

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI

Matematika yo`nalishi

kunduzgi bo`lim

4 – bosqich 402 - guruh bitiruvchisi

Maxmudov Sodiqjon Komil o`g`lining

**“ASOSIY ASIMPTOTIK MUNOSABATLAR VA
ULARNING TATBIQLARI”**

mavzusidagi

BITIRUV
MALAKAVIY ISHI

Ilmiy raxbar:

Matematik analiz

kafedrasining katta

o`qituvchisi:

D.D.To`raqulov

Samarqand – 2017

Mundarija

Kirish.....	2
1-Bob. Asosiy asimptotik munosabatlar.....	4
§1. Asosiy tushunchalar va misollar.....	4
§2. Asosiy munosabatlar.....	7
§3. Masalalar yechish.....	10
2-Bob. O, o, $\sim$ belgilarining qo'llanilishi	14
§1. Transendent tenglamalarning asimptotik yechimlari	14
§2. Integrallarning asimptotik baholari.....	18
§3. Qator yig'indisining asimptotik baholari	21
Xulosa.....	27
Foydalanilgan adabiyotlar.....	28

Kirish

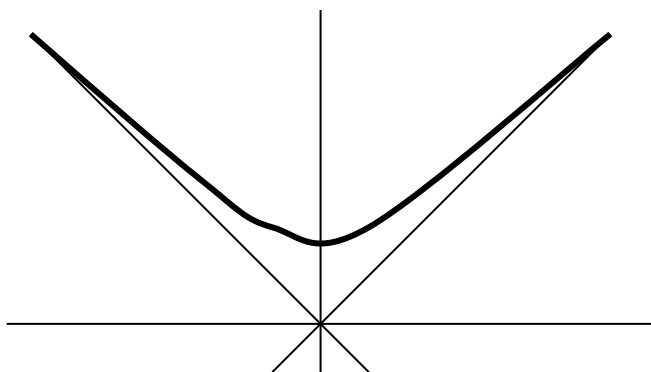
Masalaning qo'yilishi. «O, o, ~» tushunchalarini tatqiq qilish va ta'riflash, asosiy asimptotik munosabatlarni tatqiq qilish va isbotlash, «O, o, ~» belgilarining masalalar yechishga tatbiq qilish.

Masalaning dolzarbligi. *Asimptotika* grekcha so'z bo'lib, hech "qachon birlashmaydigan" degan ma'noni anglatadi. Ko'p xollarda biron bir kattalikni hisoblash talab qilinganda, bu hisoblashni bajarishga favqulodda ko'p amallarni bajarishga to'g'ri keladi. Bunday hollarda bu kattalikning qiymati hech bo'lmaganda taqriban hisoblash usuli bizga katta yordam berishi mumkin.

Kattalikning qiymatini to'g'ridan to'g'ri hisoblash uchun qanchalik ko'p qadam zarur bo'lsa, bunday usullar yordamida shunchalik ko'p ma'lumotga ega bo'lamiz.

Shunga o'xshash hollarda biz asimptotik baho yoki asimptotik formulalarga murojat qilaviz. Parametrlarning yetarlicha katta kiymatlarida integral yoki katorlarni xisoblash xatto zamonaviy EHM lar uchun ham katta hajmdagi amallarni bajarishdek qiyinchiliklarni tug'diradi. Shuning uchun bunday masalalarda asimptotik usullar hal qiluvchi o'rin egallaydi.

Asimptotika berilgan bu ta'rif unchalik aniq emas. Aniqroq aytishga harakat qiladigan bo'lsak, bu ta'rif matematikaning hech qanday sohasini o'z ichiga olamaydi yoki butun matematik analiz kursini qamrab oladi.



Qadimgi grek matematiklari konus kesimlarini o'rganish davomida $y = \sqrt{1+x^2}$ kabi funksiyalarning grafigi bo'lgan va $y = x$ hamda $y = -x$ asimptotalarga ega bo'lgan giperbolalarni qarashgan. $x \rightarrow \infty$ da egri chiziq asimptotalarga yaqinlashsada, lekin u bilan kesishmaydi. Hozirgi matematika tilida «asimptotika» so'zi keng ma'noda qo'llaniladi.

Ishning naqsad va vazifalari: Eng sodda asimptotik munosabatlar bo'lgan «O, o, ~» belgilarini va ularning xossalarini o'rganish.

Tadqiqot metodlari: ishni bajarishda matematik analiz, garmonik va asimptotik analiz usullaridan foydalanilgan.

Ishning ilmiy ahamiyati: Olingan natijalar differensiallanuvchi akslantirishlarning maxsusliklari nazariyasida, asimptotik analiz va uning tadbiqlarida, matematik fizika tenglamarida qo'llanilishi mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati: Bitiruv ishida qo'llanilgan usullar va natijalar kelgusida maxsusliklar nazariyasining rivojlanishida qo'llanilishi, shuningdek, garmonik va asimptotik analizning tadbiqlarini o'rganishda foydali qo'llanma vazifasini o'tashi mumkin.

Ishning tuzilishi: Mazkur bitiruv ishi eng sodda asimptotik munosabatlar va ularning ba'zi tatbiqlarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, 2 ta bob, 6 ta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni:

1-bob uchta paragrafdan tashkil topgan bo'lib, birinchi paragrafda asosiy tushunchalarning ta'riflari va ularga doir misollar, ikkinchi paragrafda asosiy tasdiqlar va ularning isbotlari keltirilgan bo'lib, uchinchi paragrafda masalalar yechib ko'rsatilgan.

2-bob asosiy asimptotik munosabatlarning transendent tenlamalarni yechishga, integrallarni hisoblashga va qatorlarning yig'indisini topishga doir masalalarni yechishga tatbiq qilishga bag'ishlangan.

1-Bob. Asosiy asimptotik munosabatlar

§1. Asosiy tushunchalar va misollar.

Ma'lumki, cheksiz kichik miqdorlarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi yana cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Cheksiz kichik miqdorlarning nisbati cheksiz kichik bo'lmasligi mumkin. Ammo kichik miqdorlarning nisbatini kamayish tartibi yordamida taqqoslash mumkin. Xuddu shunday, cheksiz katta miqdorlarni o'sish tartibiga ko'ra taqqoslash mumkin.

1-ta'rif: Agar shunday C o'zgarmas son mavjud bo'lib, barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$|f(n)| \leq C|g(n)|$$

tengsizlik bajarilsa, u holda bu munosabat

$$f(n) = O(g(n))$$

kabi yoziladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamida berilgan bo'lib, x_0 -bu to'plamning chekli yoki cheksiz uzoqlashgan urinish nuqtasi bo'lsin. x_0 -to'plamga qarashli bo'lishi yoki qarashli bo'lmasligi mumkin deb hisoblaymiz. Bundan tashqari faraz qilamizki, $\forall x \in X \cap U$ lar uchun $f(x) = \varphi(x)g(x)$ shartni qanoatlantiruvchi x_0 -nuqtaning $U = U(x_0)$ atrofi va $X \cap U$ to'plamda berilgan $\varphi(x)$ funksiya mavjud bo'lsin.

2-Ta'rif: Agar $\varphi(x)$ funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaga x_0 nuqtaning atrofida $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi.

Bu holda $\exists C > 0$ bo'lib, barcha $\forall x \in X \cap U$ lar uchun

$|\varphi(x)| \leq C$ tengsizlik bajariladi va demak, $|f(x)| \leq C|g(x)|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan bo'lsa u holda bu munosabat $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ kabi yoziladi.

3-Ta'rif: Agar shunday $C_1 > 0$ va $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $\forall x \in X \cap U$ lar uchun

$$C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \rightarrow x_0$ da bir xil tartibga ega deyiladi hamda bu munosabat $f \asymp g, x \rightarrow x_0$ kabi yoziladi.

Ko'rinib turibdiki, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \rightarrow x_0$ da bir xil tartibga ega bo'lishi uchun bir vaqtda $x \rightarrow x_0$ da $f = O(g)$, $g = O(f)$, munosabatlarni bajarilishi zarur va yetarli.

4-Ta'rif: Agar $x \rightarrow x_0$ da $\varphi(x)$ cheksiz kichik miqdor bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan cheksiz kichik deyiladi va

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

kabi yoziladi.

5-Ta'rif. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1$$

bo'lsa $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga ekvivalent deyiladi va bu munosabat

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$$

kabi yoziladi.

Agar $f = o(g)$, $x \rightarrow x_0$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, u

holda $f(x)$ funksiya cheksiz kichik bo'lgan $g(x)$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik deyiladi. $f = o(g^n)$, $x \rightarrow x_0$ bo'lganda f cheksiz kichik miqdorni g cheksiz kichikka nisbatan n tartibli cheksiz kichik deb ataymiz.

1-eslatma. Agar 4 va 5 ta'riflarda $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X \cap U$ bo'lsa, bu ta'riflardagi $\varphi(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow 1$ shartlarni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

kabi yozish mumkin bo'ladi.

2-eslatma. Agar $x_0 \notin X$ bo'lib

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $X \cap U(x_0)$ to'plamda chegaralangan bo'ladi, ya'ni $\exists C > 0$ bo'lib, barcha $x \in X \cap U(x_0)$ lar uchun

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$$

tengsizlik, ya'ni

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa, yuqoridagi ta'rifga ko'ra $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$ munosabat kelib chiqadi.

1-misol : bizga ma'lumki, dastlabki n ta natural sonlar tig'indisi

$$S_n = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

fomula yordamida hisoblanadi. Barcha butun n lar uchun

$$\left| \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right| \leq \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \leq \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^3| + \frac{1}{6}|n^3| = |n^3|$$

tengsizliklar o'rinli bo'lgani uchun $S_n = O(n^3)$ kabi yozishimiz mumkin.

Barcha butun n lar uchun

$$\left| \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right| \leq \frac{1}{3}|n|^3 + \frac{1}{2}|n|^2 + \frac{1}{6}|n| \leq \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^2| + \frac{1}{6}|n^2| \leq \frac{1}{3}|n^3| + |n^2|$$

tengsizliklar o'rinli bo'lgani uchun esa oxirgi formulani aniqroq

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Endi n butun kattalik bo'lmagan holga misol qaraylik.

2-misol: $S(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, bu yerda x – haqiqiy o'zgaruvchi.

$x \rightarrow 0$ da $\frac{S(x)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{1}{6}x^{-2}$ ifoda cheksizlikka intilgani uchun bu yerda $S(x) = O(x^3)$ tenglikni yozib bo'lmaydi. Bundan tashqari x cheksizlikka intilganda $\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$ nisbat cheksiz katta bo'lgani uchun $S(x) = O(x)$ munosabat ham o'rinli bo'lmaydi. Demak $S(x)$ ni baholash uchun biz « O » simvolidan foydalana olmaymiz.

Bunday holni O belgisi ishlatilgan o'zgaruvchilarga biror shart qo'yilgan bo'lsagina ishlatish mumkin. Masalan, o'zgaruvchi $|\tilde{O}| \geq 1$ shartni yoki $x \geq \varepsilon$, ε -ixtiyoriy musbat son yoki x – butun son bo'lsa biz $S(x) = O(x^3)$ kabi yoza olamiz. Agar $|\tilde{O}| \leq 1$ yoki $|\tilde{O}| \leq \tilde{n}$, $c > 0$ – shartlar bajarilsa, u holda $S(x) = O(x)$ yozuv ma'noga ega bo'ladi. « O katta » foydalanilayotgan o'zgaruvchilarga qo'yilayotgan shartlarga bog'liq holda ishlatiladi. Bu shartlar odatda limitik ko'rinishda beriladi.

6-Ta'rif: shunday C va n_0 o'zgarmaslar mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ lar uchun

$$|f(n)| \leq C|g(n)|$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $n \rightarrow \infty$ da $f(n) = O(g(n))$ munosabat bajarilishini anglatadi.

3-eslatma: C va n_0 qiymatlar har xil O lar uchun har xil bo'lishi mumkin, lekin ular n ga bog'liq bo'lmaydi.

7-ta'rif: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = O(g(x))$ yozuv shuni anglatadiki, shunday C va ε o'zgarmaslar mavjud bo'lib, $|x| \leq \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi x lar uchun

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

tengsizlik bajariladi.

4-eslatma: $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = O(n^3)$ yozuv ma'noga ega, lekin bu tenglikda o'ng va chap qismlarning o'rinlarini almashtirib bo'lmaydi. Aks holda biz $n = O(n^2)$ va $n^2 = O(n^2)$ munosabatlardan mantiqsiz- $n = n^2$ tenglikka ega bo'lar edik.

Qat'iy qilib aytadigan bo'lsak, $O(g(n))$ yozuv biror bir $f(n)$ funksiyani emas, balki biror C o'garmas uchun $|f(n)| \leq C|g(n)|$ shartni qanoatlantiruvchi $f(n)$ funksiyalar to'plamini anglatadi.

3 -misol : $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2) = O(n^3)$ «tenglama» shuni anglatadiki, shunday C_1 son mavjudki $|f_1(n)| \leq C_1|n^2|$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$ ko'rinishdagi barcha funksiyalar to'plami S_1 va $|f_2(n)| \leq C_2|n^3|$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha $f_2(n)$ funksiyalar to'plami S_2 lar uchun $S_1 \subseteq S_2$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu “tenglikni ”, chap tomondan ixtiyoriy element olib o'ng tomonga tegishli ekanligini ko'rsatish yordamida qat'iy isbotlash ham mumkin. Faraz qilaylik, $\frac{1}{3}n^3 + f_1(n)$ ifoda $|f_1(n)| \leq C_1|n^2|$ shartni qanoatlantirsin; shunday C_2 o'zgarmas mavjud bo'lib, $\left| \frac{1}{3}n^3 + f_1(n) \right| \leq C_2|n^3|$ tengsizlikning bajarilishini ko'rsatishimiz kerak. Agar $C_2 = \frac{1}{3} + C_1$ deb olsak, barcha butun n lar uchun $n^2 \leq |n^3|$ bo'ladi va masala yechiladi.

4-misol: $\sum_{k=0}^n (k^2 + O(k)) = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$, $n \geq 0$ -butun son .

Chap tomondagi $k^2 + O(k)$ ifoda $k^2 + f(k, n)$ ko'rinishdagi ikki o'zgaruvchili $|f(k, n)| \leq Ck$, $0 \leq k \leq n$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini anglatadi. $0 \leq k \leq n$ lar uchun bunday funksiyalar to'plamlarining yig'indisi quyidagi ko'rinishdagi $g(n)$ funksiyalar yig'indisidan iborat

$$\sum_{k=0}^n (k^2 + f(k, n)) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + f(0, n) + f(1, n) + \dots + f(n, n),$$

bu yerda f yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradi.

$$\left| \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + f(0,n) + f(1,n) + \dots + f(n,n) \right| \leq \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^2 + C \cdot 0 + C \cdot 1 + \dots + C \cdot n \leq n^2 + C(n^2 + n)/2 < (C+1)n^2$$

bo'lgani uchun bunday ko'rinishdagi $g(n)$ funksiyalar tenglikning o'ng tomoniga tegishli bo'ladi va demak yuqoridagi tenglik o'rinli ekan.

5-misol: $\sin 2x = O(x)$, $x \rightarrow 0$ munosabat o'rinli, chunki $x=0$ nuqtaning atrofida $|\sin 2x| \leq 2|x|$ tengsizlik bajariladi.

§2. Asosiy munosabatlar.

1-tasdiq: Agar $m \leq m'$; $m, m', n \in N$ bo'lsa, $n^m = O(n^{m'})$.

Isbot:

$m \leq m'$ bo'sin, u holda darajaning va modulning xossasiga ko'ra $|n^m| \leq |n^{m'}|$ o'rinli, ya'ni $|n^m| \leq C|n^{m'}|$ tengsizlikda $C = 1$. O simvolning ta'rifiga ko'ra bu $m \leq m'$; $m, m', n \in N$ lar uchun $n^m = O(n^{m'})$ munosabatning bajarilishini anglatadi.

2-tasdiq : $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$.

Isbot:

O simvolning to'plam ma'nosidagi ta'rifi bo'yicha o'ng tomondagi to'plamning chap tomondagi to'plam uchun qism to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Chap tomonga tegishli ixtiyoriy funksiya $a(n) + b(n)$ ko'rinishda bo'ladi va shunday m_0, B, n_0, C o'zgarmaslar mavjud bo'lib

$$|a(n)| \leq B|f(n)| \quad \forall n \geq m_0 \quad \text{va} \quad |b(n)| \leq C|g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

tengsizliklar bajariladi.

Demak, $n \geq \max(m_0, n_0)$ lar uchun chap tomondagi funksiya

$$|a(n) + b(n)| \leq |a(n)| + |b(n)| \leq B|f(n)| + C|g(n)| \leq \max(B, C) \cdot (|f(n)| + |g(n)|)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu esa O simvolning ta'rifiga ko'ra chap tomonning o'ng tomonga tegishli ekanligini anglatadi.

3-tasdiq: $f(n) = O(f(n))$;

Isbot:

Istalgan $f(n)$ funksiya uchun $|f(n)| \leq |f(n)|$ tengsizlik o'rinli, ya'ni $|f(n)| \leq C|f(n)|$ tengsizlikda $C = 1$. O simvolning ta'rifiga ko'ra bu $f(n) = O(f(n))$ ni anglatadi.

4-tasdiq: $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;

Isbot:

O simvolning to'plam ma'nosidagi ta'rifi bo'yicha o'ng tomondagi to'plamning chap tomondagi to'plam uchun qism to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Chap tomondagi funksiyalar $a(n) \cdot b(n)$ ko'rinishda bo'lib, ular B, C, n_0, m_0 o'zgarmas sonlar uchun

$$|a(n)| \leq B|f(n)| \quad \forall n \geq m_0$$

$$|b(n)| \leq C|g(n)| \quad \forall n \geq n_0.$$

shartlarni qanoatlantiradi. U holda ixtiyoriy $n \geq \max(n_0, m_0)$ lar uchun $|a(n)| \cdot |b(n)| \leq B \cdot C(|f(n)| \cdot |g(n)|)$ tengsizlik bajariladi. Bu esa O simvolning ta'rifiga ko'ra chap tomonning o'ng tomonga tegishli ekanligini anglatadi..

5-tasdiq: $O(O(f(n))) = O(f(n))$;

Isbot:

O'ng tomondagi to'plamning chap tomondagi to'plam uchun qism to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Chap tomondagi $a(n)$ funksiyalar B, C, n_0, m_0 o'zgarmas sonlar uchun

$$|a(n)| \leq B|O(f(n))| \quad (\forall n \geq m_0),$$

$$B|O(f(n))| \leq B|C(f(n))| = B \cdot C|f(n)| \quad (\forall n \geq n_0 \geq m_0).$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. Ta'rifiga ko'ra chap tomonning o'ng tomonga tegishli ekanligini anglatadi.

6-tasdiq : Agar C o'zgarmas son bo'lsa, $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$.

Isbot:

Shunday o'zgarmas B mavjudki $|C| \leq B \cdot 1$ tengsizlik o'rinli va ta'rifga ko'ra $C = O(1)$ bo'ladi. U holda $C \cdot O(f(n)) = O(1) \cdot O(f(n)) = O(f(n))$ munosabatlar o'rinli.

7-tasdiq: $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$.

Isbot:

O'ng tomondagi to'plamning chap tomondagi to'plam uchun qism to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Chap tomondagi $a(n)$ funksiyalar C, n_0 o'zgarmas sonlar uchun

$$|a(n)| \leq C |f(n) \cdot g(n)| \leq C |f(n)| \cdot |g(n)| = |f(n)| \cdot C \cdot |g(n)| \quad \forall n \geq n_0.$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. O simvolning ta'rifiga ko'ra tenglikka ega bo'lamiz.

8-tasdiq: $O(f(n)^2) = O(f(n))^2$.

Isbot:

$$O(f(n)^2) = O(f(n) \cdot f(n)) = (7\text{-tasdiq}) = f(n) \cdot O(f(n)) = (3\text{-tasdiq}) = O(f(n)) \cdot O(f(n)) = O(f(n))^2$$

9-tasdiq: $e^{O(f(n))} = 1 + O(f(n))$, если $f(n) = O(1)$

Isbot:

$e^{O(f(n))} = e^{g(n)}$, $|g(n)| \leq C_1 |f(n)| \cdot f(n) = O(1)$, $|f(n)| \leq C_2$ bo'lgani uchun $|g(n)| \leq C_1 |f(n)| \leq C_1 \cdot C_2 = C$ munosabatlar o'rinli.

$$\begin{aligned} e^{g(n)} &= 1 + g(n) + \frac{g(n)^2}{2!} + \frac{g(n)^3}{3!} + \frac{g(n)^4}{4!} + \hat{I} (g(n)^5) \leq \\ &\leq 1 + C + \frac{C^2}{2!} + \frac{C^3}{3!} + \frac{C^4}{4!} + \hat{I} (1) = 1 + \text{const}. \end{aligned}$$

$$e^{g(n)} \leq 1 + \text{const}. \text{ Demak } e^{O(f(n))} = 1 + O(f(n)).$$

10-tasdiq : Agar $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ yig'indi biror $z = z_0$ kompleks son uchun

absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda barcha $|z| \leq |z_0|$ lar uchun

$$S(z) = O(1)$$

munosabat bajariladi.

Isbot:

Berilgan munosabatning bajarilishui quyidagi tengsizlikning o'rinli bo'lishidan bevosita kelib chiqadi:

$$|S(z)| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z|^n \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z_0|^n = C < \infty.$$

Quyidagi jadvalda ko'p ishlatiladigan asimptotik formulalar keltirilgan

$n \rightarrow \infty$ va $z \rightarrow 0$ da quyidagi munosabatlar o'rinli

$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$
$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$
$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5)$
$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + O(z^5)$
$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + O(z^5)$
$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + C_\alpha^2 z^2 + C_\alpha^3 z^3 + C_\alpha^4 z^4 + O(z^5)$

§3. Masalalar yechish.

1-masala. Quyidagi mulohazalarning to'g'riligini tekshiring: $n = O(n)$, $2n = O(n)$ va hokazo... bo'lgani uchun $\sum_{k=1}^n kn = \sum_{k=1}^n O(n) = O(n^2)$ munosabat o'rinli?

Yechish. kn ni $O(n)$ ga almashtirish har xil C lar uchun har xil k lar kerkligini anglatadi; biz esa barcha O lar umumiy o'zgarmasga ega bo'lishini ko'rsatishimiz kerak. Aslida esa bu yerda O simvol k va n ikki o'zgaruvchili

funksiyalar to'plamini anglatadi. To'g'ri mulohaza esa quyidagicha ko'rinishda

$$\text{bo'ladi: } \sum_{k=1}^n kn = \sum_{k=1}^n O(n^2) = O(n^3).$$

2-masala. Quyidagi mulohazaning to'g'riligini tekshiring: Agar barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $f(n)$ va $g(n)$ musbat bo'lsa, u holda :

$$O(f(n) + g(n)) = f(n) + O(g(n))$$

munosabat o'rinli?

Yechish. Tasdiq noto'g'ri . $f(n) = n^2$, $g(n) = 1$ bo'lsin. Shunday $\varphi(n)$ funksiyani topamizki, u chap tomondagi to'plamga tegishli bo'lib, o'ng tomondagi to'plamga tegishli bo'lmasin, ya'ni $(\exists C_1) (\forall n) [\varphi(n) \leq C_1(n^2 + 1)]$ va $(\forall C_2) (\exists n \geq n_0) [\varphi(n) > n^2 + C_2]$ munosabatlar bajarilsin.

$\varphi(n) = 2n^2$ deb olaylik.

1) $C_1 = 3$ bo'lsin, u holda $\forall n \geq n_0$ lar uchun $2n^2 \leq 3(n^2 + 1)$ o'rinli. Demak $\varphi(n)$ funksiya chap tomondagi to'plamga qarashli ekan.

2). $(\forall C_2) (\exists n > \sqrt{C_2})$ lar uchun $2n^2 > n^2 + C_2$. Demak $\varphi(n)$ funksiya o'ng tomondagi to'plamga qarashli emas ekan.

3-masala. Quyidagi mulohazaning to'g'riligini tekshiring: barcha haqiqiy x lar uchun $\cos O(x) = 1 + O(x^2)$ munosabat o'inli.

Yechish. Agar biror y uchun $g(x) = \cos y$ bo'lib, $g(x)$ funksiya tenglikning chap qismidagi to'plamga tegishli bo'lib, biror C o'zgarmas uchun $|y| \leq C|x|$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$g(x) = \cos y = 1 - 2\sin^2(y/2) \leq 1 = 1 + 0 \cdot x^2$. Demak shunday o'zgarmas B mavjudki, $g(x) \leq 1 + B \cdot x^2$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, chap tomondagi to'plam o'ng tomondagi to'plamning qismi ekan. Shuning uchun yuqoridagi formula to'g'ri bo'ladi.

4-masala. $n \rightarrow \infty$ da $1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 + O(n^{-2}))$ munosabatni

isbotlang.

Yechish. Tenglikning chap tomonini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$1 + \frac{2}{n} + O(n^{-2}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{O(n^{-2})}{1 + \frac{2}{n}}\right).$$

$n \rightarrow \infty$ da $\frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda $\frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \leq C$, C –

o'zgarmas, tengsizlik hosil bo'ladi. O simvolning ta'rifiga ko'ra $\frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = O(1)$

munosabat o'rinli. Bularni tenglikka tatbiq qilsak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{O(n^{-2})}{1 + \frac{2}{n}}\right) &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 + O(1)O(n^{-2})) = (4\text{-tasdiq}) \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 + O(1 \cdot n^{-2})) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 + O(n^{-2})) \end{aligned}$$

5-masala . $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $\left(\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot (n + O(\sqrt{n}))$ ni hisoblang.

Yechish:

$$\begin{aligned} &\left(\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot (n + O(\sqrt{n})) = \\ &= \ln n \cdot n + \ln n \cdot O(\sqrt{n}) + \gamma \cdot n + \gamma \cdot O(\sqrt{n}) + n \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O(\sqrt{n}) = \\ &= \ln n \cdot n + \gamma \cdot n + \ln n \cdot O(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) + n \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O(\sqrt{n}) = \\ &= \ln n \cdot n + \gamma \cdot n + O(\ln n) \cdot O(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) + O(n) \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O(\sqrt{n}) = \\ &= n \cdot \ln n + \gamma \cdot n + O(\ln n \cdot \sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) + O(1) + O\left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot \ln n + \gamma \cdot n + O\left(\left|\ln n \cdot \sqrt{n}\right| + \left|\sqrt{n}\right| + 1 + \left|\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n}\right|\right) = \\
&= n \cdot \ln n + \gamma \cdot n + O\left(\ln n \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

6-masala. $(n + 2 + O(n^{-1}))^n$ ni $n \rightarrow \infty$ da $O(n^{-1})$ nisbiy xatoliok bilan hisoblang.

Yechish:

$$\begin{aligned}
(n + 2 + O(n^{-1}))^n &= n^n \cdot \frac{(n + 2 + O(n^{-1}))^n}{n^n} = \\
&= n^n \cdot \left(\frac{n + 2 + O(n^{-1})}{n}\right)^n = n^n \cdot \left(1 + 2n^{-1} + \frac{1}{n}O(n^{-1})\right)^n = (\text{по 1.2.3 и 1.2.4}) \\
&= n^n \cdot \left(1 + 2n^{-1} + O(n^{-2})\right)^n = n^n \cdot e^{n \cdot \ln(1 + 2n^{-1} + O(n^{-2}))}
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ da $k = (2n^{-1} + O(n^{-2})) \rightarrow 0$. Shuning uchun $\ln(1 + k) \rightarrow 0$. U holda $n \rightarrow \infty$ da $\ln(1 + k) = k$.

$$\begin{aligned}
n^n \cdot e^{n \cdot \ln(1 + 2n^{-1} + O(n^{-2}))} &= n^n \cdot e^{n(2n^{-1} + O(n^{-2}))} = n^n \cdot e^{(2 + O(n^{-1}))} = n^n \cdot e^2 \cdot e^{O(n^{-1})} = \\
&= n^n e^2 (1 + O(n^{-1})).
\end{aligned}$$

7-masala. $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$ da $e^{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} = e + O\left(\frac{1}{n}\right)$ munosabatni isbotlang.

Yechish: $O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (*)$

munosabatning bajarilishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ - shunday a_n fuhksiyaki $|a_n| \leq C_1 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)$

tengsizlik bajariladi. Bundan $|a_n| \leq C_1 \cdot \frac{1}{n^2} \leq C_1 \cdot \left|\frac{1}{n}\right|$ tengsizliklarga ega

bo'lamiz va demak $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ munosabat o'rinli.

Endi $e^{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} = e + O\left(\frac{1}{n}\right)$ munosabatning bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned}
e^{\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} &= e^{1+2O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)^2} = e^{1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = ((*) \text{ ga ko'ra}) = \\
&= e^{1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{1+2O\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = e \cdot e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} = \\
&= e \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e + e \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = e + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

2-Bob O, o, ~ belgilarining qo'llanilishi

§1. Haqiqiy o'zgaruvchili transendent tenglamalarning asimptotik yechimlari.

1-misol.

Quyidagi

$$x + th x = u,$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda u –haqiqiy parametr, $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - giperbolik tangens, $|thx| < 1$, x va $th x$ lar butun son o'qida uzluksiz va qat'iy o'suvchi funksiyalar.

Tenglamaning ilizlari uchun asimptotik yechimni topamiz.

1) $u(x) = x + th x$ funksiya R da uzluksiz va qat'iy monoton. Teskari funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga ko'ra bu funksiyaga teskari bo'lgan shunday $x(u)$ funksiya mavjudki, bu funksiya ham $E_u = R$ da uzluksiz va qat'iy monoton bo'ladi.

$x \rightarrow \infty$ da $u(x) \rightarrow \infty$ ni uchun $u \rightarrow \infty$ da $x(u) \rightarrow \infty$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $u \rightarrow \infty$ intilsin. U holda $x \rightarrow \infty$ va $\frac{u}{x} = \frac{x + thx}{x} \rightarrow 1$ munosabatlar bajariladi.

Demak, $u \rightarrow \infty$ da $x(u) \sim u$ munosabat o'rinli bo'lar ekan. Bu ildiz uchun birinchi asimptotik yaqinlashishdir.

2) Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x = u - th x.$$

Ma'lumki, $|thx| < 1 + C$, C –o'zgarmas. O simvolning ta'rifiga ko'ra $thx = 1 + O(1)$ munosabat o'rinli. Shuning uchun quyidagi ikkinchi asimptotik yaqinlashish o'rinli

$$x = u - 1 + O(1) \quad 3).$$

Endi $e^{-2x} = O(e^{-2u})$ munosabatni isbotlaymiz. Buning uchun ildizning ikkinchi asimptotik yaqinlashishini yuqoridagi tenglikka qo'yamiz:

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= e^{-2(u-1+O(1))} = e^{-2u} \cdot e^2 \cdot e^{O(1)} = e^2 O(e^{-2u}) (1 + O(1)) = \\ &= e^2 O(e^{-2u}) (2O(1)) = O(e^{-2u}). \end{aligned}$$

th x funksiyani yetarlicha katta x lar uchun qulay bo'lgan qatorga yoyamiz:

$$th x = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \dots \quad (x > 0)$$

U holda agar $|z| < r$ lar uchun $\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda tayinlangan n lar uchun ixtiyoriy $|z| \leq \rho$, $\rho < r$ doirada $\sum_{s=n}^{\infty} a_s z^s = O(z^n)$ munosabat bajariladi.

$x > 0$ lar uchun $-2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \dots$ qator yaqinlashadi, ya'ni $|e^{-2x}| < 1$ va uning yig'indisi $th x - 1$ ga teng bo'ladi. Demak teorema ko'ra $th x - 1 = O(e^{-2x})$, ya'ni $th x = O(e^{-2x}) + 1$ munosabat o'rinli.

Bularni hisobga olsak

$$x = u - th x = u - 1 + O(e^{-2x}) = u - 1 + O(O(e^{-2u})) = u - 1 + O(e^{-2u}).$$

Shunday qilib $x = u - 1 + O(e^{-2u})$ - ildizning uchinchi asimptotik yaqinlashtirishi bo'ladi.

4) Endi $e^{-2x} = e^{-2u+2} + O(e^{-4u})$ munosabatni isbotlaymiz.

Ildizning uchinchi asimptotik yaqinlashishini tenglamaga qo'yamiz

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= e^{-2(u-1+O(e^{-2u}))} = e^{-2u+2} \cdot e^{O(e^{-2u})} = e^{-2u+2} \cdot (1 + O(e^{-2u})) = \\ &= e^{-2u+2} + e^{-2u} \cdot e^2 \cdot O(e^{-2u}) = \hat{a}^{-2\hat{e}+2} + \hat{a}^{-2\hat{e}} \cdot \hat{I}(\hat{a}^{-2\hat{e}}) = \\ &= e^{-2u+2} + O(e^{-4u}). \end{aligned}$$

$x > 0$ lar uchun $2e^{-4x} - 2e^{-6x} + 2e^{-8x} - 2e^{-10x} + \dots$ qator yaqinlashadi, ya'ni $|e^{-2x}| < 1$ va uning yig'indisi $th x - 1 + 2e^{-2x}$ gat eng. Demak, teorema ko'ra $th x - 1 + 2e^{-2x} = O(e^{-4x})$, ya'ni $th x = O(e^{-4x}) + 1 - 2e^{-2x}$.

Bularni hisobga olsak,

$$x = u - th x = u - 1 + 2e^{-2x} + O(e^{-4x}) =$$

$$\begin{aligned}
&= u - 1 + 2(e^{-2u+2} + O(e^{-4u})) + O(e^{-4x}) = \\
&= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}) + O(e^{-2x} \cdot e^{-2x}) = \\
&= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}) + O(O(e^{-2u}) \cdot O(e^{-2u})) = \\
&= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}) + O(O(e^{-4u})) = \\
&= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}) + O(e^{-4u}) = u - 1 + 2e^{-2u+2} + 2O(e^{-4u}) = \\
&= u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u})
\end{aligned}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $x = u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u})$ – to'rtinchi asimptotik yaqinlashtirish bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirib, asimptotik tartibi kamayib boruvchi, xatoliklari mavjud yaqinlashishlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Qadamlar soni oshgan sari, yuqoridagi mulohazalarga ko'ra bu ketma-ketlikning yaqinlashishini ko'rish qiyin. Ammo, bu jarayondan ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish mumkin. Masalan, $u = 5$ deb olsak:

$$1) x = 5;$$

$$2) x = u - 1 + O(1) = 5 - 1 = 4; (O(1) \text{ xatolikni e'tiborga olmaymiz})$$

$$3) x = u - 1 + O(e^{-2u}) = 5 - 1 = 4; (O(e^{-2u}) \text{ xatolikni e'tiborga olmaymiz})$$

$$4) x = u - 1 + 2e^{-2u+2} + O(e^{-4u}) = 5 - 1 + 0,000670925... = 4,000670925... \\ (O(e^{-4u}) \text{ xatolikni e'tiborga olmaymiz})$$

Standart hisoblash usullaridan foydalanib topilgan qiymat 4,0006698...ga teng.

2-misol.

$$x \operatorname{tg} x = 1$$

tenglamani yetarlicha katta ildizlarini topaylik.

Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = n\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

bu yerda n – butun son, arktangens $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda qiymat qabul qiladi. Bu

yardan $n \rightarrow \infty$ da $x \sim n\pi$ munosabatga ega bo'lamiz.

Agar $x > 1$ bo'lsa, u holda

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$$1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ munosabat o'rinli}$$

$$x = n\pi + O\left(\frac{1}{x}\right) = n\pi + O\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \pi n + O(n^{-1}).$$

$$2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\text{Bularni e'tiborga ilsak, } \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$x = n\pi + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$3). \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} = O\left(\frac{1}{x^5}\right). \text{ U holda } \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

$$x = n\pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{3(\pi n)^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

§2. Integrallarning asimptotik baholari.

1-misol. $x > 1$ lar uchun $\int_1^x (1+t^{-1})^t dt$ integralni hisoblaymiz.

Quyidagicha qatorga yoyamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t &= \frac{1}{e} \cdot e^{t \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{4t^3} + \dots} = \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{5t^4} - \dots\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{5t^4} - \dots\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{5t^4} - \dots\right)^3 + \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{4t^3} + \frac{1}{5t^4} - \dots\right)^4 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2t} + \frac{11}{24t^2} - \frac{7}{16t^3} + \dots \end{aligned}$$

Quyidagi munosabat o'rinli: $\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t - 1 + \frac{1}{2t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ya'ni

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = 1 - \frac{1}{2t} + O(t^{-2}).$$

$$\begin{aligned} \int_1^x (1+t^{-1})^t dt &= \int_1^x \frac{e}{e} (1+t^{-1})^t dt = \int_1^x e \cdot (e^{-1} (1+t^{-1})^t) dt = \\ &= e \int_1^x \left(1 - \frac{1}{2} t^{-1} + O(t^{-2})\right) dt = e \left(t - \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^x + O\left(\int_1^x t^{-2} dt\right) \right) = \\ &= ex - \frac{1}{2} \ln x + O(t^{-1}) \Big|_0^x = ex - \frac{1}{2} \ln x + O(x^{-1}). \end{aligned}$$

2-misol. $\varepsilon \rightarrow +0$ da $S(\varepsilon) = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) x e^{-x^2} dx$ ni hisoblaymiz, bu yerda

$A(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} a_k$, $A(x)$ – zinapoya funksiyasi va $x < 0$ lar uchun $A(x) = 0$, $k \leq x <$

$k+1$ lar uchun $A(x) = A_k$, $A_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $a_k = k^{-1}$, $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

munosabatlarni qanoatlantiradi.

Quyidagi asimptotik formuladan foydalanamiz:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

bu yerda γ - Eyler soni $\left(\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\Gamma'(1)\right)$. Quyidagi funksiyani

kiritamiz: $\tilde{A}(x) = \ln x + \gamma$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) x e^{-x^2} dx = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \gamma\right) x e^{-x^2} dx = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \ln \varepsilon + \gamma\right) + 2 \int_0^{\infty} x \ln x e^{-x^2} dx - 2 \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} x \ln x e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Oxirgi integral $\varepsilon \rightarrow +0$ da $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ tartibga ega, undan oldingisi esa $-1/2$ ga teng. Shuning uchun

$$I = -\frac{1}{2} \ln \varepsilon + \frac{1}{2} \gamma + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$$

munosabat o'rinli. Shunday qilib,

$S(\varepsilon) = I + J$ tenglik o'rinli, bu yerda

$$J = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \left[A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right] x e^{-x^2} dx.$$

J integralni baholaymiz. Faraz qilaylik, $k \leq \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \leq k+1$ bo'lsin. U holda

$\forall k \geq 1$ uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi

$$A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \ln \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} + O\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} \leq \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} \leq 1$ tengsizlikni logarifmlab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \ln \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} \leq 0. \quad \text{Demak,} \quad \ln \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} = O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \quad \text{munosabat}$$

o'rinli.

Shunday qilib,

$$J = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) x e^{-x^2} dx = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

munosabatdan $S(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \ln \varepsilon + \frac{\gamma}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$ ga ega bo'lamiz.

§3. Qator yig'indisining asimptotik baholari.

Qatorlarning yig'indisini hisoblashda Eylerning quyidagi yig'ish formulasi ko'p qo'llaniladi:

$$\sum_{a \leq k < b} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + R_m,$$

bu yerda $R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx$, $a \leq b$, $m \geq 1$, $a, b, m \in \mathbb{Z}$,

B_k – Bernulli sonlari, $B_m(\{x\})$ – Bernulli ko'phadi, $B_k = (-1)^k \beta_{2k}$.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k.$$

β_k koeffisientlar funksiyani darajali qatorga yoyishning yagonaligidan foydalanib quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \frac{\beta_m}{(k-m)! m!} \right) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} x^k, \end{aligned}$$

Bir xil darajalar oldidagi koeffisientlarni tenglashtirib, x oldidagi koeffisient $\beta_0 = 1$ ni topamiz.

x^k oldidagi koeffisient esa $\sum_{m=0}^k \frac{\beta_m}{(k-m)! m!} = \frac{\beta_k}{k!}$ ($k \geq 2$) ga tengbo'ladi.

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_3 &= B_5 = \dots = 0 \end{aligned}$$

larni topamiz.

1-misol $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ garmonik son uchun

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k H_k}$ yig'indini hisoblaymiz.

Garmonik son uchun keltirilgan yuqoridagi asimptotik munosabatga ko'ra

$H_k = \ln k + O(1)$ tenglik o'rinli. U holda

$$\frac{1}{k H_k} = \frac{1}{k(\ln k + O(1))} = \frac{1}{k \ln k} + O(1), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k H_k} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} + O(1) \text{ tengliklar}$$

bajariladi. Eylerning yig'ish formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} + O(1) &= \int_2^n \frac{dk}{x \ln x} + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \cdot \left((x \ln x)^{-1} \right)^{(k-1)} \Big|_2^n + R_1 + O(1) = \\ &= \ln \ln x \Big|_2^n + \frac{B_1}{1!} \left((x \ln x)^{-1} \right) \Big|_2^n + (-1)^2 \int_2^n \frac{B_1(\{x\})}{1!} (x \ln x)^{-1} dx + O(1) = \\ &= \ln \ln n - \ln \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{2 \ln 2} \right) + \frac{1}{2} (\ln \ln n - \ln \ln 2) + O(1) = \\ &= \ln \ln n - \ln \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \ln n - \frac{1}{2} \ln \ln 2 + O(1) = \\ &= \frac{3}{2} \ln \ln n - \frac{3}{2} \ln \ln 2 + O(1) = \frac{3}{2} \ln \ln n + O(1). \end{aligned}$$

2-misol $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2 + k^2}.$

Eylerning yig'ish formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \int_0^n \frac{dx}{n^2 + x^2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)^{(k-1)} \Big|_0^n = \\ &= \int_0^n \frac{dx}{n^2 + x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2 + x^2} \Big|_0^n + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' \Big|_0^n + 0 \cdot \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)'' \Big|_0^n - \frac{1}{30} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)^{(3)} \Big|_0^n + \dots = \\ &= \frac{1}{4} \pi n^{-1} + \frac{1}{4} \cdot n^{-2} + \frac{1}{6} \left(\frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right) \Big|_0^n + O(n^{-5}) = \frac{1}{4} \pi n^{-1} + \frac{1}{4} \cdot n^{-2} - \frac{1}{12} n^{-3} + O(n^{-5}). \end{aligned}$$

3-misol. $n \rightarrow \infty$ da $S(n) = \sum_{k=0}^n k!$ yig'indining asimptotikasini topamiz.

Bu yig'indining hadlari nomer oshgan sari tez o'sib borganligi uchun asimptotikaning bosh hadi yig'indining oxirgi hadiga teng bo'ladi:

$$S(n) \sim n!, \quad n \rightarrow \infty.$$

Haqiqatan ham,

$$\frac{S(n)}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}.$$

bo'lgani uchun

$$S(n) = n! \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

munosabat o'rinli.

Xulosa

Tabiiy fanlarning ko'plab masalalarini yechishda parametrga bog'liq integral va qatorlarga duch kelamiz. Bunday integrallar aniq hisoblanadigan hollar kam uchraydi.

Parametrlarning yetarlicha katta qiymatlarida integral yoki qatorlarni hisoblash hatto zamonaviy EHM lar uchun ham katta hajmdagi amallarni bajarishdek qiyinchiliklarni tug'diradi. Shuning uchun bunday masalalarda asimptotik usullar hal qiluvchi o'rin egallaydi.

Tatqiqotlarni o'tkazishda quyidagi masalalar qo'yilgan va yechilgan:

1. « O , o , $\sim$ » tushunchalari tatqiq qilindi.
2. Asosiy asimptotik munosabatlar tatqiq qilindi va isbotlandi.
3. « O , o , $\sim$ » belgilarining masalalar yechishda tatbiqu qarab chiqildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Брейн, Н.Г. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. Брейн. – М.: Иностранная литература, 1961.
2. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Ф. Олвер. – М.: Наука, 1978.
3. Федорюк, М.В. Асимптотика: интегралы и ряды /. – М.: Наука, 1987.
4. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969.