющих: из нормальной реакции $\vec{N}$ и перпендикулярной к ней силы трения $\vec{F}$. Следовательно, полная реакция $\vec{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $F_{пр}$ сила R будет меняться от N до $R_{пр}$, а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (рис. 6).

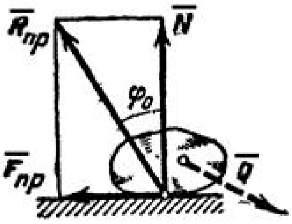


Рис.6

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется **углом трения**. Из рис.6 видно, что

$$tg\varphi_0 = F_{пр}/N.$$

Так как $F_{пр} = f_0 N$, отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$tg\varphi_0 = f_0$$

При равновесии полная реакция R, в зависимости от сдвигающих сил, может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0.

Конусом трения называют конус, описанный предельной силой реакции шероховатой связи $\bar{R}_{пр}$ вокруг направления нормальной реакции.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P, образующую угол α с нормалью (рис. 7), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P\sin\alpha$ будет больше $F_{пр} = f_0 P\cos\alpha$ (мы считаем N=$P\cos\alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $P\sin\alpha > f_0 P\cos\alpha$, в котором $f_0 = tg\varphi_0$, выполняется только при $tg\alpha > tg\varphi_0$, т.е. при $\alpha > \varphi_0$. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.

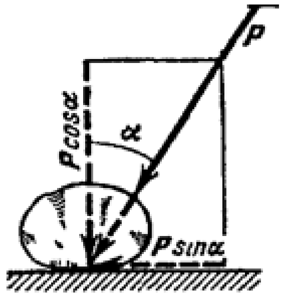


Рис.7

Для равновесия твёрдого тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на твёрдое тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если её линия действия проходит внутри конуса трения.

Трение качения и верчения.

Возьмем деревянный цилиндр и положим его на стол так, чтобы он касался стола по образующей. В центры оснований цилиндра вставим концы проволочной вилки и прикрепим к ней снабженный очень чувствительный динамометр. Если тянуть за динамометр, то цилиндр покатится по столу. По показаниям динамометра увидим, что нужна весьма небольшая сила тяги, чтобы сдвинуть с места цилиндр и катить его равномерно дальше, гораздо меньшая, чем при скольжении того же цилиндра, если бы он не вращался и скользил бы по столу. При той же силе давления на стол сила трения качения много меньше силы трения скольжения. Например, при качении стальных колёс по стальным рельсам трение качения примерно в 100 раз меньше, чем трение скольжения. Поэтому в машинах стремятся заменить трение скольжения трением качения, применяя так называемые шариковые или роликовые подшипники.

Происхождение трения качения можно наглядно представить себе так. Когда шар или цилиндр катится по поверхности другого тела, он немного вдавливается в поверхность этого тела, а сам немного сжимается (рис.15). Таким образом, катящееся тело всё время как бы вкатывается на горку.

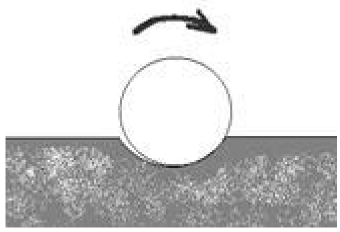


Рис.15

Вместе с тем происходит отрыв участков одной поверхности от другой, а силы сцепления, действующие между этими поверхностями, препятствуют этому. Оба эти явления и вызывают силы трения качения. Чем твёрже поверхности, тем меньше вдавливание и тем меньше трение качения.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

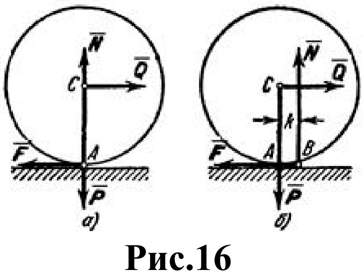


Рис.16

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса $\bar{P}$, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу $\bar{Q}$ (рис. 16,*а*), меньшую $F_{пр}$. Тогда в точке A возникает сила трения $\bar{F}$, численно равная Q, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию $\bar{N}$ тоже приложенной в точке A, то она уравновесит силу $\bar{P}$, а силы $\bar{Q}$ и $\bar{F}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы $\bar{Q}$.

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформаций тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки *AB* (рис. 16, *б*). При действии силы $\bar{Q}$ интенсивность давлений у края *A* убывает, а у края *B* возрастает. В результате реакция $\bar{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\bar{Q}$. С увеличением $\bar{Q}$ это смещение растет до некоторой предельной величины *k*. Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара ($Q_{пр}$, $\bar{F}$) с моментом $Q_{пр}R$ и уравновешивающая ее пара ($\bar{N}, \bar{P}$) с моментом *Nk*. Из равенства моментов находим $Q_{пр}R = Nk$ или

$$Q_{пр} = \frac{kN}{R}.$$

Пока $Q < Q_{пр}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{пр}$ начинается качение.

Входящая в формулу линейная величина *k* называется ***коэффициентом трения качения.*** Измеряют величину *k* обычно в сантиметрах. Значение коэффициента *k* зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

Для вагонного колеса по рельсу k=0,5 мм.

Рассмотрим движение ведомого колеса. $\bar{L} = 0$, а $\bar{Q} \neq 0$.

Качение колеса начнется, когда выполнится условие $QR>M$ или $Q>M_{max}/R=kN/R$

Скольжение колеса начнется, когда выполнится условие $Q>F_{max}=fN$.

Обычно отношение $k/R < f_0$ и качение начинается раньше скольжения.

Если $k/R > f_0$, то колесо будет скользить по поверхности, без качения.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

Сопротивление среды.

Если твёрдое тело находится внутри жидкости или газа, то вся его поверхность всё время соприкасается с частицами жидкости или газа. При движении тела на него со стороны жидкости или газа действуют силы, направленные навстречу движению. Эти силы называют сопротивлением среды. Как силы трения, сопротивление среды всегда направленно против движения. Сопротивление среды можно рассматривать как один из видов трения.

Особенностью сил трения в жидкости или газе является отсутствие трения покоя. Твёрдое тело лежащее на другом твёрдом теле, может быть сдвинуто с места, только если к нему приложена достаточно большая сила, превосходящая наибольшую силу трения покоя. При меньшей силе твёрдое тело с места не сдвинется, сколько бы времени эта сила ни действовала. Картина получается иной, если тело находится в жидкости. В этом случае, чтобы сдвинуть с места тело, достаточно сколь угодно малых сил: хотя и очень медленно, но всё же тело начнёт двигаться. Человек вообще никогда не сдвинет с места голыми руками камень весом в сто тонн. В то же время баржу весом в сто тонн, плавающую на воде, один человек, хотя и очень медленно, но всё же сможет двигать. Однако по мере увеличения скорости сопротивление среды сильно увеличивается, так что, сколько бы времени сила не действовала, она не сможет разогнать тело до большой скорости.

Важной характеристикой жидких и газообразных сред является вязкость. Вязкость – свойство текучих тел (жидкостей и газов) сопротивляться перемещению одной их части относительно другой под действием внешних сил.

Количественно вязкость определяется величиной касательной силы, которая должна быть приложена к единице площади сдвигаемого слоя, чтобы поддерживать в этом слое ламинарное течение с постоянной скоростью относительно сдвига, равной единице.

Вязкость газов и жидкостей, согласно молекулярной кинетической теории, вызвана передачей импульса от молекул более быстро движущегося слоя к молекулам более медленного слоя, которая происходит при перемешивании молекул соседних слоёв вследствие теплового движения.

Силы внутреннего трения гораздо меньше сил трения скольжения. Поэтому для уменьшения трения между движущимися частями машин и механизмов используется смазка – слой вязкой жидкости, заполняющий пространство между трущимися поверхностями и оттесняющий их друг от друга. Это приводит к существенному уменьшению нагрева и износа деталей. Вместе с тем следует избегать попадания жидкости между фрикционными муфтами, ремнём и шкивом в ременной передаче, ведущими колесами локомотива и рельсом и т.п., ибо во всех этих случаях именно сила трения служит для передачи движения.

С увеличением температуры вязкость газов возрастает, а жидкостей (за некоторым исключением) резко падает. Это связано с различиями в характере движения молекул в жидкости и газе. При понижении температуры вязкость некоторых жидкостей настолько возрастает, что они теряют характерную для них способность течь, превращаясь в аморфные твёрдые тела.

Сопротивление воздуха.

При движении твёрдого тела в воздухе на тело действует сила сопротивления воздуха, направленная противоположно движению тела. Такая же сила возникает, если на неподвижное тело набегает пучок воздуха; она направлена, конечно, по движению потока.

Сила сопротивления вызывается, во-первых, трением воздуха о поверхность тела и, во-вторых, изменением движения потока, вызванным телом. В воздушном потоке, изменённом присутствием тела, давление на передней стороне тела растёт, а на задней – понижается по сравнению с давлением в невозмущенном потоке.

Таким образом, создаётся разность давлений, тормозящая движущееся тело или увлекающая тело, погруженное в поток. Движение воздуха позади тела принимает беспорядочный вихревой характер.

Сила сопротивления зависит от скорости потока, от размеров и формы тела.

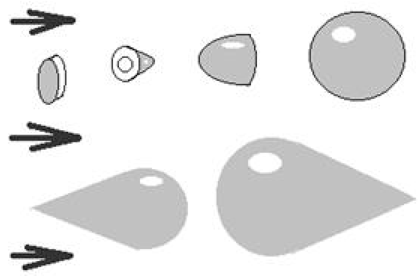


Рис.17

Для всех тел, изображенных на рис.17, сопротивление движению одинаково, несмотря на весьма разные размеры тел.

«Обтекаемое» тело почти не нарушает правильности потока; поэтому давление на заднюю часть тела лишь немного понижено по сравнению с передней частью и сопротивление не велико.

Различные обтекатели, устанавливаемые на выдающихся частях самолёта, как раз имеют своим назначением устранять завихрения потока выступающими частями конструкции. Вообще же конструкторы стремятся оставлять на поверхности возможно меньшее количество выдающихся частей и неровностей, могущих создавать завихрения.

Влияние сопротивления воздуха сильно сказывается и для наземных средств передвижения: с увеличением скорости автомобилей на преодоление сопротивления воздуха затрачивается всё большая часть мощности мотора. Поэтому современным автомобилям также придают по возможности обтекаемую форму.

Для уменьшения трения при сверхзвуковой скорости нужно заострять переднюю часть движущегося тела, в то время как при меньших скоростях наибольшее значение имеет «обтекаемость».

Сопротивление воды.

При движении тел в воде также возникаю силы сопротивления, направленные противоположно движению тела. Если тело движется под водой, то сопротивление теми же обстоятельствами, что и при движении в воздухе: трение воды о поверхность тела и изменением потока, создающим дополнительное сопротивление. Быстро плавающие рыбы и китообразные имеют «обтекаемую форму тела, уменьшающую сопротивление воды при их движении. Обтекаемую форму придают и подводным лодкам. Вследствие большой плотности воды по сравнению с плотностью воздуха, сопротивление движению данного тела в воде много больше сопротивления в воздухе при той же скорости движения.

Для обычных судов, идущих на поверхности воды, есть ещё дополнительное волновое сопротивление: от идущего судна на поверхности воды расходятся волны, на создание которых непроизводительно затрачивается часть работы судовой машины.

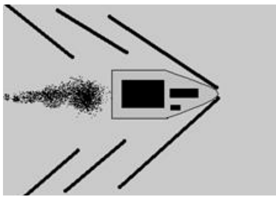


Рис.18

Для уменьшения волнового сопротивления, которое для быстроходных судов может составлять 3/4 полного сопротивления, корпусу судна придают специальную форму. Нос судна в подводной части иногда делают «бульбообразной» формы (рис.18); при этом образование волн на поверхности воды уменьшается, а значит, уменьшается и сопротивление.

Момент силы относительно центра как вектор.

Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте силы.

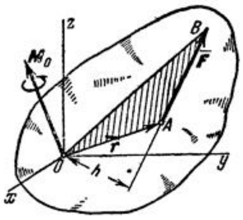


Рис.19

1. Изображение момента вектором. Момент силы $\bar{F}$ относительно центра *O* (см. рис. 19) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами:

1) модулем момента, равным произведению модуля силы на плечо, т. е. Fh; 2) плоскостью поворота OAB, проходящей через линию действия силы $\bar{F}$ и центр *O*; 3) направлением поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр *O* лежат в одной плоскости, необходимость задавать каждый раз плоскость поворота OAB отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную $\pm Fh$, где знак указывает направление поворота.

Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра O.

Поэтому в общем случае момент $m_0(\bar{F})$ силы $\bar{F}$ относительно центра *O* (рис. 19) будем изображать приложенным в центре O вектором $\bar{M}_0$, равным по модулю (в выбранном масштабе) произведению модуля силы $\bar{F}$ на плечо h и перпендикулярным к плоскости OAB, проходящей через центр O и силу $\bar{F}$. Направлять вектор $\bar{M}_0$ будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, вектор $\bar{M}_0$

будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота ОАВ, разную для разных сил, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора $\bar{M}_0$ определяет положение центра момента.

2. Выражение момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение $\overline{OA} \times \bar{F}$ векторов $\overline{OA}$ и $\bar{F}$ (рис. 19). По определению, $|\overline{OA} \times \bar{F}| = 2\text{пл}\Delta OAB = M_0$, так как модуль вектора $\bar{M}_0$ тоже равен 2 пл. ΔOAB. Направлен вектор $(\overline{OA} \times \bar{F})$ перпендикулярно к плоскости *OAB*, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\overline{OA}$ с $\bar{F}$ (если их отложить от одной точки) видно против хода часовой стрелки, т. е., так же, как вектор $\bar{M}_0$. Следовательно, векторы $(\overline{OA} \times \bar{F})$ и $\bar{M}_0$ совпадают и по модулю и по направлению и, как легко проверить, по размерности, т. е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда

$$\bar{M}_0 = \overline{OA}\, x\, \bar{F} \text{или} \quad \bar{M}_0 = \bar{r}\, x\, \bar{F},$$

где вектор $\bar{r} = \overline{OA}$ называется радиусом-вектором точки *A* относительно центра *O*.

Таким образом, момент силы $\bar{F}$ относительно центра *O* равен векторному произведению радиуса вектора $\bar{r} = \overline{OA}$, соединяющего центр *O* с точкой приложения силы *A*, на саму силу. Этим выражением момента силы бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Момент пары сил как вектор.

Действие пары сил на тело характеризуется: 1) величиной модуля момента пары, 2) плоскостью действия, 3) направлением поворота в этой плоскости. При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, для характеристики каждой из пар необходимо будет задать все эти три элемента. Это можно сделать, если условиться, по аналогии с моментом силы, изображать момент пары соответствующим образом, построенным вектором, а именно: будем изображать момент пары вектором т или М, модуль которого равен (в выбранном масштабе) модулю момента пары, т.е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 20).

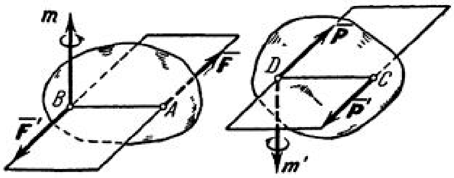


Рис. 20

Как известно модуль момента пары равен моменту одной из ее сил относительно точки, где приложена другая сила, т. е. $\bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F})$; по направлению же векторы этих моментов совпадают. Следовательно $\bar{m} = \bar{m}_B(\bar{F}) = \bar{m}_A \overline{F'}$.

Момент силы относительно оси.

Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятие о моменте силы относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 21).

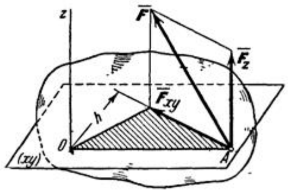


Рис.21

Пусть на это тело действует сила $\bar{F}$, приложенная в точке A. Проведем через точку A плоскость xy, перпендикулярную оси z, и разложим силу $\bar{F}$ на составляющие: $\bar{F}_z$, параллельную оси z, и $\bar{F}_{xy}$, лежащую в плоскости xy ($\bar{F}_{xy}$ является одновременно проекцией силы $\bar{F}$ на плоскости xy). Сила $\bar{F}_z$, направленная параллельно оси z, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело вдоль оси z). Весь вращательный эффект, создаваемый силой $\bar{F}$, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей $\bar{F}_{xy}$. Отсюда заключаем, что $m_z(\bar{F}) = m_z(\bar{F}_{xy})$, где символ $m_{xy}(\bar{F})$ обозначает момент силы $\bar{F}$ относительно оси z.

Для силы же $\bar{F}_{xy}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы $\bar{F}_{xy}$ относительно точки O, в которой ось z пересекается с плоскостью xy. Следовательно, $m_z(\bar{F}_{xy}) = m_0(\bar{F}_{xy})$ или, согласно предыдущему равенству, $m_z(\bar{F}) = m_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h$.

В результате приходим к следующему определению: моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

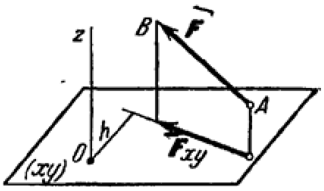


Рис.22

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила $\bar{F}_{xy}$, стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Из чертежа (рис.22) видно, что при вычислении момента плоскость xy можно проводить через любую точку оси z. Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 22) надо:

1) провести плоскость xy, перпендикулярную к оси z (в любом месте);

2) спроектировать силу $\bar{F}$ на эту плоскость и вычислить величину $\bar{F}_{xy}$;

3) опустить из точки O пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление $\bar{F}_{xy}$ и найти его длину h;

4) вычислить произведение $F_{xy}h$;

5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

1) Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как F_{xy}=0).

2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как h = 0).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

3) Если сила перпендикулярна к оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

Приведение пространственной системы сил к данному центру.

Полученные выше результаты позволяют решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы $\bar{F}$ из точки А (рис. 25,а) в точку О прикладываем в точке О силы $\overline{F'} = \bar{F}$ и $\bar{F}' = -\bar{F}$. Тогда сила $\bar{F}' = \bar{F}$ окажется приложенной в точке О и к ней будет присоединена пара $(\bar{F}', \bar{F})$ с моментом $\bar{m}$, что можно показать еще так, как на рис. 25,б. При этом $\bar{m} = \bar{m}_0(\bar{F})$.

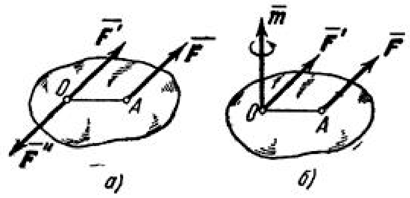


Рис.25

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ (рис. 26,а). Выберем произвольную точку O за центр приведения и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1, \ \bar{F}_2 = \bar{F}_2, \ldots, \ \bar{F}_n = \bar{F}_n.$$

приложенных в центре О, и система пар, моменты которых будут равны

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1), \bar{m}_2 = \bar{m}_0(\bar{F}_2), \ldots, \bar{m}_n = \bar{m}_0(\bar{F}_n),$$

Силы, приложенные в точке O, заменяются одной силой $\bar{R}$, приложенной в той же точке. При этом $\bar{R} = \sum F_k'$ или,

$$\bar{R} = \sum \overline{F_k}.$$

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\bar{M}_0 = \sum \overline{m_k}$ или,

$$\bar{M}_0 = \sum \overline{m_0}(\bar{F}_k).$$

Как и в случае плоской системы, величина $\bar{R}$, равная геометрической сумме всех сил, называется **главным вектором системы**; величина $\bar{M}_0$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O, называется **главным моментом системы** относительно этого центра.

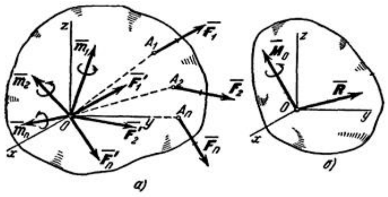


Рис.26

Таким образом мы доказали следующую теорему, любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой $\bar{R}$, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения О, и одной парой с моментом $\bar{M}_0$, равным главному моменту системы относительно центра О (рис. 26, б).

Векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_0$ обычно определяют аналитически, т.е. по их проекциям на оси координат.

Выражения для R_x, R_y, R_z нам известны. Проекции вектора $\bar{M}_0$ на оси координат будем обозначать M_x, M_y, M_z. По теореме о проекциях суммы векторов на ось будет $M_x = \sum |m_0(\bar{F_k})|_x$ или, $M_x = \sum m_x(\bar{F_k})$. Аналогично находятся величины M_y и M_z.

Окончательно для определения проекций главного вектора $\bar{R}$ и главного момента $\bar{M}_0$ получаем формулы:

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}.$$

$$M_x = \sum m_x(\bar{F_k}), \quad M_y = \sum m_y(\bar{F_k}), \quad M_z = \sum m_z(\bar{F_k}).$$

При этом *главный вектор* пространственной системы сил: $R_0 = \Sigma P_i$ отличается от главного вектора плоской системы сил только наличием третьей компоненты, поэтому его модуль будет равен:

$$R_0 = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2}.$$

Главный момент пространственной системы сил: $M_0 = \Sigma M_0(P_i)$ – это вектор, модуль которого находится аналогично:

$$M_0 = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2},$$

где M_x , M_y , M_z – суммы моментов всех сил системы относительно соответствующих осей.

В зависимости от значений главного вектора и главного момента, а также от их *взаимного расположения* возможны следующие варианты приведения пространственной системы сил:

1) $R_0 = 0$, $M_0 = 0$ – система сил находится в равновесии;

2) $R_0 = 0$, $M_0 \neq 0$ – система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;

3) $R_0 \neq 0$, $M_0 = 0$ – система эквивалентна равнодействующей R, равной и эквивалентной главному вектору системы R_0 , линия действия которой проходит через центр приведения: $R = R_0$, $R \sim R_0$;

4) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ и $R_0 \perp M_0$ – система эквивалентна равнодействующей R, равной главному вектору системы R_0 , ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_0|/R_0$ от центра приведения.

5) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ и главный вектор R_0 неперпендикулярен главному моменту M_0 – система эквивалентна *скрещивающимся силам* или *динаме*.

При этом *скрещивающимися* называются силы, которые непараллельны и не лежат в одной плоскости, а *динамой* называется система, состоящая из силы и пары сил, плоскость которой перпендикулярна этой силе.

Динама, приложенная к твердому телу, стремится вызвать его *винтовое* движение, которое представляет совокупность вращательного и поступательного движений.

Примечание.

Для пространственной системы сил, как и для плоской, справедлива следующая ***Теорема Вариньона.***

Момент равнодействующей пространственной системы сил относительно произвольного центра (оси) равен геометрической (алгебраической) сумме моментов всех сил этой системы относительно данного центра (оси).

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому-нибудь центру O и заменить одной результирующей силой $\bar{R}$ и парой с моментом $\bar{M}_0$. Рассуждая так, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно было $R = 0$ и $M_o = 0$. Но векторы $\bar{R}$ и $\bar{M}_0$ могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т. е. когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$ или, когда действующие силы удовлетворяют условиям

$$\Sigma X_i = 0; \quad \Sigma M_x(P_i) = 0;$$
$$\Sigma Y_i = 0; \quad \Sigma M_y(P_i) = 0;$$
$$\Sigma Z_i = 0; \quad \Sigma M_z(P_i) = 0.$$

Таким образом, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из координатных осей, а также суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялись нулю.

В частных случаях системы сходящихся или параллельных сил эти уравнения будут линейно зависимы, и только три уравнения из шести будут линейно независимыми.

Например, уравнения равновесия системы сил, параллельных оси Oz, имеют вид:

$$\Sigma Z_i = 0;$$
$$\Sigma M_x(P_i) = 0;$$
$$\Sigma M_y(P_i) = 0.$$

ЛЕКЦИЯ 6. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И МЕТОДИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы

1. Центр тяжести твердого тела.
2. Координаты центров тяжести неоднородных тел.
3. Координаты центров тяжести однородных тел.
4. Способы определения координат центров тяжести.
5. Центры тяжести некоторых однородных тел.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для изучения динамики движении тел с учетом трения скольжения и трения качения, динамики движения центра масс механической системы, кинетических моментов, для решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Приведение параллельных сил.

После того как было рассмотрено приведение к центру плоской системы и произвольной пространственной системы сил, мы опять возвращаемся к рассмотрению частного случая системы параллельных сил.

Приведение двух параллельных сил.

В ходе рассмотрения такой системы сил возможны три следующих случая приведения.

1. Система двух коллинеарных сил. Рассмотрим систему двух параллельных и направленных в одну сторону сил P и Q, приложенных в точках A и B. Будем считать, что силы перпендикулярны к этому отрезку (рис.1,*а*).

Выберем в качестве центра приведения точку C, принадлежащую отрезку AB и удовлетворяющую условию:

$$AC/CB = Q/P. \qquad (1)$$

Главный вектор системы $R_C = P + Q$ по модулю равен сумме этих сил: $R_C = P + Q$.

Главный момент относительно центра C с учетом (1) равен нулю: $M_C = P{\cdot}AC - Q{\cdot}CB = 0$.

Таким образом, в результате приведения мы получили: $R_C \neq 0$, $M_C = 0$. Это означает, что главный вектор эквивалентен равнодействующей, проходящей через центр приведения, то есть:

Равнодействующая коллинеарных сил равна по модулю их сумме, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внутренним образом.

Отметим, что положение точки C не изменится, если силы P и Q повернуть на угол α. Точка C, обладающая таким свойством называется *центром параллельных сил*.

2. Система двух антиколлинеарных и не равных по модулю сил. Пусть силы P и Q , приложенные в точках A и B, параллельны, направлены в противоположные стороны и по модулю не равны (рис.1,*б*).

Выберем в качестве центра приведения точку C, удовлетворяющую по-прежнему соотношению (1) и лежащую на той же прямой, но за пределами отрезка AB.

Главный вектор этой системы $R_C = P + Q$ по модулю теперь будет равен разности модулей векторов: $R_C = Q - P$.

Главный момент относительно центра C по-прежнему равен нулю: $M_C = P{\cdot}AC - Q{\cdot}CB = 0$, поэтому

Равнодействующая антиколлинеарных и не равных по модулю сил равна их разности, направлена в сторону большей силы, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внешним образом.

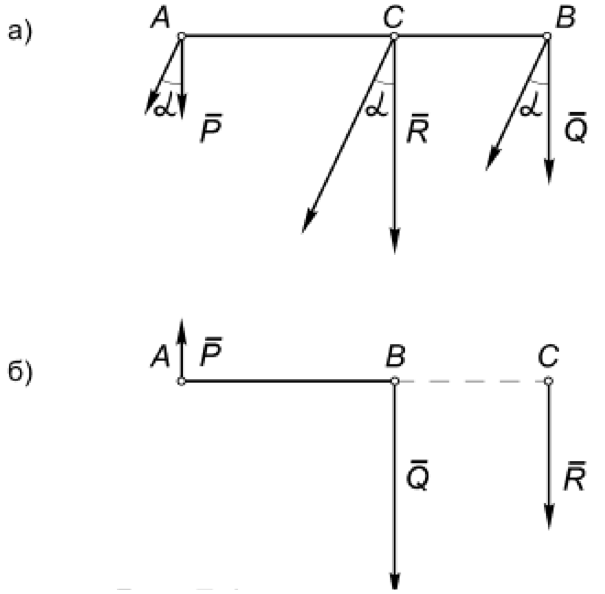


Рис.1

3. Система двух антиколлинеарных и равных по модулю сил. Возьмем за исходный предыдущий случай приведения. Зафиксируем силу P, а силу Q устремим по модулю к силе P.

Тогда при $Q \to P$ в формуле (1) отношение $AC/CB \to 1$. Это означает, что $AC \to CB$, то есть расстояние $AC \to \infty$.

При этом модуль главного вектора $R_C \to 0$, а модуль главного момента не зависит от положения центра приведения и остается равным первоначальному значению:

$M_C = P{\cdot}AC - Q{\cdot}CB = P{\cdot}(AC - CB) = P{\cdot}AB$.

Итак, в пределе мы получили систему сил, для которой $R_C = 0$, $M_C \neq 0$, а центр приведения удален в бесконечность, которую нельзя заменить равнодействующей. В этой системе нетрудно узнать пару сил, поэтому *пара сил равнодействующей не имеет*.

Центр системы параллельных сил.

Рассмотрим систему n сил P_i, приложенных в точках A_i (x_i, y_i, z_i) и параллельных оси Ov с ортом l (рис.2).

Если заранее исключить случай системы, эквивалентной паре сил, нетрудно на основании предыдущего параграфа доказать существование ее равнодействующей R.

Определим координаты центра $C(x_c, y_c, z_c)$ параллельных сил, то есть координаты точки приложения равнодействующей этой системы.

Воспользуемся с этой целью теоремой Вариньона, на основании которой:

$M_0(R) = \Sigma M_0(P_i)$.

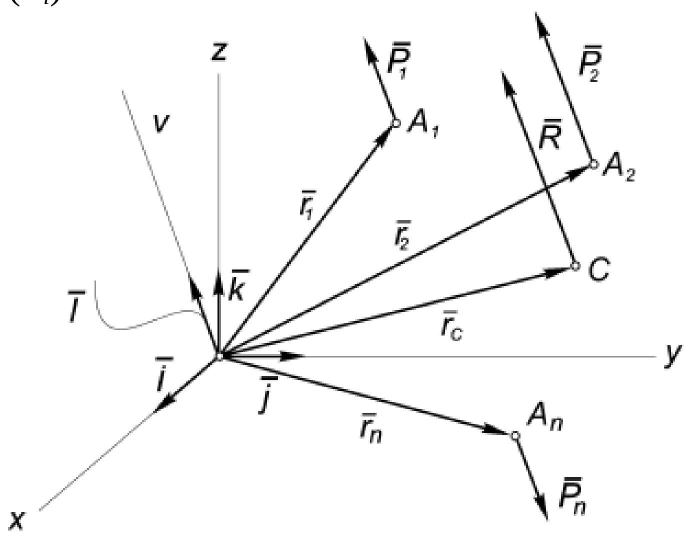


Рис.2

Вектор-момент силы можно представить в виде векторного произведения, поэтому:

$$M_0(R) = r_c \times R = \Sigma M_{0i}(P_i) = \Sigma(r_i \times P_i).$$

Учитывая, что $R = R_v \cdot l$, а $P_i = P_{vi} \cdot l$ и воспользовавшись свойствами векторного произведения, получим:

$$r_c \times R_v \cdot l = \Sigma(r_i \times P_{vi} \cdot l),$$
$$r_c \cdot R_v \times l = \Sigma(r_i \cdot P_{vi} \times l) = \Sigma(r_i \cdot P_{vi}) \times l,$$

или:

$$[r_c R_v - \Sigma(r_i P_{vi})] \times l = 0.$$

Последнее выражение справедливо только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Поэтому, опуская индекс v и учитывая, что равнодействующая $R = \Sigma P_i$, отсюда получим:

$$r_c = (\Sigma P_i r_i)/(\Sigma P_i).$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси координат, получим искомое *выражение координат центра параллельных сил*:

$$x_c = (\Sigma P_i x_i)/(\Sigma P_i);$$
$$y_c = (\Sigma P_i y_i)/(\Sigma P_i); \qquad (2)$$
$$z_c = (\Sigma P_i z_i)/(\Sigma P_i).$$

Центр тяжести тел.
Координаты центров тяжести однородного тела.

Рассмотрим твердое тело весом P и объемом V в системе координат $Oxyz$, где оси x и y связаны с поверхностью земли, а ось z направлена в зенит.

Если разбить тело на элементарные части объемом ΔV_i, то на каждую его часть будет действовать сила притяжения ΔP_i, направленная к центру Земли.

Предположим, что размеры тела значительно меньше размеров Земли, тогда систему сил, приложенных к элементарным частям тела можно считать не сходящейся, а параллельной (рис.3), и к ней применимы все выводы предыдущей главы.

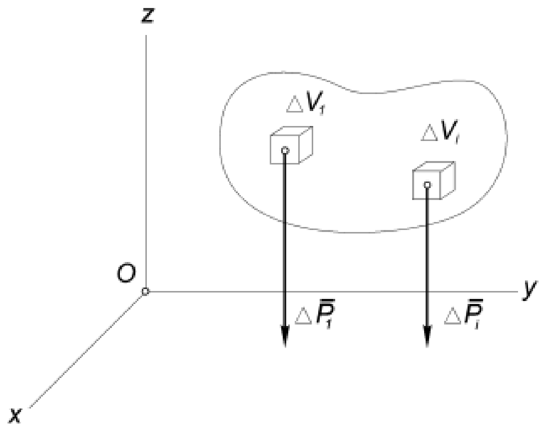


Рис.3

Определение. *Центром тяжести твердого тела называется центр параллельных сил тяжести элементарных частей этого тела.*

Напомним, что *удельным весом* элементарной части тела называется отношение ее веса ΔP_i к объему ΔV_i: $\gamma_i = \Delta P_i/\Delta V_i$. Для однородного тела эта величина является постоянной: $\gamma_i = \gamma = P/V$.

Подставляя в (2) $\Delta P_i = \gamma_i \cdot \Delta V_i$ вместо P_i, учитывая последнее замечание и сокращая числитель и знаменатель на γ, получим *выражения координат центра тяжести однородного тела*:

$$x_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot x_i)/(\Sigma\Delta V_i);$$
$$y_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot y_i)/(\Sigma\Delta V_i); \qquad (3)$$
$$z_c = (\Sigma\Delta V_i \cdot z_i)/(\Sigma\Delta V_i).$$

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1) Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии, то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_C по (3), будет равна нулю, т.к. в сумме $\Sigma P_i z_i$ все члены имеющие противоположные знаки, попарно уничтожаются. Значит центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2) Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_C и y_C, вычисленные по формулам (3), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3) Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И ещё несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку, а в формулах (3) P_i – определять как вес соответствующей части и x_i, y_i, z_i – как координаты её центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ - удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i - объём этой части тела. И формулы (3) примут более удобный вид. Например,

$$x_C = \sum P_i x_i / P = \sum V_i \cdot \gamma \cdot x_i / V \cdot \gamma = \sum V_i x_i / V.$$

И аналогично, $y_C = \sum V_i y_i / V,\ z_C = \sum V_i z_i / V,$ где $V = \sum V_i$ - объём всего тела.

Третье замечание. Пусть тело имеет вид тонкой пластинки площадью F и толщиной t, лежащей в плоскости Oxy. Подставляя в (3) $\Delta V_i = t \cdot \Delta F_i$, *получим координаты центра тяжести однородной пластинки*:

$$x_c = (\Sigma \Delta F_i \cdot x_i) / (\Sigma \Delta F_i);$$
$$y_c = (\Sigma \Delta F_i \cdot y_i) / (\Sigma \Delta F_i).$$
$$z_c = (\Sigma \Delta F_i \cdot z_i) / (\Sigma \Delta F_i).$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $F = \sum F_i$ – общая площадь тела.

Четвёртое замечание. Для тела в виде тонкого криволинейного стержня длиной L с площадью поперечного сечения a элементарный объем $\Delta V_i = a \cdot \Delta L_i$, поэтому *координаты центра тяжести тонкого криволинейного стержня* будут равны:

$$x_c = (\Sigma \Delta L_i \cdot x_i)/(\Sigma \Delta L_i);$$
$$y_c = (\Sigma \Delta L_i \cdot y_i)/(\Sigma \Delta L_i); \qquad (4)$$
$$z_c = (\Sigma \Delta L_i \cdot z_i)/(\Sigma \Delta L_i).$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i-го участка; $L = \sum \Delta L_i$.

Отметим, что согласно определению центр тяжести - это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Примечание.

В этом разделе курса мы не делаем разницы между силой притяжения, силой тяжести и весом тела. В действительности сила тяжести представляет собой разность между силой притяжения Земли и центробежной силой, вызванной ее вращением.

Координаты центров тяжести неоднородных тел.

Координаты центра тяжести **неоднородного твердого тела** (рис.4) в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

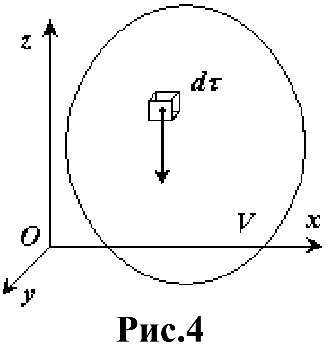


Рис.4

$$x_C = \int_V x \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau / \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau;$$

$$y_C = \int_V y \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau / \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau;$$

$$z_C = \int_V z \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau / \int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau$$

где $\gamma_T = (x,y,z)$ - вес единицы объема тела (удельный вес)

$\int_V \gamma_T(x,y,z)d\tau$ - вес всего тела.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную поверхность** (рис.5), то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

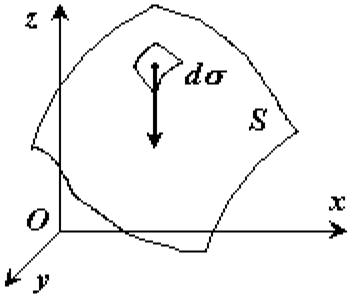


Рис.5

$$x_C = \int_S x \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma;$$

$$y_C = \int_S y \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma;$$

$$z_C = \int_S z \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma / \int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma$$

где $\gamma_S = (x,y,z)$ - вес единицы площади тела,

$\int_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma$ - вес всего тела.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную линию** (рис.6), то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

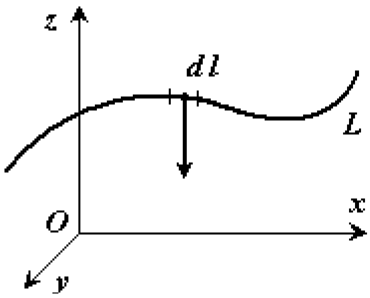


Рис.6

$$x_C = \int_L x \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl;$$

$$y_C = \int_L y \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl;$$

$$z_C = \int_L z \cdot \gamma_L(x,y,z)dl / \int_L \gamma_L(x,y,z)dl$$

где $\gamma_L = (x,y,z)$ - вес единицы длины тела,

$\int_L \gamma_S(x,y,z)dl$ - вес всего тела.

Способы определения координат центра тяжести.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. **Симметрия.** Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии (рис.7), то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, оси симметрии или в центре симметрии.

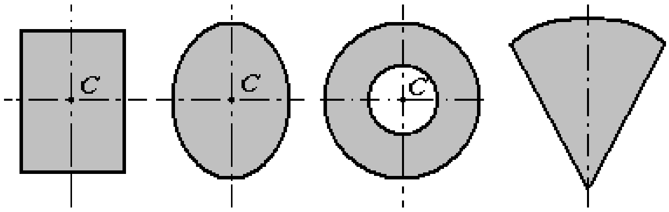


Рис.7

2. **Разбиение.** Тело разбивается на конечное число частей (рис.8), для каждой из которых положение центра тяжести и площадь известны.

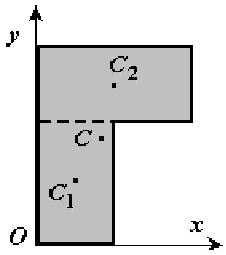


Рис.8

$$C_1(x_1,y_1), S_1 \quad C_2(x_2,y_2), S_2$$

$$x_C = (x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2)/S_1 + S_2$$

$$y_C = (y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2)/S_1 + S_2$$

$$S = S_1 + S_2.$$

3. **Метод отрицательных площадей.** Частный случай способа разбиения (рис.9). Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны. Тело в виде пластинки с вырезом представляют комбинацией сплошной пластинки (без выреза) с площадью S_1 и площади вырезанной части S_2.

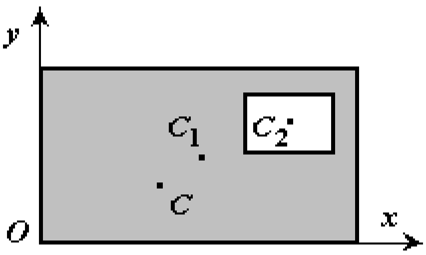


Рис.9

$$C_1(x_1, y_1), S_1 \;\; C_2(x_2, y_2), S_2$$
$$x_C = (x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2)/(S_1 - S_2)$$
$$y_C = (y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2)/(S_1 - S_2)$$
$$S = S_1 - S_2.$$

4. **Метод группировки.** Является хорошим дополнением двух последних методов. После разбиения фигуры на составные элементы часть их бывает удобно объединить вновь, чтобы затем упростить решение путем учета симметрии этой группы.

Центры тяжести некоторых однородных тел.

1) **Центр тяжести дуги окружности.** Рассмотрим дугу *AB* радиуса *R* с центральным углом $AOB = 2\alpha$. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси *Ox* (рис. 10).

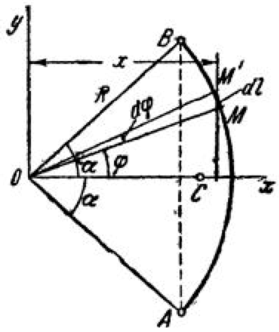


Рис.10

Найдем координату x_C по формуле $x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl$. Для этого выделим на дуге *AB* элемент *MM'* длиною $dl = Rd\varphi$, положение которого определяется углом φ. Координата *x* элемента *MM'* будет $x = R\cos\varphi$. Подставляя эти значения *x* и d*l* и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha,$$

где L - длина дуги AB, равная $R = 2\alpha$.

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном $x_C = R\sin\alpha/\alpha$,

где угол α измеряется в радианах.

2) **Центр тяжести площади треугольника.** Рассмотрим треугольник, лежащий в плоскости *Oxy*, координаты вершин которого известны: A_i (x_i,y_i), (i = 1,2,3). Разбивая треугольник на узкие полоски, параллельные стороне A_1A_2 , придем к выводу, что центр тяжести треугольника должен принадлежать медиане A_3 M_3 (рис.11).

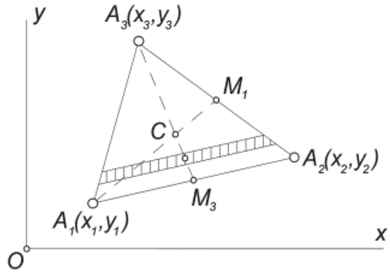


Рис.11

Разбивая треугольник на полоски, параллельные стороне A_2A_3, можно убедиться, что он должен лежать на медиане A_1M_1. Таким образом, *центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан*, которая, как известно, отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

В частности, для медианы A_1M_1 получим, учитывая, что координаты точки M_1 – это среднее арифметическое координат вершин A_2 и A_3:

$x_c = x_1 + (2/3)\cdot(x_{M1} - x_1) = x_1 + (2/3)\cdot[(x_2 + x_3)/2 - x_1] = (x_1 + x_2 + x_3)/3.$

Таким образом, координаты центра тяжести треугольника представляют собой среднее арифметическое из координат его вершин:

$x_c = (1/3)\Sigma x_i$; $y_c = (1/3)\Sigma y_i$.

3) **Центр тяжести площади кругового сектора.** Рассмотрим сектор круга радиуса R с центральным углом 2α, расположенный симметрично относительно оси Ox (рис.12) .

Очевидно, что $y_c = 0$, а расстояние от центра круга, из которого вырезан этот сектор, до его центра тяжести можно определить по формуле:

$$x_c = \frac{1}{F}\int_F x dF. \qquad (5)$$

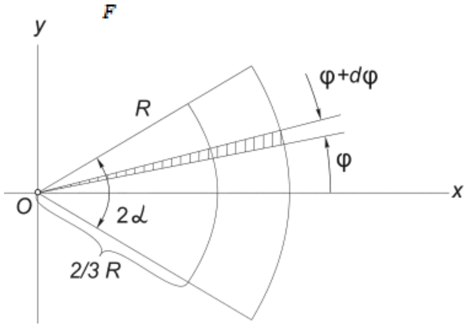


Рис.12

Проще всего этот интеграл вычислить, разбивая область интегрирования на элементарные секторы с углом $d\varphi$. С точностью до бесконечно малых первого порядка такой сектор можно заменить треугольником с основанием, равным $R\cdot d\varphi$ и высотой R. Площадь такого треугольника $dF=(1/2)R^2\cdot d\varphi$, а его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины, поэтому в (5) положим $x = (2/3)R\cdot\cos\varphi$. Подставляя в (5) $F = \alpha R^2$, получим:

$$x_c = \frac{1}{\alpha R^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}R\cos\varphi\frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{R}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{3\alpha}\Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{R}{3\alpha}[\sin\alpha - \sin(-\alpha)] = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}. \qquad (6)$$

С помощью последней формулы вычислим, в частности, расстояние до центра тяжести *полукруга*.

ЛЕКЦИИ 7-8. КИНЕМАТИКА. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ТРАЕКТОРИЯ. ВЕКТОР СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Краткие сведения по истории развития кинематики.
2. Кинематика точки. Введение в кинематику.
3. Способы задания движения точки.
4. Вектор скорости точки.
5. Вектор ускорения точки.
6. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения точки.
7. Определение ускорения в полярных координатах.
8. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения точки. Касательное и нормальное ускорение точки.
9. Некоторые частные случаи движения точки.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики движения материальной точки, динамики относительного движения точки, динамики вращательного движения точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Краткие сведения по истории развития кинематики

Кинематика, как специальный раздел теоретической механики, возникла позднее статики и динамики, а именно, в начале второй половины XIX в. Появление первых исследований по кинематике связано с изобретением огнестрельного оружия. В первую очередь внимание исследователей привлекали вопросы определения траектории полета снаряда, уточнение понятий о неравномерном и криволинейном движении точки. Леонардо да Винчи (1452—1519) первый экспериментально изучал вопрос о свободном вертикальном падении тяжелого тела. Однако лишь благодаря трудам Г. Галилея (1564—1642) развитие механики тесно связывается с запросами техники того времени. Галилею принадлежит введение понятия об ускорении и доказательство того, что траекторией движения снаряда, брошенного в пустоте под некоторым углом к горизонту, является парабола. Законы, найденные Галилеем, были развиты в исследованиях Э. Торричелли (1608—1647), установившем формулу пропорциональности скорости падения тела корню квадратному из высоты падения. Обобщение понятия ускорения на случай криволинейного движения было получено X. Гюйгенсом (1629—1695), который первым обратил внимание на возможность разложения ускорения при криволинейном движении на касательное и нормальное. Однако строгое доказательство этого было дано Л. Эйлером (1707—1783).

Кинематические законы движения планет были установлены И. Кеплером (1571—1630). Эти законы легли в основу закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном.

Л. Эйлеру принадлежат основополагающие исследования по кинематике точки в случае естественного способа задания движения, по кинематике вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Он создал широко применяемый метод кинематического описания движения твердого тела с помощью трех углов, называемых углами Эйлера.

Развитие кинематики системы обязано трудам Ж. Лагранжа (1736-1813).

Однако только бурный рост машиностроения в XIX в. повлек за собой расцвет кинематики как науки. По предложению Ж. Ампера в 1851 г. кинематика выделилась в особый раздел теоретической механики. Появляется ряд глубоких исследований по кинематике твердого тела французских ученых М. Шаля (1793—1886), Л. Пуансо, Г. Кориолиса (1792—1843). П. Л. Чебышев (1821—1894) создал в России научную школу по кинематике механизмов. Богатое научное наследие по кинематике механизмов Чебышева разрабатывается советскими учеными, среди которых, в первую очередь, следует отметить Н. И. Мерцалова (1860—1948), И. И. Артоболевского, А. П. Котельникова (1865—1940), Д. С. Зернова, Л. В. Асура (1878—1920), Я. Л. Геронимуса и др.

«Отцу русской авиации» Н. Е. Жуковскому (1847—1921) принадлежат первоклассные работы по теоретической механике, в том числе и по кинематике, в которых широко внедрены геометрические методы доказательств различных теорем. Ряд замечательных исследований по кинематике принадлежит профессору Одесского университета В. Н. Лигнину (1846—1900), возглавлявшему на Украине научное направление исследований по кинематике.

Кинематика точки. Введение в кинематику.

Кинематикой (от греческого «кинема» — движение) называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

В кинематике изучают зависимости между пространственно-временными характеристиками механического движения. Поэтому кинематику называют также геометрией движения.

Основной задачей кинематики является нахождение положения тела в любой момент времени, если известны его положение, скорость и ускорение в начальный момент времени.

Обычно кинематику подразделяют на две части — кинематику точки и кинематику твердого тела.

Механическое движение - это изменение положения тел (или частей тела) относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.

Тело отсчета - тело (или группа тел), принимаемое в данном случае за неподвижное, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета - это система координат, связанная с телом отсчета, и выбранный способ измерения времени (рис. 1).

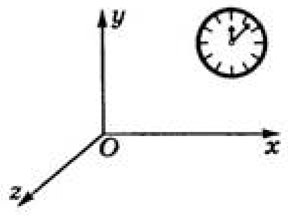


Рис.1

Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны).

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t.

В теоретической механике при измерении пространства за основную единицу длины принимают метр (м), а за основную единицу времени — секунду (с). Время предполагается одинаковым в любых системах отсчета (системах координат) и не зависимым от движения этих систем относительно друг друга. Время обозначается буквой и рассматривается как непрерывно изменяющаяся величина, принимаемая в качестве аргумента.

При измерении времени в кинематике различают такие понятия, как промежуток времени, момент времени, начальный момент времени.

Промежутком времени называется время, протекающее между двумя физическими явлениями. Моментом времени называют границу между двумя смежными промежутками времени. Начальным моментом называется время, с которого начинают отсчет времени.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Положение тела можно определить с помощью радиус-вектора $\vec{r}$ или с помощью координат.

Радиус-вектор $\vec{r}$ точки М - направленный отрезок прямой, соединяющий начало отсчета О с точкой М (рис. 2).

Координата x точки М - это проекция конца радиуса-вектора точки М на ось Ох. Обычно пользуются прямоугольной системой координат Декарта. В этом случае положение точки М на линии, плоскости и в пространстве определяют соответственно одним (x), двумя (x, y) и тремя (x, y, z) числами - координатами (рис. 2.1).

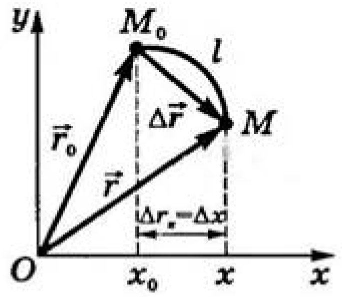


Рис.2

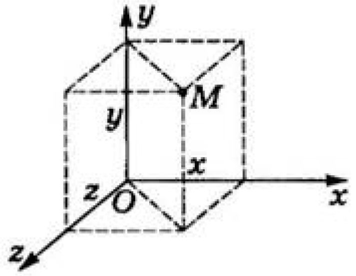


Рис.2.1

Материальная точка - тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Этой моделью пользуются в тех случаях, когда линейные размеры рассматриваемых тел много меньше всех прочих расстояний в данной задаче или когда тело движется поступательно.

Основной задачей кинематики точки является изучение законов движения точки. Зависимость между произвольными положениями движущейся точки в пространстве и времени определяет закон ее движения. Закон движения точки считают известным, если можно определить положение точки в пространстве в произвольный момент времени. Положение точки рассматривается по отношению к выбранной системе координат.

Поступательным называется движение тела, при котором прямая, проходящая через любые две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому для описания такого движения тела достаточно описать движение его одной произвольной точки.

В дальнейшем под словом "тело" будем понимать "материальная точка".

Линия, которую описывает движущееся тело в определенной системе отсчета, называется **траекторией**. На практике форму траектории задают с помощью математических формул (y=f(x) — уравнение траектории) или изображают на рисунке. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Например, траекторией тела, свободно падающего в вагоне, который движется равномерно и прямолинейно, является прямая вертикальная линия в системе отсчета, связанной с вагоном, и парабола в системе отсчета, связанной с Землей.

В зависимости от вида траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

Путь s - скалярная физическая величина, определяемая длиной траектории, описанной телом за некоторый промежуток времени. Путь всегда положителен: $s > 0$.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ тела за определенный промежуток времени - направленный отрезок прямой, соединяющий начальное (точка M_0) и конечное (точка M) положение тела (см. рис. 2):

$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r_0}$,

где $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$— радиус-векторы тела в эти моменты времени.

Проекция перемещения на ось Ox: $\Delta r_x = \Delta x = x - x_0$, где x_0 и x - координаты тела в начальный и конечный моменты времени.

Модуль перемещения не может быть больше пути: $|\Delta\vec{r}| \leq s$.

Знак равенства относится к случаю прямолинейного движения, если направление движения не изменяется.

Зная перемещение и начальное положение тела, можно найти его положение в момент времени t:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \Delta\vec{r}$$
$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta r_x \\ y = y_0 + \Delta r_y \end{cases}$$

Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки.

Пусть точка *M* движется по отношению к некоторой системе отсчета *Oxyz*. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат *O* в точку *M* (рис. 3).

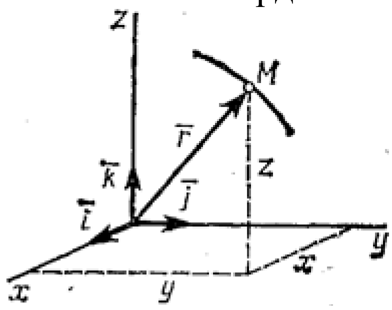


Рис.3

При движении точки *M* вектор $\vec{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\vec{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Равенство определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор $\vec{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\vec{r}$, т.е. ***годограф*** этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

2. Координатный способ задания движения точки.

Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x, y, z (рис.3), которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т.е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т.е. знать зависимости

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

Уравнения представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

Чтобы получить уравнение траектории надо из уравнений движения исключить параметр t.

Нетрудно установить зависимость между векторным и координатным способами задания движения.

Разложим вектор $\vec{r}$ на составляющие по осям координат:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k},$$

где r_x, r_y, r_z - проекции вектора на оси; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы направленные по осям, орты осей.

Так как начало $\vec{r}$ вектора находится в начале координат, то проекции вектора будут равны координатам точки *M*. Поэтому

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}.$$

Если движение точки задано в полярных координатах

$$r=r(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

где r — полярный радиус, φ — угол между полярной осью и полярным радиусом, то данные уравнения выражают уравнение траектории точки. Исключив параметр t, получим

$$r = r(\varphi).$$

Пример 1. Движение точки задано уравнениями

$$\begin{cases} x = 2sin2t, \\ y = 3cos2t. \end{cases}$$

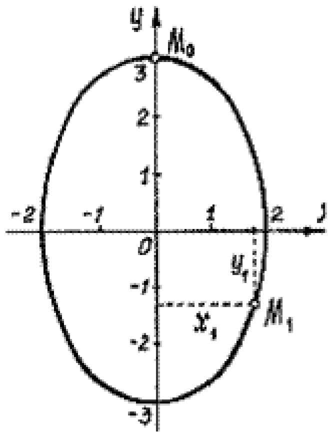


Рис.4

Чтобы исключить время, параметр *t*, найдём из первого уравнения sin2t=x/2, из второго cos2t=y/3. Затем возведём в квадрат и сложим. Так как

$\sin^2 2t+\cos^2 2t=1$, получим $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Это уравнение эллипса с полуосями 2 см и 3 см (рис.4).

Начальное положение точки M_0 (при t=0) определяется координатами

$x_0=0$, $y_0=3$ см.

Через 1 сек. точка будет в положении M_1 с координатами

$x_1=2\sin 2=2\cdot 0{,}91=1{,}82$ см, $y_1=2\cos 2=3\cdot(-0{,}42)=-1{,}25$ см.

Примечание.

Движение точки может быть задано с помощью и других координат. Например, цилиндрических или сферических. Среди них будут не только линейные размеры, но и углы. При необходимости, с заданием движения цилиндрическими и сферическими координатами можно познакомиться по учебникам.

3. Естественный способ задания движения точки.

Рис.5

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая *AB* является траекторией точки *M* при ее движении относительно системы отсчета *Oxyz* (рис.5) Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку *O'*, которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета (как на координатной оси).

Тогда положение точки *M* на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой *s*, которая равна расстоянию от точки *O'* до точки *M*, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка *M* перемещается в положения M_1, M_2,... . следовательно, расстояние *s* будет с течением времени изменяться.

Чтобы знать положение точки *M* на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s=f(t).$$

Уравнение выражает закон движения точки М вдоль траектории. Функция s= f(t) должна быть однозначной, непрерывной и дифференцируемой.

За положительное направление отсчета дуговой координаты s принимают направление движения точки в момент, когда она занимает положение О. Следует помнить, что уравнение s=f(t) не определяет закон движения точки в пространстве, так как для определения положения точки в пространстве нужно знать еще траекторию точки с начальным положением точки на ней и фиксированное положительное направление. Таким образом, движение точки считается заданным естественным способом, если известна траектория и уравнение (или закон) движения точки по траектории.

Важно заметить, что дуговая координата точки s отлична от пройденного точкой по траектории пути σ. При своем движении точка проходит некоторый путь σ, которой является функцией времени t. Однако пройденный путь σ совпадает с расстоянием s лишь тогда, когда функция s = f(t) монотонно изменяется со временем, т.е. при движении точки в одном направлении. Допустим, что точка M переходит из M_1 в M_2. Положению точки в M_1 соответствует время t_1, а положению точки в M_2 - время t_2. Разложим промежуток времени t_2- t_1 на весьма малые промежутки времени Δt_1 (i = 1,2, …n) так, чтобы в каждый из них точка совершала движение в одном направлении. Соответствующее приращение дуговой координаты обозначим Δs_i. Пройденной точкой путь σ будет положительной величиной:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\Delta s_i| = \int_{t_1}^{t_2}|ds|$$

Если движение точки задано координатным способом, то пройденный путь определяется по формуле

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dt,$$

так как

$$d\sigma = |ds| = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

где dx=xdt, dy= ydt, dz=zdt.

Следовательно,

$$d\sigma = |ds| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}dt,$$

Пример 2. Точка движется по прямой линии, по закону s=2t+3 (см) (рис. 6).

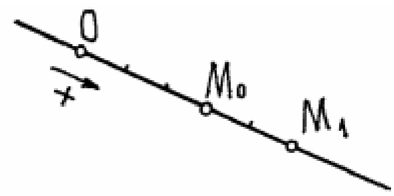


Рис.6

В начале движения, при t=0 $s=OM_0=s_0$=3 см. Положение точки M_0 называется ***начальным положением.*** При t=1 с, $s=OM_1$=5 см.

Конечно, за 1 сек. точка прошла расстояние M_0M_1=2 см. Так что *s* – это не путь пройденный точкой, а расстояние от начала отсчёта до точки.

Вектор скорости точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Понятие скорости точки в равномерном прямолинейном движении относится к числу элементарных понятий.

Скорость - мера механического состояния тела. Она характеризует быстроту изменения положения тела относительно данной системы отсчета и является векторной физической величиной.

Единица измерения скорости – м/с. Часто используют и другие единицы, например, км/ч: 1 км/час=1/3,6 м/с.

Движение точки называется равномерным, если приращения радиуса-вектора точки за одинаковые промежутки времени равны между собой. Если при этом траекторией точки является прямая, то движение точки называется прямолинейным.

Для равномерно-прямолинейного движения

$$\Delta r = v\Delta t, \qquad (1)$$

где v – постоянный вектор.

Вектор v называется скоростью прямолинейного и равномерного движения полностью его определяет.

Из соотношения (1) видно, что скорость прямолинейного и равномерного движения является физической величиной, определяющей перемещение точки за единицу времени. Из (1) имеем

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Направление вектора v указано на рис. 6.1.

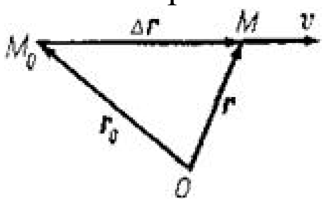


Рис.6.1

При неравномерном движении эта формула не годится. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени.

Пусть движущаяся точка находится в момент времени t в положении M, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 определяемое вектором $\vec{r}_1$ (рис.7). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overrightarrow{MM_1}$ который будем называть вектором перемещения точки. Из треугольника OMM_1 видно, что $\vec{r} + \overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1$; следовательно, $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$.

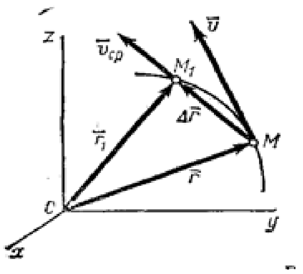


Рис. 7

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени Δt:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \overrightarrow{MM_1}/\Delta t = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина v, к которой стремится средняя скорость $v_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}(\vec{v}_{ср}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Вектор скорости точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, учитывая, что $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$, найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α, β, γ, которые вектор v образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad cos\beta = \frac{v_y}{v}, \quad cos\gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Итак, численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Величину скорости можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1. Первый предел равен единице, второй предел – производная ds/dt.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении

Вектор ускорения точки

Ускорение — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости. Оно показывает, на какую величину изменяется скорость тела за единицу времени.

В СИ единицей ускорения является метр на секунду в квадрате $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении *M* и имеет скорость v, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1 (рис. 8).

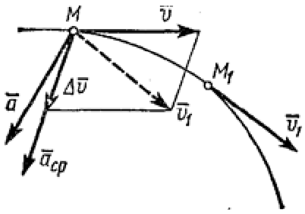


Рис.8

Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$. Для построения вектора $\Delta\vec{v}$ отложим от точки *M* вектор, равный v_1, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\vec{v}_1$, а одной из сторон $\vec{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\vec{v}$. Заметим, что вектор $\Delta\vec{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \Delta\vec{v}/\Delta t.$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\vec{v}$, т.е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени *t* называется векторная величина $\vec{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\vec{a}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю: Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Ускорение точки равно нулю лишь тогда, когда скорость точки *v* постоянна как по величине, так и по направлению: это соответствует только прямолинейному и равномерному движению.

Найдем, как располагается вектор $\vec{a}$ по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор $\vec{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка.

При прямолинейном движении с возрастающей по модулю скоростью (рис. 9, а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{v_0}$ сонаправлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения положительна.

При прямолинейном движении с убывающей по модулю скоростью (рис. 9, б) направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{v_0}$ противоположны ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v_0}$) и проекция ускорения на направление движения отрицательна.

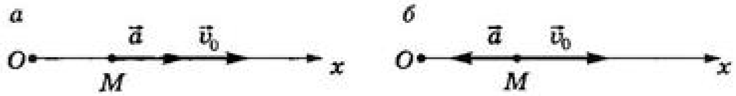


Рис.9

Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения $\vec{a}$, так же как и вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке *M* и прямую, параллельную касательной в соседней точке M_1 (рис. 8). В пределе, когда точка *M* стремится к *M*, эта плоскость занимает положение так называемой соприкасающейся плоскости, т.е. плоскости, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки. Следовательно, в общем случае вектор ускорения $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

Определение ускорения при координатном способе задания движения

Вектор ускорения точки $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ в проекции на оси получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Или

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

т.е. проекция ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \qquad cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}, \qquad cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где α_1, β_1, γ_1 - углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Пример 3. Движение точки задано уравнениями x=2t, $y=3-4t^2$.

Из первого уравнения t=x/2. Подставив во второе, получим уравнение траектории: $y=3-x^2$

Это уравнение параболы. В начале движения, при t=0, точка находилась на самом верху, в положении M_0 ($x_0=0$, $y_0=3$ см).

А, например, при *t* =0,5 с она будет в положении *M* с координатами $x_1=1$ см; $y_1=2$ см.

Проекции скорости на оси $v_x=\dot{x}=2$см·с$^{-1}$, $v_y=\dot{y}=-8t$ см·с$^{-1}$.

При *t* =0,5 с, $v_x=2$см·с$^{-1}$, $v_y=-4$ см·с$^{-1}$.

И модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47$ см · с$^{-1}$.

Составляющие скорости по осям и вектор её показаны в масштабе на рис. 10.

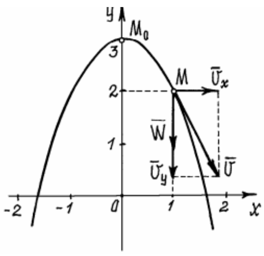


Рис.10

Проекции ускорения $a_x=\ddot{x}=0$, $a_y=\ddot{y}=-8$ см·с$^{-2}$. Так как проекция вектора ускорения на ось *x* равна нулю, а на ось *y* – отрицательна, то вектор ускорения направлен вертикально вниз, и величина его постоянна, не зависит от времени.

Определение ускорения в полярных координатах

Пусть движение точки М в плоскости Оху задано в полярных координатах r= r(t); φ= φ(t). Декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$x= r\cdot\cos\varphi$, $y= r\cdot\sin\varphi$.

Найдем проекции a_r и a_φ ускорение а точки на радиальное (r) и трансверсальное (φ) направление (рис.10.1)

Для a_x и a_y имеем выражение

$$a_x=a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi, \quad a_y=a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi$$

С другой стороны,

$$a_x=x=r\cos\varphi – 2r\varphi\sin\varphi – r\cos\varphi\cdot\varphi^2 – r\sin\varphi\cdot\varphi,$$

$$a_y=y=r\sin\varphi + 2r\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi^2 + r\cos\varphi\cdot\varphi.$$

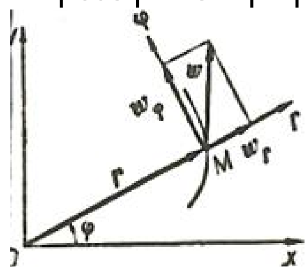


Рис.10.1

Таким образом, получим

$$a_r=r – r\varphi^2, \quad a_\varphi=2r\varphi + r\varphi.$$

Модуль ускорения

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\varphi^2}=\sqrt{(r-r\varphi^2)^2+(2r\varphi+r\varphi)^2}.$$

Обозначая через θ угол, образованный ускорением с положительным радиальным направлением, определим направление ускорения *а* точки по формуле

$$tg\theta=\frac{a_\varphi}{a_r}=\frac{2r\varphi+r\varphi}{r-r\varphi^2}.$$

Определение ускорения при естественном способе задания движения. Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вектор $\vec{a}$ определяют по его проекциям на оси Mτnb, имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею (рис.11). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными (естественными) осями), направлены следующим образом: ось Mτ - вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния *s*; ось Mn - по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

Естественные оси – это подвижные оси, связанные с движущейся точкой М и образующие правую прямоугольную систему координат. Плоскость, проходящая через обе нормали (главную нормаль n и бинормаль b), называется нормальной плоскостью. Координатная плоскость, проходящая через касательную нормаль n, называется соприкасающейся плоскостью.

Соприкасающуюся плоскость в некоторой точке М кривой можно определить также, как предельное положение плоскости, проходящей через касательную в точке М и любую точку кривой M_1, когда последняя стремится в пределе к совпадению с точкой М.

При движении точки по траектории направления естественных осей непрерывно изменяются.

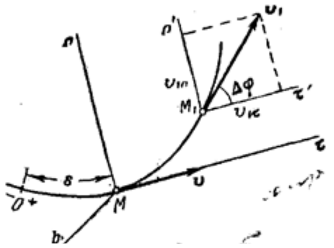


Рис.11

Было показано, что ускорение точки $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости, т.е. в плоскости Mτn; следовательно, проекция вектора $\vec{a}$ на бинормаль равна нулю (a=0).

Вычислим проекции $\vec{a}$, на две другие оси. Пусть в момент времени *t* точка находится в положении М и имеет скорость v, а в момент $t_1=t+\Delta t$ приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1.

Тогда по определению

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}.$$

Перейдем в этом равенстве от векторов к их проекциям на оси Mτ и Mn, проведенные в точке *M* (рис.11). Тогда на основании теоремы о проекции суммы (или разности) векторов на ось получим:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

Учитывая, что проекция вектора на параллельные оси одинаковы, проведем через точку M_1 оси M'_τ, M'_n, параллельные Mτ, Mn, и обозначим угол между направлением вектора $\vec{v}_1$ и касательной Mτ через Δφ. Этот угол между касательными к кривой в точках *M* и M_1 называется *углом смежности*.

Напомним, что предел отношения угла смежности Δφ к длине дуги $MM_1=\Delta s$ определяет кривизну *k* кривой в точке *M*. Кривизна же является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в точке М. Таким образом,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Обращаясь теперь к чертежу (рис.11), находим, что проекции векторов $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ на оси Mτ, Mn, будут равны:

$$\begin{cases} v_\tau = v, \quad v_n = 0 \\ v_{1\tau} = v_1 cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 sin\Delta\varphi, \end{cases}$$

где v и v_1 - численные величины скорости точки в моменты t и t_1.

Следовательно,

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1 cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\left(v_1\frac{sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right).$$

Заметим что при $\Delta t \to 0$ точка M_1 неограниченно приближается к M и одновременно

$$\Delta\varphi \to 0, \quad \Delta s \to 0, \quad v_1 \to v.$$

Тогда, учитывая, что в пределе $\lim_{\Delta\varphi\to 0}(cos\Delta\varphi) = 1$, получим для a_τ выражение

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Правую часть выражения a_n преобразуем так, чтобы в нее вошли отношения, пределы которых нам известны. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на ΔφΔs. Тогда будем иметь

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\left(v_1\frac{sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{p},$$

так как пределы каждого из стоящих в скобке сомножителей при $\Delta t \to 0$ равны:

$$lim v_1 = v, \quad lim\frac{sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \quad lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{p}, \quad lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Окончательно получаем:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{p}.$$

Итак, мы доказали, что проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой; проекция ускорения на бинормаль равна нулю (a_b=0). Эти результаты выражают собою одну из важных теорем кинематики точки.

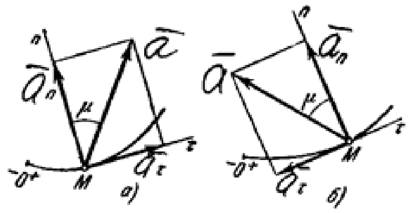


Рис.12

Отложим вдоль касательной Mτ и главной нормали Mn векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, численно равные a_τ и a_n (рис. 12). Эти векторы изображают **касательную и нормальную составляющие ускорения точки.** При этом составляющая $\vec{a}_n$ будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой (величина *a* всегда положительна), а составляющая $\vec{a}_\tau$ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси Mτ в зависимости от знака проекции a_τ (см. рис.12, а и б).

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то по модулю:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)}.$$

Относительность движения. Сложение скоростей

Как отмечалось выше, для описания движения тела необходимо выбрать тело отсчета и связать с ним систему координат. В качестве тела отсчета может выступать любое тело.

В разных системах отсчета будут различны вид траектории, значения скорости, перемещения и других величин. В этом и заключается относительность движения.

Например, человек идет по палубе парохода со скоростью $\vec{v_1}$ относительно парохода. Пароход движется поступательно со скоростью $\vec{v_2}$ относительно берега. Найдем скорость $\vec{v}$ человека относительно берега.

Свяжем неподвижную систему отсчета (хОу) с Землей, а подвижную (х'О'у') — с пароходом.

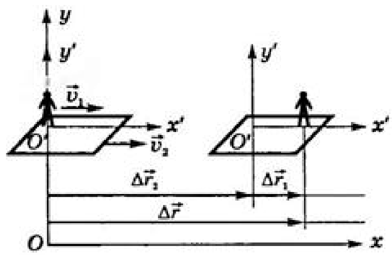


Рис.13

Из рис.13 видно, что перемещение

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2} \Rightarrow \Delta\vec{r} \neq \Delta\vec{r_1} (1)$$

где $\Delta\vec{r_1}$ — перемещение человека относительно парохода, $\Delta\vec{r_2}$ — перемещение парохода относительно берега, $\Delta\vec{r}$ — перемещение человека относительно берега.

Таким образом, если тело одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею в каждом из движений. В этом состоит установленный экспериментально **принцип независимости движений.**

Разделив уравнение (1) на промежуток времени, за который произошли перемещения человека и парохода, получим закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

Скорость $\vec{v}$ тела относительно неподвижной системы отсчета равна геометрической сумме скорости $\vec{v_1}$ тела относительно подвижной системы отсчета и скорости $\vec{v_2}$ самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Закон сложения скоростей справедлив и для неравномерного движения, только в этом случае $\vec{v}$, $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ - мгновенные скорости.

Этот закон был установлен Г. Галилеем. Он справедлив только для движений со скоростями, намного меньшими скорости света c = $3 \cdot 10^8$ (м/с). Такие скорости в физике называют **нерелятивистскими.**

Некоторые частные случаи движения точки.

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

Равномерное прямолинейное движение

Равномерное прямолинейное движение - это движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, т. е. это движение с постоянной по модулю и направлению скоростью:

$\vec{v} = const$ — уравнение скорости,

$\vec{a} = 0$ — уравнение ускорения.

Пусть в момент времени $t_0=0$ координата тела x_0, в момент t - x (рис. 14).

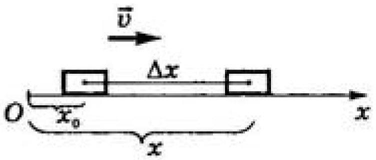


Рис.14

Тогда за промежуток времени $\Delta t=t-t_0=t$ координата X тела изменилась на величину $\Delta x = x - x_0$. Следовательно, проекция скорости тела

$v_x = \frac{x-x_0}{t}$,следовательно,

$x=x_0+v_xt$- кинематическое уравнение равномерного движения (уравнение зависимости координаты от времени).

Проекция перемещения $\Delta r_x=x-x_0$

$\Delta r_x=v_xt$ - уравнение перемещения.

При равномерном прямолинейном движении направление скорости не изменяется, поэтому путь $s = |\Delta r_x|$. Следовательно, $s = |v_x|t$ — уравнение пути.

Зависимость кинематических величин от времени можно изобразить графически.

Изобразим графики скорости, перемещения, пути и координаты для трех тел: 1, 2, 3 (рис. 15).

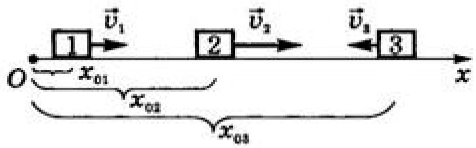


Рис.15

Тела 1, 2 движутся в положительном направлении оси Ox, причем $v_2 > v_1$; тело 3 движется в направлении, противоположном оси Ox; их начальные координаты соответственно x_{01}, x_{02}, x_{03}. Графики скорости представлены на рис.16. Площадь заштрихованного прямоугольника численно равна пути s (модулю перемещения), пройденному телом 1 за время t_1. На рис.17 даны графики перемещения $\Delta r_x = f(t)$, на рис.18 - графики пути s=f(t).

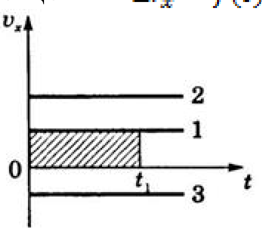


Рис.16

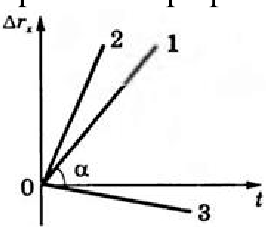


Рис.17

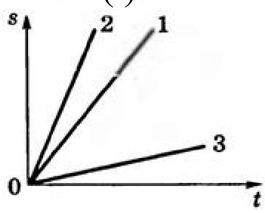


Рис.18

Наклон графика $\Delta r_x = f(t)$, к оси времени зависит от модуля скорости: $tg\alpha = v_x$.

Графики движения (зависимости координаты от времени) изображены на рис.19.

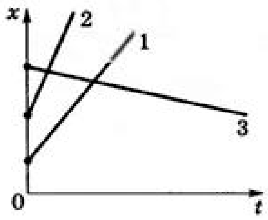


Рис.19

С помощью графика движения можно определить:

1) координаты тела в любой момент времени;
2) путь, пройденный телом за некоторый промежуток времени;
3) время, за которое пройден какой-то путь;
4) кратчайшее расстояние между телами в любой момент времени;
5) момент и место встречи тел и др.

Равноускоренное прямолинейное движение

Равноускоренное прямолинейное движение - это движение, при котором скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково, т. е. это движение с постоянным по модулю и направлению ускорением.

$\vec{a}$=const — уравнение ускорения.

По определению ускорения $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

Пусть в момент времени t_0 скорость тела равна $\vec{v_0}$, в момент времени *t* - $\vec{v}$. Тогда за промежуток времени $\Delta t=t-t_0=t$ скорость изменилась на $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v_0}$. Следовательно, ускорение $\vec{a} = \frac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}$

$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$ — уравнение скорости.

Или в проекциях: $v_x = v_{0x} + a_x t$.

Эти зависимости кинематических величин от времени изобразим графически для трех тел (рис.20).

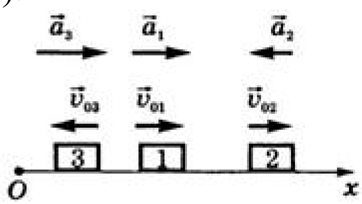
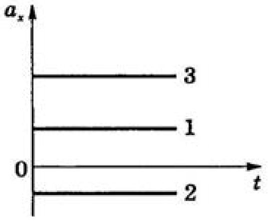
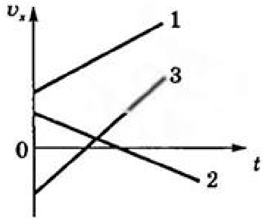


Рис.20

Графики ускорения $a_x = f(t)$ представлены на рис.21, а графики скорости $v_x = f(t)$ - на рис.22.

Для нахождения перемещения воспользуемся графиком скорости (рис.23). Для малого промежутка времени Δt изменением величины скорости можно пренебречь и скорость можно считать постоянной. Тогда перемещение за промежуток времени Δt будет равно площади узкой густо заштрихованной полоски. Мысленно разбив все время движения тела на малые промежутки времени и найдя перемещение за каждый отдельный промежуток времени, суммируем эти перемещения. Модуль проекции перемещения за промежуток времени $\Delta t=t-t_0=t$ в пределе численно равен площади заштрихованной трапеции.





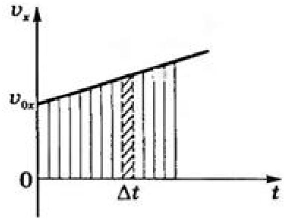


Рис.21 **Рис.22** **Рис.23**

Следовательно, $\Delta r_x = \frac{(v_{0x}+v_x)t}{2}$ (2)

Подставив значение $v_x = v_{0x} + a_x t$ в (2), получим:

$\Delta r_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ — уравнение перемещения в проекциях;

$\Delta\vec{r} = \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$ — уравнение перемещения в векторном виде.

Учитывая, что $x=x_0+\Delta r_x$, имеем:

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ — кинематическое уравнение равноускоренного движения.

Его векторный вид: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

Исключая из уравнений скорости и перемещения время t, получим:

$$\Delta r_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \Rightarrow v_x = \sqrt{v_{0x}^2 + 2a_x\Delta r_x}.$$

Сравнивая выражение (2) с формулой $\Delta r_x = \langle v\rangle_x t$, найдем:

$\langle v\rangle_x = \frac{v_{0x}+v_x}{2}$ - проекция средней скорости при равноускоренном движении.

Графиком перемещения является парабола, положение вершины которой зависит от направлений начальной скорости и ускорения (рис.24).

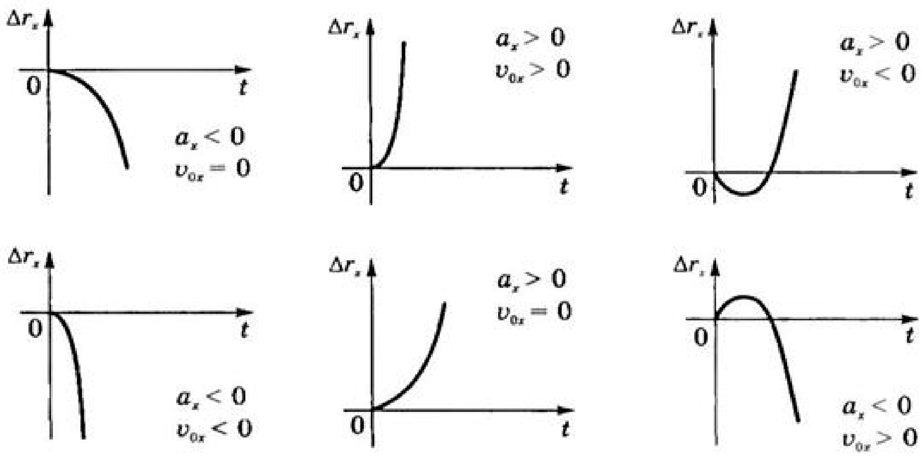


Рис.24

Равномерное криволинейное движение

Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численная величина скорости все время остается постоянной: v=const.

Тогда $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Найдем закон равномерного криволинейного движения.

Из формулы $\frac{ds}{dt} = v$ имеем ds=vdt.

Пусть в начальный момент (*t*=0) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0. Тогда, беря от левой и правой части равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v dt \quad \text{или } s - s_0 = vt,$$

так как v=const. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения в виде

$s=s_0+vt$.

Если $s_0=0$, то *s* даст путь, пройденный точкой за время *t*. Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, расчет пропорционального времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени

$$s=vt, \quad v=s/t.$$

Равнопеременное криволинейное движение.

Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время величиною постоянной: a_τ=const. Найдем закон этого движения, считая, что при t=0: $s=s_0$, а $v=v_0$, где v_0 - начальная скорость точки. Согласно формуле $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ имеем $dv=a_\tau dt$.

Так как a_τ=const, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$v=v_0+a_\tau t.$$

Формулу представим в виде

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t \quad \text{или} \quad ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется ускоренным, а если убывает - замедленным.

Свободное падение тел. Ускорение свободного падения

Свободное падение - это движение тела под действием только силы тяжести.

На тело, падающее в воздухе, кроме силы тяжести действует сила сопротивления воздуха, следовательно, такое движение не является свободным падением. Свободное падение — это падение тел в вакууме.

Ускорение $\vec{g}$, которое сообщает телу сила тяжести, называют **ускорением свободного падения**. Оно показывает, на какую величину изменяется скорость свободно падающего тела за единицу времени.

Ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз.

Галилео Галилей установил (**закон Галилея**): все тела падают на поверхность Земли под действием земного притяжения при отсутствии сил сопротивления с одинаковым ускорением, т.е. ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Убедиться в этом можно, используя трубку Ньютона или стробоскопический метод.

Трубка Ньютона представляет собой стеклянную трубку длиной около 1 м, один конец которой запаян, а другой снабжен краном (рис. 25).

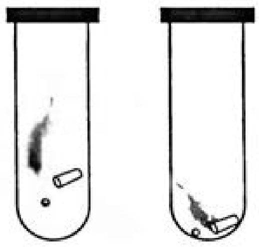


Рис.25

Поместим в трубку три разных предмета, например дробинку, пробку и птичье перо. Затем быстро перевернем трубку. Все три тела упадут на дно трубки, но в разное время: сначала дробинка, затем пробка и, наконец, перо. Но так падают тела в том случае, когда в трубке есть воздух (рис. 25, а). Стоит только воздух откачать насосом и снова перевернуть трубку, мы увидим, что все три тела упадут одновременно (рис. 25, б).

В земных условиях g зависит от географической широты местности.

Наибольшее значение оно имеет на полюсе $g=9{,}81$ м/с^2, наименьшее — на экваторе $g=9{,}75$ м/с^2. Причины этого:

1) суточное вращение Земли вокруг своей оси;

2) отклонение формы Земли от сферической;

3) неоднородное распределение плотности земных пород.

Ускорение свободного падения зависит от высоты h тела над поверхностью планеты. Его, если пренебречь вращением планеты, можно рассчитать по формуле:

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, R — радиус планеты.

Как следует из последней формулы, с увеличением высоты подъема тела над поверхностью планеты ускорение свободного падения уменьшается. Если пренебречь вращением планеты, то на поверхности планеты радиусом R

$$g = \frac{GM}{(R)^2}$$

Для небольших высот ($g \ll h$) можно считать g=const, для таких высот свободное падение является равноускоренным движением.

Для его описания можно использовать формулы равноускоренного движения:

уравнение скорости: $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{g}t$

кинематическое уравнение, описывающее свободное падение тел: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$,

или в проекции на ось $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$.

Движение тела, брошенного вертикально

Свободно падающее тело может двигаться прямолинейно или по криволинейной траектории. Это зависит от начальных условий. Рассмотрим это подробнее.

Свободное падение без начальной скорости (v_0=0) (рис. 26).

При выбранной системе координат движение тела описывается уравнениями: $v_y = gt, \ y = \frac{gt^2}{2}$.

Из последней формулы можно найти время падения тела с высоты h:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подставляя найденное время в формулу для скорости, получим модуль скорости тела в момент падения: $v = \sqrt{2hg}$.

Движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v_0}$ (рис. 27)

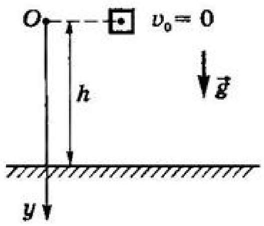


Рис.26

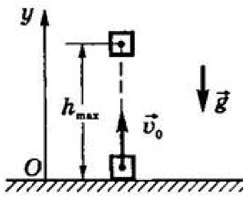


Рис.27

Движение тела описывается уравнениями: $v_y = v_0 - gt, \ y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

Из уравнения скорости видно, что тело движется равнозамедленно вверх, достигает максимальной высоты, а затем движется равноускоренно вниз. Учитывая, что при y=hmax скорость $v_y = 0$ и в момент достижения телом первоначального положения y=0, можно найти:

$t_1 = \frac{v_0}{g}$ — время подъема тела на максимальную высоту;

$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$ — максимальная высота подъема тела;

$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g}$ — время полета тела;

$v_{2y} = -v_0$ — проекция скорости в момент достижения телом первоначального положения.

Движение тела, брошенного горизонтально

Если скорость $\vec{v_0}$ направлена не вертикально, то движение тела будет криволинейным.

Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально с высоты h со скоростью v_0 (рис. 28). Сопротивлением воздуха будем пренебрегать. Для описания движения необходимо выбрать две оси координат — Ox и Oy. Начало отсчета координат совместим с начальным положением тела. Из рис.28 видно, что $v_{0x} = v_0, \ v_{0y} = 0, \ g_x = 0, \ g_y = g$.

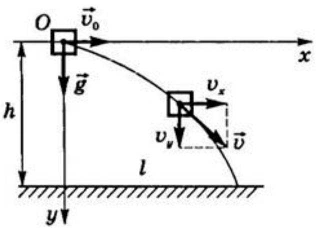


Рис.28

Тогда движение тела опишется уравнениями:

$$v_x = v_0,\ x = v_0 t \qquad (3)$$

$$v_y = gt,\ y = \frac{gt^2}{2} \qquad (4)$$

Анализ этих формул показывает, что в горизонтальном направлении скорость тела остается неизменной, т.е. тело движется равномерно. В вертикальном направлении тело движется равноускоренно с ускорением g, т.е. так же, как тело, свободно падающее без начальной скорости. Найдем уравнение траектории. Для этого из уравнения (3) найдем время

$t = \frac{x}{v_0}$ и, подставив его значение в формулу (4), получим: $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$

Это уравнение параболы. Следовательно, тело, брошенное горизонтально, движется по параболе. Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к параболе (см. рис. 28). Модуль скорости можно рассчитать по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

Зная высоту h, с которой брошено тело, можно найти время t1, через которое тело упадет на землю. В этот момент координата y равна высоте y_1=h. Из уравнения (4) находим: $h = \frac{gt_1^2}{2}$

Отсюда

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (5)$$

Формула (5) определяет время полета тела. За это время тело пройдет в горизонтальном направлении расстояние *l*, которое называют дальностью полета и которое можно найти на основании формулы (3), учитывая, что *l*=x_1. Следовательно, $l = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$ — дальность полета тела. Модуль скорости тела в этот момент $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Пусть тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0. Как и в предыдущих случаях, будем пренебрегать сопротивлением воздуха. Для описания движения необходимо выбрать две оси координат — Ох и Оу (рис. 29).

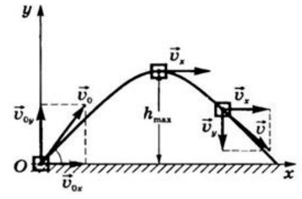


Рис.29

Начало отсчета совместим с начальным положением тела. Проекции начальной скорости на оси Оу и Ох: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Проекции ускорения: $g_x = 0$, $g_y = -g$

Тогда движение тела будет описываться уравнениями:

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \quad (6)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad (7)$$

$$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \quad (8)$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \quad (9)$$

Из этих формул следует, что в горизонтальном направлении тело движется равномерно, а в вертикальном — равноускоренно.

Траекторией движения тела будет парабола. Учитывая, что в верхней точке параболы $v_y = 0$, можно найти время подъема тела до верхней точки параболы:

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt_1$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (10)$$

Подставив значение t_1 в уравнение (8), найдем максимальную высоту подъема тела:

$$h_{max} = y_1 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$$

$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2}$ — максимальная высота подъема тела.

Время полета тела находим из условия, что при $t=t_2$ координата $y_2=0$. Следовательно, $v_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0$. Отсюда, $t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ — время полета тела. Сравнивая эту формулу с формулой (10), видим, что $t_2=2t_1$.

Время движения тела с максимальной высоты $t_3=t_2-t_1=2t_1-t_1=t_1$. Следовательно, сколько времени тело поднимается на максимальную высоту, столько времени оно опускается с этой высоты. Подставляя в уравнение координаты x (6) значение времени t_2, найдем:

$$l = \frac{2v_0 \cos\alpha\, v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

- дальность полета тела.

Мгновенная скорость в любой точке траектории направлена по касательной к траектории (см. рис. 29), модуль скорости определяется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt^2)^2}$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2}$$

Таким образом, движение тела, брошенного под углом к горизонту или в горизонтальном направлении, можно рассматривать как результат двух независимых движений — горизонтального равномерного и вертикального равноускоренного (свободного падения без начальной скорости или движения тела, брошенного вертикально вверх).

ЛЕКЦИИ 9. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Степени свободы твердого тела.
2. Поступательное и вращательное движения твердого тела.
3. Поступательное движение.
4. Движение тела по окружности.
5. Вращательное движение твердого тела вокруг оси.
6. Угловая скорость и угловое ускорение.
7. Равномерное и равнопеременное вращения.
8. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
9. Вращение тела вокруг неподвижной точки.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики движения материальной точки, динамики относительного движения точки, динамики вращательного движения точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета. Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.

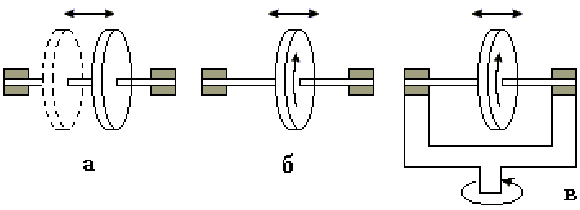


Рис.1

Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис.1,*а*), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис.1,*б*), то он приобретает еще одну степень свободы - к координате x добавляется угол поворота φ диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис.1,*в*), то число степеней свободы становится равным трем – к x и φ добавляется угол поворота рамки ϕ.

Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты x, y и z. Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (r, φ, z) и сферической (r, φ, ϕ) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат *xOy,* то координаты *x* и *y* определяют положение точки на плоскости, а координата *z* тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины *l* (рис.2). Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.

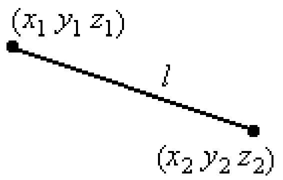


Рис.2

Уравнение $l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$ является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют ($2\cdot3-1=5$) пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно ($3\cdot3-3=6$) шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащие на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

Поступательное и вращательное движения твердого тела.

Поступательное движение

В кинематике, как и в статистике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые.

Абсолютно твердым телом называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1) поступательное движение;

2) вращение вокруг неподвижной оси;

3) плоское движение;

4) вращение вокруг неподвижной точки;

5) свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

2. Спарник *AB* (рис.3) при вращении кривошипов O_1A и O_2B также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

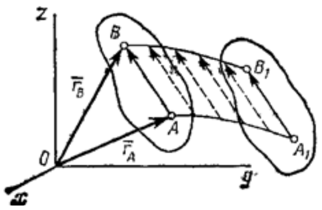


Рис.3

Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках (рис.4) относительно Земли.

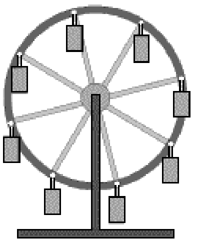


Рис.4

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета *Oxyz*. Возьмем в теле две произвольные точки A и B, положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис.5).

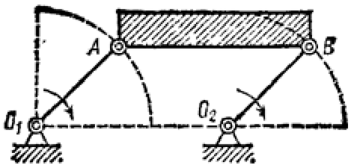


Рис.5

Проведем вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий эти точки.

Тогда $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$.

При этом длина AB постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление AB остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор AB во все время движения тела остается постоянным (AB=const). Вследствие этого, траектория точки B получается из траектории точки A параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства по времени. Получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

Но производная от постоянного вектора AB равна нулю. Производные же от векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ по времени дают скорости точек A и B. В результате находим, что

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

т.е. что скорости точек A и B тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной из его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематике точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}$ - ускорением поступательного движения тела. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ можно изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины <<скорость тела>> или <<ускорение тела>> для этих движений теряют смысл.

Движение тела по окружности с постоянной по модулю скоростью

Движение тела по окружности с постоянной по модулю скоростью - это движение, при котором тело за любые равные промежутки времени описывает одинаковые дуги.

Положение тела на окружности определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из центра окружности. Модуль радиуса-вектора равен радиусу окружности R (рис. 6).

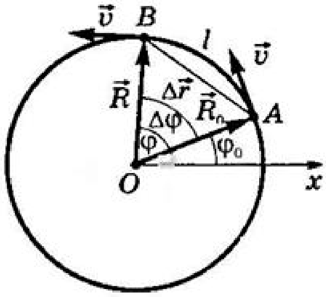


Рис.6

За время Δt тело, двигаясь из точки A в точку B, совершает перемещение $\Delta\vec{r}$, равное хорде AB, и проходит путь, равный длине дуги *l*.

Радиус-вектор поворачивается на угол Δφ. Угол выражают в радианах.

Скорость $\vec{v}$ движения тела по траектории (окружности) направлена по касательной к траектории. Она называется линейной скоростью. Модуль линейной скорости равен отношению длины дуги окружности *l* к промежутку времени Δt, за который эта дуга пройдена:

$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

Скалярная физическая величина, численно равная отношению угла поворота радиуса-вектора к промежутку времени, за который этот поворот произошел, называется угловой скоростью:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

В СИ единицей угловой скорости является радиан в секунду $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$.

При равномерном движении по окружности угловая скорость и модуль линейной скорости — величины постоянные: ω=const; v=const.

Положение тела можно определить, если известен модуль радиуса-вектора $\vec{r}$ и угол φ, который он составляет с осью Ox (угловая координата). Если в начальный момент времени $t_0=0$ угловая координата равна φ_0, а в момент времени t она равна φ, то угол поворота Δφ радиуса-вектора за время $\Delta t=t-t_0$ равен $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0$. Тогда из последней формулы можно получить кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности:

$$\varphi=\varphi_0+\omega t$$

Оно позволяет определить положение тела в любой момент времени t.

Учитывая, что $\Delta\varphi = \frac{1}{R}$, получаем:

$$\omega = \frac{l}{R\Delta t} = \frac{v}{R} \Rightarrow$$

$v = \omega R$— формула связи между линейнойи угловой скоростью.

Промежуток времени T, в течение которого тело совершает один полный оборот, называется периодом вращения:

$$T = \frac{\Delta t}{N},$$

где N – число оборотов, совершенных телом за время Δt.

За время Δt=T тело проходит путь *l*=2πR. Следовательно,

$$v = \frac{2\pi R}{T};\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Величина ϑ, обратная периоду, показывающая, сколько оборотов совершает тело за единицу времени, называется частотой вращения:

$$\vartheta = \frac{1}{T} = \frac{N}{\Delta t}$$

Следовательно,

$$v = 2\pi\vartheta R;\ \ \omega = 2\pi\vartheta.$$

Ускорение при движении тела по окружности с постоянной по модулю скоростью (центростремительное ускорение)

При равномерном вращении по окружности модуль скорости движения тела не изменяется, но направление скорости изменяется непрерывно. Следовательно, данное движение - движение с ускорением. Оно характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

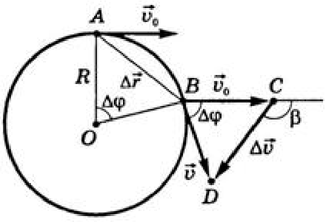


Рис.7

По определению среднего ускорения $\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Треугольники OAB и BCD — равнобедренные (рис. 7). Углы при вершинах — одинаковые (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Отсюда следует, что ΔOAB подобен ΔBCD.

Из подобия $\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = \frac{v|\Delta\vec{r}|}{R}$

Тогда $\langle a\rangle = \frac{v}{R}\cdot\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

Мгновенное ускорение

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\langle a\rangle = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

β — угол между $\vec{v_0}$ и $\Delta\vec{v}(\langle\vec{a}\rangle)$ —внешний по отношению к ΔBCD:

$$\beta = \Delta\varphi + \frac{180 - \Delta\varphi}{2} = 90 + \frac{\Delta\varphi}{2}$$

При Δt→0 угол Δφ→0 и, следовательно, β→90°. Перпендикуляром к касательной к окружности является радиус. Следовательно, $\vec{a}$ направлено по радиусу к центру и поэтому называется центростремительным ускорением:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Модуль $a = const$, направление $\vec{a}$ непрерывно изменяется (рис. 8). Поэтому данное движение не является равноускоренным.

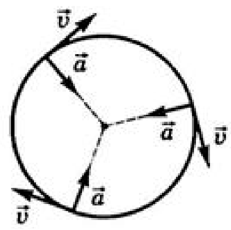


Рис.8

Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Для кинематического описания вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси используются те же величины, что и для описания движения материальной точки по окружности.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис.9).

Промежуток времени, в течение которого тело совершает один полный оборот вокруг оси, — период вращения. Величина, обратная периоду, — частота вращения.

Проходящая через неподвижные точки *A* и *B* прямая *AB* называется осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось Az, полуплоскость - неподвижную и полуплоскость, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (рис. 9).

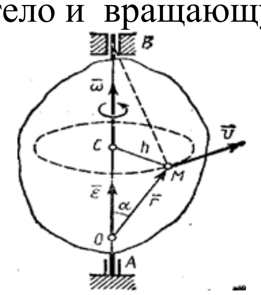


Рис.9

Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени *t*, т.е.

$$\varphi=f(t).$$

Уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При вращательном движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси *углы поворота радиуса-вектора различных точек тела одинаковы.*

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, ω>0, а когда по ходу часовой стрелки, то ω<0.

Размерность угловой скорости 1/T (т.е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что тоже, 1/с ($с^{-1}$), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\vec{\omega}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.10). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

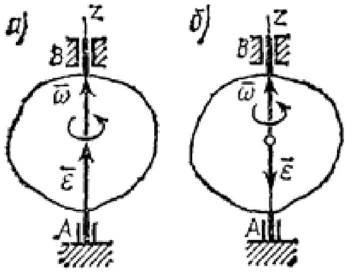


Рис.10

Угол поворота и угловая скорость характеризуют движение всего абсолютно твердого тела в целом. Линейная скорость какой-либо точки абсолютно твердого тела пропорциональна расстоянию точки от оси вращения:

$$v = \omega R = 2\pi\vartheta R = \frac{2\pi}{T} R$$

При равномерном вращении абсолютно твердого тела углы поворота тела за любые равные промежутки времени одинаковы, тангенциальные ускорения у различных точек тела отсутствуют, а нормальное ускорение точки тела зависит от ее расстояния до оси вращения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\vartheta^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

Вектор $\vec{a_n}$ направлен по радиусу траектории точки к оси вращения.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t=t_1-t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega=\omega_1-\omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{ср}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t\to 0$ найдем,

$$\varepsilon=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или } \varepsilon=\dot{\omega}=\ddot{\omega}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения, тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения $1/T^2$ (1/время^2); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с^2 или, что то же, 1/с^2 (с-^{2}).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает, - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора ε, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Направление ε совпадает с направлением ω, когда тело вращается ускоренно и (рис.10,а), противоположно ω при замедленном вращении (рис.10,б).

Равномерное и равнопеременное вращения

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной (ω=const), то вращение тела называется равномерным. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ имеем $d\varphi=\omega dt$.

Отсюда, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi=\varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ, а справа от 0 до t, получим окончательно

$$\varphi=\varphi_0+\omega t.$$

Из равенства следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0=0$

$$\varphi=\omega t \text{ и } \omega=\varphi/t.$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин. Найдем зависимость между n об/мин и ω 1/с. При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время t = 1 мин = 60 сек. Из равенства следует тогда, что

$$\omega=\pi\cdot n/30\approx 0{,}1n.$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным (ε=const), то вращение называется равнопеременным. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi=\varphi_0$, а угловая скорость $\omega=\omega_0$ (ω_0 - начальная угловая скорость).

Из формулы $\varepsilon=d\omega/dt$ имеем $d\omega=\varepsilon\cdot dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую - в пределах от 0 до t, найдем $\omega=\omega_0+\varepsilon t$,

$d\varphi/dt=\omega_0+\varepsilon t$ или $d\varphi=\omega_0 dt+\varepsilon t dt$.

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2.$$

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные - равнозамедленным.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Установив характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку *M* твердого тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения (см. рис.9). При вращении тела точка *M* будет описывать окружность радиуса *h*, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр *C* лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол dφ, то точка *M* при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение ds=hdφ. Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению ds к dt, т.е

$$v = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad v = h\omega.$$

Скорость $\vec{v}$ в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной или окружной скоростью** точки *M*.

Таким образом, числовое значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку *M*.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

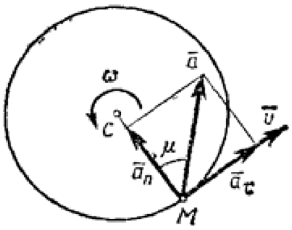


Рис.11

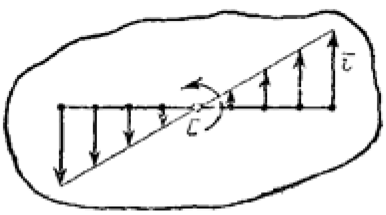


Рис. 12

2. Ускорения точек тела. Для нахождения ускорения точки *M* воспользуемся формулами

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

В нашем случае ρ=h. Подставляя значение *v* в выражения a_τ и a_n, получим:

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2.$$

Касательная составляющая ускорения a_τ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при, замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу *MC* к оси вращения (рис.12). Полное ускорение точки *M* будет

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{или} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле

$$tg\mu = a_\tau / a_n.$$

Подставляя сюда значения a_τ и a_n, получаем

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2.$$

Так как ω и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей. Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис.14.

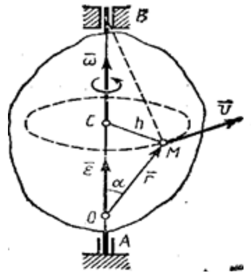


Рис.13

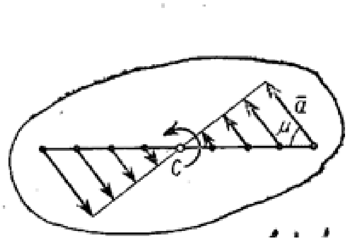


Рис.14

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов v и a, проведем из произвольной точки *O* оси *AB* радиус-вектор $\vec{r}$ точки *M* (рис. 13). Тогда h=r·sinα и по формуле

$$|v| = |\omega| h = |\omega| r \cdot sin\alpha \quad \text{или} \quad |v| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|.$$

Таким образом, модуль векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ равен модулю скорости точки *M*. Направления векторов $\vec{\omega} \times \vec{r}$ и *v* тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости *OMB*) и размерности их одинаковы. Следовательно, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ - формула Эйлера, т.е. вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Вращение тела вокруг неподвижной точки

Название такого вида движения довольно точно его определяет. Часто это движение называют сферическим движением потому, что все точки тела движутся по сферическим поверхностям.

Наглядным примером такого движения является волчок, закономерности движения которого лежат в основе гироскопических приборов.

1) *Углы Эйлера. Уравнения вращения тела с одной неподвижной точкой.* Положение тела определяется тремя углами. Используются различные системы углов. Например, корабельные углы, самолётные углы и др. Но самыми распространёнными являются углы Эйлера: Ψ (пси), θ(тета), φ (фи).

Положение тела определяется следующим образом. Назначаются две системы декартовых осей. Первая система – неподвижные оси x,y,z. Начало которых берётся в неподвижной точке O тела (рис. 16). Вторая система, оси x_1,

y_1, z_1, связывается с телом. Поэтому положение тела будет определяться как положение этих осей относительно неподвижных.

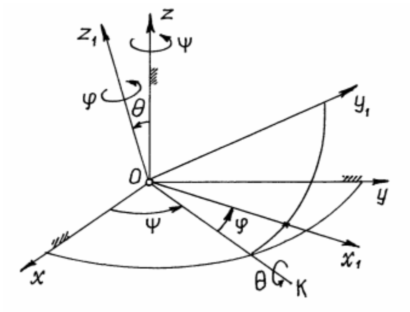


Рис.16

Когда углы Эйлера равны нулю, подвижные оси совпадают с неподвижными. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным углам Эйлера, производим следующие действия. Сначала подвижные оси, а значит и тело, поворачиваем на угол Ψ вокруг оси z. При этом оси x_1 и y_1 отойдут от осей x и y в горизонтальной плоскости и ось x_1 займёт положение OK (рис.16). Затем тело вращаем вокруг нового положения оси x_1 (прямой OK) на угол θ. Ось z_1 отойдёт от оси z на этот угол θ, а ось y_1 приподнимется над горизонтальной плоскостью. Наконец, тело (и подвижные оси) вращаем вокруг нового положения оси z_1 на угол φ. Ось x_1 отойдёт от положения OK в наклонной плоскости, перпендикулярной оси z_1. Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера (на рисунке само тело не показано).

Линия пересечения неподвижной плоскости xOy и подвижной x_1Oy_1, прямая OK, называется *линией узлов*. Угол Ψ называется *углом прецессии*, угол θ – *углом нутации*, угол φ – *углом собственного вращения*. Эти названия углов пришли из теории гироскопов.

При движении тела углы Эйлера изменяются по определённым законам $\Psi=\Psi(t)$; $\theta=\theta(t)$; $\varphi=\varphi(t)$ которые называются *уравнениями вращения*.

На примере вращающегося волчка можно лучше разобраться в этих углах Эйлера (рис.17). Ось волчка z_1 описывает конус вокруг неподвижной оси z. Это вращение определяется углом Ψ (говорят: волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации θ.

А вращение волчка вокруг своей оси z_1, определяемое углом φ – собственное вращение.

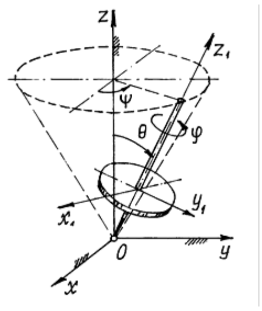


Рис.17

2) *Теорема Даламбера – Эйлера. Мгновенная ось вращения.*

Проведём в теле сферическую поверхность произвольного радиуса с центром в неподвижной точке O (рис.18).

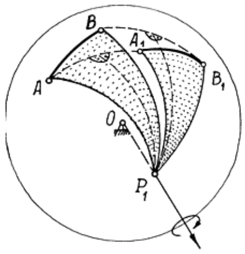


Рис.18

Покажем у тела какие-нибудь две точки A и B, расположенные на этой сфере. Соединим их по сфере дугой наибольшего радиуса (кратчайшее расстояние между точками). Переместим тело в новое положение. Точки, а значит и дуга, займут положение A_1 и B_1. Соединим точки A и A_1, B и B_1 дугами большого радиуса AA_1 и BB_1. Посередине этих дуг проведём им перпендикулярные дуги и найдём их точку пересечения P_1. Соединим эту точку P_1 с точками A, B, A_1, B_1. Получим два сферических треугольника ΔABP_1 и $\Delta A_1B_1P_1$, расположенных на этой сфере. Эти два треугольника равны, как треугольники с равными сторонами ($AB=A_1B_1$, а $AP_1=A_1P_1$ и $BP_1=B_1P_1$ – как дуги равноудалённые от перпендикуляров). Так как эти два треугольника расположены на одной сфере и имеют общую вершину P_1, то их можно совместить поворотом сферы, а значит и тела, вокруг прямой OP_1.

Поэтому можно сделать вывод, что *тело с одной неподвижной точкой можно переместить из одного положения в другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку* O**.** Это утверждение – есть теорема Даламбера-Эйлера.

Конечно, такое перемещение не является истинным движением тела. На самом деле тело переходило из первого положения в другое каким-то другим, наверное более сложным путём. Но, если время Δt такого перехода мало, то это перемещение будет близко к действительному. А при $\Delta t \to 0$ можно предположить, что для данного момента времени тело поворачивается вокруг некоторой оси *P*, проходящей через неподвижную точку O, вращаясь вокруг неё с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Конечно, для каждого другого момента времени эта ось расположена иначе. Поэтому ось P называют *мгновенной осью вращения,* а угловую скорость $\vec{\omega}$ – *мгновенной угловой скоростью*, вектор которой направлен по оси.

3) *Скорость точек тела.*

По теореме Даламбера-Эйлера за малое время Δt движение тела можно представить как вращение вокруг неподвижной оси OP_1 с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_{ср}$ (рис.19).

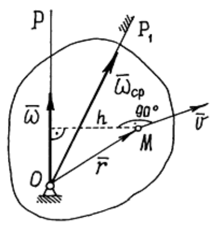


Рис.19

Тогда скорость точки М: $\vec{v}_{ср} = \vec{\omega}_{ср} \times \vec{r}$. В пределе, при $\Delta t \to 0$, угловая скорость $\vec{\omega}_{ср}$ будет приближаться к мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$, направленной по мгновенной оси вращения Р, а скорость точки $\vec{v}_{ср}$ - к истинному значению:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{\omega}_{ср} \times \vec{r}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\omega}_{ср} \times \lim_{\Delta t \to 0} \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Но таким же образом находится скорость точки при вращении тела вокруг оси, по которой направлен вектор $\vec{\omega}$, в нашем случае – по мгновенной оси вращения Р. Поэтому скорость точки можно определить как скорость её при вращении тела вокруг мгновенной оси Р. Величина скорости $v = h \cdot \omega$ (рис.19).

Определение скоростей точек тела значительно упрощается, если известна мгновенная ось вращения Р. Иногда её можно найти, если удастся обнаружить у тела хотя бы ещё одну точку, кроме О, скорость которой в данный момент равна нулю, и провести ось Р из неподвижной точки *О* через эту точку. Так как мгновенная ось вращения – геометрическое место точек, скорости которых равны нулю в данный момент времени.

Пример 2. Водило ОА=а, вращаясь вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0, заставляет диск радиуса R кататься по горизонтальной плоскости (рис.20).

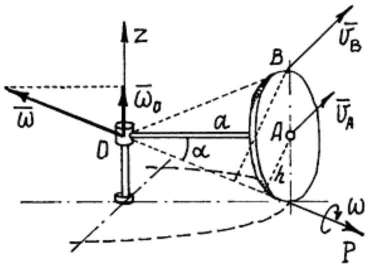


Рис.20

Если представить диск как основание конуса с вершиной в неподвижной точке О, то движение диска можно назвать вращением вокруг этой неподвижной точки О.

Так как скорость точки касания диска с плоскостью равна нулю, то мгновенная ось вращения Р проходит через эту точку. И вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ будет направлен по этой оси.

Точка А вместе с водилом ОА вращается вокруг оси z. Поэтому её скорость $v_A = a\omega_0$ (рис.20). Эта скорость определяет направление вращения диска вокруг оси Р и направление вектора $\vec{\omega}$. Величина угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h}$ (*h* – расстояние от А до оси Р). Теперь можно найти скорость любой точки диска, рассматривая его движение как вращение вокруг оси Р. Так, например, скорость точки В: $v_B = 2h \cdot \omega$. Так как $h = R \cdot \cos\alpha$ и $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$, $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}$, то $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a\omega_0}{R\cos\alpha} = \frac{1}{R}\omega_0\sqrt{a^2+R^2}$ и $v_B = 2a\omega_0$.

4) *Ускорение точек тела.*

Сначала определим угловое ускорение тела $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. При движении тела вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ изменяется и по величине, и по направлению.

Точка, расположенная на его конце будет двигаться по некоторой траектории со скоростью $\vec{u}$ (рис.21).

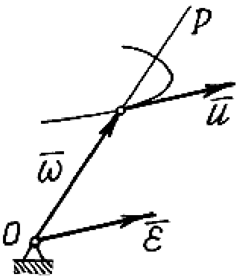


Рис.21

Если рассматривать вектор $\vec{\omega}$ как радиус-вектор этой точки, то $\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$.

Итак. Угловое ускорение тела можно определить как скорость точки, расположенной на конце вектора угловой скорости:

$$\vec{u} = \vec{\varepsilon}.$$

Этот результат называется ***теоремой Резаля.***

Теперь обратимся к определению ускорения точек. Ускорение какой-либо точки М тела

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v},$$

есть сумма двух векторов.

Первый вектор $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Модуль его $a_1 = \varepsilon r \cdot \sin\alpha_1 = \varepsilon \cdot h_1$, где h_1 – расстояние от точки М до вектора $\vec{\varepsilon}$. Направлен он перпендикулярно $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{r}$. Но таким же способом определяется касательное ускорение. Поэтому первую составляющую ускорения определяют как касательное ускорение, предполагая, что тело вращается вокруг оси, совпадающей с вектором $\vec{\varepsilon}$. И обозначается этот вектор ускорения так

$$\vec{a}_\tau^\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Второй вектор $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Модуль его $a_2 = \omega v \cdot \cos\alpha_2$, но $\alpha_2 = 90°$, т.к. векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны друг другу.

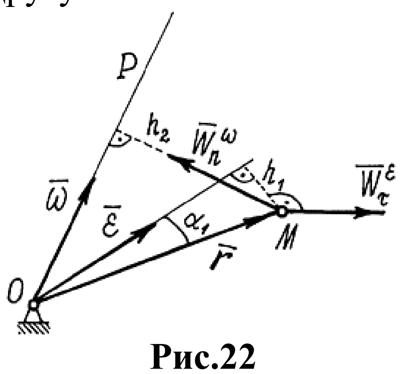


Рис.22

Значит $a_2 = \omega v = \omega h_2 \omega = h_2 \omega^2$, где h_2 – расстояние от точки M до мгновенной оси Р, до вектора $\vec{\omega}$.

Направлен вектор $\vec{a}_2$ перпендикулярно $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$, т.е. так же как вектор нормального ускорения при вращении вокруг оси Р, или вектора $\vec{\omega}$. Поэтому этот вектор ускорения и обозначают, соответственно, так:

$$\overline{W}_n^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Итак, ускорение точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, определяется как сумма двух ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau^\varepsilon + \vec{a}_n^\omega.$$

Этот результат называется ***теоремой Ривальса.***

Заметим, что в общем случае векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не совпадают и угол между $\vec{a}_\tau^\varepsilon$ и $\vec{a}_n^\omega$ не равен 90°, векторы не перпендикулярны друг другу, как это было при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Пример 3. Продолжим исследование движения диска (пример 2). Модуль угловой скорости $\omega = \frac{v_A}{h} = \frac{a}{R\cos\alpha}\omega_0 = const.$ Значит вектор $\vec{\omega}$ вместе с осью P, которая всегда проходит через точку касания диска с плоскостью, вращается вокруг оси z и описывает конус. Точка M на конце вектора $\vec{\omega}$ движется по окружности радиуса $r=\omega\cdot\cos\alpha$ с угловой скоростью ω_0. Поэтому угловое ускорение диска $\varepsilon = u_M = \omega\cos\alpha\cdot\omega_0 = \frac{a}{R}\omega_0^2.$

Откладывается вектор $\vec{\varepsilon}$ из неподвижной точки O. Направлен он, как скорость $\vec{u}_M$, перпендикулярно водилу OA, параллельно оси *x* (рис. 23).

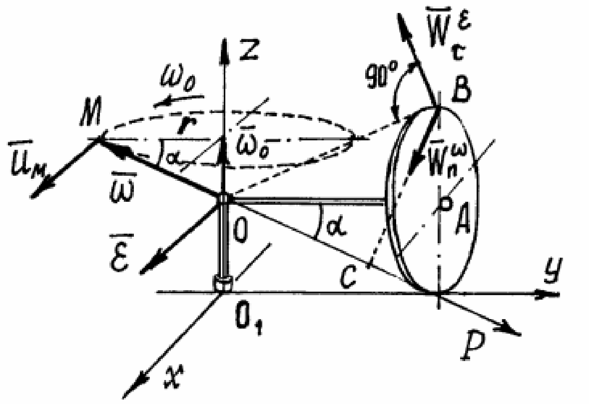


Рис.23

Найдём ускорение точки *B*.

Ускорение $a_\tau^\varepsilon = OB\cdot\varepsilon = \frac{a}{R}\sqrt{a^2+R^2}\cdot\omega_0^2.$ Направлен вектор $\vec{a}_\tau^\varepsilon$ перпендикулярно OB и расположен в плоскости zO_1y.

Ускорение $a_n^\omega = BC\cdot\omega^2 = 2h\omega^2 = 2h\frac{v_A^2}{h^2} = 2\frac{a^2\omega_0^2}{R\cos\alpha} = 2\frac{a}{R}\sqrt{a^2+R^2}\cdot\omega_0^2.$ Вектор $\vec{a}_n^\omega$ направлен по BC, перпендикулярно мгновенной оси P. Модуль вектора $\vec{a}_B$ найдём с помощью проекций на оси x, y, z:

$$a_{Bx} = 0,$$

$$a_{By} = -a_\tau^\varepsilon \sin\alpha - a_n^\omega \sin\alpha = -3\frac{a}{R}\sqrt{a^2+R^2}\cdot\omega_0^2\sin\alpha = -3a\omega_0^2,$$

$$a_{Bz} = a_\tau^\varepsilon\cos\alpha - a_n^\omega\cos\alpha = -\frac{a}{R}\sqrt{a^2+R^2}\cdot\omega_0^2\cos\alpha = -\frac{a^2}{R}\omega_0^2,$$

Значит

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2} = a\omega_0^2\sqrt{9+\frac{a^2}{R^2}}.$$

ЛЕКЦИИ 10. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ.ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Сложное движение точки.
2. Относительное, переносное и абсолютное движения.
3. Теорема сложения скоростей.
4. Теорема сложения ускорений. Ускорение Кориолиса.
5. Сложное движение твердого тела.
6. Цилиндрические зубчатые передачи.
7. Сложение поступательного и вращательного движений.
8. Винтовое движение.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики плоского движения твердого тела, динамики относительного движения материальной точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Сложное движение точки.
Относительное, переносное и абсолютное движения.

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют ***составным*** или ***сложным.*** Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движение вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых.

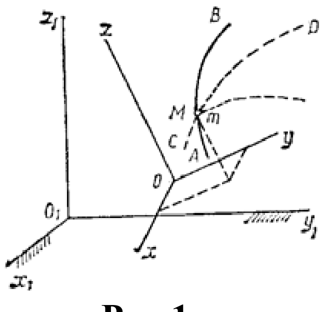


Рис.1

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижно системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис.1). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Oxyz$), называется ***относительным движением*** (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория AB, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость точки M по отношению к осям $Oxyz$ называется относительной скоростью (обозначается $\bar{v}_r$), а ускорение - относительным ускорением (обозначается $\vec{a}_r$). Из определения следует, что при вычислении $\vec{v}_r$ и $\vec{a}_r$ можно движение осей $Oxyz$ во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M ***переносным движением.***

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется переносной скоростью точки M в этот момент (обозначается $\vec{v}_в$), а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M (обозначается $\vec{a}_в$). Таким образом,

$$\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_m,$$
$$\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}_m.$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси $Oxyz$, то переносной скоростью (или ускорением) точки M в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки т тела, с которой в этот момент совпадает точка M.

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется ***абсолютным*** или сложным. Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью (обозначается $\vec{v}_{аб}$) и ускорение - абсолютным ускорением (обозначается $\vec{a}_{аб}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость - относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость - абсолютной скоростью шара.

При исследовании сложного движения точки полезно применять «Правило остановки». Для того, чтобы неподвижный наблюдатель увидел относительное движение точки, надо остановить переносное движение.

Тогда будет происходить только относительное движение. Относительное движение станет абсолютным. И наоборот, если остановить относительное движение, переносное станет абсолютным и неподвижный наблюдатель увидит только это переносное движение.

В последнем случае, при определении переносного движения точки, обнаруживается одно очень важное обстоятельство. Переносное движение точки зависит от того в какой момент будет остановлено относительное движение, от того, где точка находится на среде в этот момент. Так как, вообще говоря, все точки среды движутся по-разному. Поэтому логичнее определять ***переносное движение точки как абсолютное движение той точки среды, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.***

Теорема сложения скоростей.

Пусть некоторая точка M совершает движение по отношению к системе отсчета $Oxyz$, которая сама движется произвольным образом по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, (рис.2).

Конечно, абсолютное движение точки M определяется уравнениями

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Относительное движение – в движущихся осях уравнениями

$$x_1 = x_1(t),$$
$$y_1 = y_1(t),$$
$$z_1 = z_1(t).$$

Рис. 10.3.

Уравнений, определяющих переносное движение точки, не может быть вообще. Так как, по определению, переносное движение точки M – это движение относительно неподвижных осей той точки системы $O_1x_1y_1z_1$, с которой совпадает точка в данный момент. Но все точки подвижной системы движутся по-разному.

Положение подвижной системы отсчета может быть также определено, если задать положение точки O радиусом-вектором r_0, проведенным из начала неподвижной системы отсчета, и направления единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ подвижных осей Ox, Oy, Oz.

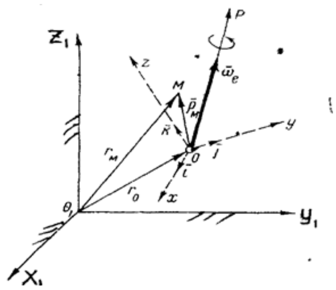


Рис.2

Произвольное переносное движение подвижной системы отсчета слагается из поступательного движения со скоростью v_0 точки O и движения вокруг мгновенной оси вращения OP, походящей через точку O, с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. Вследствие переносного движения подвижной системы отсчета радиус-вектора $\vec{r}_0$ и направления единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ изменяются. Если векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы в функции времени, то переносное движение подвижной системы отсчета вполне определено.

Положение точки M по отношению к подвижной системе отсчета можно определить радиусом-вектором $\vec{\rho}_M$

$\vec{\rho}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

где координаты x, y, z точки M изменяются с течением времени вследствие движения точки M относительно подвижной системы отсчета. Если радиус-вектор $\vec{\rho}_M$ задан в функции времени, то относительное движение точки M, т.е. движение этой точки относительно подвижной системы отсчета, задано.

Положение точки М относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, может быть определено радиусом-вектором $\vec{r}_M$. Из рис.2 видно, что

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_M = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1)$$

Если относительные координаты x,y,z точки M и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ определены в функции времени, то слагающееся из относительного и переносного движений составное движение точки M, т.е. движение этой точки по отношению к неподвижной системе отсчета, также надо считать заданным.

Скорость составного движения точки M, или абсолютная скорость этой точки, равна, очевидно, производной от радиуса-вектора $\vec{r}_M$ точки M по времени t

$$\vec{v}_a = d\vec{r}_M/dt.$$

Поэтому, дифференцируя равенство (1) по времени t, получим

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}. \qquad (2)$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на две группы по следующему признаку. К первой группе отнесем те слагаемые, которые содержат производные только от относительных координат x,y,z, а ко второй - те слагаемые, которые содержат производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. от величин, изменяющихся только вследствие переносного движения подвижной системы отсчета

$$\vec{v}_r = x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}; \qquad (3)$$

$$\vec{v}_в = \vec{r}_0 x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (4)$$

Каждая из групп слагаемых, обозначенных через $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_в$, представляет собой, по крайней мере, по размерности некоторую скорость. Выясним физический смысл скоростей $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_в$.

Скорость $\vec{v}_r$, как это следует из равенства (3), вычисляется в предположении, что изменяются только относительные координаты x,y,z точки M, но векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ остаются постоянными, т.е. подвижная система отсчета $Oxyz$ как бы условно считается неподвижной. Итак, скорость $\vec{v}_r$ представляет собой относительную скорость точки M.

Скорость $\vec{v}_в$ вычисляется так, как будто бы точка M не двигалась относительно подвижной системы отсчета, так как производные x,y,z в равенство (4) не входят. Поэтому скорость $\vec{v}_в$ представляет собой переносную скорость точки M.

Итак, $\vec{v}_a = \vec{v}_в. + \vec{v}_r.$ (5)

Это равенство выражает теорему сложения скоростей в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютная скорость точки M

равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

Пример 1. Колечко *M* движется по вращающемуся стержню (рис.3) так, что ОМ=s=3t^2 (см) и $\varphi = 2t$ (рад).

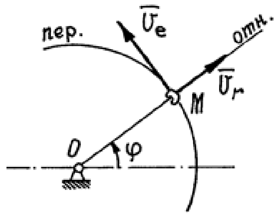


Рис.3

Ранее было установлено, что траектория относительного движения – прямая линия, совпадающая со стержнем, и движение это определяется уравнением s=s(t). Траектория переносного движения точки *M* в момент времени *t* – окружность радиуса ОМ=s.

Поэтому относительная скорость $v_r = \dot{s} = 6t$ см$\cdot c^{-1}$. И направлена по касательной к траектории вдоль стержня (рис.3). Переносная скорость колечка, как при вращении вокруг оси, $v_в = OM \cdot \omega = s\dot{\varphi} = 3t^2 \cdot 2 = 6t^2$ см$\cdot c^{-1}$. Направлен вектор этой скорости по касательной к траектории переносного движения, перпендикулярно стержню.

Абсолютная скорость колечка $\vec{v}_M = \vec{v}_в + \vec{v}_r$. Величина ее, т.к. $\vec{v}_в \perp \vec{v}_r$.

$$v_M = \sqrt{v_в^2 + v_r^2} = 6t\sqrt{1+t^2}\ \text{см} \cdot \text{c}^{-1}.$$

Теорема сложения ускорений. Ускорение Кориолиса.

Ускорение составного движения точки *M*, или абсолютное ускорение этой точки, равно, очевидно, производной от абсолютной скорости точки *M* по времени *t*

$$\vec{a}_a = d\vec{v}_a/dt$$

Поэтому, дифференцируя равенство по времени, получим

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{\imath} + \ddot{y}\bar{\imath} + \ddot{z}\bar{\imath} + 2(\dot{x}\frac{d\bar{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}).$$

Разделим слагаемые правой части этого равенства на три группы.

К первой группе отнесем слагаемые, содержащие только производные от относительных координат *x*,*y* и *z*, но не содержащие производные от векторов $\vec{r}_0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Ко второй группе отнесем слагаемые, которые содержат только производные от векторов $\bar{r}_0, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, но не содержащие производных от относительных координат *x*,*y*,*z*:

$$\vec{a}_в = \ddot{\vec{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Осталась еще одна группа слагаемых, которые не могли быть отнесены ни к первой, ни ко второй, так как они содержат производные от всех переменных *x*, *y*, *z*, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Обозначим эту группу слагаемых через $\vec{a}_k$:

$$\vec{a}_k = 2(\dot{x}\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt}).$$

Каждая из выделенных групп представляет собой, по крайней мере по размерности, некоторое ускорение. Выясним физический смысл всех трех ускорений: $\vec{a}_r, \vec{a}_в, \vec{a}_k$.

Ускорение $\vec{a}_r$, как это видно из равенства, вычисляется так, как если бы относительные координаты *x*,*y*,*z* изменялись с течением времени, а векторы $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ оставались неизменными, т.е. подвижная система отсчета *Oxyz* как бы покоилась, а точка *M* двигалась. Поэтому ускорение $\vec{a}_r$ представляет собой относительное ускорение точки *M*. Так как ускорение (и скорость) относительного движения вычисляется в предположении, что подвижная система отсчета находится а покое, то для определения относительного ускорения (и скорости) можно пользоваться всеми правилами, изложенными ранее в кинематике точки.

Ускорение $\vec{a}_в$, как это видно из равенства, вычисляется в предположении, что сама точка *M* покоится по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz* (x =const, y =const, z =const) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$. Поэтому ускорение $\vec{a}_в$ представляет собой переносное ускорение точки *M*.

Третья группа слагаемых определяет ускорение $\vec{a}_k$, которое не может быть отнесено не к относительному ускорению $\vec{a}_r$, так как содержит в своем выражении производные $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ не к переносному ускорению $\vec{a}_в$, так как содержит в своем выражении производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Преобразуем правую часть равенства, припомнив, что

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_в \times \vec{k}.$$

Подставляя эти значения производных в равенства, получим

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_в \times x\vec{i} + \overline{\omega}_в \times x\vec{j} + \overline{\omega}_в \times x\vec{k})$$

или $\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_в \times \left(x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}\right)$.

Здесь вектор $x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{k}$ есть относительная скорость $\vec{v}_r$ точки *M*, поэтому

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_в \times \vec{v}_r.$$

Ускорение $\vec{a}_k$ называют ***ускорением Кориолиса.*** Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще поворотным ускорением.

С физической точки зрения появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Итак, ускорение Кориолиса точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Равенство, которое теперь можно сокращенно записать в виде

$$\vec{a}_a = \vec{a}_в + \vec{a}_r + \vec{a}_k.$$

представляет теорему сложения ускорений в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений. Эту теорему часто называют теоремой Кориолиса.

Из формулы следует, что модуль поворотного ускорения будет

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha$$

где α - угол между вектором $\vec{\omega}_e$ и вектором $\vec{v}_r$. Чтобы определить направление поворотного ускорения $\vec{a}_k$, нужно мысленно перенести вектор $\vec{\omega}_e$ в точку *M* и руководствоваться правилом векторной алгебры. Согласно этому правилу, вектор $\bar{a}$ нужно направлять перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$, и так, чтобы, смотря с конца вектора $\vec{a}$, наблюдатель мог видеть кратчайший поворот от $\vec{\omega}_e$ к $\vec{v}_r$ происходящим против движения часовой стрелки.

Для определения направления $\vec{a}_k$ можно также пользоваться следующим правилом Н. Е. Жуковского: чтобы получить направление поворотного ускорения $\vec{a}_k$, достаточно составляющую $\vec{v}_1$ относительной скорости $\vec{v}_r$ точки *M*, перпендикулярную к вектору $\vec{\omega}_e$, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{\omega}_e$) на прямой угол вокруг точки *M* в направлении переносного вращения (рис.4).

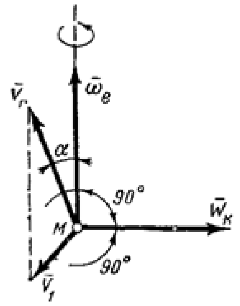


Рис.4

Если переносное движение подвижной системы отсчета есть поступательное движение, то $\vec{\omega}_e$=0 и поэтому поворотное ускорение a точки также равно нулю. Поворотное ускорение равно, очевидно, нулю и в том случае, когда $\vec{\omega}_e$ в данный момент времени обращается в нуль.

Кроме того, поворотное ускорение точки может, очевидно, обращаться в нуль, если:

а) вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ точки параллелен вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$ переносного вращения, т.е. относительное движение точки происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения;

б) точка не имеет движения относительно подвижной системы отсчета или относительная скорость $\vec{v}_r$ точки в данный момент времени равна нулю ($\vec{v}_r = 0$).

Пример 2. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси *z*. По поверхности его движется точка *M* (рис. 5). Конечно, скорость этого движения точки – относительная скорость $\vec{v}_r$, а скорость вращения тела – угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e$.

Ускорение Кориолиса $\vec{W}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, направлено перпендикулярно этим двум векторам, по правилу направления вектора векторного произведения. Так, как показано на рис. 5.

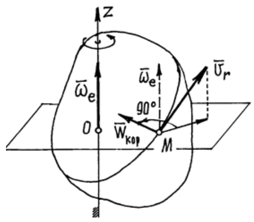


Рис.5

Нетрудно сформулировать более удобное правило определения направления вектора $\vec{a}_c$: нужно спроектировать вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость перпендикулярную оси переносного вращения и затем повернуть эту проекцию на 90 градусов в плоскости по направлению переносного вращения. Конечное положение проекции вектора $\vec{v}_r$ укажет направление кориолисова ускорения. (Это правило было предложено Н.Е. Жуковским).

Пример 3. (Вернемся к примеру 1). Найдем абсолютное ускорение колечка *M*:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_в + \vec{a}_r + \vec{a}_c. \qquad (6)$$

Переносное ускорение при движении колечка по окружности радиусом OM=s: $\vec{a}_в = \vec{a}_t^n + \vec{a}_в^\tau$, где $a_в^\tau = s\varepsilon_в = s \cdot \ddot{\varphi} = 0$.

Значит $\vec{a}_в = \vec{a}_в^n$ (рис.6).

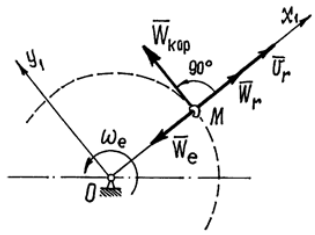


Рис.6

Относительное ускорение $W_r = \ddot{s} = 6$ см/с^2.

Ускорение Кориолиса $a_c = 2\omega_в v_r sin90^0 = 2 \cdot 2 \cdot 6t = 24t$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_c$ направлен перпендикулярно стержню в сторону вращения (по правилу Жуковского).

Величину абсолютного ускорения колечка M найдем с помощью проекций на подвижные оси x_1 и y_1 проектируя равенство (6) на оси, получим: $a_{x1} = a_r - a_в = 6 - 12t^{-2} = 6(1 - 2t^{-2}), a_{y1} = a_c = 24t.$

Тогда $a_M = \sqrt{(a_{x1})^2 + (a_{y1})^2} = 5\sqrt{(1 - 2t^2)^2 + 16t^2}$ см/с^2.

Сложное движение твердого тела.

Так же как при сложном движении точки нередко и движение тела можно рассматривать как сумму нескольких движений. Например, состоящее из двух поступательных движений или поступательного движения и вращения в округ оси. Часто встречаются движения, состоящие из двух вращений вокруг осей или поступательного движения и вращения вокруг точки. Исследование движения точек принадлежащих телу, совершающему сложное движение, можно проводить методами, изложенными выше и никаких особых трудностей не вызывает. Но анализ сложного движения тела, состоящего из нескольких вращений, обнаруживает некоторые особенности, которые следует рассмотреть специально.

1. Сложение вращений тела вокруг двух осей

На рис. 7 изображено тело, которое совершает сложное движение – вращение вокруг оси, которая сама вращается вокруг другой, неподвижной оси. Естественно, первое вращение следует назвать относительным движением тела, второе – переносным, а соответствующие оси обозначить z_r и z_e.

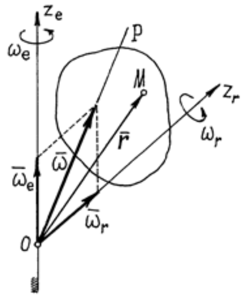


Рис.7

Абсолютным движением будет вращение вокруг точки пересечения осей O. (Если тело имеет больший размер, то его точка, совпадающая с O, все время будет неподвижной). Угловые скорости переносного вращения и относительного вращения изображается векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$, отложенными из неподвижной точки O, точки пересечения осей, по соответствующим осям.

Найдем абсолютную скорость какой-нибудь точки M тела, положение которой определяется радиусом-вектором $\bar{r}$ (рис.7).

Как известно, она складывается из двух скоростей, относительной и переносной: $\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Но относительное движение точки (используя правило остановки), есть вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг оси z_r, определяется радиусом-вектором $\vec{r}$. Поэтому, $\vec{v}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}$.

Переносное движение точки в данный момент времени, опять используя правило остановки, тоже есть вращение, но вокруг оси z_e с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$ и будет определяться тем же радиусом-вектором $\vec{r}$. Поэтому и переносная скорость r.

Абсолютная же скорость, скорость при вращении вокруг неподвижной точки O, при сферическом движении, определяется аналогично $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ - абсолютная угловая скорость, направленная по мгновенной оси вращения P.

По формуле сложения скоростей получим: $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_r \times \vec{r} + \vec{\omega} \times r$ или $\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r}$.

Отсюда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$

То есть мгновенная угловая скорость, угловая скорость абсолютного движения, есть векторная сумма угловых скоростей переносного и относительного движений. А мгновенная ось вращения P, направленная по вектору $\vec{\omega}$, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ (рис.7).

Частные случаи:

1. ***Оси вращения z_e и z_r параллельны, направления вращений одинаковы (рис. 8).***

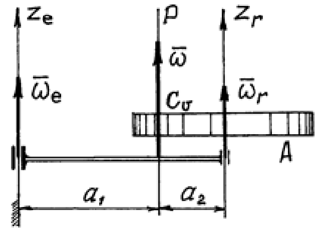


Рис.8

Так как векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\omega}_r$ параллельны и направлены в одну сторону, то абсолютная угловая скорость по величине равна сумме их модулей $\omega = \omega_e + \omega_r$ и вектор ее направлен в туже сторону. Мгновенная ось вращения P делит расстояние между осями на части обратно пропорциональные ω_e и ω_r:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$. (аналогично равнодействующей параллельных сил).

В этом частном случае тело A совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей C_v находится на оси P.

2. ***Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны (рис.9).***

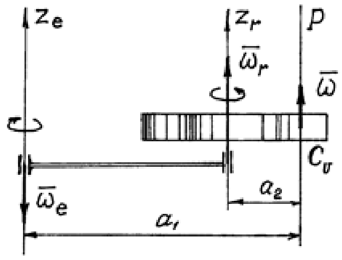


Рис.9

В этом случае $\omega = \omega_r - \omega_e$ (при $\omega_r > \omega_e$). Мгновенная ось вращения и мгновенный центр скоростей находятся за вектором большей угловой скорости на расстояниях таких, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$ (опять по аналогии определения равнодействующей параллельных сил).

3. ***Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны и угловые скорости равны.***

Угловая скорость абсолютного движения $\omega = 0$ и, следовательно, тело совершает поступательное движение. Этот случай называется ***парой вращений***, по аналогии с парой сил.

Пример 4. Диск радиусом R вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω_1, а эта ось вместе с рамкой вращается вокруг вертикальной неподвижной оси с угловой скоростью ω_1 (рис.10).

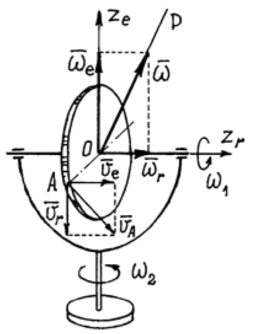


Рис.10

Горизонтальная ось – это ось относительного вращения z_r; вертикальная ось – ось переносного вращения z_e. Соответственно угловые скорости $\omega_r = \omega_1, \omega_e = \omega_2$ векторы их направлены по осям z_r и z_e.

Абсолютная угловая скорость $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$, а величина ее, так как $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_r$,

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Скорость точки *A*, например, можно найти или как сумму переносной и относительной скоростей: $\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_e$, где $v_e = R\omega_e = R\omega_2$, $v_r = R\omega_r = R\omega_1$ и $v_A = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2}$, или как при абсолютном движении, при вращении вокруг мгновенной оси *P*, $v_A = R\omega = R\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2}$.

Вектор скорости $\vec{v}_A$ будет расположен в плоскости перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$ и оси *P*.

Пример 5. Водило *OA* с укрепленными на нем двумя колесами 2 и 3 вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью ω_0. Колесо 2 при этом будет обкатываться по неподвижному колесу 1 и заставит вращаться колесо 3. Найдем угловую скорость ω_3, этого колеса. Радиусы колес R_1, R_2, R_3 (рис.11).

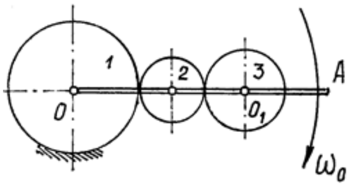


Рис.11

Колесо 3 участвует в двух движениях. Вращаться вместе с водилом вокруг оси *O* и относительно оси O_1. Ось *O* будет переносной осью, ось O_1 – относительной. Переносная угловая скорость колеса 3 – это угловая скорость водила $\omega_e = \omega_0$, направленная по часовой стрелке, как ω_0.

Чтобы определить угловую скорость относительного движения, наблюдателю нужно находиться на водиле. Он увидит водило неподвижным, колесо 1 вращающимся против часовой стрелки со скоростью ω_0 (рис. 12), а колесо 3 – вращающимся с относительной угловой скоростью ω_r, против часовой стрелки. Так как $\frac{\omega_0}{\omega_r} = \frac{R_2}{R_1}$; $\frac{\omega_r}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$, то $\omega_r = \frac{R_1}{R_3}\omega_0$. Оси вращения параллельны, направления вращений противоположны. Поэтому $\omega_3 = \omega_r - \omega_e = (\frac{R_1}{R_3} - 1)\omega_0$ и направлена так же как ω_r, против часовой стрелки. В частности, если $R_3=R_1$, то $\omega_r = \omega_e$ и $\omega_3 = 0$. Колесо 3 будет двигаться поступательно.

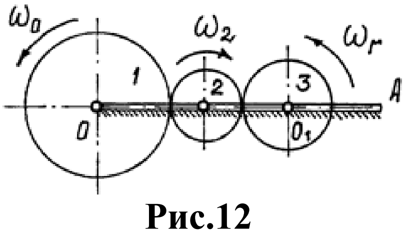


Рис.12

Исследование движения других подобных конструкций (планетарных и дифференциальных редукторов, передач) ведется аналогичным способом.

Переносной угловой скоростью является угловая скорость водила (рамки, крестовины и т.п.), а чтобы определить относительную скорость какого-либо колеса, нужно водило остановить, а неподвижное колесо заставить вращаться с угловой скоростью водила, но в противоположную сторону.

Угловые ускорения тела в абсолютном движении можно искать как производную $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$, где $\vec{\omega}=\vec{\omega}_e+\vec{\omega}_r$. Покажем (рис.13) единичные векторы $\vec{k}_e$ и $\vec{k}_r$ (орты осей z_e и z_r), а векторы угловых скоростей запишем так: $\vec{\omega}_e=\omega_e\cdot\vec{k}_e$, $\vec{\omega}_r=\omega_r\cdot\vec{k}_r$.

Тогда $\vec{\omega}=\omega_e\cdot\vec{k}_e+\omega_r\cdot\vec{k}_3$ и угловое ускорение, при $\vec{k}_e=const$,

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d\omega_e}{dt}\cdot\vec{k}_e+\frac{d\omega_r}{dt}\cdot\vec{k}_r+\omega_r\cdot\frac{d\vec{k}_r}{dt}.$$

Здесь

$$\frac{d\omega_e}{dt}=\varepsilon_e,\quad \frac{d\omega_r}{dt}=\varepsilon_r \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{k}_r}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{k}_r.$$

Поэтому $\vec{\varepsilon}=\varepsilon_e\vec{k}_e+\varepsilon_r\vec{k}_r+\omega_r(\vec{\omega}_e\times\vec{k}_r)$ или

$$\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}_e+\vec{\varepsilon}_r+\vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_r \text{ и } \quad \vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}_e+\vec{\varepsilon}_r+\vec{\varepsilon}_*,$$

где $\vec{\varepsilon}_e$ – угловое ускорение переносного вращения; $\vec{\varepsilon}_r$ – угловое ускорение относительного вращения; $\vec{\varepsilon}_*=\vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_r$ – добавочное угловое ускорение, которое определяет изменение относительной угловой скорости $\vec{\omega}_r$ при переносном движении. Направлен этот вектор перпендикулярно осям z_e и z_r, как скорость конца вектора $\vec{\omega}_r$. Модуль добавочного углового ускорения $\varepsilon_*=\omega_e\cdot\omega_r sin\alpha$, где α - угол между осями.

Конечно, если оси вращения параллельны, это угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_*$ будет равно нулю, так как $\alpha=0$.

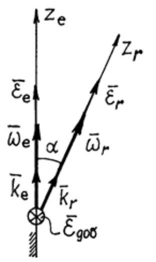


Рис.13

2. Общий случай движения тела

Произвольное движение тела – это общий случай движения. Его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного вместе с произвольно выбранным полюсом C и вращения вокруг этого полюса. Первое движение определяется уравнениями движения полюса, точки C:

$$x_C=x_C(t),$$
$$y_C=y_C(t),$$
$$z_C=z_C(t).$$

А второе движение – уравнениями вращения вокруг точки C с помощью углов Эйлера:

$$\psi=\psi(t),$$
$$\theta=\theta(t),$$
$$\varphi=\varphi(t).$$

Скорости и ускорения точек тела в общем случае, при произвольном движении, определяются такими же методами, как при сложном движении точки (см. раздел выше).

3. Цилиндрические зубчатые передачи.

Рассмотрим основные виды этих передач.

1. Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес (например, колесо 1 на рис.14) является ведущим, а остальные ведомыми.

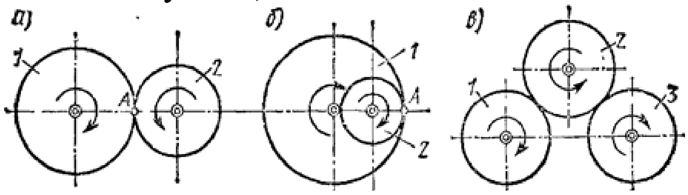


Рис.14

В случае внешнего (рис.14,а) или внутреннего (рис.14,б) зацепления двух колес имеем $|\omega_1|r_1 = |\omega_2|r_2$, так как скорость точки сцепления *A* у обоих колес одинакова. Учитывая, что число *z* зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем

$$(\omega_1/\omega_2)_{внеш} = -r_2/r_1 = -z_2/z_1; \quad (\omega_1/\omega_2)_{внут} = r_2/r_1 = z_2/z_1.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис.14, в) найдем, что

$$\omega_1/\omega_2 = -r_2/r_1, \quad \omega_2/\omega_3 = -r_3/r_2 \text{ и } \omega_1/\omega_3 = r_3/r_2 = z_3/z_1.$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в этой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении шестерен

$$\omega_1/\omega_n = (-1)^k r_n/r_1 = (-1)^k z_n/z_1.$$

где *k* - число внешних зацеплений (в случае, изображенном на рис.14,*а* имеется одно внешнее зацепление; на рис.61, в - два внешних зацепления, на рис.14,*б* внешних зацеплений нет).

Передаточным числом данной зубчатой передачи называется величина i_{1n}, дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \omega_1/\omega_n.$$

2. Планетарной называется передача (рис.15), в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе *AB*, вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

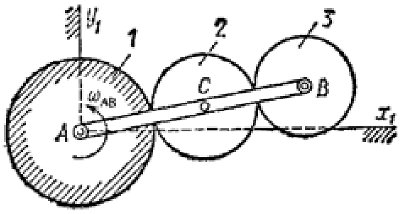


Рис.15

3. Дифференциальной называется передача, изображенная на рис. 62, если в ней шестерня 1 не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси *A* независимо от кривошипа *AB*.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, сообщив мысленно всей неподвижной плоскости Ax_1y_1 вращение с угловой скоростью - ω_{AB}, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа AB (метод остановки или метод Виллиса).

Тогда кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса r_k будет иметь угловую скорость

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB},$$

где ω_k - абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax_1y_1 (рис.15). При этом оси всех шестерен будут неподвижны и зависимость между $\tilde{\omega}_k$ можно будет определить, приравнивая скорости точек сцепления.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно также производить с помощью мгновенных центров скоростей.

4. Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение.

Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси *Aa* с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поступательного со скоростью v, направленной параллельно оси *Aa* (рис.16), то такое движение тела называется винтовым. Ось *Aa* называют осью винта. Когда векторы v и $\vec{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения ω винт будет правым; если в разные стороны, - левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется шагом h винта. Если величины v и $\vec{\omega}$ постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T, получаем в этом случае $vT = h$ и $\omega T = 2\pi$, откуда $h=2\pi v/\omega$.

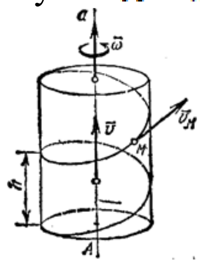


Рис.16

При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки M, находящейся от оси винта на расстоянии r, слагается из поступательной скорости v и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr. Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\vec{v}_M$ по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M, разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии, обратятся в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом $\alpha(tg\alpha = h/2\pi r)$.

ЛЕКЦИИ 11. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Плоскопараллельное движение твердого тела.
2. Уравнения плоскопараллельного движения.
3. Разложение движения на поступательное и вращательное.
4. Определение скоростей точек плоской фигуры.
5. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.
6. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
7. Решение задач на определение скорости.
8. План скоростей.
9. Определение ускорений точек плоской фигуры.
10. Решение задач на ускорения.
11. Мгновенный центр ускорений.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики плоского движения твердого тела, динамики относительного движения материальной точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Плоскопараллельное движение твердого тела. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при, котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П* (рис. 1). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

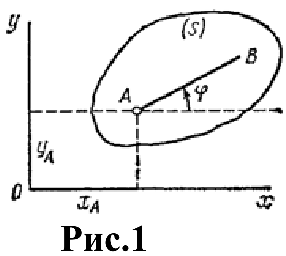


Рис.1

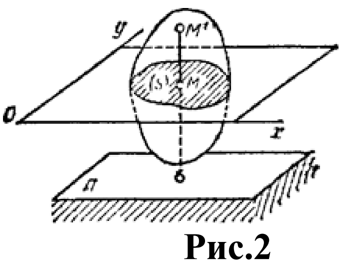


Рис.2

Рассмотрим сечение *S* тела какой-нибудь плоскости *Oxy*, параллельной плоскости *П* (рис.2). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *ММ*', перпендикулярной течению *S*, т. е. плоскости *П*, движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости *Oxy* сечение *S* этого тела или некоторая плоская фигура *S*. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры *S* в ее плоскости, т.е. в плоскости *Oxy*.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис.1). В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A и y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x. Точку A, выбранную для определения положения фигуры S, будем в дальнейшем называть полюсом.

При движении фигуры величины x_A и y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Oxy в любой момент времени, надо знать зависимости

$$x_A = f_1(t), \ \ y_A = f_2(t), \ \ \varphi = f_3(t).$$

Уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Первые два из уравнений движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=const; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = const$ и $y_A = const$, т.е. когда полюс A неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса A. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса $\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{V}_A$, $\vec{a}_{\text{пост}} = \vec{a}_a$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

Определение скоростей точек плоской фигуры

Было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью v_A полюса A, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$ (рис.3), где $\vec{r}_A$- радиус-вектор полюса A, $\vec{r}\,' = \overrightarrow{AM}$- вектор, определяющий положение точки M относительно осей Axy', перемещающихся вместе с полюсом A поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса A). Тогда

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ есть скорость полюса A; величина же $\frac{d\vec{r}\,'}{dt}$ равна скорости $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при $\vec{r}_A = const$, т.е. относительно осей $Ax'y'$, или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

Скорость $\vec{v}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A:

$$v_{MA} = \omega MA \qquad \vec{v}_{MA} \perp \overrightarrow{MA},$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\vec{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.4).

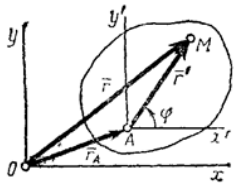


Рис.3

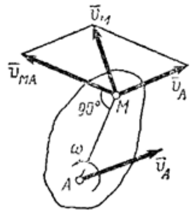


Рис.4

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) связано обычно с довольно сложными расчетами. Однако можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

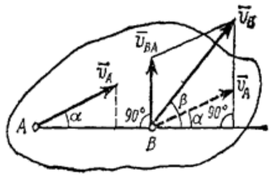


Рис.5

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу. Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис.5), получаем $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярен AB, находим $v_B cos\beta = v_A cos\alpha$, и теорема доказана.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, не параллельные друг другу (рис.6). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\vec{v}_A$ и Bb к вектору $\vec{v}_B$, и будет мгновенным центром скоростей так как $\vec{v}_P = 0$. В самом деле, если допустить, что $\vec{v}_P = 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\vec{v}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP (так как $\vec{v}_A \perp AP$) и BP (так как $\vec{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

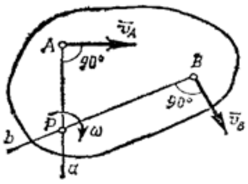


Рис.6

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA},$$

так как $\vec{v}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом

$$v_A = \omega PA \quad (\vec{v}_A \perp PA);$$

$$v_B = \omega PB \quad (\vec{v}_B \perp PB) \text{ и т.д.}$$

Из равенств, следует еще, что $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры, надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B. Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\vec{v}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная v_A, найдем скорость v_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\vec{v}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

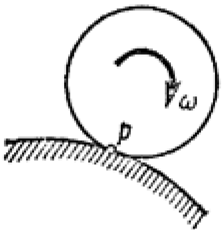
3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P:

$$\omega = v_B/PB.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.7), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю ($\vec{v}_P = 0$), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\vec{v}_A$ (рис.8,а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\vec{v}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_B cos\beta = v_A cos\alpha$ т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т.е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость ω тела в этот момент времени, как видно равна нулю.



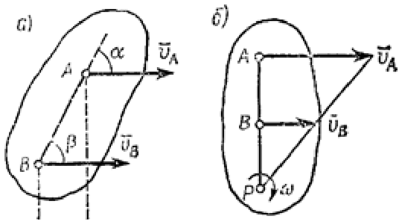


Рис.7 **Рис.8**

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\vec{v}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис.8,б. Справедливость построений следует из пропорции. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра P надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_B и v_A.

г) Если известны вектор скорости $\vec{v}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\vec{v}_B$ (рис.8,б), можно найти как $BP = v_B/\omega$.

Мгновенный центр ускорений.

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений. Определяется положение центра Q, если известны ускорение $\vec{a}_A$ какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ε, следующим путем:

1) находим значение угла μ, из формулы $tg\mu = \varepsilon/\omega^2$;

2) от точки A под углом μ, к вектору $\vec{a}_A$ проводим прямую AE (рис.18); при этом прямая AE должна быть отклонена от $\vec{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным, т. е. в сторону направления углового ускорения ε;

3) откладываем вдоль линии AE отрезок AQ, равный

$$AQ = a_A/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

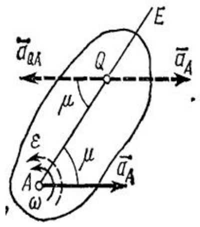


Рис.18

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, известно что

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA},$$

где численно $a_{AQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значение AQ находим, что $a_{AQ} = a_A$. Кроме того, вектор $\vec{a}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол μ, следовательно, вектор $\vec{a}_{QA}$ параллелен $\vec{a}_A$, но направлен в противоположную сторону. Поэтому $\vec{a}_{QA} = -\vec{a}_A$ и $\vec{a}_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то так как $\vec{a}_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, будет

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}.$$

При этом численно

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры, было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q. При этом

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \cdots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

т.е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений. Картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени показана на рис.19.

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают. Например, если колесо катится по прямолинейному рельсу (см. рис.20), причем скорость его центра C постоянна ($V_C = const$), то мгновенный центр скоростей находится в точке P ($V_P = 0$), но при этом, как было показано $a_P \neq 0$; следовательно, точка P не является одновременно мгновенным центром ускорений.

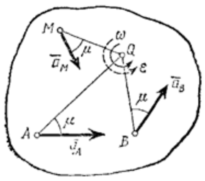


Рис.19

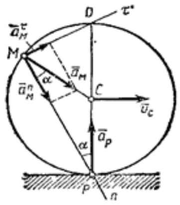


Рис.20

Мгновенный центр ускорений в этом случае находится, очевидно, в точке C, так как она движется равномерно и прямолинейно и $a_C = 0$. Центры скоростей и ускорений совпадают тогда, когда фигура (тело) вращается вокруг неподвижной оси.

Понятием о мгновенном центре ускорений удобно пользоваться при решении некоторых задач.

ЛЕКЦИИ 12. ДИНАМИКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Динамика точки.
2. Основные понятия и определения.
3. Законы динамики.
4. Силы в природе.
5. Силы трения.
6. Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки.
7. Методические указания по решению задач.
8. Дифференциальные уравнения движения точи.
9. Движение точки, брошенной под углом к горизонту в однородном поле тяжести.
10. Относительное движение материальной точки.
11. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.
12. Общие теоремы динамики точки.
13. Количество движения (импульс).
14. Импульс силы.
15. Теорема об изменении количества движения (импульса) точки.

Изучение данных вопросов необходимо для динамики движения центра масс механической системы, динамики вращательного движения твердого тела, кинетического момента механической системы, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Динамика точки. Основные понятия и определения.

В разделе кинематики исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В разделе динамики решается более сложная и важная задача. Определяется движение тела под действием сил приложенных к нему, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на это движение, включая самих материальных тел.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Понятие о силе, как о величине, характеризующей меру механического взаимодействия материальных тел, было введено в статике. Но при этом в статике мы, по существу, считали все силы постоянными. Между тем, на движущееся тело наряду с постоянными силами (постоянной, например, можно считать силу тяжести) действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Сила – векторная физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое, в результате чего у тела изменяется скорость, то есть *появляется ускорение*, или происходит *деформация* тела, либо имеет место и то, и другое. В том случае, когда тело при взаимодействии получает ускорение, говорят о *динамическом* проявлении сил. В том случае, когда тело при взаимодействии деформируется, говорят о *статическом* проявлении сил. $\vec{F}$ – векторная величина.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть ***от времени, от положения тела и от его скорости.*** В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата; от положения тела зависит сила упругости пружины; от скорости движения зависят силы сопротивления среды (воды, воздуха).

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным, свободным от других воздействий покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность и представляет собой ***свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.*** Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным, и наоборот.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела. В механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

За единицу массы принят эталон – сплав платины и иридия, хранящийся в палате мер и весов в Париже: [m]=кг. Масса–величина аддитивная $m_{сист} = \sum_{i=1}^{n} m_i$ и скалярная.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил; характер движения может еще зависеть от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц (т.е. от распределения масс).

Чтобы при первоначальном изучении динамики иметь возможность отвлечься от учета влияния формы тел (распределения масс), вводится понятие о материальной точке.

Под ***материальной точкой*** понимают материальное тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь и положение которого можно определить координатами одной из его точек.

Практически данное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами самого тела. Кроме того, как будет показано в динамике системы *поступательно* движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Наконец, материальными точками можно считать частицы, на которые мы будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому при изучении динамики выделяют два основных раздела: "Динамика материальной точки" и "Динамика материальной системы", из которых первый предваряет второй.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: ***существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано.***

или в другой формулировке

если сумма действующих на тело сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением ***по инерции.***

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи - пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если F=0, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью ($\vec{v}$ =const); ускорение точки при этом равно нулю: $\vec{a}$ = 0); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется ***инерциальной системой отсчета*** (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Солнечной системы инерциальной является система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Системы отсчета, в которых не выполняется первый закон Ньютона, называются **неинерциальными**. Неинерциальными будут системы, движущиеся с ускорением, или вращающиеся.

Второй закон (основной закон динамики) гласит: ***произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы (рис.1).***

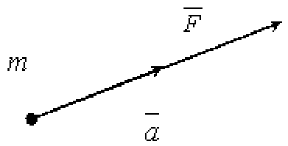


Рис.1

Математически этот закон выражается векторным равенством $m\vec{a} = \vec{F}$.

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость $ma = F$.

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, так как две разные точки при действии одной и той же силы получают одинаковые ускорения только тогда, когда будут равны их массы; если же массы будут разные, то точка, масса которой больше (т. е. более инертная), получит меньшее ускорение, и наоборот.

Известно, что вес тела и ускорение его свободного падения пустоте существенно зависят от места земной поверхности. В данной точке земли ускорение свободного падения всех тел одинаково и обозначается буквой g. Экспериментально установлено, что отношение веса P тела к ускорению его свободного падения g есть постоянная величина, не зависящая от места наблюдения. Это отношение $m = P/g$ также определяет массу тела. Таким образом, различают тяжелую массу $m_1 = P/g$ и инертную массу $m_2 = F/a$. В классической механике считается, что $m_1=m_2=m$.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т.е. равнодействующей $\vec{R}$**,** равной геометрической сумме этих сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$m\vec{a} = \vec{R}$ или $m\vec{a} = \sum F_K$.

Существует и более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равно действующей на нее силе: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Данное выражение называется уравнением движения материальной точки.

В общем случае сила, действующая на тело, изменяется со временем и по величине, и по направлению. Но в течение элементарного промежутка времени

dt мы можем считать, что $\vec{F}$=const. Векторная величина $d\vec{p}$, равная $d\vec{p} = \vec{F}dt$, называется ***элементарным импульсом (силы).***

Второй закон Ньютона в дифференциальной форме:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

в проекциях на оси:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{ix}\,; \quad m\frac{dv_y}{dt} = \sum F_{iy}\,; \quad m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{iz}.$$

Из второго закона также получим размерность силы: 1Н=1 кг·1 м/с^2.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: ***две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны (рис.2).***

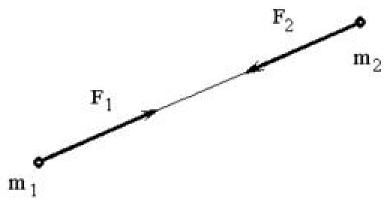


Рис.2

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материальными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы.

Проведём небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжёлое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе $\vec{F}$, той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть ***силой инерции*** этой точки - $\vec{F}^{\text{ин}}$. По третьему закону она равна и противоположна действующей на точку силе $\vec{F}$, $\vec{F}^{\text{ин}} = -\vec{F}$. Но на основании второй аксиомы $\vec{F} = m\vec{a}$. Поэтому $\vec{F}^{\text{ин}} = m\vec{a}$.

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению её массы на ускорение

$$F^{\text{ин}} = ma.$$

И направлена эта сила инерции в сторону противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Поэтому сила инерции

$$\vec{F}^{\text{ин}} = -m\vec{a} = -m\vec{a}_n - m\vec{a}_\tau = \vec{F}_n^{\text{ин}} + \vec{F}_\tau^{\text{ин}}.$$

То есть её можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции.

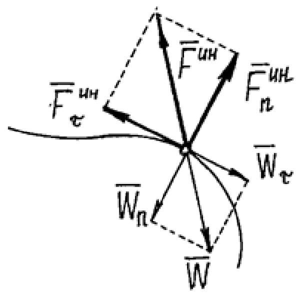


Рис.3

Причём

$$F_n^{ин} = m\frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{ин} = m\frac{dv}{dt}.$$

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет её движение. Это очень важно помнить.

Третий закон динамики, как устанавливающий характер взаимодействия материальных частиц, играет большую роль в динамике системы.

Четвертый закон (закон независимого действия сил). При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i; \quad \vec{a} = \sum_i \vec{a}_i$$

Законы Ньютона в классической механике ***применимы*** для описания движения: а) макротел; б) для тел постоянной массы; в) при скоростях, значительно меньших скорости света.

Силы в природе.

В природе существует много разных видов сил: тяготения, тяжести, Лоренца, Ампера, взаимодействия неподвижных зарядов и т.д., но все они в конечном счете сводятся к небольшому числу фундаментальных (основных) взаимодействий. Современная физика считает, что существует в природе лишь четыре вида сил или четыре вида взаимодействий:

1) гравитационное взаимодействие (осуществляется через гравитационные поля);

2) электромагнитное взаимодействие (осуществляется через электромагнитные поля);

3) ядерное (или сильное) (обеспечивает связь частиц в ядре);

4) слабое (отвечает за процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами, а также с упругими силами и силами трения.

Гравитационные силы (силы тяготения) – это силы притяжения, которые подчиняются закону всемирного тяготения.

Сила тяжести – сила, с которой тело притягивается Землей. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $\vec{g}$, называемым ускорением свободного падения. По второму закону Ньютона, на всякое тело действует сила: $\vec{F} = m\vec{g}$, называемая силой тяжести.

Вес – **с**ила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на подвес или опору.

Сила тяжести $m\vec{g}$ равна весу только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно Земли. По модулю вес $\vec{P}$ может быть как больше, так и меньше силы тяжести $\vec{F}$. Эти силы приложены к разным телам: $m\vec{g}$ – приложена к самому телу, $\vec{P}$ – к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле земного тяготения.

В случае ускоренного движения опоры (например, лифта, везущего груз) уравнение движения (с учетом того, что сила реакции опоры равна по величине весу, но имеет противоположный знак $\vec{P} = -\vec{N}$): $m\vec{g} - \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Если движение происходит вверх P=m(g+a), вниз: P=m(g-a).

При свободном падении тела его вес равен нулю, т.е. оно находится в состоянии *невесомости.*

Силы упругости возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося их деформацией. Упругая (квазиупругая) сила пропорциональна смещению частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия: $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Силы трения являются одним из проявлений контактного взаимодействия тел, в частности сила трения скольжения возникает при скольжении одного тела по поверхности другого: $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}}N$ и направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.

Упругие силы и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества, которое имеет электромагнитное происхождение, следовательно они по своей природе имеют электромагнитные происхождения. Гравитационные и электромагнитные силы являются фундаментальными – их нельзя свести к другим, более простым силам. Упругие силы и силы трения не являются фундаментальными. Фундаментальные взаимодействия отличаются простотой и точностью законов.

Силы трения.

Трение является одним из проявлений контактного взаимодействия тел. Трение различают двух видов: *внешнее* и *внутреннее*.

Силы ***внешнего трения*** возникают на поверхности контакта двух тел. ***Внутреннее трение*** – это тангенциальное взаимодействие между слоями одного и того же тела. Если сила трения возникает при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде, то ее относят к силам внутреннего трения.

Трение между поверхностями твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки или смазки называется ***сухим.*** Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется ***вязким*** или ***жидким.***

Рассмотрим сухое трение. Различают три его вида: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

а) ***Сила трения покоя*** – это сила, действующая между соприкасающимися телами, находящимися в состоянии покоя, равная по величине и противоположно направленная силе, понуждающей тело к движению.

До возникновения скольжения сила трения покоя может иметь любое направление и принимать любое значение от нуля до некоторого максимального, при котором возникает скольжение: $0 \le \vec{F}_{\text{тр пок}} \le \vec{F}^{max}_{\text{тр пок}}$.

Силу трения покоя, равную по модулю внешней силе, при которой начинается скольжение данного тела по поверхности другого, называют ***максимальной силой трения покоя.***

Французские физики Г.Амонтон и Ш.Кулон установили, что: максимальная сила трения покоя пропорциональна силе реакции опоры (нормального давления) и не зависит от площади соприкосновения трущихся тел

$$\vec{F}^{max}_{\text{тр пок}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения покоя, зависит от физической природы соприкасающихся тел и обработки их поверхностей,

б) ***Трение скольжения.*** Если к телу приложить внешнюю силу, превышающую $|\vec{F}^{max}_{\text{тр пок}}|$, то тело начинает скользить. Сила трения продолжает существовать и называется ***силой трения скольжения.***

Силы трения скольжения действуют вдоль поверхности контакта двух тел. Они приложены к обеим трущимся поверхностям в соответствии с третьим законом Ньютона. Модуль силы трения скольжения зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел (см. рис.4). Уменьшение силы трения скольжения при малых скоростях объясняется тем, что при движении тела, имеющиеся на его поверхности микроскопические выступы не успевают так глубоко западать в углубления поверхности другого тела, как при покое. Деформируются только «верхушки» выступов. Увеличение силы трения скольжения при больших скоростях связано с разрушением выступов и их размельчением. У грубо обработанной поверхности основную роль в возникновении сил трения покоя и скольжения играют зацепления неровностей, а при тщательной обработке – молекулярное или атомное сцепление. При специальной обработке поверхностей сила трения скольжения может практически не зависеть от скорости.

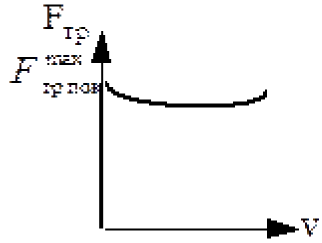


Рис.4

Силы трения скольжения также зависят от нормального давления на поверхность соприкосновения. При постоянной скорости движения:

$$F_{\text{тр.ск.}} = \mu_{\text{ск}} N. \qquad (1)$$

Коэффициент трения скольжения $\mu_{ск}$ зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел. В первом приближении можно считать $\mu_{ск}$ равным коэффициенту трения покоя μ ($\mu_{ск} = \mu$). Для определения μ положим тело на наклонную плоскость и начнем увеличивать угол наклона α. Из (1) $\mu = F/N$. При определенном значении α тело начинает движение вниз.

Тело приходит в движение, когда (рис.5) $F = F_{тр}$ и $F = mg\sin\alpha$; $N = mg\cos\alpha$, тогда:

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{mg sin\alpha}{mg cos\alpha} = tg\alpha$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α_0, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

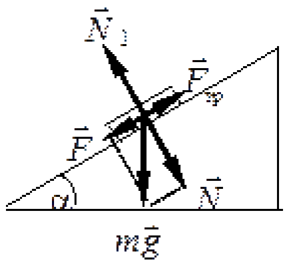


Рис.5

в) ***Трение качения.*** При качении тела по поверхности другого возникает особая сила – сила трения качения, которая препятствует качению тела. Сила терния качения при тех же материалах соприкасаемых тел всегда меньше силы терния скольжения. Этим пользуются на практике, заменяя подшипники скольжения шариковыми или роликовыми подшипниками. Кулон опытным путем установил для катящегося цилиндра радиуса R:

$$F_K = \mu_K \frac{N}{R},$$

где μ_K – коэффициент трения качения, величина которого уменьшается с увеличением твердости материала и шероховатости его поверхности.

Для катящегося обода

$$F_K = \mu_K \frac{N}{2R}.$$

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует ***сила жидкого трения***, тормозящая его движение.

Сила жидкого трения вместе со скоростью обращается в нуль. При небольших скоростях она растет пропорционально скорости:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр.}} = -k_1 \vec{v} \qquad (2)$$

Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

При увеличении скорости линейная зависимость постепенно переходит в квадратичную:

$$\vec{F}_{\text{ж.тр.}} = -k_2 \vec{v}^2 \qquad (3)$$

k_2 также зависит от формы тела, от площади лобового сопротивления, от вязкости жидкости (ею пренебрегают).

Границы области, в которой происходит переход от закона (2) к закону (3), зависят от тех же факторов, от которых зависит коэффициент k_1.

Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки.

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу ***(первая задача динамики);***

2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки *(вторая* или ***основная задача динамики****).*

Решаются обе эти задачи с помощью уравнений, выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают ускорение $\vec{a}$ т.е. величину, характеризующую движение точки, и действующие на нее силы.

В технике часто приходится сталкиваться с изучением ***несвободного*** движения точки, т.е. со случаями, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются ***связями.***

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое называется уравнением связи.

$$f(x,y,z)=0$$

Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии, то уравнениями связи являются уравнения этой лини.

$$f_1(x,y,z)=0, \ \ f_2(x,y,z)=0.$$

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к ней активных сил и начальных условий, но так же от имеющихся связей. При этом значения начальных параметров должны удовлетворять уравнениям связей.

Связи бывают двухсторонние или удерживающие и односторонние или неудерживающие.

Связь называется двухсторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих кривые или поверхности в пространстве на которых должна находится точка.

Пример. Материальная точка подвешена на стержне длины *l* (рис.6).

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

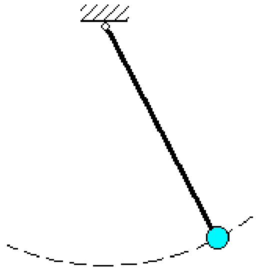


Рис.6

Связь называется односторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме неравенств. Односторонняя связь препятствует перемещению точки лишь в одном направлении и допускает ее перемещение в других направлениях.

Пример. Материальная точка подвешена на нити длины l (рис.7).

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2 \le l^2$$

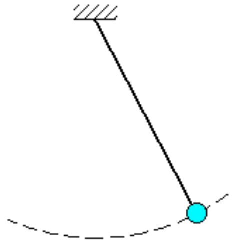


Рис.7

В случаях несвободного движения точки, как и в статике, будем при решении задач исходить из ***аксиомы связей (принцип освобождаемости от связей)*, согласно которой *всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи*** $\vec{N}$. Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки примет вид:

$$m\vec{a} = \sum F_k^a + \vec{N},$$

где F_k^a -действующие на точку активные силы.

Пусть на точку действует несколько сил. Составим для неё основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \sum \vec{F_i}$. Перенесём все члены в одну сторону уравнения и запишем так: $\sum \vec{F_i} - m\vec{a} = 0$ или $\sum \vec{F_i} + \vec{F}_i^{ин} = 0$.

Это уравнение напоминает условие равновесия сходящихся сил. Поэтому можно сделать вывод, что, если к движущейся материальной точке приложить её силу инерции, то точка будет находиться в равновесии. (Вспомним, что на самом деле сила инерции не приложена к материальной точке и точка не находится в равновесии.) Отсюда следует метод решения таких задач, который называется методом кинетостатики:

Если к силам, действующим на точку, добавить ее силу инерции, то задачу можно решать методами статики, составлением уравнений равновесия.

Первая задача динамики для несвободного движения будет обычно сводиться к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи.

Дифференциальные уравнения движения точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) ***Определение движения точки координатным способом.***

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси *Oxyz* (рис.20). Проектируя обе части равенства $ma = \sum F_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т.д., получим ***дифференциальные уравнения криволинейного движения точки*** в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

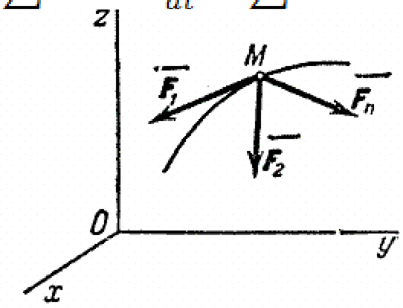


Рис.20

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время *t*, координаты точки *x, y, z* и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.

Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях *Oxyz* начальные условия задаются в виде: при t=0

$$\begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0 \\ v_x = v_{x_0}, & v_y = v_{y_0}, & v_z = v_{z_0} \end{cases}.$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты *x, y, z* движущейся точки, как функции времени *t*, т.е. найдем закон движения точки.

Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми **общими теоремами,** являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рассмотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения (импульс) точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются ***количество движения*** **и** ***кинетическая энергия.***

Количеством движения точки называется векторная величина $m\vec{v}$ ***равная произведению массы точки на вектор ее скорости***. Направлен вектор $m\vec{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина $mv^2/2$**, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.**

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

Например, зная количество движения автомобиля (т.е. величину Q=mv) а не величины m и v в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени *dt*. ***Элементарным импульсом силы называется векторная величина*** $d\vec{S}$***, равная произведению вектора силы*** $\vec{F}$ ***на элементарный промежуток времени dt.***

$$d\vec{S} = \vec{F}dt.$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс $\vec{S}$ любой силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}\,dt.$$

Следовательно***, импульс силы за любой промежуток времени,*** t_1 ***равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от 0 до*** t_1.

В частном случае, если сила $\vec{F}$ и по модулю, и по направлению постоянна ($\vec{F} = const$), будем иметь $\vec{S} = \vec{F}t_1$. Причем, в этом случае и модуль $S = Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$\vec{S}_x = \int_0^{t_1} \vec{F}_x\,dt; \quad \vec{S}_y = \int_0^{t_1} \vec{F}_y\,dt; \quad \vec{S}_z = \int_0^{t_1} \vec{F}_z\,dt.$$

Единицей измерения импульса в СИ является – 1 $H \cdot c$.

Теорема об изменении количества движения точки

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k.$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме**:** ***производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.***

Проинтегрируем это уравнение. Пусть точка массы m, движущаяся под действием силы $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ (рис.32), имеет в момент t=0 скорость $\vec{v}_0$, а в момент t_1- скорость $\vec{v}_1$.

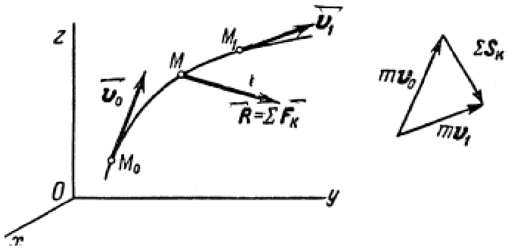


Рис.32

Умножим тогда обе части равенства на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости v_0 и v_1. Так как интеграл от d(mv) равен mv, то в результате получим:

$$m\vec{v}_1 \cdot m\vec{v}_0 = \sum \int \vec{F}_K\,dt.$$

Стоящие справа интегралы представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\vec{v}_1 \cdot m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: ***изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени*** (рис. 32).

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях.

$$\begin{cases} mv_{1X} - mv_{0X} = \sum S_{KX}; \\ mv_{1Y} - mv_{0Y} = \sum S_{KY}; \\ mv_{1Z} - mv_{0Z} = \sum S_{KZ}. \end{cases}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox теорема выражается первым из этих уравнений.

ЛЕКЦИИ 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Основные понятия и определения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
3. Линейные уравнения второго порядка.

Изучение данных вопросов необходимо для изучения динамики точки, твердого тела и системы.

Основные понятия и определения.

Дифференциальным называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции.

Обыкновенным называется такое дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция зависит от одного аргумента, например,

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = B$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в него (уравнение (1) – уравнение второго порядка). ***Решением дифференциального уравнения*** называется функция, при подстановке которой в это уравнение последнее обращается в тождество. ***Частным решением*** дифференциального уравнения называется любое из возможных его решений. Например, подстановкой в уравнение (1) значения $x = A$ легко убедиться, что оно обращается в тождество при $x = A = B/k^2$. Это и есть одно из его частных решений.

Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его частных решений. Если уравнение второго порядка является интегрируемым, т.е. его общее решение можно записать в известных функциях, то оно будет иметь вид: $x = \varphi(t, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, x – искомая функция аргумента t. Разные значения C_1 и C_2 дают разные частные решения. В механике обычно требуется найти частное решение дифференциального уравнения, у которого при $t = t_0, x = x_0, x' = V_0$. С этой целью данные подставляются в общее решение. В результате для определения постоянных C_1 и C_2 получается два уравнения

$$x_0 = \varphi_0(t_0, C_1, C_2), \quad V_0 = \varphi'(t_0, C_1, C_2).$$

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Если дифференциальное уравнение может быть представлено в виде $P(x)dx = Q(t)dt$, где функция $P(x)$ зависит только от x, а функция $Q(t)$ зависит только от t, то говорят, что переменные разделяются. В этом случае имеем

$$\int P(x)dx = \int Q(t)dt + C.$$

Линейные уравнения второго порядка.

Линейным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = R(t) \qquad (2)$$

Если правая часть в этом уравнении равна нулю, т.е. $R(t) = 0$, уравнение называется ***однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Общее решение неоднородного уравнения (2) $x(t)$ складывается из общего решения $x_1(t)$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $x_2(t)$ неоднородного уравнения (2)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \qquad (3)$$

Для выполнения индивидуальных заданий необходимо уметь решать дифференциальное уравнение вида

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = R(t) \qquad (4)$$

которое является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (4) необходимо знать общее решение однородного линейного уравнения

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = 0, \qquad (5)$$

которое ищется в виде $x = x_1 = e^{\lambda t}$. В результате его подстановки в уравнение (5) получается ***характеристическое уравнение***

$$\lambda^2 = 2b\lambda + k^2 = 0. \qquad (6)$$

При решении данного уравнения возможны три случая:

1) $k < b$, когда характеристическое уравнение (6) имеет два неравных действительных корня $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$. В этом случае имеется два линейно независимых решения и общее решение уравнения (5) является их линейной комбинацией

$$x_1 = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}; \qquad (7)$$

2) $k = b$, когда характеристическое уравнение (6) имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$. Общее решение тогда имеет вид

$$x_1 = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2te^{\lambda_2 t}x_1; \qquad (8)$$

3) $k > b$, когда характеристическое уравнение (5) имеет два комплексных корня $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} = -b \pm ik_1$. Общее решение уравнения (5) снова является линейной комбинацией соответствующих частных

$$x_1 = C_1e^{-bt+ik_1t} + C_2e^{-bt-ik_1t} = e^{-bt}(C_1e^{ik_1t} + C_2e^{-ik_1t}). \qquad (9)$$

Далее, используя формулу Эйлера, $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$, можно показать, что решение (9) сводится к следующему

$$x_1 = e^{-bt}(D_1sink_1t + D_2cosk_1t), \qquad (9а)$$

где D_1, D_2 – некоторые постоянные.

В частном случае, когда $b = 0$ и $k \neq 0$, общее решение уравнения (5) принимает вид

$$x_1 = D_1sink_1t + D_2cosk_1t. \qquad (10)$$

Для нахождения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (4) необходимо еще найти какое-либо его частное решение. В индивидуальных заданиях встречаются варианты, в которых R(t)=A=const и R(t)=Acos(pt+α). В первом случае частное решение уравнения (4) можно искать в виде $x_2 = B = const$. Действительно, подставив это выражение в уравнение (4), убеждаемся, что при $B=A/k^2$ оно удовлетворяется при любом t.

В случае, когда R(t)=Acos(pt+α) и $p \neq k$, частное решение можно искать в виде: $x_2 = Kcos(pt + \beta)$, где K и β – постоянные. Если же R(t)=Acos(pt+α), но p=k, частное решение следует искать в виде $x_2 = Ktcos(pt + \beta)$.

ЛЕКЦИИ 14. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНЬСА .

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Основные определения колебательного движения.
2. Малые свободные колебания системы.
3. Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению.
4. Вынужденные колебания системы.
5. Влияние сопротивления на вынужденные колебания.

Изучение данных вопросов необходимо для изучения колебательных движений механической системы в дисциплине «Детали машин», для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов».

Основные определения колебательного движения.

Колебательным движением материальной системы называется такое ее движение, при котором она через некоторые промежутки времени постоянно возвращается к определенному положению.

Нетрудно обнаружить, что большинство окружающих нас систем совершают колебательное движение.

Если время, за которое все точки системы возвращаются к любому определенному положению с равными скоростями, постоянно и одинаково, то такое время *T* называется ***периодом колебаний***. А эти колебания – периодическим колебательным движением.

На рис.1 показан пример изменения какой-то обобщенной координаты *q* при довольно сложном колебательном процессе. А на рис.2 – при более организованных, периодических колебаниях.

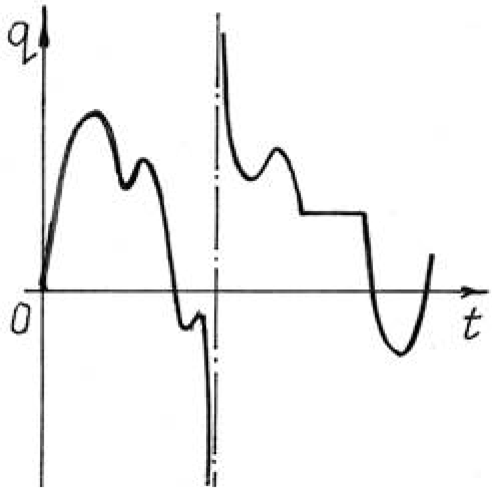


Рис.1

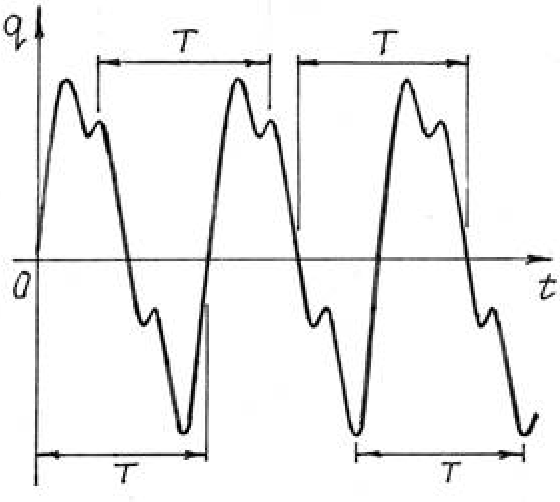


Рис.2

При периодическом процессе значения функции, описывающей движение системы, повторяются через каждый период *T*, т.е.

$$q(t)=q(t+T). \qquad (1)$$

Если эта функция имеет вид

$$q = A\sin(\mathrm{kt} + \beta), \qquad (2)$$

то такое колебательное движение называется ***гармоническим***. График такого движения дан на рис.3.

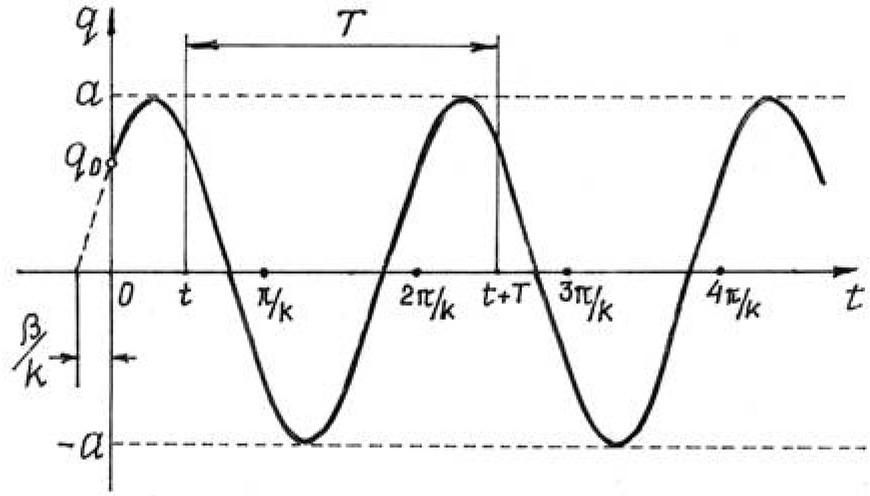


Рис.3

По (2) $q_0 = A\sin\beta$ – начальная координата, определяющая положение системы в начале движения;

A – амплитуда колебаний, имеет размерность обобщенной координаты;

$(\mathrm{kt} + \beta)$ – фаза колебаний, β – начальная фаза;

k – частота колебаний, размерность ее с$^{-1}$.

Период колебаний найдем используя свойство (1):

$$A\sin(kt + \beta) = A\sin[k(t + T) + \beta]$$

Отсюда, т.к. период синуса равен 2π, $kt + \beta = kt + kT + \beta - 2\pi$. Значит, период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}. \qquad (3)$$

Вообще, существует много всяких типов колебаний. Выделим, в первую очередь, линейные и нелинейные колебания. Названия их определяются видом дифференциальных уравнений, которые описывают колебательное движение материальной системы.

Исследование нелинейных колебаний значительно усложняется, т.к. нет общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Но, если рассматривать малые колебания, такие, при которых координата и скорость изменяются на малую величину, то многие нелинейные уравнения станут линейными и исследование движения значительно упростится.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые, линейные колебания. И, мало того, колебания системы только с одной степенью свободы.

Естественно, колебания системы могут совершаться только около устойчивого положения равновесия.

Если система консервативная, то найти положение равновесия и определить устойчивость его можно с помощью потенциальной энергии.

Ранее было установлено, что в положении равновесия выполняется условие $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$ и если в положении равновесия $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$, то равновесие будет устойчиво.

Договоримся отсчитывать координату от положения равновесия $(q_0 = 0)$, а потенциальную энергию там считать равной нулю (Π_0=0) Тогда, по определению малых колебаний, обобщенная координата *q* всегда будет малой величиной.

Разложим потенциальную энергию в ряд Маклорена около положения равновесия:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + (\frac{\partial \Pi}{\partial q})_{q=0} \cdot q + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} \cdot q^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3}\right)_{q=0} \cdot q^3 \dots .$$

Так как П(0) = 0 и $(\frac{\partial \Pi}{\partial q})_{q=0} = 0$ и, отбросив члены третьего и выше порядка малости, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \qquad (4)$$

где коэффициент $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0$ по условию устойчивости.

Поэтому потенциальная энергия колебательной системы, отсчитываемая от положения устойчивого равновесия, будет всегда положительной.

Кинетическую энергию системы при малых колебаниях также можно преобразовать.

Кинетическая энергия системы $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$, а так как радиус-вектор точек $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q)$ и q=q(t), то $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dq} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}\dot{q}$.

Поэтому $T = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2 \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 A(q)$, где $A(q) = \sum m_i \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dq}\right)^2$.

Эту функцию A(q) можно разложить в ряд Маклорена по степеням *q* около положения равновесия и учесть только первый член: A(q)=A(0)+… . Остальные члены можно не учитывать, т.к. после подстановки A(q) в *T*, они станут величинами третьего и выше порядка.

Обозначив постоянную A(0)=*a* получим

$T = aq^2/2$. (5)

Коэффициент *a* называется коэффициентом инерции. Конечно, *a*>0 т.к. кинетическая энергия не может быть отрицательной.

Замечание. Практически, при исследовании конкретных колебательных систем приходится раскладывать в ряд функции, содержащие, чаще всего, sinx, cosx, e^x. Разложение их с точностью до малых второго порядка известны: sinx=x, cos=1-x^2/2, e^x=1+x+x^2/2.

Малые свободные колебания системы.

Свободными колебаниями называется колебательное движение системы, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Составим уравнение Лагранжа для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Используя (4) и (5), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний $a\ddot{q} + cq = 0$ или, обозначив c/*a*=k^2,

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \qquad (6)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами известно:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad (7)$$

или, использовав другие постоянные $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $tg\beta = \frac{C_1}{C_2}$,

$$q = a\sin(kt + \beta). \qquad (8)$$

Следовательно, малые свободные колебания – гармонические колебания, причем амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями (q и $\dot{q}$ при $t = 0$), а частота колебаний k и период T не зависят от начальных условий, определяются только конструкцией системы.

Обычно частоту колебаний находят сравнением полученного дифференциального уравнения с уравнением (6).

Пример 1. Тело весом P подвешено на нити, перекинутой через блок и прикрепленной к пружине (рис.4). Вес блока G, радиус - r; жесткость пружины c. Определим период свободных колебаний системы.

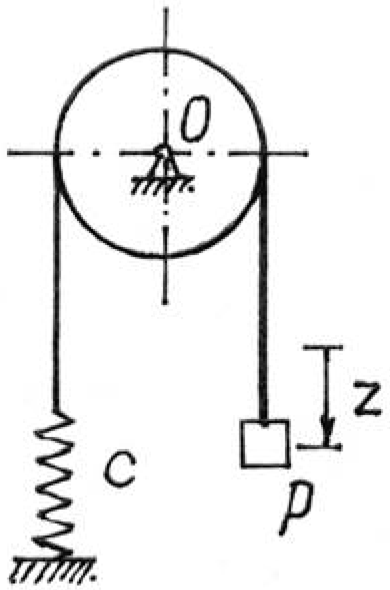


Рис.4

Назначим обобщенной координатой смещение z груза по вертикали от положения равновесия, при котором пружина была растянута на величину f.

Тогда потенциальная энергия относительно положения равновесия $\Pi = -Pz + \frac{1}{2}c(z+f)^2 - \frac{1}{2}cf^2$. Где (z+f) - полная деформация пружины, а $cf^2/2$ - потенциальная энергия пружины в положении равновесия, которую вычитаем из потенциальной энергии полностью деформированной пружины. Раскрыв скобки, получим

$$\Pi = -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf + \frac{1}{2}cf^2 - \frac{1}{2}cf^2 = -Pz + \frac{1}{2}cz^2 + czf =$$
$$= (-P + cf)z + \frac{1}{2}cz^2.$$

В положении равновесия должно выполняться условие $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = (-P + cf + cz)_{z=0} = 0$. Отсюда P=cf, значит, $\Pi = cz^2/2$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{z}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{z}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2\cdot\frac{\dot{z}^2}{r^2}=\frac{1}{4g}(2P+G)\dot{z}^2$$

Составив уравнение Лагранжа, получим $\frac{1}{2g}-(2P+G)\ddot{z}+cz=0$ или $\ddot{z}+\frac{2cg}{2P+G}z=0$ Сравнивая с (6), находим частоту колебаний $k=\sqrt{\frac{2cg}{2P+G}}$ и затем период $T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{2P+G}{2cg}}$

Свободные колебания системы с учетом сил сопротивления движению.

Известно, что свободные колебания не длятся очень долго. Как правило они, как говорят, затухают и довольно скоро. Причиной этому является чаще всего – сопротивление среды, в которой движутся части колебательной системы.

Обычно считают это сопротивление пропорциональным скорости. Пусть на каждую точку материальной системы действует сила сопротивления $\vec{R}_i=-\mathrm{v}_i\vec{v}_i$. Обобщенная сила, соответствующая этим силам,

$$Q'=\frac{1}{\delta q}\sum\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum\vec{R}_i\cdot\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q}=\sum\vec{R}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}$$

Скорость точек

$$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}\cdot\dot{q},$$

так как $\vec{r}_i$ – сложная функция, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q)$, а q=q(t). Поэтому $\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q}$.

Значит, $Q'=\sum\vec{R}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}}=-\sum\mathrm{v}_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}}=-\sum\mathrm{v}_i\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{v}_i^2}{\partial\dot{q}}=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\sum\frac{1}{2}\mathrm{v}_i\vec{v}_i^2$.

Обозначим $\sum\frac{1}{2}\mathrm{v}_i\vec{v}_i^2=\Phi(\dot{q})$. Тогда обобщенная сила сопротивления $Q'=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}$.

Заметим, что по форме эта функция Ф аналогична кинетической энергии *T*. Поэтому, если разложить ее в ряд Маклорена и учесть члены лишь второго порядка малости, результат получится тоже аналогичным (5): $\Phi=\frac{1}{2}b\dot{q}^2$ (коэффициент *b* также будет положительным). И тогда обобщенная сила сопротивления движению

$$Q'=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}=-b\dot{q}. \qquad (9)$$

Функция Ф называется ***диссипативной*** или ***функцией рассеивания энергии*** системы.

После подстановки в уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial\Pi}{\partial q}=Q'$, получим дифференциальное уравнение $a\ddot{q}+cq=-b\dot{q}$ или

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0, \qquad (10)$$

Где n=b/2a - коэффициент сопротивления, $k=\sqrt{\frac{c}{a}}$ - частота свободных колебаний без сопротивления.

Найдем решение уравнения (10). Характеристическое уравнение: $z^2+2nz+k^2=0$ Корни его $z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$, могут быть и комплексными, и вещественными в зависимости от сопротивления, от величины коэффициента *n*.

а) ***Случай малого сопротивления (n < k).***

Корни получаются комплексными $z_{1,2} = -n \pm i\lambda$, где $\lambda = \sqrt{k^2 - n^2}$, $i = \sqrt{-1}$. Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$q = e^{-nt}(C_1 cos\lambda t + C_2 sin\lambda t) \quad (11)$$

или

$$q = ae^{-nt} sin(\lambda t + \beta), \quad (12)$$

где постоянные C_1 и C_2 или α и β находятся по начальным условиям.

Сравнивая решение (12) с (2), делаем вывод, что это будут колебания, но не гармонические, так как амплитуда колебаний, равная ae^{-nt}, не постоянная, уменьшается с течением времени. Поэтому такие колебания и называются ***затухающими.***

График таких колебаний дан на рис. 5.

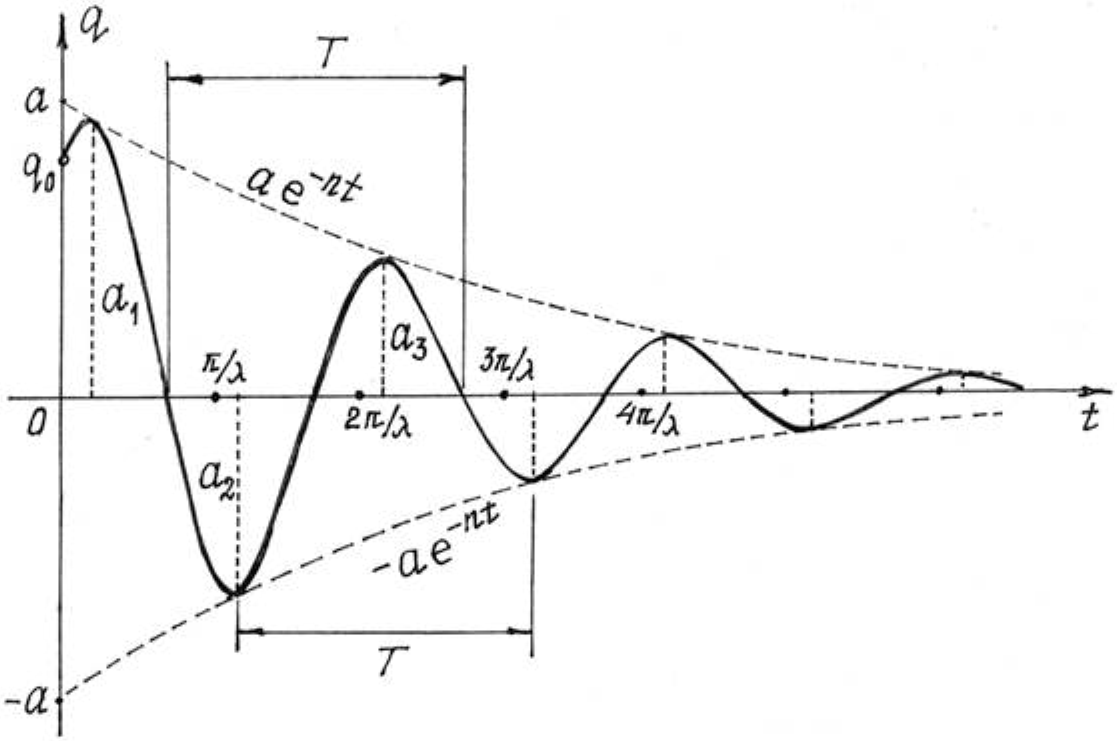


Рис.5

Следует заметить, что колебательный процесс не будет периодическим. Но, так как система проходит через положение равновесия через равное время, все-таки вводят понятие периода $T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}$.

Если сравнить этот период колебаний с периодом колебаний системы без сопротивления (3), увидим, что сопротивление увеличивает период колебаний и уменьшает их частоту.

Интересна закономерность изменения амплитуды. Найдем отношение соседних амплитуд (через полпериода T/2):

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{ae^{-nt}}{ae^{-nt(t+T/2)}} = const.$$

То есть амплитуды уменьшаются по закону геометрической прогрессии, знаменателем которой является величина $e^{nT/2}$.

Натуральный логарифм ее, равный nT/2, называется логарифмическим декрементом колебаний.

Конечно, через период амплитуда уменьшится в e^{nT} раз, а через m периодов – в e^{mnt} раз.

б) ***Случай большого сопротивления (n>k).***

Корни характеристического уравнения получатся вещественными: $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$. В этом случае, как известно из курса математики, решение дифференциального уравнения (10):

$$q = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\cdot t}). \qquad (13)$$

Решение явно неколебательное, непериодическое.

Графики таких движений показаны на рис.6. Вид движения зависит от начальных условий и величины коэффициента сопротивления n.

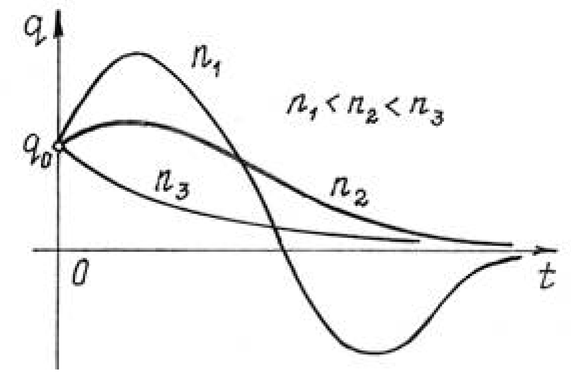


Рис.6

в) ***Случай равного сопротивления (n = k).***

Корни характеристического уравнения получаются равными: $z_{1,2} = -n$. Поэтому решение дифференциального уравнения

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \qquad (14)$$

Движение и в этом случае не будет колебательным.

Вынужденные колебания системы.

Если сила, которая вывела систему из положения равновесия, продолжает действовать, то такое колебание не будет свободным, будет вынужденным. И эта сила называется ***возмущающей силой.***

Рассмотрим колебательное движение под действием обобщенной возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону $Q = Q_0 \sin(pt + \gamma)$, где Q_0 - максимальная величина возмущающей силы; p – частота изменения силы; γ– начальная фаза изменения силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний получится таким

$$\ddot{q} + k^2 q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \qquad (15)$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения. Общее решение уже было получено в (7) или (8). Частное решение ищем в виде $q_{ч.н.} = A\sin(pt + \gamma)$.

Подставив его в дифференциальное уравнение (15), получим

$$-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + k^2 A\sin(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma).$$ Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2}. \qquad (16)$$

Значит полное решение уравнения (15)

$$q = C_1 coskt + C_2 sinkt + Asin(pt + \gamma). \quad (17)$$

Так как общее и частное решения совершаются с разными частотами, то вынужденные колебания не будут гармоническими. Но, как нам уже известно, общее решение определяет свободные колебания, которые с течением времени довольно быстро затухают. Поэтому интерес представляют только установившиеся колебания:

$$q = \frac{Q_0}{k^2 + p^2} \sin(pt + \gamma). \qquad (18)$$

Отсюда следует, что установившиеся вынужденные колебания будут гармоническими с частотой *p*, равной частоте возмущающей силы и, что они не зависят от начальных условий.

И, самое интересное, – амплитуда колебаний *A* зависит от частоты *p* возмущающей силы. График этой зависимости дан на рис.7.

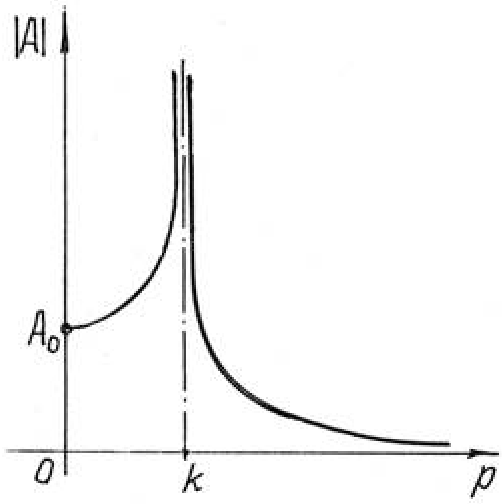


Рис.7

Первое, что надо отметить, при $p = k$ (частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний) амплитуда увеличивается до бесконечности.

Это явление называется ***резонансом.***

Как известно из курса высшей математики, при $p = k$ решение (17) не будет удовлетворять уравнению (15). Частное решение надо искать в другом виде:

$$q = Btcos(pt + \gamma).$$

Подставив его в уравнение (15), получим:

$$-Bpsin(pt + \gamma) - Bpsin(pt + \gamma) - Btp^2 \cos(pt + \gamma) +$$
$$+Btp^2 \cos(pt + \gamma) = Q_0 \sin(pt + \gamma)$$

Отсюда $B = -\frac{Q_0}{2p}$ и частное решение, определяющее вынужденные колебания при резонансе, получится таким

$$q = -\frac{Q_0}{2p} tcos(pt + \gamma). \qquad (19)$$

Видим, что амплитуда колебаний беспредельно равномерно увеличивается (рис.8). Амплитуда не сразу становится бесконечно большой. И даже малая возмущающая сила может раскачать систему до больших амплитуд и вызвать разрушение конструкции.

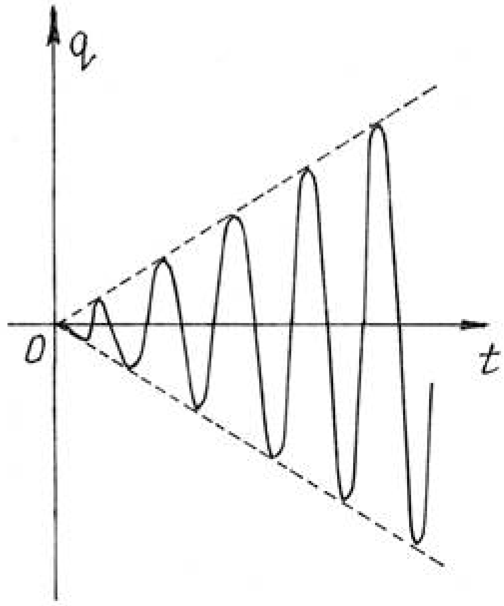


Рис.8

Интересен еще один случай, при котором частота p возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний, $p \approx k$, но не равна ей.

Воспользуемся решением (17), положив для простоты $\gamma = 0$. Пусть в начале движения координата и скорость равнялись нулю (при $t = 0$ $q = 0$ и $\dot{q} = 0$). Подставим эти начальные условия в уравнения

$$q = C_1 coskt + C_2 sinkt + Asinpt,$$

$$\dot{q} = -C_1 ksinkt + C_2 kcoskt + Apcospt.$$

Получим два уравнения: $0=C_1$ и $0=C_2k+Ap$, из которых находим $C_1=0$, $C_2=-Ap/k$. Тогда уравнение колебаний $q = -A\left(\frac{p}{k} sinkt - sinpt\right)$.

Так как $\frac{p}{k} \approx 1$ и $(k^2 - p^2) = (k-p)(k+p) \approx 2p(k-p)$, то, по (16),

$$A = \frac{Q_0}{k^2 - p^2} \cong \frac{Q_0}{2p(k-p)}.$$

Кроме того $(sinkt - sinpt) = 2cos\frac{k+p}{2}t \cdot sin\frac{k-p}{2}t \approx 2cospt \cdot sin\frac{k-p}{2}t.$ Уравнение движения получится таким

$$q = -\frac{Q_0}{p(k-p)} sin\frac{k-p}{2}t \cdot cospt. \quad (20)$$

Рассматривая функцию, стоящую перед cospt, как амплитуду колебаний, замечаем, что она изменяется по гармоническому закону с периодом $T_A = \frac{4\pi}{k-p}$ от нуля до максимального значения $A_{max} = \frac{Q_0}{p(k-p)}$ (рис.9).

Сами колебания совершаются с частотой p и периодом $T_K = \frac{2\pi}{p}$.

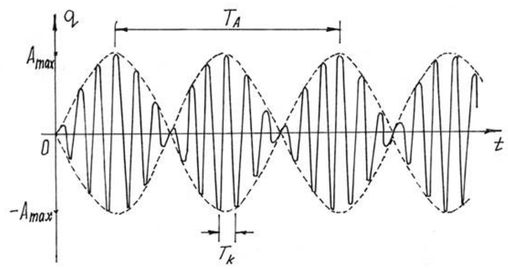


Рис.9

Чем ближе частота возмущающей силы p к частоте k, т.е. чем ближе к резонансу, тем больше будет период амплитуды T_A и больше амплитуда A_{max}. И тем больше будет похож график на рис.9 на график на рис.8, изображающий колебания при резонансе. Эти колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются ***биениями***. Такое явление часто встречается, например, в радиотехнике.

Мы исследовали вынужденные колебания под действием возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону. Но нередко она оказывается более сложной. Приходится использовать специальные математические методы, чтобы получить более-менее точный результат.

Если возмущающая сила периодическая и ее можно разложить в ряд Фурье, то решение может оказаться не очень сложным.

Пусть возмущающая сила описывается периодической функцией $Q = Q(t)$ с периодом $T_B = \frac{2\pi}{p}$, p – частота изменения этой функции. И пусть конструкция ее позволяет разложить функцию в ряд Фурье:

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j \sin(jpt + \gamma j),$$

где Q_j и γ_j - коэффициенты Фурье, определяемые по специальным формулам.

Частное решение дифференциального уравнения (15) получится в виде ряда:

$$q = A_0 + \sum_{j=1}^{s} \frac{Q_j}{k^2 - (jp)^2} \sin(jpt + \gamma_j) =$$

$$= \frac{Q_0}{k^2} + \frac{Q_1}{k^2 - p^2} \sin(pt + \gamma_1) +$$

$$+ \frac{Q_2}{k^2 - (2p)^2} \sin(2pt + \gamma_2) + \frac{Q_3}{k^2 - (3p)^2} \sin(3pt + \gamma_3) + \cdots$$

Количество s членов этого ряда стараются иметь не очень большим, если ряд хорошо сходится.

Решение получается как сумма нескольких синусоид («гармоник») с кратными частотами. Наименьшая частота p – называется основной частотой.

Интересно, что в полученном решении возможно несколько резонансов, столько, сколько гармоник: при $p = k$, $p=k/2$, $p=k/3$ и т.д.

Влияние сопротивления на вынужденные колебания.

Если учесть сопротивление среды пропорциональное скорости, как это было сделано выше, дифференциальное уравнение колебаний получится таким

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = Q_0 \sin(pt + \gamma). \qquad (21)$$

Решение его состоит из общего и частного решений. Общее мы уже находили выше. Например, при малом сопротивлении ($n < k$)

$$q_{o.o.} = ae^{-nt} sin(\gamma t + \beta), \text{где } \lambda = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Частное решение будем искать в виде $q_{ч.н.} = Asin(pt + \gamma - \varepsilon)$. Чтобы определить коэффициенты A и ε, подставим это решение в уравнение (21). Получим

$$-Ap^2 \sin(pt + \gamma - \varepsilon) + 2Anpcos(pt + \gamma - \varepsilon) + 2Anpcos(pt + \gamma - \varepsilon) +$$

$$+k^2 A\sin(pt+\gamma-\varepsilon) = Q_0\sin(pt+\gamma-\varepsilon)\cos\varepsilon + Q_0\sin\varepsilon\cdot\cos(pt+\gamma-\varepsilon)$$

(правую часть уравнения (21) представили как синус суммы двух углов: $\sin[(pt+\gamma-\varepsilon)+\varepsilon]$. Полученное уравнение обратится в тождество, если будут выполнены два условия (сгруппировав члены, содержащие $\sin(pt+\gamma-\varepsilon)$ и $\cos(pt+\gamma-\varepsilon)$:

$$-Ap^2 + Ak^2 = Q_0\cos\varepsilon \text{и} \quad 2Anp = Q_0\sin\varepsilon.$$

Из этих уравнений получим

$$A = \frac{Q_0}{\sqrt{(k^2-p^2)+4n^2p^2}}; \quad tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2-p^2}. \tag{22}$$

Полное решение уравнения (21) будет таким

$$q = ae^{-nt}\sin(\lambda t+\beta) + A\sin(pt+\gamma-\varepsilon) \tag{23}$$

Очевидно, за счет сопротивления с течением времени первый член стремится к нулю. Поэтому можно заключить, что установившиеся вынужденные колебания и с учетом сопротивления среды будут гармоническими.

Причем, во-первых, частота колебаний равна частоте изменения возмущающей силы; во-вторых, колебания не зависят от начальных условий и, в-третьих, амплитуда колебаний A зависит от частоты p и от сопротивления среды, характеризующегося коэффициентом n.

График этой зависимости от p и n дан на рис.10.

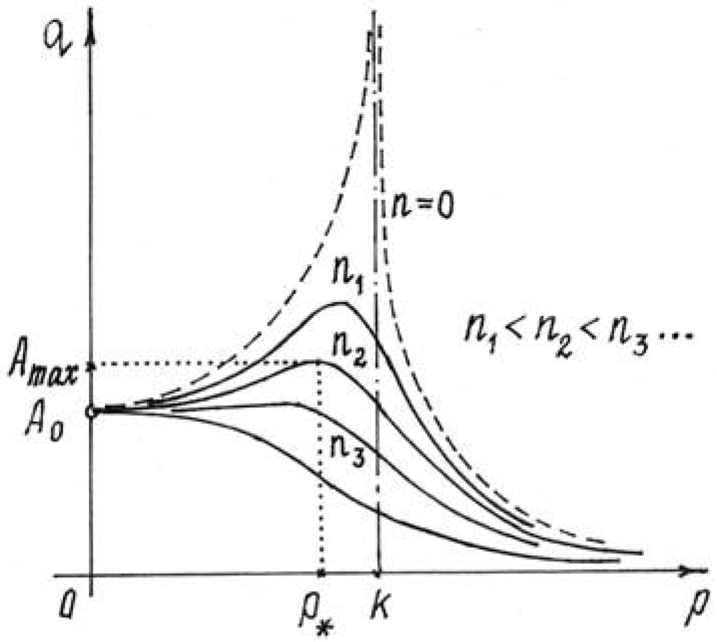


Рис.10

Из графика видно, что при сопротивлении амплитуда колебаний – конечная величина. И максимум амплитуды будет не при $p = k$, а при несколько меньшей частоте p_*. Ее можно определить, отыскав максимум амплитуды A или, лучше, минимум функции $F=(k^2-p^2)^2+4n^2p^2$

Приравняв к нулю производную, $\frac{dF}{dp} = 2(k^2-p^2)(-2p)+8n^2p = 0,$ найдем $p_* = \sqrt{k^2-2n^2}$. И тогда величина максимальной амплитуды, подставив p_* в (22), $A_{max} = \frac{Q_0}{2n\sqrt{k^2-n^2}}$

ЛЕКЦИИ 15. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА. СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ. МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Механическая система. Силы внешние и внутренние.
2. Масса системы.
3. Центр масс.
4. Динамика вращательного движения.
5. Момент инерции системы относительно оси.
6. Радиус инерции.
7. Момент инерции тела относительно параллельных осей.
8. Момент инерции тела относительно произвольной оси.
9. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
10. Дифференциальные уравнения движения системы.
11. Теорема о движении центра масс.
12. Теорема об изменении кинетического момента.
13. Закон сохранения движения центра масс.

Изучение данных вопросов необходимо для динамики колебательного движения механических систем, теории удара, для решения задач в дисциплинах «Сопротивление материалов» и «Детали машин».

Механическая система. Силы внешние и внутренние.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Материальное абсолютно твердое тело мы также будем рассматривать как систему материальных точек, образующих это тело и связанных между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т.п. (т.е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом - $\vec{F}^e$, а внутренние - $\vec{F}^i$.

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или ***активными,*** или ***реакциями связей.***

Реакции связей или просто – ***реакции,*** это силы которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы в целом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по её орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. ***Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.*** В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис.1) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k^i = 0.$$

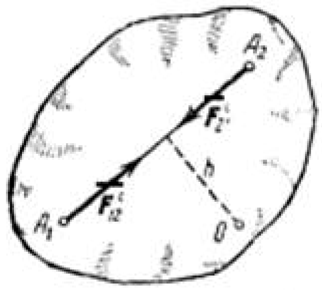


Рис.1

2. ***Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.*** **Действительно, если взять произвольный центр *O*, то из рис.1 видно, что** $\vec{m}_0(\vec{F}_{12}^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_{21}^i) = 0$ **. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:**

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) = 0 \text{ или } \sum m_x(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызывать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело.

Масса системы. Центр масс.

Движение системы, кроме действующих сил, зависит также от её суммарной массы и распределения масс. ***Масса системы*** равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M = \sum m_k.$$

Средней плотностью тела называют отношение

$$\rho_{ср} = \frac{M}{V}.$$

Плотностью тела в данной точке называют предел

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Отсюда,

$$M = \int \rho dV.$$

Если плотность во всех точках тела одинакова, то такое тело называют однородным.

В однородном поле тяжести, для которого g=const, вес любой частицы тела будет пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести:

$$X_C = \frac{\sum P_k X_k}{P}, \qquad Y_C = \frac{\sum P_k Y_k}{P}, \qquad Z_C = \frac{\sum P_k Z_k}{P}. \qquad (1)$$

В полученные равенства входят только массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки C (x_C, y_C, z_C) действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек этой системы.

Геометрическая точка C, координаты которой определяются указанными формулами, ***называется центром масс*** или ***центром инерции системы.***

Положение центра масс определяется его радиус-вектором $\vec{r}_C$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M},$$

где $\vec{r}_k$ - радиус-векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем, это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

Динамика вращательного движения.

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси OO (рис.2). Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, каждая из которых движется по окружности с одинаковой для всех точек угловой скоростью.

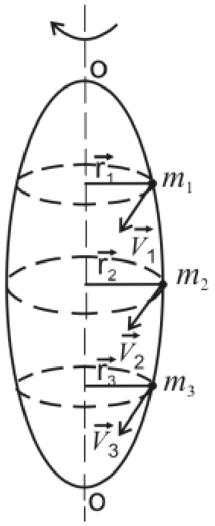


Рис.2

Линейная скорость движения каждой точки определяется выражением

$$V = \omega r,$$

где r – расстояние от точки до оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис.3), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

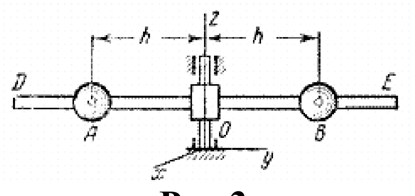


Рис.3

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс - момент инерции. ***Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси***

$$I_Z = \sum m_k h_k^2.$$

Момент инерции имеет размерность [кг·м^2]

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Заметим также, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что ***осевой момент инерции***

является мерой инертности тела при вращательном движении и зависит от распределения массы тела относительно оси вращения.

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии *h* от оси, $I_Z = mh^2$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. ***Радиусом инерции*** тела относительно оси *Oz* называется линейная величина ρ_u, определяемая равенством

$$I_Z = M \cdot \rho_u^2,$$

где *M* - масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси *Oz* той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве $I_z = \sum m_k h_k^2$, обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, а *V* - объем тела, получим

$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \text{или } I_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем *V* тела, а плотность ρ и расстояние *h* зависят от координат точек тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел:

1.Тонкий однородный стержень длины *l* и массы *M.* Вычислим его момент инерции относительно оси *Az,* перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец *A* (рис.4).

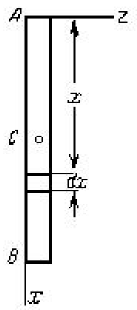


Рис.4

Направим вдоль *AB* координатную ось *Ax.* Тогда для любого элементарного отрезка длины *dx* величина *h=x,* а масса $dm = p_1 dx$, где $p_1 = M/l$ - масса единицы длины стержня. В результате

$$I_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно:

$$I_A = \frac{1}{3} M l^3.$$

А момент инерции тонкого однородного стержня длины *l* и массы *M* относительно оси проходящего через середину и перпендикулярную стержню равен

$$I_A = \frac{1}{12} M l^2.$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R и массы M. Найдем его момент инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис.4,*а*). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k=R$, то

$$I_C = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k\right) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца $I_C = MR^2$.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы M и радиуса R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса R и массы M. Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz, перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис.5,*а*). Для этого выделим элементарное кольцо радиуса r и ширины dr (рис.5,*б*).

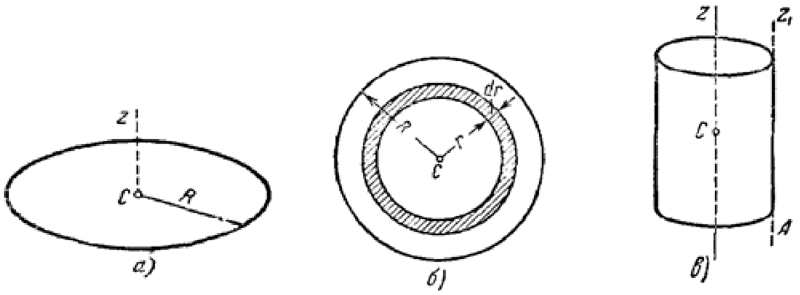


Рис.5

Площадь этого кольца равна $2\pi r dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r dr$, где $\rho_2 = M/\pi R^2$- масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет

$$dL_C = r^2 dm = 2\pi\rho_2 r^3 dr,$$

а для всей пластины $I_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4$. Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно $I_C = \frac{1}{2}MR^2$.

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции I_z однородного круглого цилиндра массы M и радиуса R относительно его оси Oz (рис.5,*в*).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел:

а) сплошная прямоугольная пластина массы M со сторонами $AB = a$ и $BD = b$ (ось x направлена вдоль стороны AB, ось y - вдоль BD):

$$I_X = \frac{1}{3}Mb^2, \quad I_Y = \frac{1}{3}Ma^2,$$

б) прямой сплошной круглый конус массы M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$I_z = 0{,}3MR^2$;

г) сплошной шар массы M и радиуса R (ось z направлена вдоль диаметра): $I_z = 0{,}4MR^2$.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

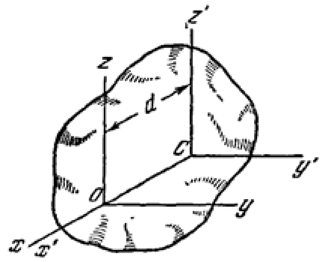


Рис.6

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' - оси $Oxyz$, такие, что $Oy \| Cy'$, $Oz \| Cz'$ (рис.6). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. Тогда

$$I_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$
$$I_{Cz'} = \sum {x'_k}^2 + \sum {y'_k}^2,$$

но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x'_k - d$ или $x_k^2 = {x'_k}^2 + d^2 - 2x'_k d$, а $y_k = y'_k$. Подставляя эти значения x_k, y_k, в выражение для I_{Oz} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$I_{Oz} = \sum m_k \left({x'_k}^2 + {y'_k}^2\right) + \left(\sum m_k\right) d^2 - 2d\left(\sum m_k x'_k\right).$$

В правой части равенства первая сумма равна $I_{cz'}$, а вторая - массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул для координат центра масс $\sum m_k x'_k = M x'_c$.Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x'_k = 0$. Окончательно получаем:

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2.$$

Формула выражает следующую ***теорему Гюйгенса-Штейнера***:

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

Момент инерции тела относительно произвольной оси.

Найдем момент инерции тела относительно оси u, проходящей через некоторую точку O (рис. 7).

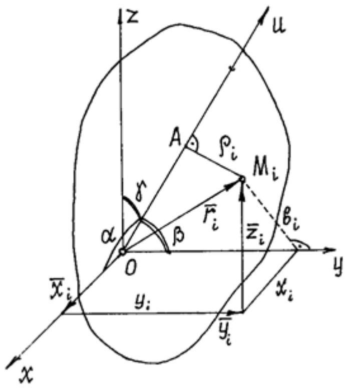


Рис.7

По определению момент инерции $I_u = \sum m_i \rho_i^2$.

Поместим в точку O начало координатных осей x, y, z. Из прямоугольного треугольника OAM_i следует $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$, где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. И так как радиус-вектор точки M_i: $\vec{r_i} = \vec{x_i} + \vec{y_i} + \vec{z_i}$, то, проектируя это равенство на ось u, получим $AO = x_i cos\alpha + y_i cos\beta + z_i cos\gamma$ (α, β, γ- углы между осью u и осями x, y, z).

Как известно из тригонометрии $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

Поэтому

$$\begin{gathered}\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2 = r_i^2(cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma) - \\ -(x_i cos\alpha + y_i cos\beta + z_i cos\gamma)^2 = \\ = x_i^2 cos^2\alpha + x_i^2 cos^2\beta + x_i^2 cos^2\gamma + y_i^2 cos^2\alpha + \\ + y_i^2 cos^2\beta + y_i^2 cos^2\gamma + z_i^2 cos^2\alpha + \\ + z_i^2 cos^2\beta + z_i^2 cos^2\gamma - x_i^2 cos^2\alpha - \\ - y_i^2 cos^2\beta - z_i^2 cos^2\gamma - 2x_i y_i cos\alpha cos\beta - \\ - 2y_i z_i cos\beta cos\gamma - 2x_i z_i cos\alpha cos\gamma.\end{gathered}$$

И, группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов, получим:

$$\begin{gathered}\rho_i^2 = \left(y_i^2 + z_i^2\right)cos^2\alpha + \left(x_i^2 + z_i^2\right)cos^2\beta + \\ + \left(x_i^2 + y_i^2\right)cos^2\gamma - 2x_i y_i cos\alpha cos\beta - \\ - 2y_i z_i cos\beta cos\gamma - 2x_i z_i cos\alpha cos\gamma.\end{gathered}$$

Но $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2$; $x_i^2 + z_i^2 = b_i^2$; $x_i^2 + y_i^2 = c_i^2$;

где a_i, b_i, c_i - расстояния от точки M_i до осей x, y, z, соответственно.

Поэтому

$$\begin{gathered}I_u = \sum m_i \rho_i^2 = \left(\sum m_i a_i^2\right) cos^2\alpha + \\ + \left(\sum m_i b_i^2\right) cos^2\beta + \left(\sum m_i c_i^2\right) cos^2\gamma - \\ -2\left(\sum m_i, x_i, y_y\right) cos\alpha cos\beta - 2\left(\sum m_i, y_i, z_y\right) cos\beta cos\gamma - \\ -2\left(\sum m_i, x_i, z_y\right) cos\alpha cos\gamma.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{или } I_u = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma - 2I_{xy} cos\alpha \cdot cos\beta - \\ -2I_{yz} cos\beta \cdot cos\gamma - 2I_{xz} cos\alpha \cdot cos\gamma, \qquad (2)\end{gathered}$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно осей координат; I_{xy}, J_{yz}, J_{xz} - ***центробежные моменты инерции*** относительно осей отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется ***главной осью инерции***. Например, если $J_{yz} = 0$ *и* $J_{xz} = 0$, то ось z – главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка O, от выбора начала координат, то обязательно надо указать для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс C, то все главные оси инерции называются ***главными центральными осями инерции.***

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (2) упрощается:

$$I_u = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma. \qquad (3)$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось z по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно отыскать точку с координатами ($-x_i$, $-y_i$, $-z_i$) и поэтому центробежные моменты инерции $I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ и $I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$. Значит ось z – главная ось инерции, и центральная ось, т.к. центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причём, эта ось будет главной для любой точки расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось перпендикулярная ей будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось z перпендикулярно плоскости симметрии из любой её точки O, назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно найти симметричную ей точку с координатами (x_i, y_i, $-z_i$). Поэтому центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} будут равны нулю. Значит ось z – главная ось инерции.

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

Для того чтобы тело, закрепленное на оси, привести во вращение или изменить угловую скорость его вращения, к телу необходимо приложить силу $\vec{F}$. При вращении тела результат действия силы зависит не только от ее значения, но и от того, на каком расстоянии от оси вращения и под каким углом она приложена.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной оси вращения называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы на эту силу $\vec{F}$ (рис.9):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Вектор $\vec{M}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта (рис.10). Модуль момента силы определяется выражением:

$$M = r \cdot F \cdot sin\alpha,$$

где r·sinα=h - плечо силы F; α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

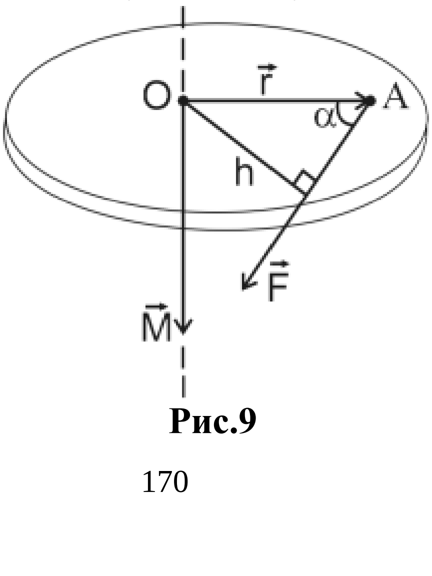


Рис.9

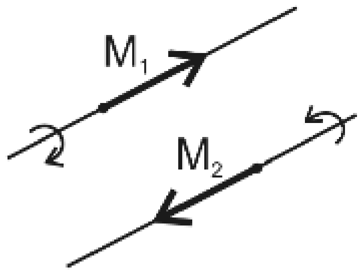


Рис. 10

Плечом силы *h* называют кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения (рис. 9). Таким образом, момент силы равен произведению силы на плечо этой силы:

$$M = F \cdot h \ [\text{Н}\cdot\text{м}].$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \text{ или } \vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Момент действующих на тело сил равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

Дифференциальные уравнения движения системы.

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через $\vec{F}_k^e$, а равнодействующую всех внутренних сил – через $\vec{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $\vec{a}_k$, то по основному закону динамики

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases}$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются ***дифференциальными уравнениями движения системы*** в векторной форме. Уравнения являются дифференциальными, так как $\vec{a}_k = \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$; входящие в правые части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью ***общих теорем*** динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

Общие теоремы динамики механической системы: теоремы о движении центра масс механической системы и об изменении количества движения, теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии, являются следствием основного уравнения динамики. Данные теоремы рассматривают не движение отдельных точек и тел, входящих в механическую систему, а некоторые интегральные характеристики, такие как движение центра масс механической системы, ее количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию. В результате из рассмотрения исключаются неизвестные внутренние силы, а в ряде случаев и реакции связей, что существенно упрощает решения задачи.

Теорема о движении центра масс.

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать как он будет кувыркаться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i. \qquad (1)$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C. \qquad (2)$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2},$$

или

$$\sum m_k\vec{a}_k = M\vec{a}_C. \qquad (3)$$

где $\vec{a}_C$- ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum\vec{F}_k^i = 0$, то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e. \qquad (4)$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: ***произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.*** Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: ***центр масс системы движется как материальная точка,***

масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum \vec{F}^{e}_{kx},\qquad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum \vec{F}^{e}_{ky},\qquad M\frac{d^2z_C}{dt^2}=\sum \vec{F}^{e}_{kz}.$$

Эти уравнения представляют **собою** ***дифференциальные уравнения движения центра масс*** в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что ***решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела,*** т.е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

- по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;
- по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;
- по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Так как ускорение центра масс равно нулю, $\vec{a}_C = 0$.

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то центр масс системы или не изменяет своего положения относительно данной оси, или движется относительно нее равномерно.

Например, если на тело начнут действовать две силы, образующие пару сил (рис.12), то центр масс *C* его будет двигаться по прежней траектории. А само тело будет вращаться вокруг центра масс. И неважно, где приложена пара сил.

Кстати, в статике мы доказывали, что действие пары на тело не зависит от того, где она приложена. Здесь мы показали, что вращение тела будет вокруг центральной оси *C*.

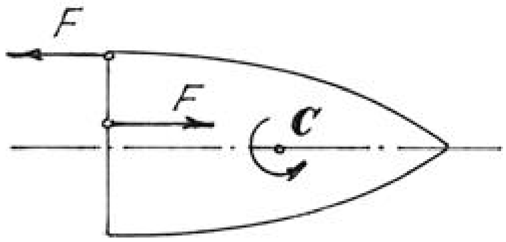


Рис.12

Теорема об изменении кинетического момента.

Кинетический момент механической системы $\vec{K}_0$ относительно неподвижного центра *O* является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применятся не сам вектор $\vec{K}_0$, а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например, K_z - кинетический момент системы относительно неподвижной оси *Oz* .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой m_k, имеющей скорость $\vec{V}_k$, кинетический момент относительно некоторой оси *Oz* определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z\left(m_k\vec{V}_k\right) = \vec{r}_k \times \left(m_k\vec{V}_k\right).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения $m_k\vec{V}_k$ рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений (рис.15)

$$m_k\vec{V}_k = m_k\vec{V}_{kr} + m_k\vec{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z(m_k\vec{V}_k) = m_z(m_k\vec{V}_{kr}) + m_z(m_k\vec{V}_{kв}).$$

Но $V_{kв} = \omega h_в$, где $h_в$ - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z(m_k\vec{V}_{kв}) = m_k\omega h_в \cdot h_в = m_k\omega h_в^2.$$

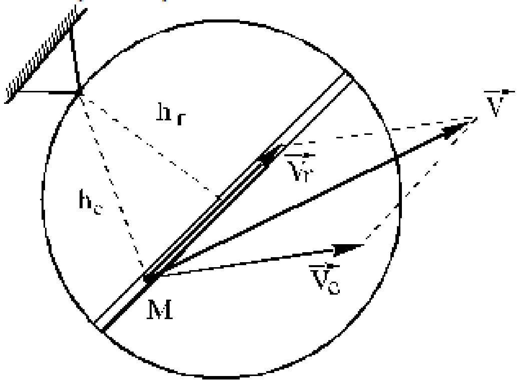


Рис. 15

Вторую составляющую вектора кинетического момента $m_z(m_k\vec{V}_{kr})$ можно определить так же, как и момент силы относительно оси. Как и для момента силы, величина $m_z(m_k\vec{V}_{kr})$ равна нулю, если вектор относительной скорости лежит в одной плоскости с осью переносного вращения.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра можно определить как сумму двух составляющих: первая из них характеризует поступательную часть движения тела вместе с его центром масс, вторая - движение системы вокруг центра масс:

$$\vec{K}_0 = \vec{m}_0(M\vec{V}_C) + \vec{K}_{rC}.$$

Если тело совершает поступательное движение, то вторая составляющая равна нулю

$$\vec{K}_{rC} = 0.$$

Наиболее просто вычисляется кинетической момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси

$$K_z = I_z\omega,$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ее движении вокруг неподвижного центра формулируется следующим образом: ***полная производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра О по величине и направлению равна главному моменту внешних сил, приложенных к механической системе, определенному относительно того же центра***

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^в,$$

где $\vec{M}_0^в = \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_o(\vec{F}_k^в) = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \vec{F}_k^в$ - главный момент всех внешних сил относительно центра O.

При решении задач, в которых рассматриваются тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси, используют теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^e).$$

Как и для теоремы о движении центра масс, теорема об изменении кинетического момента имеет следствия.

Следствие 1. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается неизменным.

Следствие 2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается неизменным.

Теорема об изменении кинетического момента применяется для решения задач, в которых рассматривается движение механической системы, состоящей из центрального тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и одного или нескольких тел, движение которых связано с центральным.. Связь может осуществляться при помощи нитей, тела могут перемещаться по поверхности центрального тела или в его каналах за счет внутренних сил. С помощью данной теоремы можно определить зависимость закона вращения центрального тела от положения или движения остальных тел.

Закон сохранения движения центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \vec{F}_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$ следует, что $\vec{a}_C = 0$ или $\vec{V}_C = const$. Следовательно, ***если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно.*** В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось *Ox)* равна нулю:

$$\sum \vec{F}_{kx}^e = 0.$$

Тогда уравнение $M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum \vec{F}_{kx}^e$, дает: $\frac{d^2x_C}{dt^2} = 0$ или $\frac{dx_C}{dt} = V_{CX} = const$.

Следовательно, если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. В частности, если в начальный момент $V_{CX} = 0$, то и в любой последующий момент $V_{CX} = 0$, т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси *Ox* перемещаться не будет ($x_C = const$).

Все эти результаты выражают собою ***закон сохранения движения центра масс системы***. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

б) Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$, то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю $(\vec{F} + \vec{F}' = 0)$. Следовательно, центр масс C тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось Ox всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ($x_C = const$).

Если, например, человек вынесет правую ногу вперед, то левая его нога скользнет назад, а общий центр масс останется на месте.

При наличии же трения скольжению левой ноги назад будет препятствовать сила трения, которая в этом случае будет направлена ***вперед.*** Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия (в данном случае вперед).

Аналогично происходит движение паровоза или автомобиля. Сила давления пара или газа в двигателе является силой внутренней и сама но себе не может переместить центр масс системы. Движение происходит потому, что двигатель передает соответствующим колесам, называемыми ведущими, вращающий момент. При этом точка касания B ведущего колеса (рис.20) стремится скользить влево. Тогда на колесо будет действовать сила трения, направленная вправо. Эта внешняя сила и позволит центру тяжести паровоза или автомобиля двигаться вправо. Когда этой силы нет или когда она недостаточна для преодоления сопротивления, испытываемого ведомыми колесами, движения вправо не будет; ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

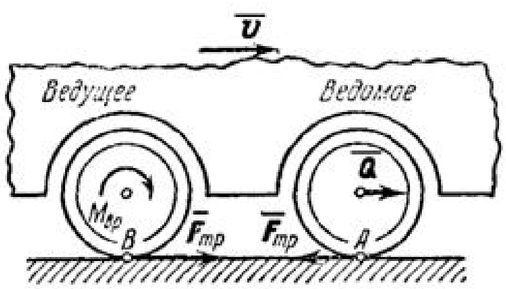


Рис.20

ЛЕКЦИИ 16. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ; ИЗМЕНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ; ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ.

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Количество движения системы (импульс системы).
2. Теорема об изменении количества движения (импульса).
3. Закон сохранения количества движения (импульса).
4. Главный момент количеств движения (импульса) системы.
5. Теорема моментов.
6. Закон сохранения главного момента количеств движения (импульса).

Изучение данных вопросов необходимо для динамики колебательного движения механической системы, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

В предыдущих лекциях излагались методы определения движения материальной системы, которые сводились к составлению дифференциальных уравнений, как правило, второго порядка. И решение их оказывалось не всегда простым.

Если ввести новые обобщенные понятия, характеризующие свойства и движение системы в целом, то эти трудности нередко можно обойти. К ним относятся понятия о центре масс и кинетической энергии, которые уже нам знакомы, понятия о количестве движения материальной системы и моменте количества движения.

Теоремы, определяющие изменение этих характеристик, позволяют получить более полное представление о движении материальной системы.

Количество движения системы (импульс системы).

Количество движения (импульс тела) – векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{V}\ \left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right].$$

Импульс (количество движения) – одна из самых фундаментальных характеристик движения тела или системы тел.

Запишем II закон Ньютона в другой форме, учитывая, что ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$. Тогда $\vec{F} = \frac{md\vec{V}}{dt}$; $\vec{F}\cdot dt = d(m\vec{V})$, следовательно

$$\vec{F}\cdot dt = d\vec{p}.$$

Произведение силы на время ее действия равно приращению импульса тела (рис. 1):

$$\vec{F}\cdot\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

Где $\vec{F}\cdot\Delta t$ - импульс силы, который показывает, что результат действия силы зависит не только от ее значения, но и от продолжительности ее действия.

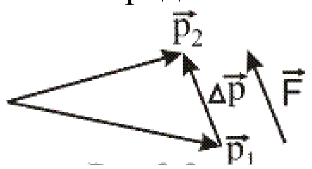


Рис.1

Количеством движения системы (импульсом) будем называть векторную величину $\vec{Q}$, равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения (импульсов) всех точек системы (рис.2):

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k$$

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор $\vec{Q}$ может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов $m_k \vec{V}_k$, замкнется. Следовательно, по величине $\vec{Q}$ нельзя полностью судить о характере движения системы.

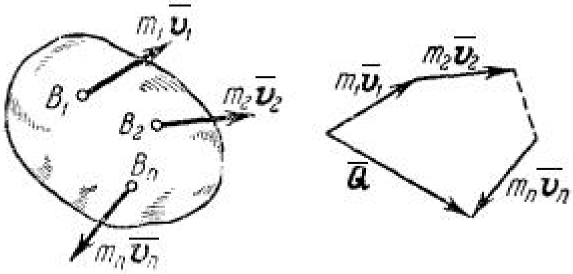


Рис.2

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину $\vec{Q}$, а также уяснить ее смысл.

Из равенства

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$

следует, что

$$\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C.$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M\frac{d\vec{r}_C}{dt} \text{ или } \sum m_k \vec{V}_k = M\vec{V}_C.$$

Отсюда находим, что $\vec{Q} = M\vec{V}_C$

т.е. ***количество движения (импульс) системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.*** Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина $\vec{Q}$ не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $\vec{Q} = M\vec{V}_C$ независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C.

Таким образом, ***количество движения характеризует только поступательное движение системы.*** При сложном же движении величина $\vec{Q}$ характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

Теорема об изменении количества движения (импульса).

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k\vec{a}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k\vec{V}_k\right) = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_k\vec{V}_k\right) = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения (импульса) системы в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения (импульса) системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил***. В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_X}{dt} = \sum \vec{F}_{kx}^e, \quad \frac{dQ_Y}{dt} = \sum \vec{F}_{ky}^e, \quad \frac{dQ_Z}{dt} = \sum \vec{F}_{kz}^e.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент t=0 количество движения системы равно $\vec{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\vec{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ на *dt* и интегрируя, получим:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt$$

или

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: ***изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.***

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum S_{kz}^e.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\vec{Q} = M\vec{V}_C$ то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что $\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{a}_C$, мы получим $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$.

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

Закон сохранения количества движения (закон сохранения импульса).

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на замкнутую систему, равна нулю:

$$\sum F_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum F_k^e$ следует, что Q=$\sum m_k \vec{V}_k$=const. Таким образом, ***если сумма всех внешних сил, действующих на замкнутую систему, равна нулю, то вектор количества движения (импульса) системы будет постоянен по модулю и направлению.***

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например *Ox*) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dQx}{dt} = \sum F_{kx}^e$ следует, что при этом Q_x=const. Таким образом, ***если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения (импульса) системы на эту ось есть величина постоянная.***

Эти результаты и выражают ***закон сохранения количества движения системы:*** *при любом характере взаимодействия тел, образующих замкнутую систему, вектор полного импульса этой системы все время остается постоянным.*

Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут.

Закон сохранения полного импульса изолированной системы – это универсальный закон природы. В более общем случае, когда система незамкнута, из $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ следует, что полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил.

Рассмотрим некоторые примеры:

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т.е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета - продукты горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед.

Главный момент количеств движения (импульса) системы.

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра O называется величина $\vec{L}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.

$$\vec{L}_0 = \sum m_0(m_k\vec{V}_k).$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$L_X = \sum m_X(m_k\vec{V}_k), \qquad L_Y = \sum m_Y(m_k\vec{V}_k), \qquad L_Z = \sum m_Z(m_k\vec{V}_k).$$

При этом L_X, L_Y, L_Z представляют собою одновременно проекции вектора $\vec{L}_0$ на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, ***главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.***

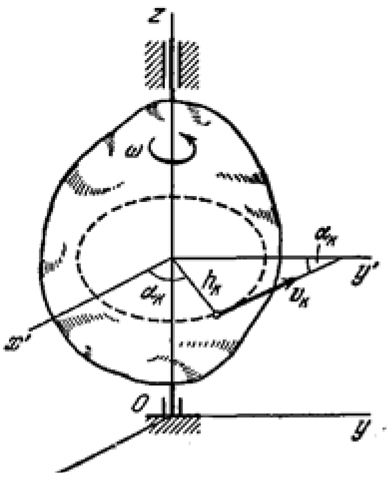


Рис.6

Чтобы уяснить механический смысл величины L_0 и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис.6). При этом, как обычно, определение вектора $\vec{L}_0$ сводится к определению его проекций L_X, L_Y, L_Z.

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину L_z, т.е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k, скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_k(m_k\vec{V}_k) = m_k V_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$L_Z = \sum m_Z(m_k\vec{V}_k) = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z. Окончательно находим

$$L_Z = I_Z \omega.$$

Таким образом, ***кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.***

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет

$$L_Z = I_{1Z}\omega_1 + I_{2Z}\omega_2 + \cdots + I_{nZ}\omega_n.$$

Легко видеть аналогию между формулами $\vec{Q} = M\vec{V}_C$ и $L_Z = I_Z\omega$: количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов).

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)] = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i),$$

где $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ - равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)] = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e).$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси *Oxyz* , получим:

$$\frac{dL_X}{dt} = \sum \vec{m}_X(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_Y}{dt} = \sum \vec{m}_Y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dL_Z}{dt} = \sum \vec{m}_Z(\vec{F}_k^e).$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная - с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Закон сохранения главного момента количеств движения (импульса).

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра *O* всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом $\vec{L}_0 = const$. Таким образом, ***если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный, момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.***

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси *Oz* равна нулю:

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dL_Z}{dt} = \sum \vec{m}_Z(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом L_z = const. Таким образом, ***если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.***

Эти результаты выражают собою ***закон сохранения главного момента количеств движения системы.*** Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

Закон сохранения момента количеств движения (импульса) лежит в основе работы гироскопа – устройства, широко применяющегося в навигационных приборах для автоматического управления движением тел – «автопилот», и во многих других устройствах навигации и управления.

Случай вращающейся системы.

Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси *Oz*. Тогда $L_Z = I_Z\omega$. Если в этом случае $\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0$, то

$$I_Z\omega = const.$$

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система ***неизменяема*** (абсолютно твердое тело), то $I_Z = const$ и, следовательно, $\omega = const$, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система ***изменяема***, то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение I_Z, или приближаться к оси, что приведет к уменьшению I_Z. Но поскольку $I_Z\omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции - увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство K_z не означает вообще постоянства ω.

Рассмотрим некоторые примеры:

а) ***Опыты с платформой Жуковского.*** Для демонстрации закона сохранения момента количеств движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси *z*. Для человека, стоящего на такой платформе,

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0.$$

и, следовательно, $I_Z\omega = const$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина I_Z уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ($K_z=0$), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина K_z системы осталась равной нулю.

б) ***Раскачивание качелей***. Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0, человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения *z*, величина I_Z уменьшается, и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0. В правом верхнем положении, когда $\omega = 0$, человек опять приседает (на величине ω это, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т.д. В результате размахи качелей будут возрастать.

в) ***Реактивный момент винта.*** Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз, но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количеств движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом остаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют ***реактивным моментом.***

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

Геометрический способ.

Учитывая, что векторы можно складывать по правилу параллелограмма, то, в соответствии с формулой (1), импульсы осколков являются сторонами параллелограмма, а импульс снаряда - его диагональю. По условию задачи известны направления импульсов снаряда (горизонтальное) и первого осколка (вертикальное).

Из рисунка видно, что для нахождения скорости второго осколка можно применить теорему Пифагора:

$$(m_2 v_2)^2 = (mv)^2 + (m_1 v_1)^2,$$

Откуда

$$v_2 = \frac{\sqrt{(mv)^2 + (m_1 v_1)^2}}{m_2}.$$

Учитывая, что $m_1=m_2=m/2$ и $v_1=v/2$, приходим к окончательному результату:

$$v_2 = \sqrt{4v^2 + \frac{v^2}{4}} = v\frac{\sqrt{17}}{2} = 2{,}06v.$$

Из рис.6.5 легко определяется направление вектора скорости:

$$tg\alpha = \frac{m_1 v_1}{mv} = \frac{1}{4},$$

т.е. второй осколок движется под углом $\alpha = 14°$ к горизонту.

Метод проектирования на оси координат.

Запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат:

$$\Sigma x=0: \quad mv=m_2 \cdot v_{2x},$$

$$\Sigma y=0: \quad 0=-m_1 v_1+m_2 \cdot v_{2y}.$$

откуда выразим проекции скорости второго осколка:

$$v_{2x} = \frac{mv}{m_2} = 2v,$$

$$v_{2y} = v_1 = v/2.$$

По теореме Пифагора находим скорость

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{4v^2 + \frac{v^2}{4}} = v\frac{\sqrt{17}}{2} = 2{,}06v.$$

тангенс угла наклона вектора скорости к оси *x*

$$tg\alpha = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{1}{4}.$$

ЛЕКЦИИ 17. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Кинетическая энергия системы. Теорема Кенига.
2. Некоторые случаи вычисления работы.
3. Теорема об изменении кинетической энергии системы.
4. Закон сохранения механической энергии.
5. Методические указания по решению задач с применением законов сохранения.

Изучение данных вопросов необходимо для динамики колебательного движения механической системы, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Кинетическая энергия системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина Т, равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$W_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$W_k = \sum W_{ki}.$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. ***Поступательное движение.*** В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. То есть, для любой точки $V_i=V_C$

$$W_k^{\text{пост}} = \sum \frac{m_i V_C^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) V_C^2.$$

или

$$W_k^{\text{пост}} = \frac{1}{2} M V_C^2.$$

Таким образом, ***кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.*** От направления движения значение *T* не зависит.

2. ***Вращательное движение.*** Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси *Oz* (см. рис.1), то скорость любой его точки $V_i = \omega h_i$, где h_i- расстояние точки от оси вращения, а ω- угловая скорость тела. Подставляя это значение и вынося общие множители за скобку, получим:

$$W_k^{\text{вращ}} = \sum \frac{m_i \omega^2 h_i^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i h_i^2\right)\omega^2.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, окончательно найдем:

$$W_k^{вращ} = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

т.е. ***кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.*** От направления вращения значение T не зависит.

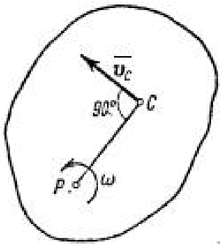


Рис.1

При вращении тела вокруг неподвижной точки кинетическая энергия определяется как (рис.2)

$$W_k^{вращ} = \frac{1}{2}[I_x(\omega cos\alpha)^2 + I_y(\omega cos\beta)^2 + I_z(\omega cos\gamma)^2]$$

или, окончательно,

$$W_k^{вращ} = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

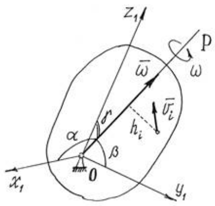


Рис.2

3. ***Плоскопараллельное движение.*** При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис.1). Следовательно

$$W_k^{плоск} = \frac{1}{2} I_p \omega^2,$$

где I_p- момент инерции тела относительно названной выше оси, ω- угловая скорость тела. Величина I_p в формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо I_p постоянный момент инерции I_C, относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса-Штейнера $I_p = I_C + Md^2$, где d=PC. Подставим это выражение для I_p. Учитывая, что точка P - мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = V_C$, где V_C- скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$W_k^{плоск} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4) Для самого ***общего случая движения*** материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить ***теорема Кенига.***

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис.3). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1. Тогда скорость точек $\vec{V}_i = \vec{V}_{ei} + \vec{V}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны $\vec{V}_C$. Значит, $\vec{V}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_{ri}$ и кинетическая энергия будет

$$W_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{V}_C + \vec{V}_{ri})^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(V_C^2 + 2\vec{V}_C\cdot\vec{V}_{ri} + V_{ri}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum m_i V_C^2 + \sum m_i \vec{V}_C \vec{V}_{ri} + \frac{1}{2}\sum m_i V_{ri}^2 = \frac{1}{2}MV_C^2 + \vec{V}_C\cdot\sum m_i\vec{V}_{ri} + W_r.$$

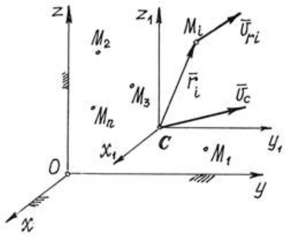


Рис.3

По определению центра масс его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{V}_{ri} = 0.$$

Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$W_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + W_r. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс C и относительного – вращения вокруг точки C), по теореме Кенига (1) получим

$$W_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2 \quad \text{или} \quad W_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – главные центральные оси инерции тела.

Некоторые случаи вычисления работы.

1) ***Работа сил тяжести, действующих на систему.*** Работа силы тяжести, действующей на частицу весом p_k, будет равна $p_k(z_{k0} - z_{k1})$, где z_{k0} и z_{k1}- координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum p_k z_{k0} - \sum p_k z_{k1} = P(z_{C0} - z_{C1}) = \pm P h_C,$$

где P - вес системы, h_C- вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, ***работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей Р на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.***

2) ***Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.*** Элементарная работа приложенной к телу силы F (рис.4) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

так как $ds = hd\varphi,$ где $d\varphi$- угол поворота тела.

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_z(\vec{F})$. Будем называть величину $M_z = m_z(\vec{F})$ ***вращающим моментом***. Тогда получим: $dA = M_z d\varphi$.

Следовательно, в рассматриваемом случае ***элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота***. Формула справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_z = m_z(\vec{F}_k)$.

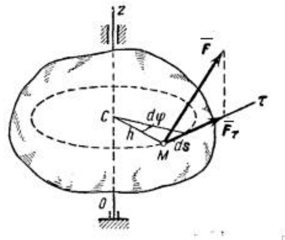


Рис.4

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z \, d\varphi,$$

а в случае постоянного момента (M_z=const)

$$A = M_z \varphi_1.$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси Oz, то Mz будет, очевидно, означать момент этой пары.

Работа, затрачиваемая на изменение скорости вращения, равна изменению кинетической энергии тела:

$$A = \Delta W_к = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность

$$W = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\phi}{dt} = M_z \omega.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело ***мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.*** При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

Если тело катится по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения (рис.5):

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\omega^2 I}{2}.$$

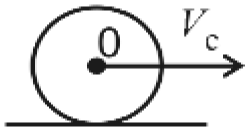


Рис.5

3) ***Работа сил трения, действующих на катящееся тело***. На колесо радиуса *R* (рис.6), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения *F* , препятствующая скольжению точки касания *B* вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = -F_{TP}ds_B$. Но точка *B* в данном случае является мгновенным центром скоростей и V_B=0. Так как $ds_B = V_B dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения dA=0.

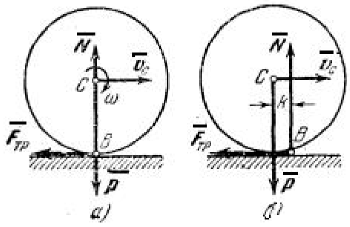


Рис.6

Следовательно, ***при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.*** По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции *N*, если считать тела недеформируемыми и силу *N* приложенной в точке *B* (как на рис.6,*а)*.

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис.6,б), создает пару $(\vec{N}, \vec{P})$, момент которой M=kN, где *k*- коэффициент трения качения. Тогда учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi = \frac{ds_R}{R}$, получим:

$$dA^{\text{КАЧ}} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R}Nds_C,$$

где ds_C- элементарное перемещение центра *C* колеса.

Если *N*= const, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A^{\text{КАЧ}} = -kNd\varphi_1 = -\frac{k}{R}Ns_C.$$

Так как величина k/R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_i, имеющую скорость V_i, то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^k,$$

где dA_i^e и dA_i^k- элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \sum dA_i^e + \sum dA_i^k,$$

или

$$dW_k = \sum dA_i^e + \sum dA_i^k. \qquad (2)$$

Равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если полученное выражение отнести к элементарному промежутку времени, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, можно получить вторую формулировку для дифференциальной формы теоремы: производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних (N^e) и внутренних (N^k) сил, т.е.

$$\frac{dW_k}{dt} = N^e + N^k.$$

Дифференциальными формами теоремы об изменении кинетической энергии можно воспользоваться для составления дифференциальных уравнений движения, но это делается достаточно редко, потому что есть более удобные приемы.

Проинтегрировав обе части равенства (2) в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1, будем иметь

$$W_{k1} - W_{ko} = \sum A_i^e + \sum A_i^k.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: ***изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.***

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях не исключаются. В самом деле, если $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$ - силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (см. рис.6), то $\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0$. Но при этом точка B_1, может перемещаться по направлению к B_2, а точка B_2- по направлению к B_1. Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. Примером может служить явление отката. Внутренние силы (силы давления), действующие и на снаряд и на откатывающиеся части, совершают здесь положительную работу. Сумма этих работ, не равная нулю, и изменяет кинетическую энергию системы от величины $W_{k0}=0$ в начале выстрела до величины $W_{k1}= W_{kСНАР}+ W_{kОТК}$ конце.

Другой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, не упругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволит исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) ***Неизменяемая система. Неизменяемой*** будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

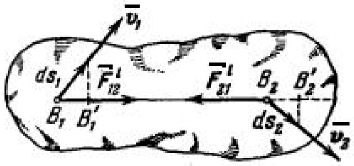


Рис.9

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис.9), действующие друг на друга с силами $\vec{F}^i_{12}$ и $\vec{F}^i_{21}$ ($\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$) имеют в данный момент скорости $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Тогда за промежуток времени dt эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, направленные вдоль векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Но так как отрезок B_1B_2 является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$,а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка B_1B_2 будут равны друг другу, т.е. $B_1B_1' = B_2B_2'$. Тогда элементарные работы сил $\vec{F}^i_{12}$ и $\vec{F}^i_{21}$ будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что ***для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю*** и уравнения принимают вид

$$dW_k = \sum dA^e_i \quad \text{или} \quad W_{k1} - W_{k0} = \sum A^e_i.$$

2) ***Система с идеальными связями.*** Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на ***активные*** **и** ***реакции связей***. Тогда

$$dW_k = \sum dA^a_i + \sum dA^r_i,$$

где dA^a_i- элементарная работа действующих на k-ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA^r_i- элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA^r_i = 0.$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют ***идеальными***. Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dW_k = \sum dA_i^a \text{ или } W_{k1} - W_{k0} = \sum A_i^a.$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних ***активных сил.***

Механическая система называется ***консервативной*** (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется), если для нее имеет место интеграл энергии

$$W = W_К + W_П = \text{const} \text{ или } \frac{dW}{dt} = 0. \qquad (3)$$

Это есть ***закон сохранения механической энергии: при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной.***

Или

В замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела к другому, но ее общее количество остается неизменным.

Это один из фундаментальных законов природы. Он подтверждает положение материализма о том, что движение является неотъемлемой частью материи, что оно неуничтожимо, а лишь преобразуется из одной формы в другую. Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением какого-либо другого вида энергии.

Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

Механическая система будет консервативной, если действующие на нее силы потенциальны, например сила тяжести, силы упругости. В консервативных механических системах с помощью интеграла энергии можно проводить проверку правильности составления дифференциальных уравнений движения. Если система консервативна, а условие (3) не выполняется, значит при составлении уравнений движения допущена ошибка.

В замкнутой системе тел, силы взаимодействия в которой консервативные, взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Такие системы называются **замкнутыми консервативными системами**.

Интегралом энергии можно воспользоваться для проверки правильности составления уравнений и другим способом, без вычисления производной. Для этого следует после проведения численного интегрирования уравнений движения вычислить значение полной механической энергии для двух различных моментов времени, например, начального и конечного. Если разница значений окажется сопоставимой с погрешностями вычислений, это будет свидетельствовать о правильности используемых уравнений.

ЛЕКЦИИ 18. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной лекции рассматриваются следующие вопросы:

1. Неинерциальные системы отсчета.
2. Силы инерции при поступательном движении.
3. Центробежная сила инерции.
4. Сила Кориолиса.
5. Принцип Даламбера.
6. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела.
7. Вращательное движение твердого тела.
8. Физический маятник.
9. Плоскопараллельное движение твердого тела.
10. Сложное движение твердого тела и системы тел.
11. Движение тела с переменной массой.
12. Совместное применение законов динамики и методов решения кинематических задач.
13. Совместное применение законов динамики и законов сохранения. Выбор способа решения.

Изучение данных вопросов необходимо для изучения демпферов в дисциплине «Детали машин», для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов».

Неинерциальные системы отсчета.

До сих пор движение тела рассматривалось по отношению к какой-либо одной из бесчисленного множества инерциальных систем отсчета. В такой системе отсчета основным уравнением движения тела является уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело движется с одинаковым ускорением $\vec{a}_{\text{ин}}$. Поставим теперь задачу найти уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, т.е. таких системах, в которых первый закон Ньютона не выполняется.

Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета $\vec{a}_{\text{не}}$ будет отлично от $\vec{a}_{\text{ин}}$.

Обозначим разность ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах символом $\vec{a}$:

$$\vec{a}_{\text{ин}} - \vec{a}_{\text{не}} = \vec{a}. \qquad (2)$$

В частном случае, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной поступательно, ускорение тела $\vec{a}$ одинаково для всех точек пространства ($\vec{a}$=const) и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчета.

Систему отсчета, связанную с Землей, приближенно можно считать инерциальной при решении большинства задач.

Силы инерции при поступательном движении.

Ускорение точки в неинерциальной системе отсчета можно в соответствии с (2) представить в виде:

$$\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{a}_{\text{не}} + \vec{a}. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в уравнение (1) и получим:

$$m\vec{a}_{\text{не}} = \vec{F} - m\vec{a}. \qquad (4)$$

Это и есть **уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета**. Если в неинерциальной системе отсчета определять силу как вектор, равный произведению массы материальной точки на ее ускорение в этой системе отсчета, то правая часть уравнения (6.4) и является силой, действующей на материальную точку, движущуюся ускоренно в неинерциальной системе отсчета. Эта сила слагается из двух существенно различных составляющих. Первая оставляющая $\vec{F}$ является результатом взаимодействия тел и проявляется в инерциальной системе отсчета.

Совсем иной характер имеет составляющая – $m\vec{a}$. Она возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения системы отсчета. Она называется **поступательной силой инерции**. При переходе к другой ускоренно движущейся системе отсчета меняются и силы инерции. Эти силы инерции отличаются от настоящих сил, возникающих при взаимодействии тел. Второе отличие состоит в том, что силы инерции не подчиняются закону действия и противодействия (третьему закону Ньютона).

При описании движения тел относительно ускоренно движущейся поступательно системы отсчета наряду с силами, обусловленными взаимодействием тел друг с другом, необходимо учитывать так называемые силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$. Эти силы следует полагать равными произведению массы тела на взятое с обратным знаком ускорение движущейся неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}. \qquad (5)$$

Соответственно, уравнение движения в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид

$$m\vec{a}_{\text{не}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}. \qquad (6)$$

Существует много явлений, которые могут быть интерпретированы как проявление силы инерции. Когда поезд набирает скорость, пассажиры в вагоне испытывают действие силы, направленной против движения поезда. Это и есть сила инерции. Силы инерции вызывают перегрузки, действующие на летчика при больших ускорениях самолета. Если в ускоренно движущемся вагоне висит шарик массы m, то сила инерции отклоняет его в сторону, противоположную ускорению (рис.1).

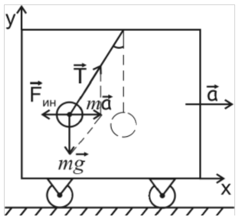


Рис.1

Нить отклоняется на такой угол, чтобы результирующая двух сил ($m\vec{g}+\vec{T}$) сообщала шарику ускорение $\vec{a}$, с которым движется вагон. Относительно системы отсчета, связанной с вагоном, шарик покоится. Это можно объяснить, если ввести силу инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, уравновешивающую результирующую двух сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$.

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

***Силы инерции имеют характерные особенности*:** они не отражают взаимодействие тел, а обусловлены характером неинерциальных систем отсчета, поэтому для сил инерции неприменим третий закон Ньютона. Характерным свойством сил инерции является их пропорциональность массе тела. Благодаря этому свойству силы инерции оказываются аналогичными силам тяготения. Движение тел под действием сил инерции сходно с движением в гравитационном поле. В качестве примера можно привести невесомость, возникающую в свободно падающем лифте. В свободно падающем лифте вес $\vec{G}$ тела массой *m* всегда равен нулю: $G_{не} = 0$.

Действительно:

$$\vec{G} = m\vec{g}; \qquad \vec{a} = \vec{g};$$

$$\vec{G}_{не} = \vec{G} + \vec{F}_{ин} = m\vec{g} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим силы инерции, возникающие во вращающихся системах отсчета.

Центробежная сила инерции.

Рассмотрим два случая проявления центробежной силы инерции.

Случай 1. Рассмотрим вращающийся диск с закрепленными на нем стойками с шариками, подвешенными на нитях (рис.2). При вращении диска с постоянной угловой скоростью ω шарики отклоняются на некоторый угол, тем больший, чем дальше он находится от оси вращения. Относительно инерциальной системы отсчета (неподвижной) все шарики движутся по окружности соответствующего радиуса *R*, при этом на шарики действует результирующая сила $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ (рис.3).

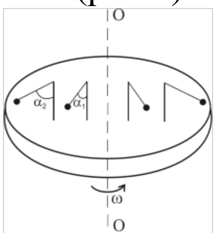


Рис.2

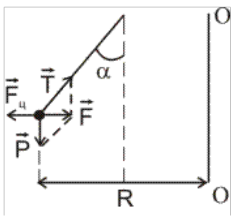


Рис.3

Согласно второму закону Ньютона

$$F = m \cdot a_n = m \cdot \omega^2 \cdot R, \qquad (8)$$

учитывая, что *F*/*P*=tgα, можно записать

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 R}{g},$$

т.е. угол отклонения шарика зависит от угловой скорости и от его удаления от оси вращения диска.

Относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик находится в покое.

Это возможно в том случае, если сила $\vec{F}$ (8) уравновешена силой инерции $\vec{F}_ц$, называемой **центробежной силой инерции**:

$$F_ц = -F = -m\omega^2 R. \qquad (9)$$

Случай 2. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси *z* с угловой скоростью ω. Вместе с диском вращается надетый на тонкую спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной (рис. 4).

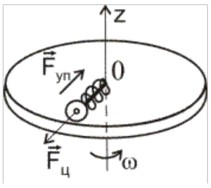


Рис.4

Шарик занимает на стержне некоторое положение, при котором сила натяжения пружины $\vec{F}_{кп}$ (она будет центростремительной) оказывается равной произведению массы шарика *m* на его ускорение:

$$F_{уп} = m\omega^2 r, \qquad (10)$$

где $\omega^2 r = a_n$ – нормальное ускорение на шарике; *r* – расстояние от оси вращения до центра шарика.

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится. Это формально можно объяснить тем, что кроме силы упругости на шарик действует сила инерции, модуль которой равен силе упругости (7):

$$F_ц = -m\omega^2 r, \qquad (11)$$

Сила инерции $\vec{F}_ц$ направлена вдоль радиуса от центра диска. Силу инерции (8), возникающую в равномерно вращающейся системе отсчета, называют **центробежной силой инерции**. Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчета, независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью $\vec{V}$. Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризовать радиус-вектором $\vec{r}$, то центробежную силу можно представить в виде

$$\vec{F}_ц = -m\omega^2 \vec{r}_\perp, \qquad (12)$$

где $\vec{r}_\perp$ – компонента радиус-вектора, направленная перпендикулярно оси вращения.

Центробежные силы, как и всякие силы инерции, **существуют только в ускоренно движущихся** (вращающихся) **системах отсчета** и исчезают при переходе к инерциальным системам отсчета.

Действию центробежной силы подвергается, например, пассажир в движущемся автобусе на поворотах. Если в центробежной машине подвесить на нитях несколько шариков и привести машину в быстрое вращение, то центробежные силы инерции отклонят шарики от оси вращения. Угол отклонения тем больше, чем дальше шарик отстоит от оси. Центробежные силы используются в центробежных сушилках для отжима белья, в сепараторах для отделения сливок от молока, в центробежных насосах, центробежных регуляторах и т.д. Их надо учитывать при проектировании быстровращающихся деталей механизмов.

Сила Кориолиса.

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы, появляется еще одна сила, называемая **силой Кориолиса**.

Рассмотрим рис.5. Шарик массой m движется прямолинейно со скоростью $\vec{V}$ от центра к краю диска. Если диск неподвижен, то шарик попадает в точку M, а если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω, то шарик попадает в точку N. Это обусловлено тем, что на шарик действует сила Кориолиса.

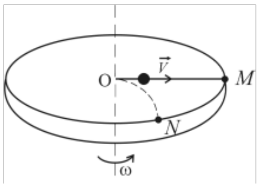


Рис.5

Появление силы Кориолиса можно обнаружить, если рассмотреть пример с шариком на спице на вращающемся диске, но без пружины. Для того чтобы заставить шарик двигаться с некоторой скоростью $\vec{V}$ вдоль спицы, необходима боковая сила. Шарик вращается вместе с диском с постоянной угловой скоростью ω, поэтому его момент импульса равен:

$$L = mv_\tau r = m\omega^2 r. \qquad (13)$$

Если шарик будет перемещаться вдоль спицы с постоянной скоростью $\vec{V}^{|}$, то с изменением $\vec{r}_\perp$ момент импульса шарика изменится. А это означает, что на движущееся во вращающейся системе тело должен действовать некоторый момент силы, который согласно основному уравнению динамики вращательного движения равен

$$M = F_1 r_1,$$

$$r^{|} = \frac{dz}{dt} = \frac{d(m\omega r_1^2)}{dt} = 2m\omega r^{|}\frac{dz^{|}}{dt}.$$

Для того чтобы заставить шарик двигаться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой со скоростью $v^{|} = \frac{dz^{|}}{dt}$, необходимо прилагать боковую силу

$$F_\perp = \frac{M}{r^{|}} = 2m\omega v,$$

направленную перпендикулярно $r^{|}$. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной скоростью.

Это можно объяснить тем, что сила $F_\perp$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\vec{F}_k$, перпендикулярной к скорости $\vec{V}^{|}$ (рис.6). Сила $\vec{F}_k$ и есть Кориолисова сила инерции. Она определяется выражением

$$F_k = F_1 = 2m\omega v^{|}. \qquad (14)$$

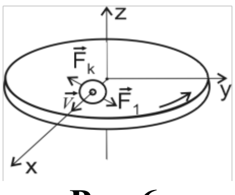


Рис.6

С учетом направления силу Кориолиса $\vec{F}_k$ можно представить в виде

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \qquad (15)$$

Сила Кориолиса всегда перпендикулярна скорости тела $\vec{V}$. Во вращающейся системе отсчета при $\vec{V} = 0$ эта сила отсутствует. Таким образом, Кориолисова сила инерции возникает только тогда, когда система отсчета вращается, а тело движется относительно этой системы. Действием силы Кориолиса объясняется ряд эффектов, наблюдающихся на поверхности Земли, например, поворот плоскости колебаний маятника Фуко относительно Земли, отклонение к востоку от линии отвеса свободно падающих тел, размытие правого берега рек в северном полушарии и левого в южном, неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении.

Принцип Даламбера.

Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако, этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящих из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерционной системе отсчета некоторое ускорение $\vec{a}_k$.

Введем в рассмотрение величину

$$\vec{F}_k^u = -m_k\vec{a}_k,$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки (иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ прибавить силу инерции $\vec{F}_k^u$, то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u = 0.$$

Это выражение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$. Перенося здесь член $m_k\vec{a}_k$ в правую часть равенства и придем к последнему соотношению.

Повторяя проделанные высшее рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы**: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.***

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; что делает единообразный подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчёты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что на точку механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние и внутренние силы $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$, возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями $\vec{a}_k$. Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки не действуют (иначе, эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции - это лишь приём, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систебму. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\begin{cases} \sum(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u) = 0; \\ \sum[\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^u)] = 0 \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$\vec{R}^u = \sum \vec{F}_k^u,\ \vec{M}_0^u = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^u).$$

Величины $\vec{R}^u$ и $\vec{M}_0^u$ представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции. В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств:

$$\vec{R}^u + \sum \vec{F}_k^e = 0,\ \vec{M}_0^u + \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = 0. \qquad (16)$$

Применение уравнений (16), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, т.к. эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на оси координат эти равенства дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерций.

Главный вектор и главный момент сил инерции твёрдого тела.

Система сил инерции твёрдого тела можно заменить одной силой, равной $\vec{R}^u$ и приложенной в центре *O*, и парой с моментом, равным $\vec{M}_O^u$. Главный вектор системы сил, как известно, не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее. Т.к. $\vec{F}_k^u = -m_k \cdot \vec{a}_k$, то

$$\vec{R}^u = -\sum m_k \cdot \vec{a}_k = -M\vec{a}_c. \qquad (17)$$

Следовательно, ***главный вектор сил инерции тела,*** совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, т.е. он не зависит от выбора этой точки.

Если ускорение $\vec{a}_c$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\vec{R}^u$ разложиться на составляющие

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_{c\tau}, \qquad \vec{R}^u = -M\vec{a}_{cn}.$$

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Поступательное движение. В этом случае тело никакого вращения вокруг центра масс *C* не имеет. Отсюда заключаем, что $\sum \vec{m}_c(\vec{F}_k^e) = 0$, и равенство (1) даёт $M_c^u = 0$.

Следовательно, при поступательном движении силы инерции твёрдого тела приводят к одной равнодействующей, равной $\vec{R}^u$ и проходящей через центр масс тела.

2. Плоскопараллельное движение. Пусть тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Вследствие симметрии главный вектор и результирующая пара сил инерции, так же как и центр масс *C* тела, лежат в плоскости симметрии.

Тогда, помещая центр приведения в точке *C*, получим из равенства (16) $M_c^u = -\sum \vec{m}_c(\vec{F}_k^e)$. С другой стороны $\sum \vec{m}_c(\vec{F}_k^e) = J_c \cdot \varepsilon$. Отсюда заключаем, что

$$M_c^u = -I_c \cdot \varepsilon \qquad (18)$$

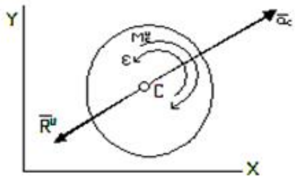


Рис.7

Таким образом, в рассмотренном случае движение системы сил инерции приводится к результирующей силе, равной $\vec{R}^u$ [формула (18)] и приложенной в центре масс *C* тела (рис.7), и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой определяется формулой (18). Знак минус в формуле показывает, что направление момента M_c^u противоположно направлению углового ускорения тела.

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Пусть опять тело имеет плоскость симметрии, а ось вращения *CZ* перпендикулярна к этой плоскости и проходит через центр масс тела. Тогда данный случай будет частным случаем предыдущего. Но при этом $\vec{a}_c = 0$, а следовательно, и $\vec{R}^u = 0$.

Таким образом, в рассмотренном случае система сил инерции приводится к данной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент

$$M_z^u = -I_z \cdot \varepsilon.$$

При решение задач по формулам (16) и (18) вычисляются модули соответствующих величин, а направление их указывают на чертеже.

Приложение общих теорем к динамике твердого тела.

Вращательное движение твёрдого тела.

Рассмотрим приложения общих теорем динамики к некоторым задачам о движении абсолютно твёрдого тела. Так как изучение поступательного движения твёрдого тела сводится к задачам динамики точки, то мы начнём непосредственно с рассмотрения вращательного движения.

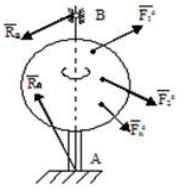


Рис.8

Пусть на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения Z (рис.8), действует система заданных сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \ldots, \vec{F}_n^e$. Одновременно на тело действуют реакции подшипников $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$. Чтобы исключить из уравнения движения эти наперед неизвестные силы, воспользуемся теоремой моментов относительно оси Z. Так как моменты сил $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ относительно оси Z равны нулю, то получим:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e;$$

$$M_z^e = \sum m_z(\vec{F}_k^e).$$

Будем в дальнейшем величину M_z^e называть вращающим моментом.

Подставляя в предыдущее равенство значение $K_z = I_z\omega$, найдём:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \text{ или } I_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e.$$

Уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела. Из него следует, что произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту:

$$I_z\varepsilon = M_z^e.$$

Равенство показывает, что при данном M_z^e чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение и наоборот. Следовательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т.е. является мерой инертности тела при вращательном движении.

Отметим следующие частные случаи:

1) Если $M_z^e = 0$, то $\omega = const$, т.е. тело вращается равномерно.

2) Если $M_z^e = const$, то и $\varepsilon = const$, т.е. тело вращается равнопеременно.

Движение тела с переменной массой.

Под точкой переменной массы подразумевается геометрическая точка, в которой сосредоточена конечная масса m, изменяющаяся во время движения по определенному закону.

Так, при движении масса ракеты изменяется за счет выбрасываемых из нее продуктов сгорания. Поступательное движение этой ракеты может быть легко сведено к изучению движения какой-либо ее характерной точки. Дифференциальные уравнения движения этой точки будут представлять собой дифференциальные уравнения движения точки переменной массы m(t). Другим примером тела переменной массы может служить рулон газетной бумаги, так как при разматывании его на валу печатной машины масса его уменьшается. Классическим примером динамической задачи, где необходимо учитывать изменения масс движущихся тел, является шахтный подъемник. При опускании груза в шахту длина подъемного каната, а следовательно, и его масса увеличиваются за счет уменьшения массы каната, навитого на барабане. При подъеме груза наблюдается обратное явление. Можно привести еще ряд примеров, когда масса тел при движении увеличивается. Так, при падении на Землю метеоритов масса Земли увеличивается. Масса Солнца в результате лучеиспускания уменьшается, а при присоединении космической пыли возрастает.

Основоположник механики тел переменной массы И. В. Мещерский (1859-1935) в основу своих исследований положил гипотезу близкодействия отбрасываемых частиц. При этом допускалось, что при отделении от тела частицы происходит удар, при котором за весьма малый промежуток времени отбрасываемая частица получает относительную скорость, и тогда дальнейшее взаимодействие отбрасываемой частицы с данным телом прекращается. Пользуясь этой гипотезой, И. В. Мещерский вывел основное уравнение движения точки переменной массы. Существенно подчеркнуть, что здесь речь идет о движении тел переменной массы в пределах классической механики. При этом масса тел определяется обычным путем и изменяется по заранее заданному закону. Поэтому переменная масса, которая рассматривается в данном разделе, не имеет ничего общего с переменной массой, фигурирующей в теории относительности.

Второй закон Ньютона в виде ma=F предполагает постоянство массы движущего тела. В тех случаях, когда масса тела изменяется (например, в ракетах в результате сгорания топлива) или при изменении соотношения между движущейся и неподвижной частями рассматриваемого тела, то производить расчеты по указанной формуле нельзя и следует воспользоваться другой записью второго закона Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Отметим, что второй закон Ньютона в данной формулировке справедлив и для случая движения тела со скоростью, близкой к скорости света, то есть является основным законом релятивистской динамики.

Литература по курсу «Теоретическая механика»

ОСНОВНАЯ

1 Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 385 с.

2 Ландау, Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1988. – 216 с.

3 Вильке, В.Г. Теоретическая механика / В.Г. Вильке. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 237 с.

4 Белов, Д.В. Механика/ Д.В. Белов. – М.: МГУ, НЭВЦ ФИПТ, 1998. – 420 с.

5 Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 575 с.

6 Добронравов, В.В. Основы аналитической механики / В.В. Добронравов. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.

7 Веретенников, В.Г. Теоретическая механика (дополнение к общим разделам) / В.Г. Веретенников, В.А. Синицин. – М.: Изд-во МАИ, 1996. – 340 с.

8 Савельев, И.В. Основы теоретической физики / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1991. – 496 с.

9 Ольховский, И.И. Задачи по теоретической механике для физиков / И.И. Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 395 с.

10 Коткин, Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо. – М.: Наука, 1977. – 320 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

11 Петкевич, В.В. Теоретическая механика / В.В. Петкевич. – М.: Наука, 1981. – 496 с.

12 Четаев, Н.Г. Теоретическая механика / Н.Г. Четаев. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

13 Голдстейн, Г. Классическая механика / Г.Голдстейн. – М.: Наука, 1975. – 415 с.

14 Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 467 с.

15 Гернет, М.М. Курс теоретической механики / М.М. Гернет. – М.: Высшая школа, 1987. – 344 с.

16 Кильчевский, Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – 465 с.

17 Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 325 с.

18 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.

Содержание