

ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ
JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI
ÁJINIYAZ ATÍNDAGÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ
INSTITUTÍ

Matematika – informatika fakul`teti

Matematika oqıtıw metodikası kafedrası

«Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarınıń 4-kurs talabası

XALMURATOVA NAZIRA ORÍNBAEVNANÍN

**«SÍZÍQLÍ KEÑISLIKLERDE DIFFERENCIALLÍQ ESAP
ELEMENTLERI»**

atamasındaǵı

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Kafedra baslıǵı:

f.-m.i.k.,doc. B.B. Prenov

Ilimiy basshı:

f.-m.i.k.,doc. B.T. Kurbanov

Nókis - 2018

Mazmunı

Kirisiw.....	3
I-BAP. TIYKARGÍ MAĞLÍWMATLAR	
1-§. Cızıqlı keńislik. Mısallar.....	5
2-§. Normalanğan keńislik túsiniǵı.....	13
3-§. Sızıqlı úzliksiz funkcionallar.....	16
II-BAP. SÍZÍQLÍ KEÑISLIKLERDE DIFFERENCIALLIQ ESAP ELEMENTLERI	
4-§. Kúshli hám kúshsiz differenciallar.....	21
5-§. Joqarı tártipli tuwındılar.....	27
6-§. Ekstremallıq máseleler.....	32
Juwmaqlaw	39
Ádebiyatlar.....	40

Kirisiw

Pitkeriw qánigelik jumıstın aktualıǵı. Funkcionallıq analiz házirgi zaman matematikasınıń ayrıqsha tarawlarınıń biri. Ol matematikanıń bir neshe tarawları, atap aytqanda matematikalıq analiz, funkciyalar teoriyası, integral hám diferencial teńlemeler teoriyası, variaciyalıq esap shegaralarında, olardıń túsinipleri hám metodların ulıwmalastırılıwı nátiyjesinde XX ásirdeń basında payda boldı. Házirgi waqıtta funkcionallıq analiz matematika hám fizikanıń túrli bólimlerinde keń túrde qollanılmaqta.

Funkcionallıq analizdiń ayrıqsha abzallıqlarınan biri quramalı funkcionallıq keńisliklerdi metrika, norma hám skalyar kóbeyme járdeminde ápiwayıraq, jaqsı úyrenilgen keńisliklerge, máselen tuwrı sıızıqqa qolay tárizde sáwlelendirip úyreniwden ibarat. Funkcionallıq analizde sıızıqlı funkcionallıq hám sıızıqlı operator túsinipleri úlken áhmiyetke iye. Biraq ayırım máseleler sheksiz keńisliklerdegi sıızıqlı bolmaǵan funkcionallar hám operatorlardı úyreniwge alıp keledi.

Bul pitkeriw qánigelik jumısı sıızıqlı keńisliklerde differenciallıq esap elementlerin úyreniwge arnalǵan.

Pitkeriw qánigelik jumıstın maqseti hám wazıypaları. Bul pitkeriw qánigelik jumıstın maqseti sıızıqlı keńisliklerde differenciallıq esap elementlerin úyreniwden ibarat. Pitkeriw qánigelik jumıstın maqsetinen kelip shıǵıp, tómendegi wazıypalar belgilep alındı:

- sıızıqlı keńislikti úyreniw;
- normalanǵan keńislik hám oǵan baylanıslı mısallardı úyreniw;
- kúshli hám kúshsiz differenciallardı anıqlaw;
- joqarı tártipli tuwındı hám differenciallardı esaplawdı úyreniw;
- ekstremallıq máselelerdi sheshiwdi úyreniw.

Pitkeriw qánigelik jumıstın ob`ekti. Sıızıqlı hám normalanǵan keńislikler, funkcionallarǵa baylanıslı teoriyalıq máselelerden ibarat.

Pitkeriw qánigelik jumıstın teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti sonıń

menen belgilenedi, alıńǵan nátiyjeler matematikalıq analiz pání boyınsha bakalavrlarǵa hám magistrLARǵa arnawlı kurslar shólkemlestiriwde ámeliy áhmiyetke iye.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń kólemi hám dúzilisi. Pitkeriw qánigelik jumıs kirisiw hám juwmaqlaw bólimlerinen, eki bap hám altı paragrafdan, sonday – aq paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi paragrafta sıızılı keńislik anıqlaması berilip, oǵan baylanıslı mısallar keltirilgen.

Ekinshi paragrafta normalanǵan keńislik, norma túsinigi kiritilgen, Banach keńisligine anıqlama berilgen, olarǵa baylanıslı mısallar sheship kórsetilgen.

Úshinshi paragrafta sıızılı úzliksiz funkcionallar túsinigi kiritilgen.

Tórtinshi paragrafta kúshli differencial, kúshsiz differencial, shekli ósimler formulası berilip, teoremlar keltirilgen.

Besinshi paragrafta joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar, Teylor formulası keltirilgen, olarǵa baylanıslı teoremlar, mısallar berilgen.

Altınshı paragrafta sıızılı bolmaǵan funkcionallıq analizdiń tiykarǵı máseleleriniń biri funkcionallardıń ekstremumların tabıw máselesi qaralıp, ekstremumnıń zárúrli hám jetkilikli shártleri keltirilgen, mısallar kórsetilgen.

I-BAP. TIYKARGÍ MAĞLÍWMATLAR

1-§. Cızıqlı keńislik. Mısallar

Meyli qálegen M kópligi berilgen bolsın. Eger $M \times M$ kópliginiń qálegen R_φ úles kópligin ajıratıp alsaq, onda M kópliginde φ binarlıq qatnas berilgen dep ataladı. Anıǵıraq qılıp aytqanda, eger (a, b) juplıq R_φ kópligine tiyisli bolsa, onda a element b elementke binarlıq qatnasta delinedi. Bul elementlerdiń binarlıq qatnasta ekenligi $a \varphi b$ kóriniste belgilenedi.

Mısallar 1. Birdeylik qatnası ε binarlıq qatnasqa mısal boladı. Haqıyqattan da, eger $a \varepsilon b \Leftrightarrow a = b$ dep alsaq, onda

$$R_\varepsilon = \{(a, a) : (a, a) \in M \times M, \forall a \in M\} \subset M \times M.$$

R_ε kópligin ádette $M \times M$ kópliginiń diagonalı delinedi hám Δ kórinisinde belgilenedi.

2. M kópliginde berilgen qálegen φ ekvivalentlik qatnas binar qatnas boladı. Basqasha qılıp aytqanda, ekvivalentlik qatnas refleksivlik, simmetriyalıq hám tranzitivlik shártlerin qanaatlandırıwshı binar qatnas.

Qandayda bir E kópliginde $E \times E$ kópliktiń hár bir (x, y) elementine E kópliktiń x hám y elementlerdiń qosındısı dep atalıwshı hám $x + y$ kórinisinde belgileniwshı E kópliktiń elementin sáykes qoyıwshı binar qatnas berilgen bolıp, bul qatnas tómendegi shártlerdi qanaatlandırınsın:

$$\forall x, y, z \in E:$$

$$1. x + y = y + x \quad (\text{qosındınıń kommutativligi});$$

$$2. (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{qosındınıń asociativligi});$$

3. E kópliginde sonday θ element bar bolıp, $\forall x \in E$ ushın $x + \theta = x$ teńligi orınlı (θ – nóllek element dep ataladı).

4. Qálegen $x \in E$ ushın, sonday $-x \in E$ element bar bolıp $x + (-x) = \theta$ teńligi orınlı ($-x$ element x qa qarama-qarsı element dep ataladı).

Sonın menen birge K maydannen alınğan qálegen α san hám qálegen $x \in E$ element ushın $\alpha x \in L$ (x elementtiń α sanǵa kóbeymesi) element anıqlanğan bolıp, tómendegi shártler orınlansın:

$\forall \alpha, \beta \in K$ hám $\forall x, y \in E$:

$$5. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$6. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$7. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$8. 1 \cdot x = x.$$

Usı shártlerdiń barlıǵın qanaatlandırıwshı E kópligi K maydan ústinde anıqlanğan sızıqlı yamasa vektorlıq keńislik dep ataladı. Sızıqlı keńislik elementlerin vektorlar yamasa noqatlar dep ataymız. Eger $K = R$ (R -barlıq haqıyqıy sanlar kópligi) yamasa $K = C$ (C -barlıq kompleks sanlar kópligi) bolsa, onda E , sáykes túrde, haqıyqıy yamasa kompleks sızıqlı keńislik dep ataladı.

Mısallar 1. R kópligi ádettegi qosıw hám kóbeytiw ámellerine qarata sızıqlı keńislik boladı.

2. n sandaǵı haqıyqıy sanlardıń múmkin bolğan barlıq $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jıynaqları kópliginde qosıw hám sanǵa kóbeytiw ámellerin

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

kórinisinde anıqlasaq, bul kóplik sızıqlı keńislik boladı. Bul keńislik n ólshemli arifmetikalıq keńislik delinedi hám R^n kórinisinde belgilenedi.

Anıqlama. L hám L^* lar sızıqlı keńislikler bolıp, olar arasında tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı óz-ara bir mánisli sáykeslik ornatılğan bolsın:

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*$$

bolıwınan $(x, y \in L; \quad x^*, y^* \in L^*)$

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

hám

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

bolıwı kelip shıǵadı $(\forall \alpha \in K)$. Onda L hám L^* lar óz-ara izomorf keńislikler delinedi.

Mısal ushın, n ólshewli R^n haqıyqıy arifmetikalıq keńisligi menen dárejeleri $n - 1$ den úlken bolmaǵan barlıq haqıyqıy coefficientli kóp aǵzalılar keńisligi ádettegi qosıw hám skalyar sanǵa kóbeytiw ámellerine salıstırǵanda izomorf keńislikler boladı.

L sızıqlı keńisliktiń $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementleri berilgende, hesh bolmaǵanda birewi nolden ózgeshe bolǵan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sanları bar bolıp, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ teńligi orınlı bolsa, onda $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler sızıqlı ǵárezli elementler delinedi. Eger $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ teńliginen $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ teńligi kelip shıqsa, onda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementler sızıqlı ǵárezsiz elementler dep ataladı.

L keńislik elementleriniń $x, y, \dots$ sheksiz sistemasınıń qálegen úles sisteması sızıqlı ǵárezsiz bolsa, onda berilgen sistema sızıqlı ǵárezsiz dep ataladı.

Eger L keńisliginde n sandaǵı sızıqlı ǵárezsiz elementlerdi tabıw múmkin bolıp, qálegen $n + 1$ sandaǵı elementleri sızıqlı ǵárezli bolsa, onda L keńislik n ólshemli delinedi. Eger L de qálegen sandaǵı sızıqlı ǵárezsiz elementlerdi tabıw múmkin bolsa, onda L sheksiz ólshemli keńislik dep ataladı. n ólshemli L keńisliktiń n sandaǵı qálegen sızıqlı ǵárezsiz elementleriniń sistemasın, bul keńisliktiń bazisi dep ataymız.

L' kóplik L sızıqlı keńisliktiń úles kópligi bolsın. Eger qálegen $x, y \in L'$ hám qálegen $\alpha, \beta \in K$ sanlar ushın $\alpha x + \beta y \in L'$ bolsa, onda L' kóplik L diń úles keńisligi dep ataladı.

L sızıqlı keńislik bolıp, θ onıń nollik elementi bolsın. Tek ǵana nollik elementten ibarat $\{\theta\}$ kóplik L diń eń kishkene úles keńisligi boladı. Bul keńislikti nollik úles keńislik dep ataymız. Sonıń menen birge L keńislikti de óziniń úles keńisligi sıpatında qaraw múmkin. Bul eki úles keńislikler L diń ózlik emes úles keńislikleri delinip, bulardan basqa úles keńislikler ózlik dep ataladı.

Úles keńisliklerdiń qálegen sistemasınıń kesilispesi úles keńislik boladı. Haqıyqattan da, $\{A_\gamma\} (\gamma \in I, I - \text{qálegen kóplik})$ sistema L sızıqlı keńisliktiń úles keńislikleri sisteması bolsın. Qálegen $x, y \in \bigcap_\gamma A_\gamma$ elementler hám qálegen α, β sanlar ushın $\alpha x + \beta y \in A_\gamma (\forall \gamma \in I)$ qatnası orınlı. Onda $\alpha x + \beta y \in \bigcap_\gamma A_\gamma$ qatnası da orınlı, yaǵnıy $\bigcap_\gamma A_\gamma$ kóplik úles keńislik boladı.

L sızıqlı keńislikte qandayda bir bos bolmaǵan S kóplik berilgen bolsın. S kóplikti óz ishine alǵan eń kishkene úles keńislik, S kópliktiń sızıqlı qabıǵı dep ataladı hám ol ádette $L(S)$ kórinisinde belgilenedi. $L(S)$ keńisligi S ti óz ishine alıwshı barlıq úles keńisliklerdiń kesilispesinen ibarat boladı. Basqasha qılıp aytqanda, $L(S)$ keńisligi tómendegi kórinistegi elementlerden ibarat :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i,$$

bunda $\alpha_i \in K, a_i \in S, 1 \leq i \leq n, n - \text{qálegen } (x \text{ qa ǵárezli}) \text{ natural san.}$

Mısallar 1. L qandayda bir sızıqlı keńislik bolıp, x onıń nolden ózgeshe elementi bolsın. $\{\lambda x, \lambda \in K\}$ elementler kópligi bir ólshemli sızıqlı úles keńislik boladı. Eger L diń ólshemi birden úlken bolsa, onda $\{\lambda x, \lambda \in K\} \neq L$.

2. $[a, b]$ segmentte anıqlanğan barlıq kópazǵalılar kópigin $P[a, b]$ kóriniste belgilesek, onda bul kópik $C[a, b]$ nın úles keńisligi boladı.

3. l_2, C_0, c, m, R^∞ kópiklerdiń barlıǵı sıızıqlı keńislik bolıp, hár biri ózinen keyindegisiniń úles keńisligi boladı.

L sıızıqlı keńislik bolıp, L' onıń qandayda bir úles keńisligi bolsın. Eger $x, y \in L$ elementlerdiń ayırması L' keńisligine tiyisli bolsa, onda bul elementlerdi ekvivalent dep ataymız. Ekvivalentlik qatnas reflektiv, simmetriyalıq hám tranzitiv bolǵanı ushın, ol L di óz-ara kesilispeytuǵın klasslarǵa ajıratadı. Bunday klasslar kópigi L diń L' boyınsha faktor keńisligi dep ataladı hám $L|L'$ kórinisinde belgilenedi. ξ hám η klasslar $L|L'$ faktor keńisliktiń elementleri bolıp, $x \in \xi$ hám $y \in \eta$ bolsın. ξ hám η klasslardıń qosındısı dep, $x + y$ elementin óz ishine alıwshı ν klassqa; ξ klass hám α san kóbeymesi dep, αx elementin óz ishine alıwshı klassqa aytamız. Bul ámeller nátiyjesi x hám y ler ornına qálegen basqa $x' \in \xi$ hám $y' \in \eta$ elementlerdi alǵanda da ózgermeydi. Sonday qılıp, $L|L'$ faktor keńisliginde qosıw hám skalyar sanǵa kóbeytiw ámelleri anıqlanadı. Bul ámeller sıızıqlı keńislik anıqlamasındaǵı barlıq shártlerdi qanaatlandıradı. Sonlıqtan, hár bir $L|L'$ faktor keńislik sıızıqlı keńislik boladı.

Eger L sıızıqlı keńislik n ólshemli bolıp, onıń L' úles keńisligi k ólshemli bolsa, onda $L|L'$ faktor keńisliktiń ólshemi $n - k$ ǵa teń.

L sıızıqlı keńislikte anıqlanğan g sanlı funkciya funkconal dep ataladı. Eger barlıq $x, y \in L$ elementler ushın $g(x + y) = g(x) + g(y)$ teńligi orınlı bolsa, onda g additiv delinedi. Qálegen α san hám barlıq $x \in L$ ushın $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ teńligi orınlı bolsa, onda g nı birtekli dep ataymız.

Kompleks sıızıqlı keńislikte anıqlanğan g funkconal qálegen α san ushın $g(\alpha x) = \bar{\alpha} g(x)$ teńlikti qanaatlandırsa, onda ol túyinles birtekli dep ataladı.

Additiv hám birtekli funkcionaldı sızıqlı dep ataymız. Basqasha qılıp aytqanda, L sızıqlı keńislikte anıqlanǵan $g(x)$ funkcional qálegen $x, y \in L$ elementler hám α, β sanlar ushın $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$ teńligin qanaatlандırsa, onda ol sızıqlı delinedi.

Мисаллар.1. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ болıp,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

tayınlanǵan n sandaǵı sanlardıń qálegen jıynaǵı bolsa, onda

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

kórinisinde anıqlanǵan sáwleleniw R^n de sızıqlı funkcional boladı. Haqıyqatında da, qálegen

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$$

elementler hám qálegen α, β sanlar ushın

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^n a_i (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n a_i y_i = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

2. $C[a, b]$ keńisliginde sızıqlı funkcional sıpatında

$$I[x] = \int_a^b x(t) dt$$

integralın qaraw múmkin. Bul funkcionaldıń sızıqlı ekenligi integraldıń qásiyetlerinen kelip shıǵadı.

3. k – tayınlanǵan oń pútın san bolsın. l_2 keńisliktiń qálegen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ elementi ushın $f_k(x) = x_k$ dep alsaq, bul funkcional sızıqlı boladı. Haqıyqatında da, qálegen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in l_2$ elementler hám qálegen α, β sanlar ushın

$$f_k(\alpha x + \beta y) = \alpha x_k + \beta y_k = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

teńligi orınlı.

L sızıqlı keńisliktiń ózlik H úles keńisligi ushın sonday $x_0 \in L$ element tabılıp, $L = L(H, x_0)$ teńligi orınlı bolsa (bunda $L(H, x_0) - H$ kóplik hám x_0 elementtiń sızıqlı qabıǵı), onda H giperúles keńislik dep ataladı. L sızıqlı keńisliktegi $x + H$ ($x \in L$, H - úleskeńislik) kórinistegi kóplikke gipertegislik dep ataymız.

$H = g^{-1}(0)$ giperúles keńislik g funkcionaldıń yadrosı dep ataladı hám $\text{Ker } g$ kóriniste belgilenedi.

L haqıyqıy sızıqlı keńisliktiń qandayda bir L_0 úles keńisliginde f_0 sızıqlı funkcionalı berilgen bolsın. Eger L keńisliginde anıqlanǵan f funkcionalı ushın $x \in L_0$ bolǵanda $f(x) = f_0(x)$ teńligi orınlı bolsa, onda f funkcionalı f_0 funkcionaldıń dawamı dep ataladı.

L sızıqlı keńisliginde anıqlanǵan p funkcionál berilgen bolıp, qálegen $x, y \in L$ elementler hám barlıq $\alpha \in [0,1]$ sanları ushın

$$p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$$

teńsizligi orınlı bolsa, onda p funkcionalı dónes dep ataladı. Eger qálegen $x \in L$ elementler hám barlıq $\alpha > 0$ sanları ushın $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ teńligi orınlı bolsa, onda p funkcionál oń-birtekli delinedi. Oń-birtekli dónes funkcionaldı qısqasha birtekli-dónes dep ataymız.

Mısallar.

1. Qálegen L sızıqlı keńisliktiń nollik elementi birden-bir ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi: Kerisinen boljayıq, yaǵnıy L sızıqlı keńisliktiń eki θ_1 hám θ_2 nollik elementleri bar bolsın. Onda nollik element anıqlaması hám qosıw ámeliniń kommutativliginen

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2.$$

2. Eger L sızıqlı keńisliktiń nolden ozgeshe x elementi ushın $\lambda x = \mu x$ teńligi orınlı bolsa, onda λ hám μ sanlarınıń óz-ara teń ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi. $\lambda x = \mu x$ teńliginiń eki tárepinede $-\mu x$ elementin qossak $(\lambda - \mu)x = 0$ teńligi kelip shıǵadı. Eger $\lambda \neq \mu$ bolsa, onda sızıqlı keńislik anıqlamasındaǵı 5-aksiomadan $(\lambda - \mu)^{-1}[(\lambda - \mu)x] = x = 0$ teńligine iye bolamız. Bul qarama-qarsılıqtan $\lambda = \mu$ teńligi kelip shıǵadı.

3. Eger L sızıqlı keńisliktiń x, y elementleri hám nolden ózgeshe λ sanı ushın $\lambda x = \lambda y$ teńligi orınlı bolsa, onda x hám y elementlerdiń óz-ara teń bolatuǵının dálilleń.

Sheshiliwi. $\lambda x = \lambda y$ teńliginiń eki tárepinede $-\lambda y$ elementin qossaq $\lambda(x - y) = 0$ teńligine iye bolamız. $\lambda \neq 0$ bolǵanlıqtan $\lambda^{-1}[\lambda(x - y)] = x - y = 0$, yaǵnıy $x = y$.

4. Haqıyqıy sanlar maydanında anıqlanǵan hám t ózgeriwshige ǵárezli barlıq kópaǵzalılar sızıqlı keńisliginde $t^2 + 1, t^2 + t, 1$ vektorlar sistemasınıń sızıqlı qabıǵı qanday boladı?

Sheshiliwi. Qálegen α, β, γ haqıyqıy sanları ushın $\alpha(t^2 + 1) + \beta(t^2 + t) + \gamma = (\alpha + \beta)t^2 + \beta t + \alpha + \gamma$ teńligi orınlı bolǵanlıqtan berilgen sistemaniń sızıqlı qabıǵı haqıyqıy koefficientli barlıq kvadrat úsh aǵzalılardıń sızıqlı keńisliginen ibarat boladı.

2-§. Normalanğan keńislik túsiniǵı

K maydanda berilgen X sıızıqlı keńisliktiń hár bir x elementine teris bolmaǵan $\|x\|$ haqıyqıy sanı sáykes qoyılǵan bolıp, bul sáykeslik tómendegi shártlerdi qaanatlandırıń:

$$1. \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0;$$

$$2. \|\lambda x\|=|\lambda| \|x\| \quad (\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in X);$$

$$3. \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in X).$$

Onda X ti normalanğan keńislik dep ataymız. $\|x\|$ san bolsa x elementtiń norması dep ataladı.

Eger $\rho(x, y)$ arqalı $\|x-y\|$ sanın belgilesek, onda $\rho(x, y)$ metrika boladı. Haqıyqatında da,

$$1) \rho(x, y) = \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x=y;$$

$$2) \rho(x, y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1| \|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y, x);$$

$$3) \rho(x, y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Demek, qálegen normalanğan keńislik metrikalıq keńislik boladı eken. Sonıń ushın metrikalıq keńisliklerde kiritilgen túsiniqlerge normalanğan keńisliklerde de anıqlama beriw múmkin. X normalanğan keńislik bolıp, $x_0 \in X$ bolsın.

Orayı x_0 noqatta hám radiusı $r > 0$ ge teń ashıq (tuyıq) shar dep

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x-x_0\| < r\} \quad (\overline{S_r}(x_0) = \{x \in X : \|x-x_0\| \leq r\})$$

kópligine, orayı x_0 noqatta hám radiusı $r > 0$ ge teń sfera dep

$\sigma_r(x_0) = \{x \in X : \|x-x_0\| = r\}$ kópligine ayıladi. x_0 noqattıń $\varepsilon > 0$ dógeregi

dep $S_\varepsilon(x_0)$ ashıq sharǵa aytamız hám onı $O_\varepsilon(x_0)$ kóriniste belgileymiz.

Dógerek túsiniǵı kiritilgennen keyin urınıw, limit, jekkelengen noqatlar; izbe-izliktiń jıyınalılıǵı, fundamental izbe-izlik, kópliktiń tuyıqlanıw kópligi, kópliktiń ishi, ashıq kóplik, tuyıq kóplik túsiniqlerine metrikalıq keńisliklerdeǵı anıqlama beriledi.

Tolıq normalanǵan keńislikti Banax keńisligi dep ataymız.

X normalanǵan keńislik bolıp, Y keńislik X ti óz ishine alıwshı banax keńisligi bolsın. Eger $[X]=Y$ bolsa, onda Y keńislik X tıń toltırıwshısı dep ataladı.

Normalanǵan L keńisliktiń L_0 sıızıqlı úles kópligi tuyıq bolsa, onda L_0 di L diń úles keńisligi dep ataymız.

$\{x_\alpha\}$ sistemanı óz ishine alıwshı eń kishi tuyıq úles keńislik, usı sistemanıń sıızıqlı qabıǵı dep ataladı hám $L(\{x_\alpha\})$ kóriniste belgilenedi. Eger $L(\{x_\alpha\})=L$ bolsa, onda $\{x_\alpha\}$ sistema tolıq delinedi.

Mısallar.

1. Haqıqıy sanlar keńisligi R de normanı $\|x\|=|x|$ kórinisinde kiritiw múmkin ekenligin kórsetiń.

Sheshiliwi. Norma aksiomaların tekseremiz.

$$1) \|x\|=|x|=0 \Leftrightarrow x=0;$$

$$2) \|\lambda x\|=|\lambda x|=|\lambda||x|=\lambda\|x\|;$$

$$3) \|x+y\|=|x+y| \leq |x|+|y|=\|x\|+\|y\|.$$

2. n ólshemli R^n keńisliginde normanı

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (x=(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

kórinisinde kiritiw múmkin ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi.

$$1) \|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n=0 \Leftrightarrow x=0;$$

$$2) \|\lambda x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2}=\sqrt{\lambda^2 \sum_{k=1}^n x_k^2}=\lambda\|x\|;$$

3) Qálegen $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementler ushın

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (x_k y_i - y_k x_i)^2$$

teńligi orınlı. Bul teńlikten Koshi-Bunyakovskiy teńsizligi kelip shıǵadı:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

Bul teńsizlikten paydalanıp

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} + \sum_{k=1}^n y_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \right)^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

teńsizligin jaza alamız. Nátiyjede,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

3. $C[a, b]$ keńisliginde normanı

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

kórinisinde anıqlaymız. Normanıń aksiomaların tekseriń.

Sheshiliwi.

$$1) \quad \|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0;$$

$$2) \quad \|\lambda f\| = \max_{a \leq t \leq b} |(\lambda f)(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |\lambda| |f(t)| = |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = |\lambda| \|f\|;$$

3) Qálegen $f, g \in C[a, b]$ funkciyaları ushın

$$\begin{aligned} |(f+g)(t)| &= |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Nátiyjede, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ teńsizligine iye bolamız.

Anıqlama. Tolıq normalanǵan keńislik Banach kenisligi yamasa B keńislik dep ataladı hám normalanǵan keńislikler ishinde úlken áhmiyetke iye.

3-§. Sızılıqılı úzliksiz funkcionallar

Bizge E sızılıqlı topologiyalıq keńisligi berilgen bolsın. Eger hár bir $x \in E$ elementke qandayda bir $f(x)$ (haqıyqıy yamasa kompleks) san sáykes qoyılğan bolsa, onda E keńisliginde f funkcionál anıqlanğan delinedi. Bul funkcionál ushın

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in E) \quad (\text{additivlik})$$

hám

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (x \in E; \alpha \in \mathbb{R} \text{ ямаса } \alpha \in \mathbb{C}) \quad (\text{birteklilik})$$

teńlikleri orınlı bolsa, onda ol sızılıqlı funkcionál dep ataladı.

Аnıqlama. E keńisligine tiyisli x_0 noqat alınғanda, qálegen $\varepsilon > 0$ sanı ushın x_0 noqattıń sonday U dógeregi bar bolıp, bul dógerekten alınған barlıq x noqatlar ushın

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

teńsizligi orınlı bolsa, onda f funkcionál x_0 noqatta úzliksiz delinedi. Eger f funkcionál E keńisliginiń hár bir noqatında úzliksiz bolsa, onda ol E keńisliginde úzliksiz delinedi.

E keńisliginde anıqlanған f_1 hám f_2 sızılıqlı funkcionallardıń qosındısı dep

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), x \in E$$

kórinisinde anıqlanған f funkcionálға aytıladı hám $f_1 + f_2$ kórinisinde belgilenedi.

f_1 sızılıqlı funkcionaldıń α sanға kóbeymesi dep $f(x) = \alpha f_1(x), x \in E$ kórinisinde anıqlanған f funkcionálға aytamız hám onı αf_1 kórinisinde belgileyміз.

Sızılıqlı funkcionallardıń qosındısı hám sanға kóbeymesi sızılıqlı funkcionál bolatuғını ayqın kórinedi. Sonıń menen birge, sızılıqlı topologiyalıq keńislikte

anıqlanğan sızıqlı úzliksiz funkcionallardıń qosındısı hám sanǵa kóbeymesi sızıqlı úzliksiz funkcionallı boladı.

E sızıqlı topologiyalıq keńisliginde anıqlanğan barlıq sızıqlı úzliksiz funkcionallar kópligi joqarıda kórsetilgen usıl menen qosıw hám sanǵa kóbeytiw ámeleri boyınsha sızıqlı keńislik bolatuǵının tekseriw qıyın emes. Bul sızıqlı keńislik E ge túyinles keńislik delinedi hám E^* kórinisinde belgilenedi.

Z normalanğan keńislik bolǵanda f funkcionaldıń $x_0 \in Z$ noqatta úzliksizligine tómendegishe anıqlama beriw múmkin: qálegen $\varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $\delta > 0$ sanı tabılıp, $\|x - x_0\| < \delta$ teńsizligi orınlı bolǵanda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı.

Z normalanğan keńislikte orayı nul` noqatta hám radiusı birge teń tuyıq sharǵa Z keńisliktiń birlik sharı dep ataymız. Birlik shar ádette Z_1 kórinisinde belgilenedi.

f funkcionallı Z normalanğan keńislikte úzliksiz bolsa, onda $\sup_{x \in Z_1} |f(x)|$ sanına f funkcionaldıń norması delinedi hám $\|f\|$ kórinisinde belgilenedi. Bul jerde normanıń úsh shártin tekserip kóriw qıyın emes. Demek, Z normalanğan keńislikke túyinles bolǵan Z^* keńislikte normalanğan keńisliktiń ádettegi strukturasın kiritiw múmkin. Z^* keńisliktegi normaǵa sáykes keliwshi topologiyaǵa usı keńisligindegi kúshli topologiya delinedi. Kúshli topologiya boyınsha jıyınalılıqtı kúshli jıyınalılıq dep ataymız

Funkcionaldıń norması ushın tómendegi teńlikler orınlı:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in Z_1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Eger sonday ózgermes C sanı bar bolıp, barlıq $x \in Z$ elementler ushın

$$|f(x)| \leq C\|x\| \quad (2)$$

teńsizligi orınlı bolsa, onda f funkcional Z keńisliginde shegaralanǵan delinedi.

1-mısal. Eger f funkcional E sıızqlı topologiyalıq keńisliktiń qandayda bir x tochkasında úzliksiz bolsa, onda ol E keńisliginde úzliksiz bolatuǵının dálilleń.

Sheshiliwi. E keńisliginen qálegen y element, maydannan qálegen $\varepsilon > 0$ san alıp, x noqattıń (1) shártti qanaatlandırıwshı U dógeregin alayıq. $U - x$ kópligi 0 diń dógeregi bolǵanlıqtan $V = U + (y - x)$ kópligi y noqattıń dógeregi boladı. Bul dógerekten qálegen z noqat alayıq. Onda

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x - x)| = |f(z - y + x) - f(x)|$$

teńliginen hám $z - y + x$ elementtiń U kópligine tiysli ekenliginen $|f(z) - f(y)| < \varepsilon$ teńsizliginiń orınlı ekenligi kelip shıǵadı. Demek, V kópligi y ushın (13.1) shártti qanaatlandıradı eken.

2-mısal. f funkcionaldıń E keńisliginde úzliksiz bolıwı ushın nul` noqattıń f funkcional shegaralanǵan bolǵan dógereginiń bar bolıwı zárúr hám jeterli ekenligin dálilleń.

Sheshiliwi. Zárúrligi. f funkcional 0 noqatta úzliksiz bolsa, onda qálegen $\varepsilon > 0$ san ushın 0 noqattıń $|f(x)| < \varepsilon$ teńsizlik orınlı bolatuǵın dógeregi bar boladı.

Jeterligi. 0 noqattıń U dógereginde f funkcional shegaralanǵan bolsın. Onda sonday C shekli sanı bar bolıp, U dógerekten alınǵan qálegen x element ushın $|f(x)| < C$ teńsizligi orınlı boladı. Nátiyjede qálegen $\varepsilon > 0$ sanı ushın, 0 noqattıń $\frac{\varepsilon}{C}U$ dógereginde $|f(x)| < \varepsilon$ teńsizligi orınlı boladı.

3-mısal. R^2 keńisliginde anıqlanǵan $z = ax + by$ funkcionalı R maydanında sıızıqlı bolama?

Sheshiliwi. $z = f(t)$ bolsın, bunda $t = (x, y)$. Qálegen $t_1 = (x_1, y_1)$ hám $t_2 = (x_2, y_2)$ noqatlar ushın

$$\begin{aligned} f(\alpha t_1 + \beta t_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2) + b(\alpha y_1 + \beta y_2) = \\ &= \alpha(ax_1 + by_1) + \beta(ax_2 + by_2) = \alpha f(t_1) + \beta f(t_2). \end{aligned}$$

Demek, berilgen funkcional haqıyqıy sanlar maydanında sıızıqlı boladı eken.

4-mısal. Qálegen additiv funkcional ushın $F(\theta) = 0$, $F(-x) = -F(x)$ teńlikleriniń orınlı ekenligin kórsetiń.

Sheshiliwi. $F(\theta) = F(\theta + \theta) = F(\theta) + F(\theta) = 2F(\theta)$, yaǵnıy $F(\theta) = 0$.
 $0 = F(\theta) = F(x - x) = F(x) + F(-x)$. Nátiyjede, $F(-x) = -F(x)$.

5-mısal. Qálegen additiv funkcional ushın $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ teńliginiń orınlı ekenligin kórsetiń, bunda λ racional san.

Sheshiliwi. n natural sanı ushın

$$f(nx) = f\left(\underbrace{x + x + \dots + x}_n\right) = \underbrace{f(x) + f(x) + \dots + f(x)}_n = nf(x).$$

Nátiyjede, $\lambda = \frac{m}{n}$ ($m, n \in N$) bolǵanda

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}x + \dots + \frac{1}{n}x}_m\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \\ &= \frac{m}{n} * nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} * f\left(n * \frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} f(x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

$\lambda < 0$ bolǵanda $f(-x) = -f(x)$ teńliginen paydalanamız, yaǵnıy
 $f(\lambda x) = f(-(-\lambda x)) = -f(-\lambda x) = -(-\lambda)f(x) = \lambda f(x)$.

6-mısal. f funksional Z normalanđan keńislikte úzliksiz bolsa, onda qálegen $x \in Z$ element ushın $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ teńsizliginiń orınlı bolatuđının dálilleń.

Sheshiliwi. $x \neq 0$ bolđanda $\frac{x}{\|x\|}$ element birlik sharđa tiyisli boladı.

Sonlıqtan $\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \sup_{x \in Z_1} |f(x)| = \|f\|$, yağnıy $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. $x = 0$

bolđanda $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ teńsizliktiń eki tárepide nul` boladı.

II-BAP. SÍZÍQLÍ KEÑISLIKLERDE DIFFERENCIALLIQ ESAP ELEMENTLERI

4-§. Kúshli hám kúshsiz differenciallar

Kúshli differencial (Freshe differencialı). Meyli, X , Y - normalanǵan keńislikler hám F - X keńislikti Y keńislikke sáwlelendiriwshi hám X keńisliktiń bazı bir $G \subset X$ ashıq úles kóliginde anıqlanǵan sáwlelendiriw bolsın. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san ushın $\exists \delta > 0$ sanı tabılıp, $\|h\| < \delta$ teńsizlikten

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| \leq \varepsilon \|h\| \quad (1)$$

teńsizlik kelip shıǵatuǵınday $L_x \in L(X, Y)$ shegaralanǵan sızıqlı operatorı tabılsa, onda bul sáwlelendiriwdi berilgen $x \in G$ noqatta differenciallanıwshi deymiz. Bul qısqasha

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = o(h) \quad (2)$$

kóriniste jazıladı.

(1) den x noqatta differenciallanıwshi sáwlelendiriw usı noqatta úzliksiz bolatuǵını kelip shıǵadı. $L_x h$ ańlatpa (hár bir $h \in X$ ushın Y keńisliktiń elementi bolatuǵın) F sáwlelendiriwdiń x noqattaǵı kúshli differencialı (yaki Freshe differencialı) dep ataladı. L_x sızıqlı operatorıń ózi F sáwlelendiriwdiń x noqattaǵı tuwındısı, anıqraqı, kúshli tuwındısı dep ataladı. Biz bul tuwındını $F'(x)$ simvolı menen belgileybiz.

Eger F sáwlelendiriw x noqatta differenciallanıwshi bolsa, onda tuwındı jalǵız birew boladı. Haqıyqatında da, $L_i \in L(X, Y)$, $i = 1, 2$ operatorlar ushın $\|L_1 h - L_2 h\| = o(h)$ teńlik tek $L_1 = L_2$ bolǵanda ǵana orınlı.

Endi tuwındınıń anıqlamasınan tikkeley kelip shıǵatuǵın geypara elementar faktlerdi anıqlaymız.

1. Eger $F(x) = y_0 = \text{const}$ bolsa, onda $F'(x) \equiv 0$ (yaǵnıy bul jaǵdayda $F'(x)$ nol`lik operator).

2. Úzliksiz sızıqlı L sáwlelendiriwdiń tuwındısı ózine teń:

$$L'(x) = L(x) \quad (3)$$

Tómendegi áhmiyetli nátiyje óz- ózinen túsiniikli emes.

3. (Qoramalı funkciyanıń tuwındısı). Meyli, X, Y, Z - normalanǵan keńislikler, $U(x_0)$ - $x_0 \in X$ noqat dógeregi, F - bul dógerekti Y keńislikke sáwlelendiriwshi sáwlelendiriw, $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ - $y_0 \in Y$ noqat dógeregi hám G - bul dógerekti Z keńislikke sáwlelendiriwshi sáwlelendiriw bolsın. Eger F sáwlelendiriw $x_0 \in X$ noqatta, al G sáwlelendiriw $y_0 \in Y$ noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $H = G \circ F$ sáwlelendiriw ($x_0 \in X$ noqatın bazı bir dógereginde anıqlanǵan) $x_0 \in X$ noqatta differenciallanıwshı hám

$$H'(x_0) = G'(y_0) F'(x_0). \quad (4)$$

4. Meyli, F, G - X ti Y ke sáwlelendiriwshi eki úzliksiz sáwlelendiriw bolsın. Eger F, G sáwlelendiriwler x_0 noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda $F + G$ hám $\alpha \cdot F$ (α - bazı bir san) sáwlelendiriwleri de usı noqatta differenciallanıwshı bolıp,

$$(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0) \quad (5)$$

hám

$$(\alpha \cdot F)'(x_0) = \alpha \cdot F'(x_0) \quad (6)$$

teńlikler orınlı.

Kúshsiz differencial (Gato differencialı). Meyli, F jáne X ti Y ke sáwlelendiriwshi sáwlelendiriw bolsın.

$$\begin{aligned} DF(x, h) &= \left. \frac{d}{dt} F(x + t h) \right|_{t=0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t h) - F(x)}{t} \end{aligned}$$

limit F sáwlelendiriwdiń x noqattaǵı (h ósimdegi) kúshsiz differencialı yaqı Gato differencialı dep ataladı, bul jerde jıyınalıqlıqtı Y keńisligindegi norma boyınsha jıyınalıqlıq sıpatında túsiniw kerek.

$DF(x, h)$ kúshsiz differencialı h boyınsha sıızılı bolmawı da múmkin. Eger bunday sıızılılıq bar, yaǵnıy $DF(x, h) = F'_c(x) h$ teńlik orınlı bolsa, bul jerde F'_c - shegaralanǵan sıızılı operator, onda bul operator kúshsiz tuwındı (yaki Gato tuwındısı) dep ataladı.

Kúshsiz tuwındılar ushın quramalı funkciyanı differenciallaw haqqındaǵı teorema, ulıwma aytqanda, orınlı emes ekenin eskertip ótemiz.

Shekli ósimler formulası. Meyli, $O - X$ keńisliktegi ashıq kóplik hám $[x_0, x]$ kesindi O kóplikte tolıq jatqan kesindi bolsın. Meyli, $F - X$ ti Y ke sáwlelendiriwshi, O kóplikte anıqlanǵan hám $[x_0, x]$ kesindiniń hár bir noqatında F'_c kúshsiz tuwındıǵa iye sáwlelendiriw bolsın. $\Delta x = x - x_0$ dep belgilep hám qálegen $\varphi \in Y^*$ funkcionalın alıp, $0 \leq t \leq 1$ de anıqlanǵan

$$f(t) = \varphi(F(x_0 + t \Delta x))$$

sanlı funkciyanı qaraymız. Bul funkciya t boyınsha differenciallanıwshı. Haqıyqattan da,

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \varphi\left(\frac{F(x_0 + t \Delta x + \Delta t \Delta x) - F(x_0 + t \Delta x)}{\Delta t}\right)$$

ańlatpada φ úzliksiz sıızılı funkcional belgisi astında limitke ótiw múmkin. Nátiyjede

$$f'(t) = \varphi(F'_c(x_0 + t \Delta x) \Delta x)$$

teńlikke iye bolamız. f funkciyaǵa $[0, 1]$ kesindide shekli ósimler formulasın qollanıp,

$$f(1) = f(0) + f'(\theta), \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

yaǵnıy

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \varphi(F'_c(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x) \quad (7)$$

formulaǵa iye bolamız. Bul teńlik qálegen $\varphi \in Y^*$ funkcional ushın orınlı (θ shama, álbette, φ ge ǵárezli). (u) formuladan

$$\|\varphi(F(x) - F(x_0))\| \leq \|\varphi\| \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'_c(x_0 + \theta \Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (8)$$

teńsizlikke iye bolamız. Endi nol`den ózgeshe φ funkcionaldı

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \|\varphi\| \cdot \|F(x) - F(x_0)\|$$

bolatuǵınday qılıp tańlap alamız (bunday funkcional Xan- Banaxtıń teoremasınıń saldarı boyınsha bar). Usınıń menen birge (8) formuladan

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'_c(x_0 + \theta \Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (9)$$

teńsizlikke iye bolamız. Bul teńlikti sanlı funkciyalar ushın shekli ósimler formulasınıń analogı sıpatında qaraw múmkin.

(9) formulanı

$$x \rightarrow F(x) - F'_c(x_0) \Delta x$$

sáwlelendiriwge qollanıp,

$$\begin{aligned} & \|F(x) - F(x_0) - F'_c(x_0) \Delta x\| \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|F'_c(x_0 + \theta \Delta x) - F'_c(x_0)\| \cdot \|\Delta x\| \end{aligned} \quad (10)$$

teńsizlikke iye bolamız.

Kúshli hám kúshsiz differenciallanıwshılıq arasındagı baylanıs. Kúshli hám kúshsiz differenciallanıwshılıq hátte shekli ólshemli keńislikler ushın da hár qıylı túsinikler boladı. Haqıyqatında da, sanlı $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ funkciya ushın $n \geq 2$ jaǵdayda qálegen tayınlangan $h = (h_1, \dots, h_n)$ ushın $\frac{d}{dt} f(x + t h)$ tuwındınıń bar bolıwınan bul funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı, yaǵnıy onıń $f(x + h) - f(x)$ ósimin sıızıqlı (h boyınsha) bólegi menen h qa qarata tártibi birden úlken sheksiz kishi qosındısı kórinisinde jazıw múmkinligi, kelip shıqpaydı.

Bul jerde eń ápiwayı mısál sıpatında eki ózgeriwshili

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \quad (11)$$

funkciyanı qaraw múmkin. Bul funkciya tegisliktiń hámme noqatlarında ((0, 0) noqatında da) úzliksiz. (0, 0) noqatında kúshsiz differencial bar hám nol`ge teń, sebebi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t h) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} = 0.$$

Usınıń menen birge bul differencial (11) funkciyanıń (0, 0) noqattaǵı ósiminiń sıızıqlı bas bólegi bolmaydı. Haqıyqatında da, eger $h_2 = h_1^2$ dep alsaq, onda

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0)}{\|h\|} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^5}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Biraq eger F sáwlelendiriw kúshli tuwındıǵa iye bolsa, onda ol kúshsiz tuwındıǵa da iye bolıp, kúshli hám kúshsiz tuwındılar óz- ara teń boladı. Haqıyqatında da, kúshli differenciallanıwshı sáwlelendiriw ushın

$$F(x + t h) - F(x) = F'(x)(t h) + o(t h) = t F'(x) h + o(t h)$$

hám

$$\frac{F(x + t h) - F(x)}{t} = F'(x) h + \frac{o(t h)}{t} \rightarrow F'(x) h.$$

F sáwlelendiriwdiń kúshsiz differenciallanıwshılıǵınan kúshli differenciallanıwshılıǵı kelip shıǵatuǵın shártlerdi anıqlaymız.

1- teorema. Eger x_0 noqattıń bazı bir U dógeresinde F sáwlelendiriwdiń $F'_c(x)$ kúshsiz tuwındısı bar bolıp, bul dógerekte x ózgeriwshiniń x_0 noqatta úzliksiz (operatorlıq) funkciyası bolsa, onda x_0 noqatta kúshli $F'(x_0)$ tuwındı bar hám ol kúshsiz tuwındıǵa teń.

Differenciallanıwshı funkcionallar. Biz X normalanǵan keńislikti Y normalanǵan keńislikke sáwlelendiriwshi F sáwlelendiriwdiń differencialı túsiniǵın berdik. Bunday sáwlelendiriwdiń hár bir x noqattaǵı $F'(x)$ tuwındısı X ti Y ke sáwlelendiriwshi sıızıqlı operator, yaǵnıy $L(X, Y)$ keńislik elementi. Dara jaǵdayda, eger Y - sanlar kósheri bolsa, onda F - X

te san mánislerdi qabıllaytuǵın funkciya, yaǵnıy funkcional. Sonıń menen birge F funkcionaldın x_0 noqattaǵı tuwındısı sıızıqlı funkcional (x_0 noqatqa ǵárezli), yaǵnıy X^* keńislik elementi.

5-§. Joqarı tártipli tuwındı hám differentciallar

Joqarı tártipli tuwındılar. Meyli, $F: X \rightarrow Y$ - differentciallanıwshı sáwlelendiriw bolsın. Onıń $F'(x)$ tuwındısı hár bir $x \in X$ ushın $L(X, Y)$ keńislik elementi, yaǵnıy F' - X keńislikti $L(X, Y)$ sıızıqlı operatorlar keńisligine sáwlelendiriwshi sáwlelendiriw. Eger bul sáwlelendiriw differentciallanıwshı bolsa, onda onıń tuwındısı F' sáwlelendiriwdiń ekinshi tuwındısı dep ataladı hám F'' simvolı menen belgilenedi. Solay etip, $F''(x)$ - X keńislikti $L(X, Y)$ keńisligine sáwlelendiriwshi sıızıqlı operatorlardıń $L(X, L(X, Y))$ keńisliginiń elementi boladı. Bul keńisliktiń elementleri bisıızıqlı sáwlelendiriwler dep atalatuǵın sáwlelendiriwler kórinisinde qolaylı hám kórgizbeli interpretaciyaǵa iye ekenin kórsetemiz.

Eger X keńislikten alınǵan hár bir x, x' elementlerdiń tártiplesken juplıǵına tómendegi shártler orınlanatuǵınday qılıp $y = B(x, x') \in Y$ element saykes qoyılǵan bolsa, onda X keńislikti Y keńislikke sáwlelendiriwshi bisıızıqlı sáwlelendiriw berilgen deymiz`

1) X keńislikten alınǵan qálegen x_1, x_2, x'_1, x'_2 elementler hám qálegen α, β sanlar ushın

$$\begin{aligned} B(\alpha x_1 + \beta x_2, x'_1) &= \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_2, x'_1), \\ B(x_1, \alpha x'_1 + \beta x'_2) &= \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_1, x'_2); \end{aligned}$$

2) Qálegen $x, x' \in X$ ushın

$$\|B(x, x')\| \leq M \|x\| \cdot \|x'\| \quad (12)$$

teńsizligin qanaatlandıratuǵın oń M sanı tabıladı.

Bul shártlerdiń birinshisi B sáwlelendiriw óziniń eki argumentiniń hár birewi boyınsha sıızıqlı ekenin ańlatadı~ ekinshi shárt B sáwlelendiriw argumentleriniń jıynaǵı boyınsha úzliksizligi menen teń kúshli ekenin kórsetiw qıyın emes.

(12) teńsizlikti qanaatlandıratuǵın M sanlardıń eń kishisi B bisızıqlı sáwlelendiriwdiń norması dep ataladı hám $\|B\|$ dep belgilenedi.

Bisızıqlı sáwlelendiriwler ústindegi sıızıqlı ámeller ádettegi usıl menen anıqlanadı hám ádettegi qásiyetlerge iye. Solay etip, X keńislikti Y keńislikke sáwlelendiriwshi bisızıqlı sáwlelendiriwlerdiń ózleri de sıızıqlı normalanǵan keńislik dúzedi, bul keńislikti $B(X^2, Y)$ dep belgileyemiz. Eger Y tolıq keńislik bolsa, onda $B(X^2, Y)$ keńislik te tolıq.

$L(X, L(X, Y))$ keńisliginiń hár bir A elementine

$$B(x, x') = (Ax) x' \quad (13)$$

teńligi járdeminde $B(X^2, Y)$ keńislik elementin sáykes qoyıw múmkin. Bul sáykeslik sıızıqlı bolatuǵını óz- ózinen túsiniikli. Ol izometriyalıq ta bolatuǵının hám $L(X, L(X, Y))$ keńisligin pútkil $B(X^2, Y)$ keńislikke sáwlelendiretuǵının kórsetemiz. Haqıyqatında da, eger $y = B(x, x') = (Ax) x'$ bolsa, onda

$$\|y\| \leq \|Ax\| \cdot \|x'\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x'\|,$$

bunnan

$$\|B\| \leq A. \quad (14)$$

Ekinshi tárepten, eger B bisızıqlı sáwlelendiriw berilgen bolsa, onda tayınlanǵan $x \in X$ ushın $x' \rightarrow (Ax) x' = B(x, x')$ sáwlelendiriw X ti Y ke sáwlelendiriwshi sıızıqlı sáwlelendiriw boladı.

Solay etip, hár bir $x \in X$ elementke $L(X, Y)$ keńisliktiń Ax elementi sáykes qoyıladı. Ax tiń x tan sıızıqlı ǵárezli bolatuǵını óz- ózinen málim, yaǵnıy B bisızıqlı sáwlelendiriw $L(X, L(X, Y))$ keńisliktiń bazı bir A elementin anıqlaydı. Sonıń menen birge B sáwlelendiriw A boyınsha (13) formula járdeminde tiklenetuǵını hám

$$\|Ax\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \|(Ax) x'\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \|B(x, x')\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$$

bolatuğını túsiniikli, bunnan

$$\|A\| \leq B. \quad (15)$$

(14) hám (15) teńsizliklerden $\|A\| = \|B\|$ bolatuđını kelip shıǵadı. Solay etip, $B(X^2, Y)$ hám $L(X, L(X, Y))$ keńislikler arasındadı sáykeslik sızıqlı hám izometriyalıq, demek, óz-ara bir mánisli. Usınıń menen birge $L(X, L(X, Y))$ keńisliktiń obrazı pútkil $B(X^2, Y)$ keńisligi.

$F''(x)$ ekinshi tuwındı $L(X, L(X, Y))$ keńisliktiń elementi bolatuđının bilip alıp edik. Házir ǵana joqarıda ayılǵanlar boyınsha $F''(x)$ tuwındını $B(X^2, Y)$ keńisliktiń elementi dep esaplawımız múmkin.

Elementar mısál qaraymız. Meyli, X, Y - sáykes túrde m, n ólshemli shekli ólshemli Evklid keńislikleri bolsın. Onda X ti Y ke sáwlelendiriwshi hár bir sızıqlı sáwlelendiriwdi bazı bir $(n \times m)$ -matrica menen anıqlaw múmkin. Solay etip, $F: X \rightarrow Y$ sáwlelendiriwdiń $F'(x)$ tuwındısı matrica ($x \in X$ tan ǵárezli) boladı. Eger X, Y keńisliklerde bazisler, mısalı, X ta $e_1, \dots, e_m$ hám Y te $f_1, \dots, f_n$, saylap alıńǵan bolsa, onda

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m, \quad y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n.$$

Sonda $y = F(x)$ sáwlelendiriwdi

$$y_1 = F_1(x_1, \dots, x_m),$$

.....

$$y_n = F_n(x_1, \dots, x_m)$$

kórinisinde jazıw múmkin hám

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Bul jaǵdayda $F''(x)$ ekinshi tuwındı $n \times m \times m$ ólshemli $a_{k,i,j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$

shamalar jıynaǵı menen anıqlanadı. $a_{k,i,j}$ shamalardıń bunday jıynaǵın

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^m a_{k,i,j} x_i$$

formula menen anıqlanǵan X keńisligin $L(X, Y)$ keńisligine sáwlelendiriwshi sıızıqlı sáwlelendiriw yaki

$$y_k = \sum_{i,j=1}^n a_{k,i,j} x_i x'_j$$

formula menen anıqlanǵan X ti Y ke bisızıqlı sáwlelendiriw sıpatında qaraw múmkin.

$F: X \rightarrow Y$ sáwlelendiriwdiń úshinshi, tórtinshi hám ulıwma n – tártipli tuwındısı túsiniǵın, n – tártipli tuwındını $(n-1)$ – tártipli tuwındınıń tuwındısı sıpatında anıqlap, kiritiw múmkin. Sonıń menen birge n – tártipli tuwındı $L(X, L(X, \dots, L(X, Y)))$ keńisliktiń elementi bolatuǵını da óz- ózinen málim. Ekinshi tuwındı ushın júrgizilgen pikirlewlerdi tákirarlap, bul keńisliktiń hár bir elementine X ti Y ke $N(X^n, Y)$ - n – sıızıqlı sáwlelendiriwler keńisliginiń elementin sáykes qoyıw múmkin. Bunda n – sıızıqlı sáwlelendiriw degende X ten alınǵan $(x', x'', \dots, x^{(n)})$ elementlerdiń tártiplesken sistemaları menen Y keńislik elementleri arasındadı hár

bir $x^{(i)}$ element boyınsha, basqa elementler tayınlanganda, sıızıqlı hám bazı bir $M > 0$ ushın

$$\|N(x', x'', \dots, x^{(n)})\| \leq M \|x'\| \cdot \|x''\| \cdot \dots \cdot \|x^{(n)}\|$$

teńsizlikti qanaatlandıratuǵın sáykeslikti túsinemiz. Solay etip, $F: X \rightarrow Y$ sáwlelendiriwdiń n – tártipli tuwındısı $N(X^n, Y)$ keńislik elementi dep esaplaw múmkin.

Joqarı tártipli differenciallar. Biz F cawlelendiriwdiń (kúshli) differencialın $h \in X$ elementke $F'(x)$ sızıqlı operatordı qollanıw nátiyjesi, yaǵnıy $dF = F'(x)h$ sıpatında anıqlaǵan edik. Ekinshi tártipli differencial $d^2F = F''(x)(h, h)$, yaǵnıy $F''(x) \in B(X^2, Y)$ sawlelendiriwge sáykes kvadrat ańlatpa sıpatında anıqlanadı. Usıǵan uqsas $d^n F = F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h)$, yaǵnıy $F^{(n)}(x)$ sawlelendiriwdegi $(h, h, \dots, h) \in X \times X \times \dots \times X$ elementtiń Y keńisliktegi obrazı bolatuǵın elementi n – tártipli differencial dep ataladı.

Taylor formulası. F cawlelendiriwdiń kúshli differenciallanıwshılıǵı $F(x+h) - F(x)$ ayırmanı sızıqlı aǵza menen $\|h\|$ ke qarata birden joqarı tártipke iye qosılıwshınıń qosındısı sıpatında jazıw múmkinligin ańlatadı. Sanlı funkciyalar ushın Taylor formulasınıń analogı bolǵan formula bul fakttiń ulıwmalastırılıwı boladı.

2-teorema. Meyli, $F: X \rightarrow Y$ - bazı bir $G \subset X$ oblast`ta anıqlanǵan hám  $F^{(n)}(x)$  tuwındı  $G \subset X$  oblast`ta bar hám x ózgeriwshiniń teń ólshemli úzliksiz funkciyası bolsın. Onda

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) + \omega(x, h), \quad (16)$$

teńlik orınlı, bul jerde $\|\omega(x, h)\| = o(\|h\|^n)$.

6-§. Ekstremallıq máseleler

Sızıqlı bolmağan funkcionallıq analizdiń tiykarǵı máseleleriniń biri funkcionallardıń ekstremumların tabıw bolıp tabıladı.

1. Ekstremumnıń zárúrli shártleri. F haqıyqıy funkcionál X

Banax keńisliginde anıqlanǵan bolsın. Eger $x_0 \in X$ noqattıń bazı bir dógeresindegi qálegen x ushın $F(x) - F(x_0) \geq 0$ ($F(x) - F(x_0) \leq 0$) teńsizlik orınlansa F funkcionál x_0 noqatta minimumǵa (maksimumǵa) iye dep ataladı. Maksimum hám minimum noqatları F ushın ekstremum noqatları dep ataladı.

Matematikalıq analizdan málim, n ózgeriwshili f funkciya $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta ekstremumǵa iye bolıp, differenciallanıwshı bolsa, onda $df = 0$, yaǵnıy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

boladı. Ekstremumnıń bul zárúrli shárti qálegen normalanǵan keńislikler ushın da orınlı.

1-teorema. Differenciallanıwshı F funkcionál x_0 noqatta ekstremumǵa iye bolıwı ushın onıń x_0 noqattaǵı differencialı hár bir h da nolge teń bolıwı zárúr, yaǵnıy

$$F'(x_0)h \equiv 0$$

Dálillew. F differenciallanıwshı bolǵanı sebepli

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + o(h)$$

boladı. Eger $F'(x_0)h$ bazı bir $h \in X$ ushın nolden ózgeshe bolsa, jeterli dárejede kishi λ haqıyqıy san ushın $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ ańlatpanıń belgisi $F'(x_0)(\lambda h)$ tıń belgisi menen birdey boladı. $F'(x_0)$ sızıqlı funkcionál bolǵanı ushın $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$. Demek, eger $F'(x_0)h \neq 0$ bolsa,

$F(x_0 + h) - F(x_0)$ ayırma h qálegen kishi bolǵanda oń bolıwı da, teris bolıwı da múmkin, yaǵnıy x_0 noqatta F ekstremumǵa iye emes.

Mısallar. 1. $C[a, b]$ keńislikte tómendegi

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t)) dt$$

funkcionaldı qaraymız. Eger f funkciya birinshi tártipli úzliksiz tuwındılarǵa iye bolsa, F funkcional $C[a, b]$ keńislikte differenciallanıwshı.

Haqıyqatında da,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^b [f(t, x+h) - f(t, x)] dt = \\ &= \int_a^b f'_x(t, x) h(t) dt + o(h) \end{aligned}$$

Bunnan

$$dF = \int_a^b f'_x(t, x(t)) h(t) dt$$

Eger qálegen $h \in C[a, b]$ ushın $dF = 0$ bolsa, onda $f'_x(t, x) = 0$ boladı.

Haqıyqatında da, qálegen $x(t) \in C[a, b]$ ushın $f'_x(t, x)$ funkciya t ǵa qarata úzliksiz. Eger ol bazı bir $t_0 \in [a, b]$ ushın nolden ózgeshe bolsa, yaǵnıy máselen, $f'_x(t_0, x(t_0)) > 0$ bolsa, onda t_0 dıń bazı bir (α, β) dógereginiń hár bir t noqatında da $f(t, x(t)) > 0$. Demek, tómendegi

$$h(t) = \begin{cases} (t - \alpha)(\beta - t), & \alpha \leq t \leq \beta \\ 0, & \text{qalg'an } t \in [a, b] \text{ ushin} \end{cases}$$

funkciyanı alsaq, onda

$$\int_a^b f'_x(t, x(t)) h(t) dt > 0$$

boladı. Bul qarama-qarsılıq $f'_x(t, x) = 0$ ekenligin kórsetedi. $f'_x(t, x(t)) = 0$ teńleme F funkcional ekstremumǵa iye bolıwı múmkin bolǵan iymek sıızıqtıń teńlemesi boladı.

2. $C[a, b]$ kenislikte basqa funkcionaldı alamız:

$$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) x(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

bul jerde $K(\xi_1, \xi_2)$ funkciya $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$ shártti qanaaatlandırıwshı úzliksiz funkciya. Sońınan

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) [(x(\xi_1) + h(\xi_1))(x(\xi_2) + \\ &+ h(\xi_2)) - x(\xi_1)x(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) [x(\xi_1)h(\xi_2) + \\ &+ x(\xi_2)h(\xi_1)] d\xi_1 d\xi_2 + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) h(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_a^b \int_a^b K(\xi_2, \xi_1) x(\xi_2)h(\xi_1) d\xi_2 d\xi_1 + \\ &+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) h(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) h(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

bunnan $dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$. Демек, $x \in C[a, b]$ экстремум

noqatı bolsa, onda qálegen $h \in C[a, b]$ ushın

$$\int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1)h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

boladı. Bunnan 1-mısaldaǵıday, qálegen $\xi_2 \in [a, b]$ ushın

$$\int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) d\xi_1 = 0$$

teńlik kelip shıǵadı.

x qa qarata bul tenlemenin bir sheshimi $x = 0$. Basqa sheshimlerin bar-jog ekenligi $K(\xi_1, \xi_2)$ funkciyaga baylanisli ham qosimsha tekseriwlerdi talap etedi.

2. Ekstremumnin jetkilikli shartleri. n ozgeriwshili funkciyanı qaraymız. $df = 0$ shartti qanaatlandırıwshı $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta ekstremumın bar bolıwı ekinshi differencialga baylanisli, yagnıy tómendegiler orınlı:

1) Eger $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta minimumga (maksimumga) iye bolsa, ham $d^2 f$ bar bolsa, onda bul noqatta $d^2 f \geq 0$ ($d^2 f \leq 0$) boladı.

2) Eger $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ noqatta tómendegi

$$df = 0, \quad d^2 f = \sum_{i,k=1}^n \frac{d^2 f}{dx_i dx_k} dx_i dx_k > 0 \quad (< 0) \quad (\exists i : dx_i \neq 0)$$

qatnaslar orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya bul noqatta minimumga (maksimumga) iye boladı.

Basqasha etip aytqanda, $df = 0$ shartti qanaatlandırıwshı noqatta minimum (maksimum) bolıwı ushın $d^2 f \geq 0$ ($d^2 f \leq 0$) bolıwı zárúrli shárt, $d^2 f > 0$ ($d^2 f < 0$) bolıwı jetkilikli shárt.

Endi usı máselelerdi qálegen Banax keńisligindegi funkcionallar ushın kóremiz.

2-teorema. X Banax keńisliginde anıqlanğan F haqıyqıy funkcional $x_0 \in X$ noqattın bazı bir dógeresinde úzliksiz ekinshi tártipli tuwındıga iye bolsın. Eger bul funkcional x_0 noqatta minimumga iye bolsa, onda qálegen $h \in X$ ushın

$$F''(x_0)(h, h) \geq 0$$

boladı.

Dálillew. Teylor formulasına muwapıq

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2!}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$$

Funkcional x_0 noqatta minimumğa iye bolğanı ushın 1-teoremağa kóre

$F'(x_0)h = 0$, yaǵnıy

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) \quad (17)$$

boladı. Eger bazı bir $h \in X$ ushın $F''(x_0)(h, h) < 0$ bolsa, onda

$F''(x_0)(\varepsilon h, \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)(h, h)$ teńlikke kóre $F''(x_0)(h, h) < 0$ shártti

qanaatlardıńwshı h vektordıń normasıń qálegenshe kishi etip tańlap alıw

múmkin. Biraq $\|h\|$ kishi bolǵanda $\frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$ ańlatpanıń belgisi

$F''(x_0)(h, h)$ ańlatpanıń belgisi menen birdey boladı, yaǵnıy

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < 0$$

Bul x_0 noqattıń minimum noqat ekenligine qarama-qarsı. Demek,

$F''(x_0)(h, h) < 0$ dep alǵanımız nadurıs, yaǵnıy $F''(x_0)(h, h) \geq 0$ boladı. Teorema

dálillendi.

Ekstremumnıń bar bolıwınıń jetkilikli shártin Banax keńisligine tuwrıdan-

tuwrı ótkiziw múmkin emes. Yaǵnıy $F''(x_0)(h, h) > 0$ ($h \neq \theta$) bolsa, x_0 noqatta

minimum bolıwı shárt emes.

Mısal. l_2 kenislikte funkcionaldı tómendegishe kiritemiz:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4, \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$$

θ noqatta birinshi differencial nolge teń, sebebi

$$F(\theta + h) - F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4$$

hám

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4 \right|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2 + \|h\|^4}{\|h\|} = 0$$

Ekinshi differencial bolsa $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3}$ qatargá teń, yaǵnıy qálegen h ushın oń boladı.

Biraq θ noqatta funktsional minimumǵa iye emes. Haqıyqatında da,

$$F(\theta) = 0,$$

$$F\left(0, 0, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0$$

yaǵnıy noldıń qálegen dógeresinde sonday x noqat bar,

$$F(x) < F(\theta)$$

boladı.

Keltirilgen mısaldan kórinip tur, funktsional bazı bir noqatta ekstremumǵa iye bolıwı ushın kúshlirek shártler kerek.

Eger $B(x, y)$ bisızıqlı funktsional bolsa, $B(x, x)$ funktsional x qa qarata kvadratlıq funktsional dep ataladı. Eger sonday $c > 0$ san bar bolıp, qálegen $x \in X$ ushın $B(x, x) \geq c\|x\|^2$ teńsizlik orınlansa, $B(x, x)$ kvadratlıq funktsional kúshli oń dep ataladı.

3-teorema. X keńisliktegi F funktsional x_0 noqatta minimumǵa iye bolıwı ushın tómendegi shártler jetkilikli:

$$1) dF(x_0) = 0;$$

$$2) d^2F(x_0) \text{ kúshli oń kvadratlıq funktsional.}$$

Dálillew. ε oń sandı sonday tańlaymız, $\|h\| < \varepsilon$ bolǵanda (1) formuladaǵı $o(\|h^2\|)$ san ushın $o(\|h^2\|) < \frac{c}{4}\|h\|^2$ teńsizlik orınlansın; bul jerde c san sonday, onıń ushın $d^2F(x_0)(h, h) \geq c\|h\|^2$ boladı. Bul jaǵdayda (17) formulaǵa kóre $\|h\| < \varepsilon$ ushın

$$\begin{aligned}
F(x_0 + h) - F(x_0) &= \frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) > \\
&> \frac{1}{2} c \|h\|^2 - \frac{1}{4} c \|h\|^2 = \frac{1}{4} c \|h\|^2 > 0
\end{aligned}$$

boladı, yaǵnıy x_0 minimum noqatı. Teorema dälillendi.

Juwmaqlaw

Funkcionallıq analizdiń ayrıqsha abzallıqlarınan biri quramalı funkcionallıq keńisliklerdi metrika, norma hám skalyar kóbeyme járdeminde ápiwayıraq, jaqsı úyrenilgen keńisliklerge, máselen tuwrı sızıqqa qolay tárizde sáwlelendirip úyreniwden ibarat. Funkcionallıq analizde sızıqlı funkcionallıq hám sızıqlı operator túsiniqleri úlken áhmiyetke iye. Biraq ayırım máseleler sheksiz keńisliklerdegi sızıqlı bolmağan funkcionallar hám operatorlardı úyreniwge alıp keledi.

Bul pitkeriw qánigelik jumısı sızıqlı keńisliklerde differenciallıq esap elementlerin úyreniwge arnalğan.

Pitkeriw qánigelik jumısta sızıqlı keńislik anıqlaması berilip, oğan baylanıslı mısallar keltirilgen, normalanğan keńislik, norma túsiniqi kiritilgen, Banach keńisligine anıqlama berilgen, olarğa baylanıslı mısallar sheship kórsetilgen. Kúshli differencial, kúshsiz differencial, shekli ósimler formulası berilip, teoremlar keltirilgen, joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar, Taylor formulası keltirilgen, olarğa baylanıslı teoremlar, mısallar berilgen. Sızıqlı bolmağan funkcionallıq analizdiń tiykargı máseleleriniń biri funkcionallardıń ekstremumların tabıw máselesi qaralıp, ekstremumnıń zárúrli hám jetkilikli shártleri keltirilgen, mısallar kórsetilgen.

Ádebiyatlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: «Наука», 1981.
2. Sarimsoqov T. A. Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. - T.: «O'qituvchi», 1982.
3. Sarimsoqov T. A. Funktsional analiz kursi. - T.: «O'qituvchi», 1980.
4. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Funktsiyalar nazariyasi. T.: «O'AJBNT» Markazi, 2004.
5. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Funktsional analiz. T.: TDPU. 2008.
6. Ibragimov M. M. Funkcionalliq analizden misallar. - N.: «Bilim», 2007.
7. G'aymnazarov G., G'aymnazarov O.G. Funktsional analiz kursidan masalalar yechish. T.: “Fan va texnologiya”, 2006.-114b.
8. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: «O'zbekiston». 1 t: 1994.
9. Azlarov. T., Mansurov. X., Matematik analiz. T.: « O'zbekiston». 2 t . 1995.
10. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>
11. <http://www.allmath.ru/>
12. www.nns.ru
13. www.library.ru
14. <http://www.libedy.ru/nauka/matematika/>