ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ ҲУЗУРИДАГИ
БИР МАРТАЛИК ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

САБИРОВ КАРИМЖОН КАБИЛДЖАНОВИЧ

ГРАФЛАРДА НОЧИЗИҚЛИ ШРЁДИНГЕР ТЕНГЛАМАСИ ВА СОЛИТОН ДИНАМИКАСИНИ МОДДЕЛАШТИРИШ

05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
01.04.02 – Назарий физика

ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент - 2019

УДК 530.1, УДК 519.957, УДК: 532.546:004.942

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)
Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ ҲУЗУРИДАГИ
БИР МАРТАЛИК ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

САБИРОВ КАРИМЖОН КАБИЛДЖАНОВИЧ

ГРАФЛАРДА НОЧИЗИҚЛИ ШРЁДИНГЕР ТЕНГЛАМАСИ ВА СОЛИТОН ДИНАМИКАСИНИ МОДДЕЛАШТИРИШ

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
01.04.02 – Назарий физика**

**ФИЗИКА МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент - 2019

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM21 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбарлар:	**Матрасулов Даврон Уринович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Арипов Мерсаид Мирсиддикович физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Тахиров Жозил Остонович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Абдумаликов Абдулазиз Абдуваҳобович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд Давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc 27.06.2017.FM 01.02 рақамли Илмий кенгаш қошидаги Бир марталик Илмий Кенгашнинг 2019 йил «30» май соат 15^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998971) 227-12-24, факс: (+998971) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин. (___ рақами билан рўйхатга олинган.) (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998971) 227-02-24).

Диссертация автореферати йил «____»____________куни тарқатилди.
(2019 йил «22» апрелдаги 1 рақамли реестр баённомаси.)

А. Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З. Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Р.Дж.Аллоев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш қошидаги
Илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д,профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар ҳозирги пайтда долзарб бўлган ресурс-тежамкор материаллар яратиш ва улар асосида электрон қурилмалар ишлаб чиқиш масалаларига келтирилади. Бу борада стационар Шредингер, синус-Гордон, Дирак ва Боголюбов де Жен тенгламалари квант физикаси, квант криптографияси, оптика ва конденцирланган муҳитлар физикаси каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Тармоқланган тузилмаларда тўлқин жараёнларини оптимизация қилиш, ахборот, тўлқин ва заррачалар узатишни бошқариш масалаларини ечишда ночизиқли математик моделлар асос сифатида хизмат қилади. Шу сабабли, метрик графларда тўлқин тенгламалар ёрдамида тармоқланган тизимлардаги тўлқинлар динамикасининг математик моделларини қуриш, ночизиқли тўлқин тенгламаларининг сонли ечимлари учун самарали алгоритмни ишлаб чиқиш ва татбиқ этиш математик моделлаштиришнинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда чизиқли Шрёдингер тенгламаси ёрдамида ифодаланган чизиқли тўлқинларнинг хоссаларини аниқлаш ва ночизиқли тўлқин тенгламаларининг сонли ечиш усулларини тадқиқ қилиш оптика ва квант физикасининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бунда содда графларда чегаравий шартлар билан берилган стационар ночизиқли Шредингер тенгламасини ечиш ва солитон транспорти моделларини ишлаб чиқиш оптика, нанофизика ва назарий физика масалаларини ечишда муҳим аҳамият касб этмоқда. Шу сабабли графларда ночизиқли тўлқин тенгламаларининг солитон ечимларини топиш ва уларнинг турғунлик хоссаларини ўрганиш ҳамда ахборотни самарали узатиш жараёнларини математик моделлаштириш, самарали сонли ҳисоблаш алгоритмлари ва дастурларини яратиш мақсадли тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган амалий математика ва назарий физиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, квант физикаси, конденцирланган муҳитлар физикаси ва полимерлар физикаси масалаларини ечишда математик моделлаштириш ва ҳисоблаш математикаси усулларидан фойдаланган ҳолда назарий тадқиқотлар олиб бориш ҳамда амалий ишланмаларни яратишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Тармоқланган тузилмаларда ночизиқли тенгламаларнинг солитон ечимини топиш, солитон транспортини математик моделлаштириш муаммоларини тадқиқ этиш ва долзарб назарий ҳамда амалий масалаларни ечишда салмоқли натижаларга эришилди. “Электроника, наноматериаллар физикаси ва амалий математика” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1].

---

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори

Қарор ижросини таъминлашда дифференциал тенгламаларни графларда ечиш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” ҳамда “Назарий физика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Дискрет ва тармоқланган тузилмаларда тўлқин жараёнларини моделлаштириш ҳамда сонли ечиш усулларини яратиш борасида дунё олимлари томонидан тармоқланган ва тармоқсимон тузилмаларни тўр сифатида қараган ҳолда кучли боғланиш методи (tight binding approach) ни қўллаб, қатор муҳим натижалар олинди. Жумладан, графларда эволюцион тенгламалар ёрдамида чизиқли тўлкинлар динамикасини моделлаштиришни ўрганиш илк бор 1989 йил Exner ва Seba ишида келтирилган. Кейинроқ эса Kostrykin ва Schrader метрик графларда Шрёдингер оператори учун умумий кўринишдаги чегаравий шартларни қаноатлантириб, аниқ математик масаласини ва тармокланган тизимларда зарра ва тулкин динамикасининг аниқ математик моделини таклиф этган. Мазкур моделнинг ночизиқли умумлашмаси, яъни метрик графларда ночизиқли Шрёдингер тенгламаси орқали ифодаланувчи тармоқланган тузилмаларда солитон динамикаси модели илк бора К.Накамура, С.Савада, Д.Матрасулов ва уларнинг ҳаммуаллифлари тарафидан ишлаб чиқилган. Хусусан, уларнинг ишларида фундаментал сақланиш қонунларидан келиб чиқиб, графнинг тармоқлантирувчи нуқталарида умумий чегаравий шарт олинган.

Графнинг тугун нуқталаридаги чегаравий шартлар Р.Адами, Д.Нойа, Д.Пленовский каби олимлар томонидан олинган ва бу шартлар графларда турғун ва югирувчи солитонларни, жумладан, тармоқланган тузилмаларда релятивистик солитонларни моделлаштириш учун ҳам қўлланилган. Кортеге де Фриз тенгламаси орқали ифодаланувчи жараёнларни А.Хасанов, Г.Уразбаев ва уларнинг шогирдлари томонидан етарлича ўрганилган. Газ-нефт, иссиқлик тарқалиш, ночизиқли биологик популяция жараёнлари Н.Муҳиддинов, М.Арипов, Ш.Саъдуллаева, З.Рахмонов каби олимлар томонидан сонли тадқиқ этилган.

Дискрет ва тармоқланган тузилмаларда тўлқин динамикасини моделлаштириш назарий физика, математик физика ва математик моделлаштиришнинг кесишмасида ҳосил бўлган янги мавзулардан ҳисобланади. Илк бор мазкур масала, чизиқли тўлқинлар учун Павел Экснер (Pavel Exner) ва Петр Шеба (Peter Seba) тарафидан қаралган. Кейинчалик, ўз-ўзига қўшмалик шартини қаноатлантирувчи, умумий кўринишдаги чегаравий шартлар Роберт Шрадер (Robert Shrader) ва Вадим Кострикинлар тарафидан келтириб чиқарилган. Сўнгра мазкур тенглама квант тармоқлари ва уларинг спектрал хусусиятларини ўрганишда У. Смиланский (U. Smilansky) ва Свен Гнуцманн (Sven Gnuzmann) тарафидан қўлланилган. Ушбу масаланинг ностационар кўриниши, яъни тармоқланган тизимларда югурувчи чизиқли тўлқинлар дианмикасини тавсифловчи метрик графлардаги ностационар Шредингер тенгламаси Д.Матрасулов ва Ж.Юсуповлар тарафидан ўрганилган. Кейинчалик, мазкур масала, Д.Матрасулов, У.Саломов, К.Накамура томонидан Паули тенгламасига умумлаштирилган ва тармоқланган тизимларда спин тўлқинлари динамикаси моделлаштиришга қўлланилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот иши режалари билан боғлиқлиги. Диссертацияда тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-3-003 “Қуйи ўлчамли тизимларда кўп электронли фотоволтаикали жараёнлар ва қуёш энергияси конверсияси”, Ф-2-003 “Квант графларида иссиқлик ўтказувчанлиги ва квант транспортини ўрганиш”, БФ-2-002 “Тармоқланган углеродли нанотузилмаларда квант транспорти” илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади метрик графларда ночизиқли тўлқин тенгламалари орқали тармоқланган ва тармоқсимон тузилмаларда солитонлар динамикасини моделлаштириш, сонли усулларда ечиш, баллистик ва диффузион транспортини тавсифловчи релятивистик моделларини яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

содда графларда чегаравий шартлар билан берилган кубик ночизиқлиликка эга бўлган стационар ночизиқли Шредингер тенгламасини ечиш;

тармоқланган тизимларда солитон транспорти моделларини қуриш;

содда графларда стационар синус-Гордон тенгламасини ечиш ва олинган ечим ёрдамида тармоқланган соҳаларда Жосефсон ўтказувчанлигининг фазалар фарқини топиш;

содда графларда ночизиқли Дирак тенгламасини ечиш;

тармоқланган тизимларда Дирак солитонлари динамикасини моделлаштириш;

метрик графларда Боголюбов де Жен (Bogoliubov de Gennes) тенгламасининг аналитик ечимларини топиш;

метрик графларда ночизиқли тўлқин тенгламаларини сонли ечиш учун самарали алгоритм ишлаб чиқиш ва дастурини яратиш;

Тадқиқотнинг объекти тармоқсимон тузилмалар, мезоскопик тармоқлар ва тармоқланган нанотузилмаларда солитонлар ва чизиқли релятивистик тўлқинлардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети замонавий назарий физиканинг қатор йуналишларида амалий тадбиққа эга булган, содда топологияли тармоқланган тузилмаларда солитонлар ва чизиқли тўлқинларнинг диффузион ва баллистик транспорти моделларини ишлаб чиқиш, метрик графларда чегаравий шартлар берилган ночизиқли тўлқин тенгламаларини аналитик ва сонли усулларда ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ночизиқли тўлқин тенгламаларининг аналитик ва сонли ечиш методлари, тескари масала ечими, сонли моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

содда графларда кубик ночизиқликка эга бўлган стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламасининг турғун солитон кўринишдаги ечими топилган;

тармоқланган тузилмаларда синус-Гордон тенгламаси ечимининг турғунлиги исботланган;

графнинг тармоқлантирувчи нуқтаси орқали солитонларнинг қайтишсиз ўтиш шартлари топилган;

тармоқланган углеродли нанотузилмаларда кубик ночизиқлиликка эга бўлган Дирак тенгламасининг солитон ечими ёрдамида баллистик ва диффузион транспорт масаласи ечилган;

метрик графларда Боголюбов де Жен тенгламасининг аналитик ечими топилган;

метрик графларда ночизиқли тўлқин тенгламаларини сонли ечиш схемаси ва алгоритми ишлаб чиқилган ҳамда дастурий таъминоти яратилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси тармоқсимон тузилмали функционал қурилмаларни ишлаб чиқиш учун содда графларда стационар синус-Гордон тенгламасини ечиш усули Жосефсон ўтказувчанлигининг фазалар фарқини топишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги тармоқланган тузилмалаларда ночизиқли тўлқин тенгламалари учун тармоқланиш нуқтасида қўйилган чегаравий шартлар фундаментал сақланиш қонунларидан олинган бўлиб, уларнинг физик жиҳатдан корректлилигини таъминлаш мақсадида ночизиқлилик коэффициентларга маълум чекланишлар олинган. Сонли усулларни қўллашда уларнинг турғунлиги текширилган ва талаб қилинган аниқликдаги тақрибий ечиш усулларидан фойдаланилган. Олинган натижалар физик жиҳатдан батафсил таҳлил қилинган ва уларнинг реал физик жараёнларга мослиги назарий асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти графларда ночизиқли тўлқинлар транспорти баллистик ва диффузион бўлиш шартлари топилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти метрик графларда стационар ночизиқли Дирак тенгламасининг солитон ечимлари Бозе-Эйнштейн конденсатлари динамикаси масаласини тармоқсимон тизимларда ечиш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Тармоқланган тузилмаларда ночизиқли стационар тўлқин тенгламаларининг топилган турғун солитон ечимлари асосида:

метрик графларда стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламасининг (турғун) солитон ечимлари хорижий илмий журналларда (Journal of Differential Equations, Volume 266, Issue 1, 5 January 2019, Pages 147-178; Nonlinearity, Volume 28, Number 7, 2015, pp. 2343–2378; Applied Mathematics ResearcheXpress, Volume 2016, Issue 1, 1 January 2016, pp. 98–145) графнинг тармоқланувчи нуқтасидан ўтувчи солитон транспортини тавсифловчи чегаравий шартларни ҳосил қилишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ночизиқли стационар Шрёдингер тенгламаси учун графда қўйилган чегаравий масалани ечиш имконини берган;

тармоқланган тизимларда турғун солитонларни тавсифловчи метрик графлардаги стационар синус-Гордон тенгламасининг аналитик ечимлари хорижий илмий журналларда (Communications in Mathematical Physics, May 2017, Volume 352, Issue 1, pp. 387–406; Portugaliae Mathematica 72(4), April 2012, P. 31; Nonlinearity, Volume 30, Number 8, 2017, P. 24) турғун солитонлар динамикаси масаласини тармоқсимон тизимларда ечишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ночизиқли стационар синус-Гордон тенгламаси учун графда қўйилган чегаравий масалани ечиш имконини берган;

Дирак солитонларининг тармоқланган тизимлардаги динамикасини ўрганиш доирасида олинган, ночизиқли Дирак тенгламасининг метрик графлардаги ечими хорижий илмий журналларда (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 51, Number 9, 2018, P. 22; SIAM Journal of Mathematical Analysis, 51(2), 1046–1081; Symmetry 2019, 11(2), 169) Бозе-Эйнштейн конденсатлари динамикаси масаласини тармоқсимон тизимларда ечишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ночизиқли Дирак тенгламаси учун графда қўйилган чегаравий масалани ечиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқот натижалари 8 та халқаро ва 7 та республика конференцияларда апробациядан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.Диссертация мавзуси бўйича жами 21 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа докторлик (PhD) диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та илмий мақола, жумладан, 2 таси республика ва 6 таси ҳорижий журналларда нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркиби кириш, бешта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан иборат. Диссертациянинг ҳажми 126 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ ҚИСМИ

Кириш қисмида масаланинг ҳозирги ҳолати тавсифи, унинг долзарблилиги, шунингдек, ночизиқли тўлқин тенгламалари назариясининг асослари ва солитонлар назарияси тавсифланган.

Диссертациянинг “Ночизиқли тўлқин тенгламаларнинг солитон ечимлари” деб номланган биринчи бобида назарий физикада қатор амалий тадбиқларга эга бўлган, ночизиқли Шредингер тенгламасининг солитон ечимларини тескари сочилиш масаласи усулида олиш алгоритми батафсил тақдим қилинган. Метрик графлар назарияси асослари ҳам қисқача баён қилинган. Бу соҳада бошқа олимлар томонидан олинган илмий натижалар келтирилган.

“Тармоқларда стационар оптик солитонлар” деб номланган иккинчи боб метрик графларда стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламаси орқали тавсифланувчи тармоқланган тузилмаларда турғун солитонларнинг хоссаларини ўрганишга бағишланган. Хусусан, юдузсимон метрик графнинг ҳар бир қиррасида стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилган:

$$-\psi_{j''} \pm \beta_j |\psi_j|^2 \psi_j = \lambda^2 \psi_j,\ \beta_j > 0,\ j = 1,2,3. \qquad (1)$$

Метрик графлар учун ёзилганда, бу тенглама кўп компонентали бўлиб, компоненталари чегаравий шарт орқали аралашган бўлади. Мазкур тенглама қатор физикавий жараёнларни моделлаштиришда, хусусан, тармоқланган оптик толаларда турғун солитонларни, тармоқланган тизимларда Бозе-Эйнштейн конденсати пайдо бўлиши каби қатор тадбиқларга эга. Чегаравий шарт сифатида қуйидаги шартларни танлаш мумкин:

$$\psi_1(L_1) = A_2\psi_2(L_1) = A_3\psi_3(L_1),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) - \frac{1}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x) - \frac{1}{A_3^*}\frac{\partial}{\partial x}\psi_3(x)\right]\Big|_{x=L_1} = \alpha\psi_1(L_1),\ \ A_2A_3 \neq 0.$$

Бу чегаравий шартлардан биринчиси тўлқин функциясининг юк билан қўйилган узлуксизликни берса, иккинчиси эса тармоқлантирувчи нуқтада оқимнинг сақланишини беради. (1) стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламаси ва юқоридаги келтирилган чегаравий шартлар билан қаралаётган масаланинг параметрига боғлиқ равишда баъзи махсус ҳолларда аниқ ва аналитик кўринишда ечиш мумкин. Фараз қилайлик, λ — ҳақиқийва $\alpha = 0$, у ҳолда чегаравий шартларни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\psi_1(x)|_{x=0} = 0,\psi_2(x)|_{x=L_2} = \psi_3(x)|_{x=L_3} = 0, \qquad (2)$$

$$\sqrt{\beta_1}\psi_1(L_1) = \sqrt{\beta_2}\psi_2(L_1) = \sqrt{\beta_3}\psi_3(L_1), \qquad (3)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{\beta_2}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x) - \frac{1}{\sqrt{\beta_3}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_3(x)\right]\Big|_{x=L_1} = 0, \qquad (4)$$

Тўлқин функцияси учун нормаллаштириш шарти қуйидагича бўлади:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{b_j} |\psi_j(x)|^2\, dx = 1. \qquad (5)$$

Тўлқин функциясини қуйидагича ифодалаб:

$$\psi_j(x) = f_j(x)e^{i\gamma_j},\ j = 1,2,3, \tag{6}$$

(бунда $\gamma_j = const$) (1) ва (2) масаланинг аниқ ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f_1(x) = B_1 sn(\alpha_1 x \mid k_1),$$
$$f_2(x) = B_2 sn(\alpha_2 (x - L_2) \mid k_2),$$
$$f_3(x) = B_3 sn(\alpha_3 (x - L_3) \mid k_3),$$

бунда $sn(ax \mid k)$ —Якоби эллиптик функцияси.

(3)-(5) чегаравий шартларни ҳисобга олсак, юдулсимон графда стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламаси хос сонларининг спектрини берувчи k_j ($j = 1,2,3$) интегралланувчи костанталарни аниқлаш учун ночизиқли трасцендент тенгламалар системага олиб келинган ва махсус хусусий ҳолларда мазкур система илдизларга эга еканлиги аналитик ва сонли усулларда кўрсатиб берилган.

Худди шундай қуйидаги кўринишдаги

$$-\psi_{j''} - \beta_j |\psi_j|^2 \psi_j = \lambda^2 \psi_j,\ \beta_j > 0,\ j = 1,2,3. \tag{6}$$

тортишувчи ночизиқлилик билан берилган стационар ночизиқли Шрёдингер тенгламасининг аниқ аналитик ечимини ҳам олиш мумкинлиги кўрсатилган. Мазкур масаланинг ечимини, яъни стационар Шредингер тенгламасининг метрик графлардаги солитон ечимини тармоқланган оптик толаларда юзага келадиган ночизиқли оптик жараёнлар, хусусан оптик толалар тармоғида иккинчи генерациянинг пайдо бўлишини моделлаштиришга қўллаш мумкинлиги кўрсатилган.

Диссертациянинг “Графларда стационар синус-Гордон солитонларининг модели” деб номланган учинчи бобида метрик графда қуйидаги стационар синус-Гордон тенгламаси қаралган

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi_j = \frac{1}{\lambda_j^2}\sin(\phi_j),\ 0 < x < L_j, \tag{7}$$

бунда ϕ_j тўлқин функция графнинг ҳар бир қиррасида қаралади, $j = 1,2,3$ эса қиррасининг номери. Графнинг тармоқлантирувчи нуқтасида чегаравий шарт графнинг учида юк билан тўлқин функциянинг ҳосиласига узлуксизлик

$$\lambda_1 \frac{d\phi_1}{dx}\bigg|_{x=0} = \lambda_2 \frac{d\phi_2}{dx}\bigg|_{x=0} = \lambda_3 \frac{d\phi_3}{dx}\bigg|_{x=0} \tag{8}$$

ва графнинг тармоқлантирувчи нуқтасида ташқи магнит оқимининг сақланиши

$$\lambda_1\phi_1|_{x=0} + \lambda_2\phi_2|_{x=0} + \lambda_3\phi_3|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

кўринишида берилади. Ҳар бир қиррасининг охирида чегаравий шарт қуйидаги ифода орқали берилади

$$\frac{d\phi_j}{dx}\bigg|_{x=L_j} = 2H_j, \tag{10}$$

бунда H_j j-қирра бўйича йўналган бир жинсли ташқи магнит майдон.

Мазкур масала, яъни (7) –(10) ифодалар билан берилган синус-Гордон тенгамаси ечими тармоқланган Жосефсон контакларида турғун солитонлар модели ҳисобланади. Чегаравий шартларсиз (7) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда топилган

$$\phi_j^{(\pm)}(x)=(2n_j+1)\pi\pm 2\arcsin\left\{k_j sn\left[\frac{x-x_{0,j}^{(\pm)}}{\lambda_j},k_j\right]\right\} \tag{11}$$

бунда k_j и $x_{0,j}^{(\pm)}$ - интеграллаш константалари, sn - эса Якоби эллиптик функцияси. k_j нинг қийматларига боғлиқ равишда синус-Гордон тенгламасининг ечимини биринчи ва иккинчи тур ечимига ажратилган. Бунда $|H_j\lambda_j|\le|k_j|\le 1$ бўлган ҳолга мос келувчи ечимини биринчи тур ечим деб аталган. (10) чегаравий шартлар билан бирга метрик юлдузсимон графда синус-Гордон ечимини қуйидагича ёзиш мумкин

$$\phi_j^{(\pm)}(x)=(2n_j+1)\pi\pm 2\arcsin\left\{k_j\ sn\left[\frac{x-L_j}{\lambda_j}+F\left[\arccos\left(\pm\frac{H_j\lambda_j}{k_j}\right),k_j\right],k_j\right]\right\},$$

бунда $F(\varphi,k)$ - биринчи тур тўлиқ бўлмаган эллиптик интеграл. (8) ва (9) граф учидаги чегаравий шарт k_j ни топиш учун ночизиқли трансцендент тенгламалар системасига келтирилган ва ҳосил қилинган трансцендент тенгламалар системаси икки хусусий ҳолдаги аниқ ечимга эга эканлиги кўрсатилган.

Диссертациянинг “Тармоқланган тузилмаларда Дирак солитонлари динамикасини моделлаштириш” деб номланган тўртинчи бобида метрик графларда қуйидаги кўринишдаги ночизиқли Дирак тенгламаси асосида релястивистик солитонлар ҳақидаги масала қаралган:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\Psi+g^2\left(\overline{\Psi}\Psi\right)\Psi=0, \tag{12}$$

бунда

$$\Psi(x,t)=\begin{pmatrix}\phi(x,t)\\ \chi(x,t)\end{pmatrix};\ \overline{\Psi}=\Psi^\dagger\gamma^0, \tag{13}$$

ва $\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\gamma^1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Учта ярим чексиз қирра b_j дан (бунда j қирра номери) иборат бўлган метрик юлдузсимон граф учун координаталар $x_1\in(-\infty,0]$ ва $x_{2,3}\in[0,\infty)$ кўринишда аниқланган, 0 нуқта графнинг учи билан мос келади. Амалий тадбиқ нуқтаи назаридан, (12) тенглама графен нано-тасмаларида Бозе-Эйнштейн конденсати динамикасини тавсифлайди. Агар мазкур масалани биз тармоқланган тизимларда қарасак, ушбу тенглама метрик графларда берилган чегаравий шартларни қаноатлантириши керак бўлади.

Заряд ва энергия сақланиш қонунларидан қуйидаги чизиқли чегаравий шартлар ҳосил қилинган:

$$\begin{gathered}\alpha_1\phi_1|_{x=0}=\alpha_2\phi_2|_{x=0}+\alpha_3\phi_3|_{x=0},\\ \frac{1}{\alpha_1}\chi_1|_{x=0}=\frac{1}{\alpha_2}\chi_2|_{x=0}=\frac{1}{\alpha_3}\chi_3|_{x=0},\end{gathered} \tag{14}$$

бунда $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - ночизиқлилик параметрлари g_1,g_2,g_3 орқали ифодаланиши мумкин бўлган константалар.

(12) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишдаги ечими топилган:

$$\Psi_j(x,t)=e^{-i\omega t}\begin{pmatrix} A_j(x) \\ iB_j(x) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

бунда

$$A_j(x)=\sqrt{\frac{(m+\omega)\cosh^2(\beta x)}{m+\omega\cosh(2\beta x)}}\cdot\sqrt{\frac{2\beta^2}{g_j^2(m+\omega\cosh(2\beta x))}}, \tag{16}$$

$$B_j(x)=\sqrt{\frac{(m-\omega)\sinh^2(\beta x)}{m+\omega\cosh(2\beta x)}}\cdot\sqrt{\frac{2\beta^2}{g_j^2(m+\omega\cosh(2\beta x))}}, \tag{17}$$

$\beta=\sqrt{m^2-\omega^2}$. Равшанки, (16) ва (17) функциялар (14) шартни қоноатлантирилса, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\frac{\alpha_1}{|g_1|}=\frac{\alpha_2}{|g_2|}+\frac{\alpha_3}{|g_3|},\ \frac{\alpha_{2,3}}{\alpha_1}=\frac{|g_1|}{|g_{2,3}|}. \tag{18}$$

Бундан қуйидаги тенглик олинган:

$$\frac{1}{g_1^2}=\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}. \tag{19}$$

Мазкур тенгламанинг югурувчи солитон кўринишдаги ечимлари Лоренц алмаштиришини қўллаш орқали ҳосил қилинган.

Ночизикли Дирак тенгламасининг (16) ва (17) ифодалар билан берилган ечими тармоқланган графен нанотасмаларида релятивистик солитонларни тавсифлайди. Бу каби солитонлар, масалан, тармоқланган графенда Бозе-Эйнштейн конденсати кўринишида пайдо бўлиши кўрсатилган.

Диссертациянинг “Тармоқланган квант ипларида Майорана фермионлари” деб номланган бешинчи боби тармоқланган тизимларда Боголюбов де Жен тенгламасини ечишга ва олинган аналитик ечим ёрдамида тармоқланган нанотизимларда Майорана зарраларининг динамикасини моделлаштиришга бағишланган. Хусусан, метрик графнинг тармоқланиш нуқтасида берилган ечим узлуксизлиги ва оқим сақланиши кўринишдаги чегаравий шартлар учун масаланинг аналитик ечими олинган. Қаралган Боголюбов де Жен тенгламасининг ечими аналитик куринишда топилган. Бу тенгламасининг юлдузсимон метрик графдаги кўриниши қуйидагича бўлиб,

$$H_{BdG}\Psi^{(j)}=E\Psi^{(j)}, \tag{20}$$

бунда $\Psi^{(j)}=\left(\Psi_1^{(j)},\Psi_2^{(j)},\Psi_3^{(j)},\Psi_4^{(j)}\right), j=1,2,3$,

$$H_{BdG}=\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} & \Delta_0 & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \Delta_0 \\ \Delta_0 & 0 & 0 & i\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \Delta_0 & i\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

тармоқланиш нуктаси ва тармоқ чеккасидаги

$$\Psi_1^{(1)}(0)=\Psi_1^{(2)}(0)=\Psi_1^{(3)}(0), \tag{22}$$

$$\Psi_2^{(1)}(0)+\Psi_2^{(2)}(0)+\Psi_2^{(3)}(0)=0, \tag{23}$$

$$\Psi_3^{(1)}(0)+\Psi_3^{(2)}(0)+\Psi_3^{(3)}(0)=0, \tag{24}$$

$$\Psi_4^{(1)}(0)=\Psi_4^{(2)}(0)=\Psi_4^{(3)}(0), \tag{25}$$

$$\Psi_1^{(j)}(L_j)=\Psi_4^{(j)}(L_j), \Psi_2^{(j)}(L_j)=\Psi_3^{(j)}(L_j), j=1,2,3. \tag{26}$$

чегаравий шартлар учун аниқ ечим аналитик кўринишда олинган:

$$\Psi^{(1,2)}(x)=\begin{pmatrix} q^* \\ q \\ q^* \\ -q \end{pmatrix} e^{\Delta_0(L-x)}+\begin{pmatrix} -q \\ q^* \\ q \\ q^* \end{pmatrix} e^{-\Delta_0(L-x)}, \tag{27}$$

$$\Psi^{(3)}(x)=\begin{pmatrix} q^* \\ -2q \\ -2q^* \\ -q \end{pmatrix} e^{\Delta_0(L-x)}+\begin{pmatrix} -q \\ -2q^* \\ -2q \\ q^* \end{pmatrix} e^{-\Delta_0(L-x)}, \tag{28}$$

бунда $L_1=L_2=L_3=L, q=1+i$.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация иши метрик графларда солитонларнинг транспорти масаласини ечишга бағишланган. Диссертация ишида олинган асосий натижалар қуйидагилар:

1. Метрик графларда ночизиқли стационар Шрёдингер тенгламаси турли топологияли графлар учун турғун солитон кўринишида аниқ аналитик ечимга эга эканлиги исботланган.

2. Метрик графларда стационар синус-Гордон тенгламаси графнинг тармоқланиш нуқтасида тўлқин функциянинг узлуксизлиги ва оқимнинг сақланишини таъминловчи чегаравий шартларни қаноатлантирадиган турғун солитонлар кўринишидаги аниқ аналитик ечимга эга эканлиги исботланган.

3. Солитонларнинг турғунлик шартлари келтириб чиқарилган ва олинган ечимлар орасида турғун ечимлари борлиги исботланган.

4. Тармоқланган тизимларда турғун солитонлар моделини ифодаловчи стационар ночизиқли Дирак тенгламасини сонли ечиш алгоритми қурилган.

5. Метрик графларда ностационар ночизиқли Дирак тенгламасининг солитон ечимлари стационар Дирак тенгламасининг солитон ечимлари орқали келтириб чиқарилган.

6. Тармоқланган углеродли нанотузилмаларда кубик ночизиқлиликка эга бўлган Дирак тенгламасининг солитон ечими ёрдамида баллистик ва диффузион транспорт масаласи ечилган.

7. Метрик графларда ночизиқли тўлқин тенгламаларини сонли ечиш алгоритми қурилган ва дастурий таъминоти яратилган.

РАЗОВЫЙ НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПРИ СОВЕТЕ DSc.27.06.2017.FM.01.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

Сабиров Каримжон Кабилджанович

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОННОЙ ДИНАМИКИ И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплекс программирования
01.04.02 – Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2019.2.PhD/FM21

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Матрасулов Даврон Урунович** доктор физико-математических наук, профессор
	Арипов Мерсаид Мирсиддикович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Остонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Абдумаликов Абдулазиз Абдувахобович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация	**Самаркандский Государственный университет**

Защита диссертации состоится «30» мая 2019 года в 15^{00} часов на заседании Разового Научного совета при Научном совете DSc 27.06.2017.FM 01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университет, дом 4. Тел.: (+998971) 227-12-24, факс: (+998971) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана за № ___ (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университет, дом 4. Тел.: (+998971) 227-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» _________ года.
(протокола рассылки №1 от «22» апреля 2019 года.)

А. Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению
учёной степени, д.т.н., профессор, академик

З. Р. Рахмонов
Учёный секретарь Научного совета по присуждению
ученой степени, д.ф.-.м.н.

Р.Дж.Аллоев
Председатель научного семинара
при Научном совете
по присуждению Ученой степени,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проводимые в в настоящее время в мире многочисленные научные и практические исследования направлены на создание ресурсосберегающих материалов и разработку электронных устройств на их основе. В связи с этим использование моделей на основе уравнения Шредингера, синуса-Гордона, Дирака и Боголюбова де Жена являются объектом интенсивных исследований в квантовой физике, квантовой криптографии, оптике и физике конденсированных сред. Поэтому одной из важнейших задач математического моделирования является разработка и реализация эффективного алгоритма для численного решения подобных нелинейных волновых уравнений.

В настоящее время в мире изучение линейных волн, описываемых линейным уравнением Шредингера, и исследование численного решения нелинейных волновых уравнений являются одной из актуальных проблем современной оптики и квантовой физики. При этом решение стационарного нелинейного уравнения Шредингера, заданного на простых графах с граничными условиями, и построение моделей транспорта солитонов в разветвленных системах играют важную роль в оптике, нанофизике и теоретической физике. В связи с этим нахождение солитонных решений нелинейных волновых уравнений на графах и изучение их устойчивых свойств, а также математическое моделирование процессов эффективной передачи информации, создание эффективных алгоритмов численного вычисления и программного обеспечения представляют собой важный этап современных исследований.

В нашей стране особое внимание уделяется прикладной математике и теоретической физике, имеющим научное и практическое значение в фундаментальных науках. В том числе, особое внимание уделяется теоретическим исследованиям, и практическим разработкам с использованием математического моделирования и вычислительно-математических методов при решении задач квантовой физики, конденсированных сред и физики полимеров. Значительные результаты достигнуты в солитонных решениях нелинейных уравнений в разветвленных структурах, изучении задач математического моделирования транспорта солитонов и решении актуальных теоретических и практических задач. Определены основные задачи и направления деятельности научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях в «Электроника, физика наноматериалов и прикладная математика»[2]. При обеспечении исполнения постановления важно развывать теорию решения дифференциальных уравнений на графах.

Настоящая диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

№-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и Указа Президента №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в Республике. Данное исследование посвящено развитию науки и техники в Республике Узбекистан. «Математика, механика и информатика» и «Теоретическая физика».

Степень изученности проблемы. В мире при изучении волновых процессов в дискретных и разветвленных структурах в задачах теоретической физики и численных методов, в основном, использовался метод сильной связи (tight binding approach), который не учитывает перехода волн через точки разветвления в сетевых и сетеподобных структурах. В том числе, впервые в 1989 году было проведено исследование по моделированию динамики линейных волн с использованием эволюционных уравнений на графах. Позднее, Кострыкин и Шрадер предложили конкретные математические задачи и математическую модель динамики частиц и волн в разветвленных системах, удовлетворяющих граничным условиям общего вида для оператора Шредингера на метрических графах. Нелинейное обобщение этой модели, т. е. модель динамики солитонов в разветвленных структурах, описываемых нелинейными уравнениями Шредингера на метрических графах, впервые представлена К. Накамурой, С. Савадой, Д. Матрасуловым и их соавторами. В частности, в их работах выведены общие граничные условия в точке разветвления графа, исходя из фундаментальных законов сохранения.

За последние 10 лет граничные условия на узлах были выведены такими учеными, как Р. Адами, Д. Нойа, Д. Пеленовский и др. В настоящее время эти условия используются для моделирования стоячих и бегущих солитонов на графах, включая моделирование релятивистских солитонов в разветвленных структурах. Процессы, описываемые уравнениями Кортега де Фриза, были достаточно изучены Хасановым, Г. Уразбаевым и их учениками. Газ-нефть, тепловыделение, нелинейные биологические популяции изучали такие ученые, как Н.Мухиддинов, М.Арипов, Ш.Садуллаева, З.Рахмонов.

Моделирование волновой динамики в дискретных и разветвленных структурах является одним из новых вопросов на стыке теоретической физики, математической физики и математического моделирования. Впервые к этому вопросу обратились Павел Экснер (Pavel Exner) и Петр Шеба (Peter Seba) для линейных волн. Позднее, Роберт Шрадер и Вадим Кострикин вывели граничные условия в общем виде, удовлетворяющем самосопряженности. Затем данное уравнение при изучении квантовых графов и их спектральных свойств было использовано У. Смиланским (U. Smilansky) и С. Гнузманном (S. Gnuzmann). Нестационарный вид данной задачи, то есть нестационарное уравнение Шредингера на метрических графах, описывающее динамику линейных бегучих волн в разветвленных системах изучено Д. Матрасуловым и Ж. Юсуповым. Позднее, эта задача была обобщена Д. Матрасуловым, У. Саломовым, К. Накамурой для уравнения Паули и применена к моделированию динамики спиновых волн в разветвленных системах.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Исследования, проведенные в диссертации, были проведены в рамках научных грантов Ф3-003 "Многоэлектронные фотовольтаические процессы в системах низкой размерности и конверсия солнечной энергии", Ф-2-003 "Изучение теплопроводности и квантового транспорта в квантовых графах", БФ2-022 "«Квантовый транспорт в разветвленных углеродных наноструктурах»".

Цель исследования – исследование динамики нелинейных волн, включая солитоны, в разветвленных и сетеподобных структурах путем их моделирования с помощью нелинейных волновых уравнения на метрических графах; разработка и применение эффективных методов численного решения нелинейных волновых уравнений на графах; выявление условий для баллистического и диффузионного транспорта солитонов в разветвленных структурах.

Задачи исследования:

- Моделирование оптических солитонов в разветвленных структурах путем решения стационарного нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью с граничными условиями, заданными на простейших графах.
- разработка моделей солитонного транспорта в разветвленных системах;
- решение стационарного уравнения синус-Гордона на простейших графах, моделирующих разветвленные контакты Джозефсона;
- моделирование динамики солитонов на мезоскопических сетеподобных структурах;
- решение нелинейного уравнения Дирака на простейших графах;
- моделирование динамики дираковских солитонов на разветвленных структурах;
- решение уравнения Боголюбова де Жена, описывающего фермионы Майораны в разветвленных квантовых нитях;
- разработка эффективного алгоритма для численного решения нелинейных волновых уравнений на метрических графах;
- разработка и оптимизация программ для численного решения нелинейных волновых уравнений на метрических графах;
- определение условий для безотражетельного перехода солитонов через точки разветвления графа.

Объект исследования - динамика солитонов в сетеподобных структурах, мезоскопических сетях, разветвленных наноструктурах.

Предмет исследования разработка моделей диффузионного и баллистического транспорта солитонов в разветвленных структурах простейших топологий, солитонные решения нелинейных волновых уравнений с граничными условиями, заданными на метрических графах.

Методы исследования. В данной диссертации использованы методы аналитического и численного решения нелинейных волновых уравнений, метод обратной задачи, численное моделирование.

Научная новизна диссертационного исследования следующая:

получено решение в виде стоячего солитона стационарного нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью на простейших графах;

доказана устойчивость решения стационарного уравнения синус-Гордона для простейших графов;

получены условия безотражательного перехода солитонов через точки разветвления графа;

решена задача баллистического и диффузионного транспорта нелинейного уравнения Дирака с кубической нелинейностью для простейших графов, моделирующего конденсаты Бозе-Эйнштейна на разветвленных углеродных наноструктурах;

получен аналитический вид решения уравнения Боголюбова де Жена на метрических графах;

разработаны алгоритм и программа численного решения нелинейных волновых уравнений в метрических графах.

Практические результаты исследования метод решения стационарного уравнения синуса-Гордона в простых графах для разработки функционально-разветвленных структурных устройств был использован для разности фаз джозефсоновской проницаемости.

Достоверность результатов исследований заключается в том, что граничные условия для нелинейных волновых уравнений в разветвленных структурах выводятся из фундаментальных законов сохранения, и для обеспечения их физической корректности получены определенные условия для нелинейных коэффициентов, которые обеспечивают интегрируемость задачи. В численных методах была исследована их устойчивость и использованы приближенные методы решения. Полученные результаты тщательно проанализированы физически и обоснованы теоретически в соответствии с их реальнымы физическимы процессами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Использованный в работе подход является достаточно универсальным и вносит свой вклад в теорию нелинейных эволюционных уравнений на метрических графах.

Практическая значимость полученных результатов следует из возможности их применения к моделированию оптических солитонов в разветвленных структурах, возникающих в оптоэлектронике, ИКТ, нанотехнологиях, и квантовых функциональных материалов низкой размерности, имеющих разветвленную структуру.

Внедрение результатов исследования. На основе устойчивых солитонных решений нелинейных стационарных стационарных волновых уравнений в в разветвленных структурах:

(стоячее) солитонное решение стационарного нелинейного уравнения Шредингера на графах использовано в зарубежных научных статьях (Journal of Differential Equations, Volume 266, Issue 1, 5 January 2019, Pages 147-178; Nonlinearity, Volume 28, Number 7, 2015, pp. 2343–2378; Applied Mathematics ResearcheXpress, Volume 2016, Issue 1, 1 January 2016, pp. 98–145) для того, чтобы вывести граничные условия, описывающих транспорт солитонов, проходящих через точку разветвления графа. Применение научных результатов позволило решить краевую задачу на графе для нелинейного стационарного уравнения Шредингера;

аналитические решения стационарного уравнения синус-Гордона на метрических графах, описывающие стоячие солитоны в разветвленных системах в зарубежных научных статьях (Communications in Mathematical Physics, May 2017, Volume 352, Issue 1, pp. 387–406; Portugaliae Mathematica 72(4), April 2012, P. 31; Nonlinearity, Volume 30, Number 8, 2017, P. 24) использованы для того, чтобы решить задачу исследования динамики солитонов в разветвленных системах. Применение научных результатов позволило решить краевую задачу на графе для нелинейного стационарного уравнения синус-Гордона;

решение нелинейного уравнения Дирака на метрических графах, полученное при исследовании динамики солитонов Дирака в разветвленных систем в зарубежных статьях (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 51, Number 9, 2018, P. 22; SIAM Journal of Mathematical Analysis, 51(2), 1046–1081; Symmetry 2019, 11(2), 169) использовано в задаче исследование динамики конденсатов Бозе-Эйнштейна в разветвленных системах, Применение научных результатов позволило решить краевую задачу на графе для нелинейного уравнения Дирака.

Апробация результатов исследования. Результаты исследований апробированы на 7 республиканских и 8 международных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликована 21 научная работа. Из них 8 научных статей, в том числе 2 в республиканских и 6 в зарубежных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторской диссертации.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы, и приложений. Объем диссертации составляет 126 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТИЦИИ

В введение изложено, описание современного состояния проблемы, обоснование ее актуальности, а также описание базовой теории нелинейных волновых уравнений и теории солитонов.

В первой главе «Солитонные решения нелинейных волновых уравнений» был подробно представлен алгоритм нахождения солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера, имеющее ряд практических применения, методом обратной задачи рассеяния. Основы теории метрических графов также кратко изложены.

Вторая глава «Стационарные оптические солитоны на графах» посвящена изучению свойств стоячих солитонов в разветвленны структурах, описываемых с помощью стационарного уравнения нелинейнго уравнения Шредингера на метрических графах. В частности, на каждом ребре звездообразного метрического графа стационарное нелинейное уравнение Шредингера может быть записано как

$$-\psi_{j''} \pm \beta_j |\psi_j|^2 \psi_j = \lambda^2 \psi_j, \beta_j > 0, j = 1,2,3. \tag{1}$$

Данное уравнение является многокомпонентным уравнением, в котором компоненты смешаны с помощью граничных условий. Это уравнение имеет ряд применений при моделировании физических процессов, таких как стоячие солитоны в сетевых оптических волокнах и конденсат Бозе-Эйнштейна в разветвленных системах. В качестве граничных условий можно выбрать следующие:

$$\psi_1(L_1) = A_2 \psi_2(L_1) = A_3 \psi_3(L_1),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x) - \frac{1}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x) - \frac{1}{A_3^*}\frac{\partial}{\partial x}\psi_3(x)\right]|_{x=L_1} = \alpha \psi_1(L_1), \;\; A_2 A_3 \neq 0.$$

Первое из этих граничных условий представляет собой непрерывность веса волновой функции, а второе является сохранением потока в точке разветвления. Стационарное нелинейное уравнение Шредингера (1) и рассматриваемая задача с граничными условиями, привененные выше, могут быть решены точно и аналитически в некоторых специальных случаях, определяемых через параметры задачи. Полагая, что λ — вещественное и $A_2 = \sqrt{\beta_2/\beta_1}$, $A_3 = \sqrt{\beta_3/\beta_1}$, $\alpha = 0$ мы можем записать граничные условия в виде

$$\psi_1(x)|_{x=0} = 0, \psi_2(x)|_{x=L_2} = \psi_3(x)|_{x=L_3} = 0, \tag{3}$$

$$\sqrt{\beta_1}\psi_1(L_1) = \sqrt{\beta_2}\psi_2(L_1) = \sqrt{\beta_3}\psi_3(L_1), \tag{4}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)-\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x)-\frac{1}{\sqrt{\beta_3}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_3(x)\right]|_{x=L_1}=0, \qquad (5)$$

Тогда условия нормировки волновой функции можно записать как

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{b_j}|\psi_j(x)|^2\,dx=1. \qquad (6)$$

Представляя волновую функцию в виде

$$\psi_j(x)=f_j(x)e^{i\gamma_j},\ j=1,2,3, \qquad (7)$$

(где $\gamma_j=const$) точное решение задачи (1) и (2) можно записать в следующем виде;

$$f_1(x)=B_1 sn(\alpha_1 x\,|\,k_1),$$

$$f_2(x)=B_2 sn(\alpha_2(x-L_2)\,|\,k_2),$$

$$f_3(x)=B_3 sn(\alpha_3(x-L_3)\,|\,k_3),$$

где $sn(ax\,|\,k)$—эллиптические функции Якоби.

Учет гранчных условий (3)-(5) приведет к системе трансцендентных уравнений для определения констант интегрирования k_j ($j=1,2,3$), которые дают нам спектр собственных значений стационарного нелинейного уравнения Шредингера на звездообразном графе, и аналитическим и численным методами показано, что данная система имеет корни в специальных частных случаях.

Аналогичным образом показано, что можно получить точное аналитическое решение стационарного нелинейного уравнния Шредингера с притягивающей нелинейностью, которое имеет вид

$$-\psi_{j''}-\beta_j|\psi_j|^2\psi_j=\lambda^2\psi_j,\ \beta_j>0,\ j=1,2,3. \qquad (6)$$

Решение этой задачи, то есть солитонное решение стационарного уравнения Шредингера на метрических графах, можно применить для моделирования нелинейных оптических процессов, происходящих в разветвленных оптических волокнах, в частности, при формировании оптических волокон второй генерации.

В третьей главе диссертации «Стационарное уравнение синус-Гордона на графах» рассмотрено стационарное уравнение синус-Гордона на метрических графах, которое имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi_j = \frac{1}{\lambda_j^2}\sin(\phi_j), 0 < x < L_j, \tag{7}$$

где волновая функции ϕ_j рассматривается на каждом ребре графа, а $j = 1,2,3$ - номер ребра. Граничные условия в точке разветвления имеют вид непрерывности производных волновых функций с весом на вершине

$$\lambda_1 \frac{d\phi_1}{dx}\bigg|_{x=0} = \lambda_2 \frac{d\phi_2}{dx}\bigg|_{x=0} = \lambda_3 \frac{d\phi_3}{dx}\bigg|_{x=0} \tag{8}$$

и сохранение внешнего магнитного потока в точке разветвления

$$\lambda_1\phi_1|_{x=0} + \lambda_2\phi_2|_{x=0} + \lambda_3\phi_3|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

Граничное условие в конце каждого ребра задается выражением

$$\frac{d\phi_j}{dx}\bigg|_{x=L_j} = 2H_j, \tag{10}$$

причем H_j является однородным внешним магнитным полем, приложенным вдоль j -го ребра.

Решение данной задачи, то есть уравнения синус-Гордона, заданное выражениями (7)-(10), является моделью стоячих солитонов в разветвленных контактах Джозефсона. Решение уравнения (7) без граничных условий имеет следующий вид

$$\phi_j^{(\pm)}(x) = (2n_j + 1)\pi \pm 2\arcsin\left\{k_j sn\left[\frac{x - x_{0,j}^{(\pm)}}{\lambda_j}, k_j\right]\right\} \tag{20}$$

где k_j и $x_{0,j}^{(pm)}$ - константы интегрирования, а sn - эллиптическая функция Якоби. В зависимости от значения k_j мы будем разделять решение уравнения синус-Гордона на решения первого и второго родов. Для случая, который определяется условием $|H_j\lambda_j| \le |k_j| \le 1$, подобное решение мы будем называть решением первого рода. Тогда решение уравнения синус-Гордона на метрическом звездообразном графе с граничными условиями (10) можно записать в следующем виде

$$\phi_j^{(\pm)}(x) = (2n_j + 1)\pi \pm \pm 2\arcsin\left\{k_j\ sn\left[\frac{x - L_j}{\lambda_j} + F\left[\arccos\left(\pm\frac{H_j\lambda_j}{k_j}\right), k_j\right], k_j\right]\right\}.$$

где $F(\varphi, k)$ - неполный эллиптический интеграл первого рода.

Граничные условия на вершине (8) и (9) приведены к системе трансцендентных уравнений для нахождения k_j. Показано,что полученная система трансцендентных уравнений имеет точное решение в двух частных случаях.

В четвертой главе диссертации «Динамика солитонов дирака в разветвленных структурах» рассмотрена задача о релятивистских солитонах Дирака на основе нелинейного уравнения Дирака на метрических графах, которое имеет следующий вид

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\Psi+g^{2}\left(\overline{\Psi}\Psi\right)\Psi=0, \tag{12}$$

где

$$\Psi(x,t)=\begin{pmatrix}\phi(x,t)\\ \chi(x,t)\end{pmatrix};\ \overline{\Psi}=\Psi^{\dagger}\gamma^{0}, \tag{13}$$

и $\gamma^{0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\gamma^{1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Для метрического звездообразного графа, состоящего из трех полубесконечных ребер b_j (где j параметризует ребро), координаты определены как $x_1\in(-\infty,0]$ и $x_{2,3}\in[0,\infty)$, а 0 совпадает с вершиной графа. С точки зрения практического применения уравнение (12) описывает динамику конденсата Бозе-Эйнштейна в нанолентах графена. Если мы посмотрим на эту проблему в скользких системах, то это уравнение должно удовлетворять граничным условиям, заданным на метрических графах.

Получены следующие граничные условия из законов сохранения заряда и энергии

$$\begin{gathered}\alpha_1\phi_1|_{x=0}=\alpha_2\phi_2|_{x=0}+\alpha_3\phi_3|_{x=0},\\ \frac{1}{\alpha_1}\chi_1|_{x=0}=\frac{1}{\alpha_2}\chi_2|_{x=0}=\frac{1}{\alpha_3}\chi_3|_{x=0},\end{gathered} \tag{14}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - константы, которые могут быть выражены через параметры нелинейностей g_1,g_2,g_3.

Решение уравнения (12) найдено в следующем виде

$$\Psi_j(x,t)=e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}A_j(x)\\ iB_j(x)\end{pmatrix}, \tag{15}$$

где

$$A_j(x)=\sqrt{\frac{(m+\omega)\cosh^2(\beta x)}{m+\omega\cosh(2\beta x)}}\cdot\sqrt{\frac{2\beta^2}{g_j^2(m+\omega\cosh(2\beta x))}}, \tag{16}$$

$$B_j(x)=\sqrt{\frac{(m-\omega)\sinh^2(\beta x)}{m+\omega\cosh(2\beta x)}}\cdot\sqrt{\frac{2\beta^2}{g_j^2(m+\omega\cosh(2\beta x))}}, \tag{17}$$

где $\beta=\sqrt{m^2-\omega^2}$. Ясно, что если функции (16) и (17) удовлетворяют условиям (14), то получают следующие

$$\frac{\alpha_1}{|g_1|}=\frac{\alpha_2}{|g_2|}+\frac{\alpha_3}{|g_3|},\ \frac{\alpha_{2,3}}{\alpha_1}=\frac{|g_1|}{|g_{2,3}|}. \tag{18}$$

Из двух последних получено следующее равенство

$$\frac{1}{g_1^2}=\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}. \tag{19}$$

Решения данного уравнения виде бегущих солитонов получены путем применения к ним преобразований Лоренца.

Решение, задаваемое выражениями (16) и (17) нелинейного уравнения Дирака, описывает релятивистские солитоны в нанолентах графена. Такие солитоны, например, появляются в виде конденсата Бозе-Эйнштейна в разветвленных графенах.

Пятая глава диссертации «Моделирование квазичастиц Майораны в разветвленных квантовых нитях» посвящена решению уравнений Боголюбова де Женса в разветвленных системах и моделированию динамики частиц Майораны в разветвленных наносистемах с использованием полученного аналитического решения. В частности, было получено аналитическое решение задачи для граничных условий виде непрерывности и сохранения потока в точке разветвленого графа. Получен аналитический вид решения рассмотренного уравнения Боголюбова де Женса, это уравнение на звездообразном метрическом графе имеет следующий вид:

$$H_{BdG}\Psi^{(j)}=E\Psi^{(j)}, \tag{20}$$

где $\Psi^{(j)}=\left(\Psi_1^{(j)},\Psi_2^{(j)},\Psi_3^{(j)},\Psi_4^{(j)}\right), j=1,2,3$,

$$H_{BdG}=\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} & \Delta_0 & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \Delta_0 \\ \Delta_0 & 0 & 0 & i\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \Delta_0 & i\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

для граничных условий в точке разветвления и на концах ветвей

$$\Psi_1^{(1)}(0)=\Psi_1^{(2)}(0)=\Psi_1^{(3)}(0), \tag{22}$$

$$\Psi_2^{(1)}(0)+\Psi_2^{(2)}(0)+\Psi_2^{(3)}(0)=0, \tag{23}$$

$$\Psi_3^{(1)}(0) + \Psi_3^{(2)}(0) + \Psi_3^{(3)}(0) = 0, \tag{24}$$

$$\Psi_4^{(1)}(0) = \Psi_4^{(2)}(0) = \Psi_4^{(3)}(0), \tag{25}$$

$$\Psi_1^{(j)}(L_j) = \Psi_4^{(j)}(L_j), \Psi_2^{(j)}(L_j) = \Psi_3^{(j)}(L_j), j = 1,2,3. \tag{26}$$

получено аналитическое решение в следующем виде:

$$\Psi^{(1,2)}(x) = \begin{pmatrix} q^* \\ q \\ q^* \\ -q \end{pmatrix} e^{\Delta_0(L-x)} + \begin{pmatrix} -q \\ q^* \\ q \\ q^* \end{pmatrix} e^{-\Delta_0(L-x)}, \tag{27}$$

$$\Psi^{(3)}(x) = \begin{pmatrix} q^* \\ -2q \\ -2q^* \\ -q \end{pmatrix} e^{\Delta_0(L-x)} + \begin{pmatrix} -q \\ -2q^* \\ -2q \\ q^* \end{pmatrix} e^{-\Delta_0(L-x)}, \tag{28}$$

где $L_1 = L_2 = L_3 = L, q = 1 + i$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена решению задачи транспорта солитонов на метрических графах. На основе проведенных в диссертационной работе исследований представлены следующие выводы:

1) Доказано, что нелинейное стационарное уравнение Шредингера на метрических графах имеет точное аналитическое решение в виде стоячего солитона для различных топологий графа;
2) Доказано, что на метрических графах стационарное уравнение синус-Гордона имеет точное аналитическое решение в виде устойчивых солитонов, которые удовлетворяют граничным условиям, обеспечивающим непрерывность волновой функции и сохранение потока на узлах графа.
3) Выведены условия стабильности этих солитонов и доказаны, что среди полученных солитонных решений есть устойчивые решения;
4) Построен алгоритм численного решения стационарного нелинейного уравнения Дирака, описывающее стоячих солитонов в разветвленных структурах;
5) Динамика релятивистских солитонов в разветвленных системах предложена путем солитонных решений нестационарного нелинейного уравнения Дирака на метрических графах.
6) Решена задача баллистического и диффузионного транспорта с помощью солитонного решения уравнения Дирака с кубической нелинейностью в разветвленных углеродных наноструктурах;
7) Разработаны алгоритм и программа численного решения нелинейных волновых уравнений в метрических графах.

INTRODUCTION (abstract of doctor of philosophy (PhD) dissertation)

The aim of the research is the study of the nonlinear wave dynamics in branched structures and networks by modeling them in terms nonlinear wave equations on metric graphs; elaboration and application effective methods for numerical methods solutions of such equations; revealing the conditions for regime of ballistic solitons transport in networks and branched structures.

The object of the research is the soliton dynamics in mesoscopic networks, branched nanoscale structures

Scientific novelty of the novelty includes obtaining of the standing soliton solution of stationary nonlinear Schrodinger equation on metric graphs; obtaining of the standing wave soliton solutions of the sine-Gordon equation on metric graphs and their stability analysis; obtaining of the solution of nonlinear Dirac equation, modeling Bose-Einstein condensates in branched carbon nanostructurers; obtaining analytical solutions of Bogoliubov de Genens equation on metric graphs modeling the Majorana fermions on branched quantum wires; elaboration of the algorithm and code for numerical solution of nonlinear wave equations on metric graphs.

Implementation of the results. Based on stable soliton solutions of nonlinear stationary stationary wave equations in branched structures:

(standing) soliton solution of the stationary nonlinear Schrödinger equation on graphs used in foreign scientific articles (Journal of Differential Equations, Volume 266, Issue 1, 5 January 2019, Pages 147-178; Nonlinearity, Volume 28, Number 7, 2015, pp. 2343 –2378; Applied Mathematics ResearcheXpress, Volume 2016, Issue 1, January 1, 2016, pp. 98–145) to derive boundary conditions describing the transport of solitons passing through the branching point of the graph. The use of scientific results allowed us to solve a boundary value problem on a graph for a nonlinear stationary Schrödinger equation;

analytical solutions of the stationary sine-Gordon equation on metric graphs, describing standing solitons in branched systems in foreign scientific papers (Communications in Mathematical Physics, May 2017, Volume 352, Issue 1, pp. 387–406; Portugaliae Mathematica 72 (4), April 2012, P. 31; Nonlinearity, Volume 30, Number 8, 2017, P. 24) are used to solve the problem of studying the dynamics of solitons in branched systems. The application of scientific results allowed us to solve the boundary problem on the graph for the nonlinear stationary sine-Gordon equation;

the solution of the nonlinear Dirac equation on metric graphs obtained by studying the dynamics of Dirac solitons in branched systems in foreign articles (Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 51, Number 9, 2018, P. 22; SIAM Journal of Mathematical Analysis, 51 (2), 1046–1081; Symmetry 2019, 11 (2), 169) used the study of the dynamics of Bose-Einstein condensates in branched systems. The application of scientific results allowed us to solve the boundary problem on a graph for the nonlinear Dirac equation.

The structure and volume of the thesis contains introduction, five chapters, references and appendices (total 120 pages).

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
Список опубликованных работ
List of published works
I бўлим (I часть; part I)

1. K.K.Sabirov, D.B.Babajanov, D.U.Matrasulov,P.G.Kevrekidis. Dynamics of Dirac solitons in networks \\ Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51, 2018, 435203, 13 pp. (3. Scopus. IF=1.74).
2. K.Sabirov, D.Jumanazarov, J.Yusupov, D.Matrasulov. Bogoliubov de Gennes equation on metric graphs \\ Physics Letters A, 382, 2018, 2856–2860. (3. Scopus. IF=1.86).
3. K.Sabirov, S.Rakhmanov, D.Matrasulov, H.Susanto. The stationary sine-Gordon equation on metric graphs: Exact analytical solutions for simple topologies \\ Physics Letters A, 382, 2018, 1092-1099. (3. Scopus. IF=1.86).
4. K.K.Sabirov, M.Aripov, D.B.Sagdullayev. Stationary nonlinear Schrodinger equation on the graph for the triangle with outgoing bonds. \\ Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 8 (1), 24–28. (01.00.00, №5).
5. К.Сабиров, О.Карпова, Д.Бабажонов. Стационарное нелинейное уравнение Шрёдингера на простейших графах \\ Узбекский физический журнал, т.17, №5, 2015, 274-281. (01.00.00, №5).
6. K.K.Sabirov, Z.A.Sobirov, D.Babajanov, D.U.Matrasulov. Stationary nonlinear Schrodinger equation on simplest graphs \\ Physics Letters A, 377, 2013, 860-865. (3. Scopus. IF=1.86).
7. Karimjon Sabirov, Zarif Sobirov, Donyor Babajanov, Davron Matrasulov. Time-Independent Nonlinear Schrodinger Equation on Simplest Networks, \\ Low-Dimensional Functional Materials (NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics), 2013, pp 155-164. (41. SCImago. IF=0.113).
8. К.К.Сабиров, З.А.Собиров. Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью\\ Узбекский физический журнал, т. 10, №4, 2008, 311-316. (01.00.00, №5).

IIбўлим (II часть; partII)

9. К.К.Сабиров, Д.У.Матрасулов, З.А.Собиров. Нелинейные волны на графах \\ Конференция молодых ученных, Ташкент, 18-19 декабря, 2009 г., Сборник Докладов, стр. 110-116.
10. К.К.Сабиров, З.А.Собиров. Обратная задача для звездообразных квантовых графов \\ “Физика фанининг бугунги ривожида истеъдодли ёшларнинг ўрни” республика ёш олимлар ва иқтидорли талабаларнинг илмий амалий анжумани материаллари, Ташкент, 17-18 апрель 2009 й. стр. 119-122.
11. З.А.Собиров и К.К.Сабиров. Уравнения Шредингера с кубической нелинейностью на графах \\Современная физика и ее перспективы, Ташкент, 12-13 ноября 2009 гг. стр.159-161.
12. З.А.Собиров, Д.У.Матрасулов, К.К.Сабиров, К.Накамура. Солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера на графах

\\Материалы конференции «Современные проблемы физики и физическое образование», Самарканд, 11-12 декабря, 2009 гг. стр. 25.

13. К.К.Сабиров, З.А.Собиров. Обратная задача рассеяния для уравнения Дирака на звездообразном квантовом графе \\Материалы республиканской научно-практической конференции «Взгляд молодых ученных на актуальные проблемы науки», Ташкент, 29 октябрь, 2010 гг. стр. 32-33.

14. К.К.Сабиров, Ж.Р.Юсупов, З.А.Собиров, Д.У.Матрасулов. Квантовая динамика нестационарных наноразмерных сетей \\ Сборник тезисов «Актуальные проблемы науки о полимерах», Ташкент, 2010 г. стр. 48.

15. К.К.Сабиров, З.А.Собиров.Нелинейное уравнение Шрёдингера на простом графе \\ “Физика фанининг бугунги ривожида истеъдодли ёшларнинг ўрни” республика ёш олимлар ва иқтидорли талабаларнинг илмий амалий анжумани материаллари, Тошкент, 29 апрель 2011 й. стр. 130-133.

16. K.Sabirov, Z.Sobirov, D. Matrasulov, K.Nakamura. Integrable nonlinear Schrödinger equation on an elementary branched chain \\ Proceedings of international workshop “Low-dimensional Nano scale systems”, Tashkent, November 10-11 (2011), 53-61 p.

17. K. Sabirov, O. Karpova, D.U. Matrasulov. Inverse scattering problem for relativistic quantum graphs \\ Proceedings of international workshop “Low-dimensional nanoscale systems”, Tashkent, November 6-7 (2012), 100-107 p.

18. К.К.Сабиров. Общее решение нелинейного уравнения Шрёдингера на простом звездообразном графе \\ Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы теоретической и ядерной физики», Ташкент, 25-26 Октября, 2013 гг. стр. 81-88.

19. К.К.Сабиров, О.В.Карпова, Д.Рахимбаева. Решение нелинейного уравнения Шредингера на простом звездообразном графе методом Римана-Гильберта \\ Вестник, 3 выпуск, 2013 г.

20. Sabirov K.K. The stationary Sine-Gordon equation on metric graph for the triangle with outgoingbonds \\ „Амалий Математика ва Информацион Технологияларнинг Долзарб Муаммолари - Аль - Хоразмий 2016" халқаро анжуман маърузалар тезиси, Бухоро, 2016 йил, 9 - 10 ноябрь, 137 б.

21. Sabirov K.K., Atayev Sh., Sagdullayev D.B.Stationary nonlinear Schrödinger equation on the graph for the triangle with outgoing bonds \\„Амалий Математика ва Информацион Технологияларнинг Долзарб Муаммолари - Ал - Хоразмий 2016" халқаро анжуман маърузалар тезиси, Бухоро, 2016 йил, 9 - 10 ноябрь, 138 б.