

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**
ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

ТУРСУНОВА Э.А.

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

5340400- строительство и монтаж инженерных коммуникации

УЧЕБНИК

Ташкент-2018

УДК: 624.04.

Автор: Турсунова Э.А.

Механика и жидкости газа, учебник

Учебник составлен в соответствии с программой курса «Механика жидкости и газа» и может быть рекомендован бакалаврам технических вузов, изучающим предметы «Механика жидкости и газа», «Гидравлика».

Учебник охватывает следующие вопросы: исторический обзор развития предмета, основные физические свойства жидкостей; отличие механики жидкости от механики газа; основы гидростатики и гидродинамики, режимы движения жидкостей и газов и причины возникновения гидравлических потерь напора в трубопроводах, гидравлический расчет простых и сложных трубопроводов, вопросы слияния и разделения потоков в трубах, а также истечение жидкости из отверстий и насадок; обтекание конструкций несжимаемой жидкостью; рассмотрены основы теории гидродинамического подобия и физического моделирования.

Рецензенты: проф. ТДТУ - М.М.Мухаммадиев
проф. ТАСИ – Ю.К.Рашидов

ВВЕДЕНИЕ

Механика жидкости и газа является предметом изучения жидкостей и газов либо в движении (гидродинамика) либо в состоянии покоя (гидростатика) и последующих эффектов жидкости на границах, которые могут быть или твердыми поверхностями или интерфейсы с другими жидкостями. Оба: газ и жидкость - классифицируются как жидкости, а количество инженерных приложений жидкости огромно назовём лишь некоторые из них: дыхание, кровообращение, плавание, насосы, вентиляторы, турбины, самолеты, корабли, реки, ветряные мельницы, трубы, ракеты, айсберги, двигатели, фильтры, струи и спринклеры. Когда вы думаете об этом, почти всё на этой планете либо представляет собой жидкость, либо движется в пределах или вблизи жидкости.

Суть предмета механика жидкости является разумным компромиссом между теорией и экспериментом. Так как, поток жидкости является ветвью механики, она удовлетворяет множество хорошо задокументированных основных законов, и, таким образом, доступна большая теоретическая обработка. Тем не менее, теория зачастую разочаровывает, потому что относится главным образом к идеализированной ситуации, которая может быть неправильно использована в практических задачах. Два главных препятствия на пути к работоспособной теории - геометрия и вязкость. Основные уравнения движения жидкости слишком сложны, чтобы позволить аналитику применять произвольные геометрические конфигурации. Таким образом, большинство учебников сосредоточено на плоских пластинах, круглых трубах и других простых геометрических фигурах. Можно применять численные методы для компьютера со сложной геометрией, а также специализированные учебники теперь доступны для объяснения новых вычислительных приближений гидродинамики (CFD) и метода. Эта книга представит множество теоретических результатов, имея в виду и сохраняя при этом их ограничения.

Вторым препятствием к работоспособной теории является действие вязкости, которой можно пренебречь только в некоторых идеализированных потоках. Во-первых, вязкость увеличивает сложность основных уравнений, хотя приближение пограничного слоя найденное Прандтлем в 1904 значительно упростило анализ вязкого течения. Во-вторых, вязкость оказывает дестабилизирующее воздействие на все жидкости, что приводит, к удручающе малым скоростям, к беспорядочным, случайным явлениям называемым турбулентностью. Теория турбулентного потока мало изучена и в значительной степени опирается на эксперимент, но это может быть вполне пригодно в качестве предварительного технического расчёта. Учебники теперь представляют технические приёмы цифровых вычислительных машин для анализа турбулентного потока, но они основаны строго на эмпирических предположениях, относительно среднего времени турбулентного поля напряжений.

Таким образом, существует теория для решения проблем при течении жидкости, но во всех случаях она должно быть подкреплена экспериментом. Часто экспериментальные данные служат основным источником информации о конкретных потоках, таких как сопротивление и подъем погруженных тел. К счастью, механика жидкости является очень визуальным предметом, с использованием хорошей аппаратуры, а также широко распространённого размерного анализа и моделирования понятий. Таким образом, экспериментирование обеспечивает естественное и легкое дополнение к теории. Вы должны иметь в виду, что теория и эксперимент должны идти рука об руку во всех исследованиях механики жидкости.

С точки зрения механики жидкости, вся материя состоит только из двух состояний: жидкости и твердого тела. Разница, между этими двумя состояниями, совершенно очевидна для непрофессионала, и это интересное упражнение, чтобы попросить неспециалиста установить эту разницу словами. Техническое различие лежит в реакции двух состояний на приложенный сдвиг или касательное напряжение. Твердое вещество может

противостоять напряжению сдвига от статической деформации; жидкость не может. Любое напряжение сдвига, применяемое к жидкости, независимо от того, насколько оно мало, приведет к движению этой жидкости. Жидкость движется и деформируется непрерывно до тех пор, пока применяется напряжение сдвига.

Как следствие, мы можем сказать, что жидкость в состоянии покоя должна быть в состоянии нулевого напряжения сдвига, это состояние в структурном анализе часто называют гидростатическое напряженное состояние. В этом состоянии, Круг Мора для снятия стресса сводится к точке, и нет никакого напряжения сдвига на любом сечении плоскости сквозном элементе под напряжением. Учитывая, определение жидкости выше, каждый мирянин также знает, что существует два класса жидкостей: жидкости и газы. Опять же различие является техническим и говорит о влиянии сил сцепления.

Жидкость, состоящая из относительно плотно упакованных молекул с сильными сплоченными силами, как правило, сохраняет свой объем и образует свободную поверхность в гравитационном поле, если она неограниченна сверху. Свободные поверхности потоков обладают гравитационными эффектами. Так как молекулы газа широко расставлены и имеют незначительные силы сцепления, газ может свободно расширяться до тех пор, пока не встретит ограничивающие стены. Газ не имеет определенного объема, а когда движется без ограничения, газ образует атмосферу, которая является по существу гидростатической. Газы, не могут образовывать свободную поверхность, и, таким образом, газовые потоки редко связаны с гравитационными эффектами, другими чем плавучесть.

Глава I.

Краткий исторический обзор. Связь курса с общетехническими и специальными дисциплинами. Основные физические свойства жидкостей

1.1 Краткий исторический обзор

При решении различных проблем часто приходится встречаться с вопросом о движении различных жидкостей, а также с вопросом о силовом воздействии жидкости на те или иные поверхности и на обтекаемые ею твёрдые тела.

Исследование этих вопросов постепенно привело к созданию обширной науки, которую следует назвать «механикой жидкого тела», или «механикой жидкости», или «гидромеханикой». Само собой разумеется, что механика жидкости разделяется на статику, кинематику и гидродинамику.

Можно сказать, что в механике жидкости изучаются законы равновесия и движения различных жидкостей; очевидно, что в ней должны даваться также и способы практического приложения этих законов, т.е. разрабатываться соответствующие методы гидромеханических расчётов различных конструкций, устройств и т.п.

Существенно подчеркнуть, что механика жидкости в силу ряда причин развивалась по 2-м направлениям:

- 1) по направлению, свойственному техническим наукам.
- 2) по направлению чисто математическому.

В связи со сказанным создалось положение, когда в области единой науки механики жидкости мы оказались вынужденными различать как бы две разные науки: «техническую механику жидкости» («гидравлика») и «математическую механику жидкости».

В **технической механике жидкости** (гидравлике) при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и

потому в технической механике жидкости приводятся относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом стремятся к оценке только главных характеристик изучаемого явления и часто оперируют теми или иными интегральными и осреднёнными величинами, которые дают достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений; например, в технической механике часто пользуются понятием средней скорости движения жидкости в том или другом поперечном сечении потока и т.д. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, должна рассматриваться как «профессиональная физика жидкого тела», в которой, в частности, даются основы соответствующих расчётов, используемых при проектировании инженерных сооружений, конструкций, а также надлежащих технологических процессов.

В математической механике жидкости, как было отмечено, широко используется относительно сложный математический аппарат, не изучаемый в технических вузах. Этот аппарат прилагается также к несколько упрощённым схемам движения жидкости. Однако в этом методе исследования мы всё же прибегаем к различного рода допущениям и не оперируем различными осреднёнными величинами в такой мере, как в технической механике жидкости. Решения, получаемые в математической гидромеханике, оказываются более строгими в математическом отношении. По своему характеру математическая механика жидкости сходна с математической теорией упругости, изучаемой в университетах.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости сплошь и рядом оказываются столь сложными, что громадное большинство практических задач, следуя этим методам решить невозможно. Этим и объясняется возникновение и развитие технической прикладной науки – технической механики жидкости, т.е. гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только некоторые простейшие задачи при помощи сложных методов. Надо, впрочем, отметить, что в последнее время мы всё чаще сталкиваемся с вопросами, которые приходится решать, сочетая методы технической и математической гидромеханики, причём иногда бывает трудно провести границу между этими двумя науками.

Необходимо отметить, что гидравлика, представляющая собой обширную самостоятельную техническую науку, включает в себя много различных разделов, касающихся отдельных сторон рассматриваемой проблемы. Разумеется, эти разделы должны излагаться в курсах «Технической механики жидкости» для разных технических специальностей различно. Например, для строительных специальностей приходится более подробно освещать те процессы, которые имеют место при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений; для машиностроительных специальностей – те процессы, с которыми мы сталкиваемся при проектировании и эксплуатации машин и т.д.

Из сказанного выше видно, что термины «гидравлика», «техническая гидромеханика» и «техническая механика жидкости» следует рассматривать как имеющие одинаковое значение. Необходимо учитывать, что само слово «гидравлика» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «вода», а второе «труба», «канал», «струя». Как видно, ранее считали, что гидравлика занимается изучением движения или покоя только воды. Однако в настоящее время термин «гидравлика» понимается в более широком смысле: мы предполагаем, что объектом изучения в гидравлике является любая жидкость.

В итоге можно сформулировать **гидравлику**, как одну из естественных наук, которая изучает законы относительного покоя и движения жидкостей, а

также разрабатывает методы для применения этих законов для производственной деятельности человека и общества.

Зарождение отдельных представлений из области гидравлики следует отнести ещё к глубокой древности, гидротехнических работ, проводившихся древними народами, населявшими Египет, Вавилон, Месопотамию, Индию, Китай и другие страны. Однако прошло много времени, прежде чем начали появляться первые научные обобщения тех или других наблюдений, относящихся к гидравлическим явлениям.

Период Древней Греции. В Греции ещё за 250 лет до нашей эры начали появляться трактаты, в которых выполнялись достаточно серьёзные для того времени теоретические обобщения отдельных вопросов механики жидкости. Механик и математик того времени Архимед оставил после себя анализ вопросов гидростатики и плавания.

Представитель древнегреческой школы **Ктезибий (2 или 1 век до н.э.)** изобрёл пожарный насос, водяные часы и др. гидравлические устройства. Герону Александрийскому принадлежит описание сифона, водяного органа, автомата для отпуска жидкости.

Период Древнего Рима. В Древнем Риме строились сложные для того времени гидротехнические сооружения: акведуки, системы водоснабжения и т.п. в своих сочинениях римский инженер-строитель **Фронтин** указывает, что во времена Траяна в Риме было 9 водопроводов, причём общая длина водопроводных линий составляла 436 км. Можно полагать, что римляне уже обращали внимание на наличие связи между площадью живого сечения и уклоном дна русла, на сопротивление движению воды в трубах, на неразрывность движения жидкости. Например, Фронтин писал, что количество воды, поступившей в трубу, должно равняться количеству воды, вытекающей из неё.

Период Средних Веков. Этот период, длившийся после падения Римской империи около тысячи лет, характеризуется, как принято выражаться, регрессом, в частности, и в области механики жидкости.

Эпоха Возрождения. В течении второй половины XV века и в XVI веке начали развиваться экспериментальные исследования, постепенно опровергавшие схоластические воззрения, поддерживаемые католической церковью. В этот период в Италии появилась гениальная личность - **Леонардо да Винчи**, который как известно, вёл свои научные исследования в самых различных областях; в частности, Леонардо изучал принцип работы гидравлического процесса, аэродинамику летательных аппаратов, образование водоворотных областей и другие гидравлические процессы. Он изобрёл центробежный насос, парашют, анемометр. Справедливо будет считать, что Леонардо да Винчи является основоположником механики жидкости.

К периоду возрождения относятся также работы нидерландского математика - инженера **Симона Стевина**, определившего величину гидростатического давления на плоскую фигуру и объяснившего «гидростатический парадокс». В этот период итальянский физик Галилео Галилей показал, что гидравлические сопротивления возрастают с увеличением скорости и с возрастанием плотности жидкой среды; он разъяснял также вопрос о вакууме.

Период XVII века и начало XVIII века. В это время механика жидкости всё ещё находилась в зачатом состоянии. Вместе с тем здесь можно отметить имена следующих учёных, способствовавших её развитию: **Кастелли (1577-1644)** - преподаватель математики в Пизе и Риме – в ясной форме изложивший принцип неразрывности; **Торричелли** – математик и физик – дал формулу расчёта скорости истечения жидкости из отверстия и изобрёл ртутный барометр; **Паскаль (1623-1662)** - выдающийся французский математик и физик – установивший, что значение гидростатического давления не зависит от ориентировки площадки действия, кроме того, он окончательно решил и обосновал вопрос о вакууме; **Ньютон (1643-1727)** – гениальный английский физик, механик, астроном и математик – давший

наряду с решением ряда гидравлических вопросов приближённое описание законов внутреннего трения жидкости.

Середина и конец XVIII века. Формируются теоретические основы современной механики жидкости. Анализируя соответствующий исторический материал, можно видеть, что вопрос о вакууме осознавался человечеством на протяжении 2 тыс. лет; вопрос о неразрывности движения жидкости – на протяжении 1,5 тыс. лет. Такое положение объясняется тем, что прежде, чем уяснить подобные вопросы, следовало бы предварительно ясно себе представить основные положения физики и механики, которые в наше время люди усваивают с детского возраста: вопрос о силе тяжести и всемирном тяготении, вопрос о скорости и ускорении, о давлении атмосферы и т.п. Только освоив такие представления можно легко разобраться в «элементарных» положениях механики жидкости. Однако решение всех этих вопросов физики и механики являлось весьма трудной задачей: на пути раскрытия их стояла католическая церковь, различные предрассудки, а также существовавшие метафизические объяснения различных явлений.

И вот к середине XVIII века трудами ряда учёных (Галилея, Коперника, Кеплера, Паскаля, Декарта, Гука, Ньютона, Ломоносова, Клеро и многих других) указанные препятствия были, наконец, преодолены. После этого относительно быстро стали развиваться современные научные основы механики жидкости. Эти научные основы были заложены тремя учёными XVIII века: Даниилом Бернулли, Эйлером и Д. Аламбером.

Д. Бернулли (1700-1782) - выдающийся физик и математик – родился в Гронингене (Голландия). С 1725 по 1733 г. жил в Петербурге и являлся профессором и членом Петербургской Академии наук. В Петербурге он писал свой знаменитый труд «Гидродинамика», который был в последствии опубликован в городе Страсбурге. В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения, носящее его имя.

Л. Эйлер (1707-1783) - великий математик, механик и физик – родился в г. Базеле (Швейцария). Жил в Петербурге с 1727 до 1741 г. и с 1766 до конца своей жизни. Эйлер не только обобщил и подытожил в безупречной математической форме работы предшествующих авторов, но составил известные дифференциальные уравнения движения и относительного равновесия жидкости, носящие его имя, а также опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат.

Ж.Д' Аламбер (1717- 1783) - математик и философ; член Парижской, французской и других Академий наук, а также Петербургской Академии наук. Опубликовал ряд трактатов, относящихся к равновесию и движению жидкости. В указанный период существенный вклад в дело развития механики жидкости; предполагают, что Д.Аламбер первый отметил возможность кавитации жидкости.

Середина и конец XVIII века. Зарождается техническое направление механики жидкости. Во Франции начала постепенно образовываться школа – школа учёных- инженеров, которые стали формировать механику, как техническую науку. Яркими представителями этой школы являлись: **А.Пито (1695-1771)** – инженер-гидротехник, член Парижской академии наук, изобретатель «прибора Пито»; **А.Шези (1718-1798)** – директор Французской школы мостов и дорог, сформулировавший параметры подобия потоков и основавший формулу, носящую его имя; **Ж.Борда (1733-1799)** – военный инженер, который занимался вопросами истечения жидкостей из отверстий и нашёл потери напора при резком расширении потока; **П. Дюбуа (1734-1809)** - инженер-гидротехник и военный инженер, составивший обобщающий труд «Принципы гидравлики».

Техническое направление механики жидкости развивалось и в других странах. Здесь можно отметить итальянского профессора **Д. Вентури (1746-1822)** и немецкого учёного-инженера **Р. Вольтмана (1757-1837)**.

Вне зависимости от формирования технической механики жидкости в странах Западной Европы гениальный русский учёный **М.В. Ломоносов (1711-1765)**, учитывая рост промышленности и строительства в России, начал также развивать механику жидкости в техническом направлении.

Развитие технической механики жидкости в XIX веке за рубежом. Зародившееся во Франции направление, начало развиваться и в других странах. В этот период были разработаны и решены в той или иной мере следующие проблемы: основы теории плавно измеряющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах (Беланже, Кориолис, Сен-Венан, Дюпюи, Буден, Бресс.); вопрос о гидравлическом прыжке (Бидоне, Беланже, Бресс, Бруссинек); экспериментальное определение параметров, входящих в формулу Шези (Базен, Маннинг, Гангилье, Куттер); составление эмпирических и полуэмпирических формул для определения гидравлических сопротивлений в различных случаях (Кулон, Хаген, Сен-Венан, Пуазейль, Дарси, Вейсбах, Бруссинек).

Зарождение и развитие технической механики жидкости (гидравлики) в XIX веке в России. Прикладное, инженерное направление механики жидкости, зародившееся ещё в работах М.В. Ломоносова, стало развиваться в России в стенах Петербургского института инженеров путей сообщения. В этом институте долгое время существовала школа России. Учёные этого института только в начале следовали Французской школе. Здесь можно прежде всего упомянуть П.П. Мельникова (1804-1880)-инженера путей сообщения, профессора прикладной механики, почётного члена Петербургской Академии наук, Министра путей сообщения, который первым создал курс на русском языке «Основания практической гидравлики», а также организовал первую в России гидравл. Лабораторию.

Большой вклад в развитие гидравлики внесли следующие учёные и инженеры: **Н.П.Петров (1836-1920)** - выдающийся русский учёный-инженер, почётный член Петербургской Академии наук, который в своём труде «Трения в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» впервые

сформулировал законы трения при наличии смазки; **Н.Е.Жуковский (1847-1921)** – великий русский учёный, профессор Московского высшего технического училища и Московского университета создатель теории гидравлического удара; **И.С. Громека (1851-1889)** – профессор Казанского университета, разрабатывавший теорию капиллярных явлений и заложивший основы теории, так называемых, винтовых потоков.

Развитие гидравлики в области инженерно- строительных работ в течении первых десятилетий XX века. В начале XX века из технической механики жидкости начали выделяться отдельные иногда в значительной мере изолированные друг от друга направления, которые приходится рассматривать отдельно. Ниже, касаясь только инженерно-строительного направления гидравлики, осветим главнейшие работы, относящиеся к этому направлению и выполненные в период до 20-30х годов настоящего столетия.

Ф.Форхгеймер (1852-1933) - немецкий профессор – рассмотрел гидравлические сопротивления, волны перемещения, колебания горизонтов воды в уравнильных резервуарах ГЭС, некоторые виды деформаций песчаных русел. Особенно важны исследования Форхгеймера в области вопросов фильтрации.

М.Вебер (1871-1951) - немецкий профессор – придал принципам гидродинамического подобия современные формы.

Л. Прандтль (1875-1953) - немецкий профессор, инженер – разработал полуэмпирическую теорию турбулентности; исследовал гидравлические сопротивления в трубах. С именем Прандтля связан ряд понятий из области механики жидкости.

Б.А.Бахметов (1880-1951) - русский учёный, инженер путей сообщения- работая в Петербургском политехническом институте, заложил основы современной русской гидравлической школы, опубликовав ряд книг, в которых осветил различные разделы гидравлики.

Н.Н.Паловский (1886-1937) – учёный, академик, инженер путей сообщения – в 1922 г. опубликовал основы математической теории

фильтрации воды в грунтах; предложил метод электро моделирования фильтрационных потоков; издавал первый в России «Гидравлический справочник» и монографию по основам гидравлики.

Н.М.Бернадский (1882-1935) - советский учёный, инженер путей сообщения – впервые связал определение тепловых потерь с полем скоростей в прудах-охладителях; предложил важную модель «планового потока», нашедшую себе широкое применение.

1.2 Основные физические свойства жидкостей

Как известно, различают твёрдые, жидкие и газообразные тела, а также плазму. При изменении давления или температуры жидкое тело может переходить в твёрдое или газообразное. Например, при очень высоких давлениях в обычной воде образуются кристаллы льда; наоборот, при снижении давления в жидкости могут появиться пузырьки, заполненные паром (газом).

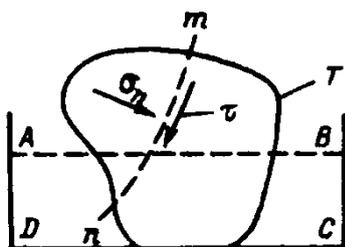


Рис. 1. Напряжения нормальное (σ_n) и касательное (τ)

Жидкость есть физическое тело, обладающее 2-мя особыми свойствами:

- 1) она весьма мало изменяет свой объём при изменении давления или температуры; в этом отношении жидкость сходна с твёрдым телом;
- 2) она обладает текучестью, благодаря чему жидкость не имеет собственной формы и принимает форму того сосуда, в котором она находится; в этом отношении жидкость отличается от твёрдого тела и является сходной с газом.

С тем чтобы пояснить свойство текучести жидкого тела, покажем на **рисунке 1.** твёрдое тело **Т.** В этом теле под действием, например, собственного веса должны возникнуть соответствующие напряжения. Если наметить произвольное сечение **mm** данного тела, то в этом сечении, так же как и в любом другом сечении, помимо нормальных напряжений σ_n , будут

возникать ещё касательные напряжения τ , т.е. напряжения, действующие вдоль намеченного сечения.

Представим себе далее, что тело **T**, находясь в покое, приобрело такое состояние своего вещества, при котором оно оказывается неспособным воспринимать касательные напряжения τ , вызываемые, например собственным весом. При этом, очевидно, тело **T** под действием собственного веса начнёт растекаться и в конечном счёте примет форму сосуда **ABCD**.

Как видно, текучесть рассматриваемого тела обуславливается тем, что оно в покое не способно сопротивляться внутренним касательным усилиям, т.е. усилиям, действующим вдоль поверхностей сдвига.

Можно сказать, что второе свойство жидкости заключается в том, что жидкость, в отличие от твёрдого тела, находясь в покое, не может иметь касательных напряжений, и именно поэтому она принимает форму сосуда, в котором заключена. Поскольку газ тоже обладает текучестью, то многие теоретические положения, разработанные применительно к жидкому телу, могут быть распространены и на случай газообразных тел.

Говоря далее только о жидкости, как пример её, часто будем иметь в виду воду, которая характеризуется 2-мя упомянутыми свойствами.

Как показывает опыт, жидкости, встречающиеся в природе, т.е. реальные жидкости, столь мало изменяют свой объём при обычном изменении давления и температуры, что этим изменением объёма практически можно пренебрегать. Поэтому в гидравлике жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемое тело. Выше было подчеркнуто, что в покоящейся жидкости касательные напряжения всегда отсутствуют. В движущейся жидкости, как показывают исследования, касательные напряжения обычно имеют место: именно при движении жидкости по поверхностям скольжения жидких слоёв друг по другу возникает трение, которое и уравнивает внутренние касательные силы.

Свойство жидкости, обуславливающее возникновение в ней при её движении касательных напряжений, называется вязкостью.

В практике встречаются случаи, когда силы трения, возникающие благодаря вязкости, оказываются небольшими сравнительно с другими силами, действующими на жидкость. В этих частных случаях вязкостью можно пренебречь и считать, что в движущейся жидкости касательные напряжения отсутствуют так же, как и в покоящейся жидкости.

При аналитических исследованиях часто пользуются понятием идеальной жидкости. Идеальной жидкостью называют воображаемую жидкость, которая характеризуется:

А) абсолютной неизменяемостью объёма (при изменении давления и температуры)

В) полным отсутствием вязкости, т.е. сил трения при любом её движении.

Из сказанного выше ясно, что:

- при изучении покоящейся жидкости нет надобности различать реальную и идеальную жидкости;
- при изучении же движения жидкости очень часто приходится считаться с различием между двумя названными жидкостями: в случае реальной жидкости необходимо дополнительно учитывать силы трения, т.е. вязкость.

Многие физические свойства жидкостей изучаются в общей физике, а не в гидравлике. Гидравлика, представляя собой особый раздел профессиональной физики, занимается вопросами механики жидкости. Разумеется, при рассмотрении таких вопросов приходится интересоваться численными характеристиками различных свойств разных жидкостей.

1. плотность жидкости ρ ; вес единицы объёма жидкости γ .

Возьмём некоторый объём V жидкости, имеющий массу M и вес G .

Как известно, плотностью жидкости ρ называется отношение массы M к объёму V :

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (1-1)$$

следовательно,

$$M = \rho V \quad (1-1')$$

Введём обозначение:

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad (1-2)$$

где γ - есть вес единицы объёма жидкости ; как видно

$$G = \gamma V \quad (1-2')$$

Нам известно, что

$$G = gM \quad (1-3),$$

где g – ускорение свободного падения тела (ускорение силы тяжести).

Подставляя в (1-3) выражение (1-1) и (1-2), имеем:

$$\gamma V = g\rho V$$

откуда получаем следующую важную зависимость:

$$\rho = \frac{\gamma}{g}; \gamma = \rho g.$$

Величины ρ и γ являются числами именованными:

$$\rho = \frac{[M^3]}{[L]}; \gamma = \frac{[F]}{[L^3]} = \frac{[M]}{[T^2 L^2]},$$

где M, L, F, T - символы соответственно массы, длины, силы, времени.

Плотность ρ и вес, отнесённый к единице объёма жидкости («удельный вес»), γ некоторых жидкостей.

Название жидкости	T^0, C	$\rho, \text{кг/м}^3$	γ	
			кН/м^3	Кгс/м^3
Вода	0	997,87	9,80537	997,87
	4	1000,00	9,80665	1000,00
	10	999,73	9,80400	999,73
	20	998,23	9,78929	998,23
	30	995,67	9,76419	995,67
	40	992,24	9,73055	992,24
	50	988,07	9,68966	988,07
Морская вода	15	1020-1030	10,00278-	1020-1030
Ацетон	15	790	10,10085	790
Бензин	15	680-740	7,74725	680-740
Глицерин (безводный)	20	1260	6,66852-	1260
Керосин	15	790-820	7,25692	790-820
Масло веретенное	20	889	12,2364	889
Масло машинное	20	898	7,74725-	898
Масло минеральное	15	890-960	8,04145	890-960
Масло трансформаторное	15	700-900	8,80637	700-900
Нефть натуральная	0	13596	8,72792-	13596
Ртуть	20	13546	9,41438	13546
Ртуть	18	870	8,69850	870
Скипидар	15	810	6,86465-	810
Спирт метиловый	15-18	790	8,82598	790
Спирт этиловый	1200	7000	133,331	7000
Чугун расплавленный	15-18	740	132,841	740
Эфир этиловый			8,53178	
			7,94339	
			7,74725	
			68,6465	
			7,25692	

Для пресной чистой воды γ практически равно:

$$\gamma = 10 \text{ кН/м}^3 \text{ (или } \gamma = 1 \text{ тс/м}^3 = 1000 \text{ кгс/м}^3 = 0,001 \text{ кгс/см}^3 = 1 \text{ гс/см}^3 \text{)}.$$

2. сжимаемость жидкости. Представим себе некоторый объём жидкости V , который при повышении на Δp внешнего всестороннего давления (напряжения), действующего на него, уменьшается на ΔV .

Упругой сжимаемостью жидкости называется способность её принимать свой прежний объём V после снятия внешней нагрузки Δp .

При небольших значениях Δp относительное изменение объёма $\Delta V / V$ прямо пропорционально Δp . В соответствии с этим в качестве меры упругого сжатия жидкости принимают величину.

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V / V},$$

Причём K называют модулем объёмной упругости жидкости. Для воды (в обычных условиях) $K = 22 \cdot 10^5$ кПа, т.е. $K \approx 220$ кН/см² или $K \approx 22000$ кгс/см².

3. Сопротивление жидкости растягивающим усилиям. Особыми физическими опытами было показано, что покоящаяся жидкость иногда способна сопротивляться очень большим растягивающим усилиям; например, вода в определённых условиях может выдерживать растягивающие напряжения до $2,8 \cdot 10^4$ кПа (≈ 280 кгс/см²), не подвергаясь разрыву [1–3]. Такого рода сопротивление растягивающим усилиям получается только, когда жидкость находится в особых условиях, не имеющих места в обыденной жизни. В параграфе 1-5 будет отмечено, что жидкость в обычных условиях даже при наличии сжимающих напряжений, начинает обращаться в пар.

4. сопротивление движущейся жидкости касательным усилиям.

Как было отмечено выше, в движущейся реальной жидкости возникают силы трения. Эти силы уравнивают внутри. касательные усилия, возникающие в жидкости под действием внешних сил. Величина сил трения зависит как от рода жидкости, так и от скорости относительного перемещения частиц жидкости.

Молекулярное давление. Жидкость состоит из молекул, которые при определённых условиях притягиваются друг к другу.

Если представить ряд шариков, притягивающихся друг к другу с силой F , то ясно, что все они, за исключением крайних (А и В), будут находиться в безразличном состоянии: две силы F , приложенные к каждому внутреннему шарiku, взаимно уравниваются. Что касается крайних шариков А и В, то на каждый из них будет действовать только одна внешняя сила F , причём ясно, что весь «столбик», образованный взаимно притягивающимися шариками, должен быть сжат силой F .

Имея в виду условную схему, можно утверждать, что жидкость, находящаяся в сосуде, должна быть сжата своим поверхностным слоем C_1 , толщина которого равна радиусу r молекулярного действия, напомним, что радиус r есть расстояние от центра данной молекулы до точки, где сила притяжения, вызываемая этой молекулой, пренебрежимо мала. Величина r весьма мала. Давление, развиваемое тонким поверхностным слоем C_1 , как показали соответствующие опыты и расчёты, оказывается весьма большим, например для воды оно достигает примерно $11 \cdot 10^4$ кПа (11000 атм). Это давление называется молекулярным.

Малая сжимаемость жидкости объясняется тем, что в большинстве случаев внешние силы сравнительно с молекулярным давлением являются незначительными.

Важно обратить внимание на следующие обстоятельства.

А) считая, что поверхностный слой C_1 жидкости является совокупностью притягивающихся молекул А, можно доказать, что молекулярное давление $P_{пл}$, развиваемое плоской поверхностной плёнкой C'' , всегда должно быть меньше молекулярного давления $P_{вып}$, развиваемого выпуклой поверхностной плёнкой C''' , и больше молекулярного давления $P_{вог}$, развиваемого вогнутой поверхностной плёнкой C' :

$$P_{вог} < P_{пл} < P_{вып}$$

Это положение доказывается следующим образом.

Рассматриваем молекулу жидкости m , находящуюся вблизи свободной поверхности жидкости a_1b_1 . Другие молекулы, находящиеся в пределах окружности, описанной радиусом молекулярного действия r , притягивают рассматриваемую молекулу m . Притяжением молекул воздуха пренебрегаем.

Силы притяжения, приложенные к молекуле m со стороны молекул, находящихся в области A , уравниваются силами притяжения молекул, находящихся в области B . Как видно, можно считать, что рассматриваемая молекула притягивается книзу только теми молекулами, которые находятся в области C , ограниченной сверху горизонтальной линией a_2b_2 или кривой $a'_2b'_2$. Т.к. площадь C , ограниченная сверху линией a_2b_2 , всегда больше, чем площадь C , ограниченная сверху линией $a'_2b'_2$, то заключаем, что $\Pi_{\text{вог}} < \Pi_{\text{пл}}$.

Рассуждая аналогично, получаем, что $\Pi_{\text{пл}} < \Pi_{\text{вып}}$.

Б) молекулы жидкости, покоящейся в сосуде A , следует рассматривать в совокупности с частицами того материала, из которого сделаны стенки сосуда A . при этом легко понять, что система «жидкость – стенки сосуда» будет равномерно сжата поверхностными слоями со всех сторон.

Отсюда вытекает следующее: молекулярное давление, как бы оно ни было велико, не может разрушить сосуд, в котором находится жидкость. Это давление внешне не проявляется и не может быть измерено каким-либо простым прибором. В связи с этим, говоря о давлении жидкости или о давлении жидкости на ту или другую стенку, мы далее не будем учитывать молекулярного давления, считая, что оно как бы совсем не существует. Исключение здесь будет составлять только вопрос о капиллярности.

Мозговой штурм (брейнсторминг – буря мозгов) – метод коллективной генерации идей решения практических или научных проблем.

1.3 Фазовые переходы в жидкости. Кипение и кавитация. Отличие механики жидкости от механики газа

Фазовые переходы в жидкости. Кипение и кавитация

Одна из особенностей отличающая жидкость от газа – это возможность фазовых переходов, например: при повышении температуры T (при постоянном давлении на свободной поверхности покоящейся жидкости).

Жидкость при $T = T_{\text{кип}}$ начинает кипеть, то есть во всем объеме жидкости и особенно на стенках сосуда образуются пузырьки пара, которые всплывают на свободную поверхность жидкости и соединяясь с газом находящемся на свободной поверхности, в частности при нормальном атмосферном давлении p_a вода начинает кипеть при $T_{\text{кип}} = 373^\circ\text{К}$, при такой температуре, как известно из курса физики, давление насыщенных паров воды $p_{\text{нп}} = p_{\text{нп}}(T)$ которое зависит от T и становится равным атмосферному давлению:

$$p_{\text{нп}}(373^\circ\text{К}) = p_a$$

Такой же процесс кипения воды может происходить и при более низкой температуре $T < 373^\circ\text{К}$. Но при пониженном давлении на свободной поверхности p_o , когда это давление $p_o = p_{\text{нп}}(T)$

Например: для воды при комнатной температуре $T = 293^\circ\text{К}$ давление $p_{\text{нп}} = 2,34 \text{ кПа}$.

Фазовые переходы при понижении давления движущейся жидкости иногда порождают процесс, начальная стадия которого сходна с кипением. Рассмотрим течение (изотермическое с температурой T) в трубе имеющей конфузorno-диффузорный участок.

В области II скорость жидкости увеличивается, давление при этом уменьшается и если оказывается $p_2 < p_{\text{нп}}(T)$, то в области II начинают во всем объеме жидкости образовываться паровоздушные пузырьки (в них содержится воздух, растворенный в воде и выделившийся из нее при

понижении давления и пары воды). Эти пузырьки не успевают всплыть и уносятся жидкостью в область III, где $p_3 > p_{\text{нп}}$.

И здесь начинается обратный фазовый переход: паровоздушные пузырьки под давлением начинают сжиматься и «захлопываются» внутри жидкости или на поверхности трубы. Это явление носит название **кавитации** (cavitas – пустота, область).

Порожденное кавитацией воздействие интенсивной высокочастотной знаково-переменной нагрузки на твердые граничные поверхности иногда оказываются настолько эффективными, что даже прочные материалы могут разрушаться. Происходит так называемая кавитационная эрозия.

Отличие механики жидкости от механики газа

При изучении каких явлений следует отличать жидкости от газов: первое основное отличие заключается в том, что **газ** – это тело, которое легко сжимается и в котором скорость распространения звука, а следовательно и всех механических возмущений значительно меньше, чем в жидкости. Эта особенность газа должна учитываться, когда скорость его движения (или скорость движения в нем твердого тела) становится соизмеримой со скоростью звука или превышает ее. Область механики жидкости и газа, в которой возникает необходимость учитывать сжимаемость тела, выделяется в отдельный раздел называющийся **газовой динамикой**. В рамках этого раздела изучается движение сверхзвуковых самолетов, космических объектов, высокоскоростных, паровых и газовых турбин.

Второе отличие жидкости от газа заключается в ее способности иметь граничную поверхность между нею и окружающим ее газом, который обычно называется **сводной поверхностью**.

Третье отличие жидкости от газа заключается в том, что в газе можно неограниченно уменьшать давление или повышать температуру, и при этом свойства газа изменяются непрерывно. В жидкости давление может уменьшаться до некоторого определенного значения, ниже которого

начинается образование внутри нее паровоздушных пузырьков – возникают фазовые переходы, что качественно изменяют общие свойства текучей среды и следовательно общую картину течения.

Силы действующие на жидкость

Жидкость можно себе представить, как сплошную среду, которая находится в покое или движется и является совокупностью материальных частиц.

Все силы действующие на эти частицы можно разделить на две группы:

1. Внутренние силы упругости
2. Внешние силы упругости.

Внутренние силы упругости – силы взаимодействия между материальными частицами жидкости.

Внешние силы упругости – силы приложенный к частицам рассматриваемого объема жидкости со стороны других веществ, тел в частности со стороны жидкости окружающей рассматриваемый объем.

Внешние силы действующие на данный объем жидкости в свою очередь могут быть разделены также на две группы:

1. **Силы массовые** – действуют на все частицы, составляющие рассматриваемый объем жидкости. В случае однородной жидкости, то есть жидкости имеющей $\rho = \text{const}$, величина массовых сил будет пропорциональна также объему жидкости, поэтому при $\rho = \text{const}$ массовые силы можно называть объемными силами (собственный вес жидкости, силы инерции жидкости).

2. **Силы поверхностные** – приложены к той или иной поверхности ограничивающей рассматриваемый объем жидкости, выделенный, например, внутри покоящейся или движущейся жидкости. При равномерном распределении этих сил по данной поверхности величина их пропорциональна площади этой поверхности (атмосферное давление, действующее на свободную поверхность и силы трения).

1.4 Гидростатическое давление

Основным понятием гидростатики является понятие гидростатического давления в данной точке покоящейся жидкости. Это давление принято обозначать буквой p и для краткости именовать просто «гидростатическим давлением».

В случае покоящейся жидкости гидростатическим давлением p в данной точке называют скалярную величину, равную модулю напряжения σ в рассматриваемой точке:

$$p = \frac{P}{\omega} = \frac{\Delta P}{\Delta \omega} \quad (1)$$

где $|\sigma|$ - модуль напряжения σ (не зависящий от ориентировки – от угла наклона – площадки действия, намечаемой в рассматриваемой точке; относящийся к случаю, когда $\tau = 0$). Имея это ввиду, иногда говорят, что гидростатическое давление в данной точке представляет собой «шаровой тензор»; при этом несколько условно отмечают, что в случае гидростатики любая точка со всех сторон «сжата одинаково».

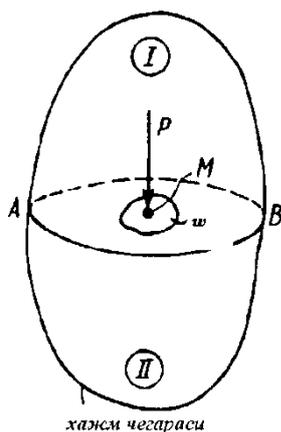


Рис. 1. Объём покоящейся жидкости.
 P - сила, действующая со стороны I отсека жидкости на площадку S , принадлежащую II отсеку

Поясним ещё гидростатическое давление p следующим образом. Представим на рис. 1. произвольный объём покоящейся жидкости. Наметим внутри этого объёма точку M и проведём через неё произвольную поверхность AB . Такая поверхность рассечёт данный объём жидкости на два отсека: I и II. Выделим у точки M на поверхности AB некоторую площадь S . Сила P , действующая на всю рассматриваемую площадь S , называется силой гидростатического давления (или суммарным гидростатическим давлением).

Сила P по отношению к отсеку II является внешней поверхностной силой; по отношению же ко всему объёму жидкости,

состоящему из двух отсеков, она является силой внутренней. Силе РО отвечает реакция, действующая со стороны отсека II на отсек I. Поэтому силу Р следует рассматривать

как силу парную.

Разделив модуль Р на S, получим

$$\frac{|P|}{S} = p_{cp} \quad (2),$$

где величина P_{cp} представляет значение той силы, которая приходится в среднем на единицу рассматриваемой площади S; P_{cp} называют средним гидростатическим давлением. Если теперь представить, что в формуле (2) площадь S стремится к нулю, то величина P_{cp} будет стремиться к определённому пределу. Этот предел выражает модуль напряжения σ , а следовательно, и значение ρ в намеченной точке М:

$$p = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{|P|}{\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega} \quad (3).$$

Из (2) и (3) видно, что величины P_{cp} и ρ имеют размерность силы, делённой на площадь.

Свойства гидростатического давления

Гидростатическое давление характеризуется тремя основными свойствами:

1. Гидростатическое давление направлено нормально к

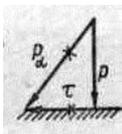


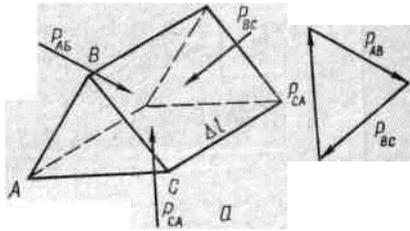
Рисунок 2

поверхности, на которую оно действует и создает только сжимающие напряжения. Действительно, в жидкости практически не возникают растягивающие напряжения, а если она находится в покое, то в ней нет и касательных напряжений. Не может давление действовать и на

площадку под углом, отличающимся от 90° , так как в этом случае его можно было бы разложить на нормальное и касательное (рис. 2), а касательные напряжения могут возникать только при движении жидкости, поэтому в

рассматриваемом случае давление может быть только нормальным к площадке и создавать только сжимающие напряжения.

2. В любой точке жидкости гидростатическое давление одинаково по всем направлениям. Для доказательства этого свойства выделим в



рассматриваемом объеме жидкости призму с основанием в виде треугольника ABC (рис. 3, а) и заменим действие объема жидкости вне призмы на

ее боковые грани соответствующими силами. Так как призма находится в равновесии, то многоугольник (в данном случае треугольник) этих

сил будет замкнут (рис. 3, б).

Треугольник сил подобен треугольнику ABC и из закона подобия следует, что

$$\frac{P_{AB}}{AB} = \frac{P_{BC}}{BC} = \frac{P_{CA}}{CA} \quad (4)$$

Разделим все члены этого равенства на длину призмы Δl :

$$\frac{P_{AB}}{AB \cdot \Delta l} = \frac{P_{BC}}{BC \cdot \Delta l} = \frac{P_{CA}}{CA \cdot \Delta l} \quad (5)$$

Произведения в знаменателях этого выражения представляют площади соответствующих граней призмы. Если размеры AB , BC , CA и Δl будут стремиться к нулю, то в соответствии с выражением (3) получим:

$$p_{AB} = p_{BC} = p_{CA} = p \quad (6)$$

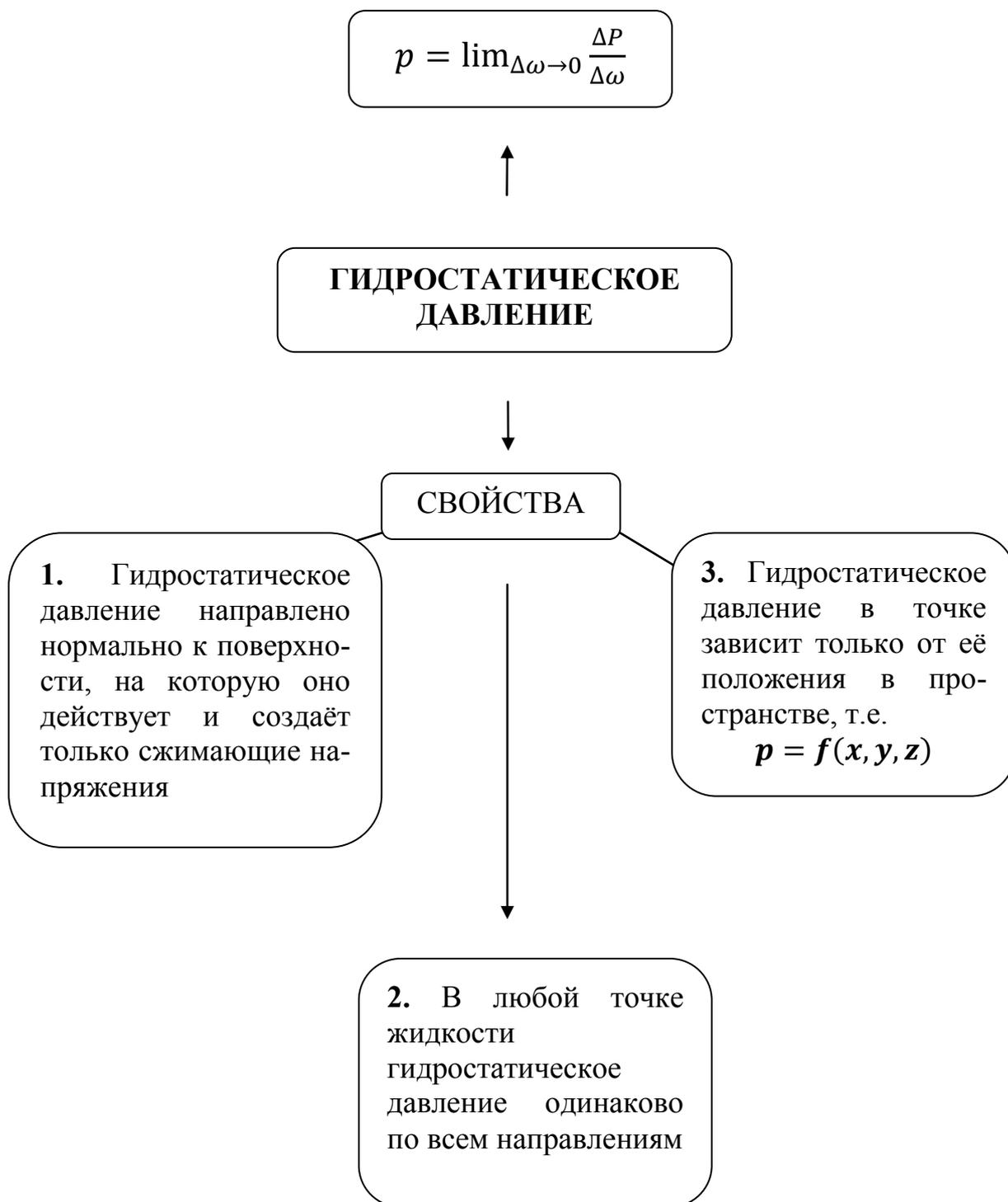
Так как ориентация граней призмы была принята произвольно, то следует считать доказанным положение о равенстве давления в одной точке по всем направлениям.

3. С учетом изложенного выше (гидростатическое давление в точке зависит только от ее положения в пространстве, т. е.

$$p = f(x, y, z).$$

В единицах СИ давление измеряется в паскалях (Па), килопаскалях (кПа), мегапаскалях (МПа). В технической литературе, изданной ранее 1980 г., встречается измерение давления в технических атмосферах (кгс/см²)

$$1 \text{ кгс/см}^2 = 98100 \text{ Н/м}^2 = 98100 \text{ Па} = 98,1 \text{ кПа} = 0,0981 \text{ МПа} \approx 0,1 \text{ МПа}.$$



1.5 Дифференциальные уравнения Эйлера. Основное уравнение гидростатики

15.1 Дифференциальные уравнения покоя жидкости. Интегрирование дифференциальных уравнений покоя жидкости

Рассмотрим теперь жидкость, на которую действует та или иная внешняя объёмная сила. Через ϕ мы обозначаем объёмную силу, действующую на единицу массы рассматриваемой жидкости. Обозначим теперь через ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z проекции силы ϕ на оси O_x, O_y, O_z .

В общем случае давление p в разных точках покоящейся жидкости будет различным:

$$p = f(x, y, z) \quad (1)$$

Для того чтобы установить связь между давлением p и координатами точек, а также величиной ϕ , поступаем следующим образом.

Наметив оси координат O_x и O_z , выделяем элементарный объём покоящейся жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда 1-2-3-4-; стороны параллелепипеда dx и dz , а также dy считаем бесконечно малыми.

В центре параллелепипеда намечаем точку A с координатами x, y, z . Давление в этой точке обозначаем через p . Проведя через точку A линию MN , параллельную оси O_x , можем утверждать, что в общем случае гидростатическое давление будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение гидростатического давления будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение гидростатического давления, приходящееся на единицу длины линии MN , может быть представлено частной производной $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Используя $\frac{\partial p}{\partial x}$, выразим давления в точках M и N в виде

$$\left. \begin{aligned} p_M &= p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \\ p_N &= p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2),$$

где второе слагаемое правых частей равенств (2) выражает изменение давления p на длине $\frac{1}{2} dx$.

Далее рассуждаем следующим образом:

А) выясняем все силы, действующие на элементарный параллелепипед;

Б) эти силы проектируем на ось O_x ; поскольку рассматриваемый параллелепипед находится в покое, то сумму проекций найденных сил приравняем нулю, в результате получаем 1-е дифференциальное уравнение;

В) для получения 2-го и 3-го дифференциальных уравнений проектируем все силы, действующие на параллелепипед, соответственно на оси O_y и O_z .

Идя по указанному пути, даём вывод только одного дифференциального уравнения.

силы, действующие на параллелепипед 1-2-3-4:

а) объёмная сила равна

$$\phi (dx dy dz) \rho \quad (3),$$

где $(dx dy dz) \rho$ - масса жидкости, образующей параллелепипед 1-2-3-4-; проекция этой силы на O_x равна

$$\phi_x (dx dy dz) \rho \quad (4)$$

б)поверхностные силы: проекция на ось O_x разности сил давления на грани 1-2 и 3-4 равны

$$P_M - P_N = p_M (dz dy) - p_N (dz dy) = \left(p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy dz - \left(p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (5).$$

Как видно, полученная разность поверхностных сил является величиной 3-го порядка малости, так же, как и величина объёмных сил, выраженная формулой (4).

Сумма проекций всех сил на ось O_x равна

$$\phi_x(dx dy dz)\rho - \frac{\partial p}{\partial x}(dx dy dz) = 0 \quad (6)$$

так выглядит первое уравнение; остальные два пишем по аналогии с первым. Найденные три дифференциальных уравнения имеют окончательный вид:

$$\begin{cases} \phi_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \phi_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \phi_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (7).$$

Эти уравнения были получены Л. Эйлером в 1755г.

Умножаем 1-е дифференциальное уравнение (7) на dx , 2-е на dy и 3-е на dz . После этого складываем левые и правые части этих уравнений:

$$\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0 \quad (8)$$

Так как давление в точке ρ есть функция только координат:

$$p = f(x, y, z) \quad (9),$$

то можно утверждать, что выражение, входящее в равенство (8) и заключённое в скобки, является полным дифференциалом ρ , т.е. это выражение равно dp . Поэтому уравнение (8) можно переписать в виде

$$dp = \rho(\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz) \quad (10).$$

Далее рассуждаем следующим образом.

Если левая часть (10) является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат, то следовательно и правая часть должна являться полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат. Учитывая, что плотность жидкости $\rho = const$, можно на основании сказанного утверждать, что выражение, входящее в (10) и заключённое в скобки, является также полным дифференциалом некоторой

функции, зависящей от координат. Обозначим эту последнюю функцию через U , причём $U = f(x, y, z)$. Тогда вместо (10) можем написать

$$dp = \rho dU \quad (11),$$

где

$$dU = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz \quad (12).$$

С другой стороны, полный дифференциал dU можно представить как сумму дифференциалов:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (13)$$

Сопоставляя (12) и (13), видим, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \phi_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \phi_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \phi_z \quad (14)$$

Так как U есть функция только координат и так как частные производные её по координатам дают соответствующие проекции объёмной силы, отнесённой к единице массы, то, следовательно, U является потенциальной функцией. Объёмная же сила ϕ , удовлетворяющая условиям (14), является силой, имеющей потенциал. Из сказанного ясно, что однородная несжимаемая жидкость может находиться в покое под действием только таких сил, которые имеют потенциал.

Интегрируя (11), получаем

$$p = \rho U + C \quad (15),$$

где C - постоянная интегрирования.

Чтобы определить C , рассматриваем некоторую точку жидкости, для которой известны ρ и U :

$$p = p_o; \quad U = U_o \quad (16)$$

Для этой точки (15) переписывается в виде

$$p_o = \rho U_o + C \quad (17)$$

откуда

$$C = p_o - \rho U_o \quad (18).$$

Подставляя (18) в (15), получаем

$$p = \rho U + p_o - \rho U_o \quad (19)$$

или окончательно

$$p = p_o + \rho (U - U_o) \quad (20).$$

Формула (20) даёт давление в точке для случая, когда $\rho = const$, причём на жидкость действует любая система объёмных сил, имеющих потенциал.

1.5.2 Основное уравнение гидростатики

В основном уравнении гидростатики из массовых сил действует только сила тяжести. Принимая положительным направление оси z вертикально вверх и считая для небольших поверхностей силы тяжести параллельными друг другу, будем иметь:

$$F_x=0; F_y=0; F_z=-g$$

И согласно формуле $P_x=P_y=P_z=P_n$:

$$dp = \rho(0 + 0 - g dz), \quad (21)$$

или

$$dp = -\rho g dz.$$

Интегрируя (21), получим:

$$p = -\rho g z + C,$$

или (так как $\rho g = \gamma$)

$$\rho + \gamma z = C,$$

где C - произвольная постоянная интегрирования.

Полученное уравнение делением обеих частей на γ можно привести к виду

$$z + \frac{\rho}{\gamma} = const. \quad (22)$$

Для любых двух частиц одного и того же объёма жидкости уравнение (22) можно представить в виде

$$z_1 + \frac{\rho_1}{\gamma} = z_2 + \frac{\rho_2}{\gamma} \quad (23)$$

Это уравнение выражает гидростатический закон распределения давления и называется основным уравнением гидростатики.

Для рассматриваемого случая, считая по-прежнему силы тяжести параллельными, уравнение поверхности равного давления можно получить из (21) или (23). Из этих уравнений при $\rho = const$ имеем:

$$dp = 0; dz = 0; z = const. \quad (24).$$

Следовательно, небольшие поверхности равных давлений в покоящейся однородной жидкости в случае действия из массовых сил земного притяжения представляют собой горизонтальные плоскости. Горизонтальной плоскостью в этом случае является и свободная поверхность жидкости. Пусть z -координата произвольной точки А внутри покоящейся жидкости, в которой необходимо определить давление ρ ; z_0 - координата точки В того же объёма, давление в которой известно и равно ρ_0 .

Применим основное уравнение гидростатики (23): $z + \frac{\rho}{\gamma} = z_0 + \frac{\rho_0}{\gamma}$,

$$\text{Откуда} \quad \rho = \rho_0 + \gamma(z_0 - z), \quad (25)$$

где $z_0 - z$ есть не что иное, как глубина погружения одной точки под другой.

Из этой формулы следует, что чем ниже расположена точка, тем большее давление она испытывает.

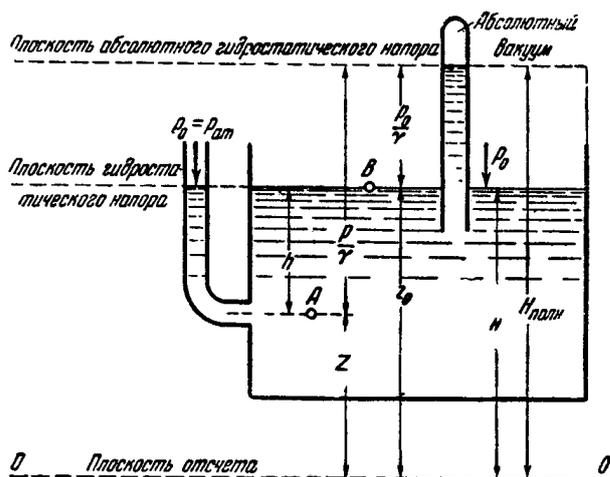


Рис. 1.2. Пьезометрическая высота и потенциальный напор.

Если точка В взята на свободной поверхности, то $z_0 - z$ есть глубина h погружения точки, а ρ_0 - давление на свободной поверхности и

$$\rho = \rho_0 + \gamma h. \quad (26)$$

Формула (26) является формулой гидростатического давления в точке на глубине h под свободной поверхностью.

Таким образом, гидростатическое давление в данной точке покоящейся жидкости складывается из внешнего давления на поверхности ρ_0 и давления γh , зависящего только от глубины погружения h и удельного веса жидкости γ .

В гидротехнической практике в большинстве случаев внешним давлением является давление атмосферы ($\rho_0 = \rho_{at}$).

Гидростатическое давление, которое рассматривалось выше, иногда называют абсолютным или полным гидростатическим давлением в отличие от манометрического (избыточного) давления ρ_m , под которым подразумевают разность между полным давлением и атмосферным:

$$\rho_m = \rho_{полн} - \rho_{at}. \quad (27)$$

Манометрическое давление измеряется приборами, называемыми манометрами. Если на свободной поверхности давление атмосферное, то согласно (9)

$$\rho_m = \gamma h, \quad (28)$$

где h - глубина погружения частицы.

В дальнейшем изложении сохраним обозначение ρ за манометрическим давлением, а при оперировании полным давлением в случае необходимости будем записывать $\rho_{полн}$.

Если полное давление меньше атмосферного, то напряжённое состояние в жидкости характеризуют так называемым *вакуумом* ($\rho_{\text{вак}}$), для измерения которого пользуются вакуумметрами, показывающими недостающее до атмосферного давления, в отличие от манометрического давления:

$$\rho_{\text{вак}} = \rho_{\text{ат}} - \rho_{\text{полн}} \quad (29).$$

Величина давления атмосферы зависит от её состояния, а также от высоты места над уровнем моря. В инженерных расчётах весьма часто давление атмосферы принимают равным $10000 \text{ кг/м}^2 = 1 \text{ кг/см}^2 = 9,81 \text{ н/см}^2$, что соответствует давлению, создаваемому столбом воды высотой 10м.

Величина давления $\rho = 1 \text{ кг/см}^2$ называется *технической атмосферой*.

1.6 Давление жидкости на плоские поверхности. Центр давления. Эпюры давления

1.6.1 Сила давления жидкости на плоскую горизонтальную поверхность

Все точки горизонтальной плоскости испытывают одинаковое давление со стороны жидкости, находящейся в покое, ввиду одинаковой глубины их погружения.

Следовательно, сила давления на всю горизонтальную плоскость равна произведению площади ω на гидростатическое давление в любой из точек плоскости:

$$\rho_{\text{полн}} = \rho_{\text{полн}} \omega = (\rho_0 + \gamma h) \omega. \quad (1)$$

При ρ_0 , равном атмосферному давлению, уравнение для определения манометрической силы давления примет вид

$$P = \omega \gamma h, \quad (2)$$

что соответствует весу столба жидкости с основанием ω при высоте его h до свободной поверхности.

Для определения силы давления на горизонтальную площадку ω достаточно было найти гидростатическое давление ρ в любой точке площади и распространить это давление на всю площадь.

Иное положение будет при расчёте давления на площадку не горизонтальную, а составляющую с горизонтом некоторый угол α , например, при расчёте давления на площадку ω на боковой стенке сосуда.

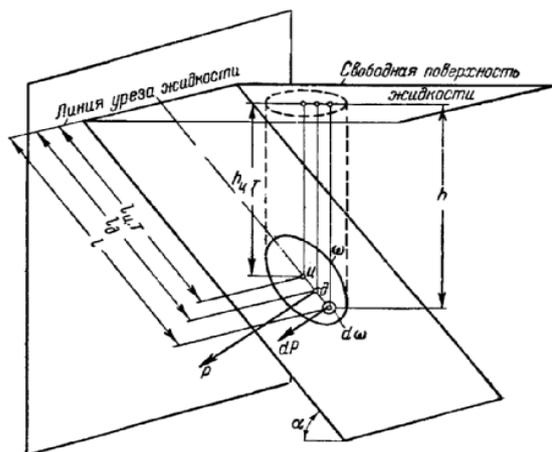


Рис.1.3.

Различные точки такой площади, находясь на разных глубинах, испытывают различное давление, и потому распространять давление в произвольной точке на всю площадь нельзя.

Рассмотрим бесконечно малый элемент $d\omega$ площади ω , расположенный на некоторой глубине h под свободной поверхностью жидкости.

Сила давления на бесконечно малую площадку $d\omega$ будет равна

$$dP = \rho d\beta\omega = (\rho_0 + \gamma h)d\omega \quad (3)$$

Всю площадь стенки можно рассматривать состоящей из элементарных площадок $d\omega$, на каждую из которых передаётся со стороны жидкости давление, определяемое по формуле, аналогичной (3), и непрерывно изменяющееся по мере изменения глубины h , но всегда направленное перпендикулярно плоскости стенки.

Суммарное давление на всю боковую стенку будет равно сумме параллельных непрерывно изменяющихся сил, т.е. интегралу уравнения (3), в пределах всей смоченной площади. Следовательно, искомая сила давления будет

$$P = \rho_0\omega + \gamma \int h d\omega. \quad (4)$$

Так как $h = l \sin \alpha$, то интеграл в правой части уравнения (4) можно представить в виде

$$\int h d\omega = \sin \alpha \int l d\omega.$$

как известно из теоретической механики, интеграл $\int l d\omega$ есть статический момент площади ω , в данном случае относительно линии уреза жидкости, равный произведению всей площади ω на расстояние $l_{ц.т.}$ от этой линии до центра тяжести ω площади. Тогда

$$\int h d\omega = \sin \alpha \int l d\omega = \sin \alpha l_{ц.т.} \omega = h_{ц.т.} \omega$$

и уравнение (4) переписывается в виде

$$P = (\rho_0 + \gamma h_{ц.т.}) \omega.$$

Следовательно, сила давления на плоскую стенку равна по своей величине произведению смоченной площади стенки на давление, испытываемое её центром тяжести.

Для манометрического давления, если только ρ_0 равно атмосферному давлению, соответственно будем иметь:

$$P = \omega \gamma h_{ц.т.} \quad (5).$$

Из сравнения (2) и (5) заключаем, что структура обоих уравнений совершенно одинакова, с той лишь разницей, что в (2) для горизонтальной площади входит h - глубина погружения любой точки площади, а в (5) для наклонной стенки входит $h_{ц.т.}$ - глубина погружения центра тяжести смоченной площади стенки.

Расчёт силы давления на боковую стенку, как было изложено, требует в каждом частном случае предварительного определения места нахождения центра тяжести смоченной площади стенки методами, рассматриваемыми в курсе теоретической механики. Для полного представления о воздействии силы давления на части гидротехнических сооружений, кроме величины и направления силы необходимо ещё знать и точку приложения равнодействующей всех элементарных сил давления. Считая давление на свободной поверхности равным атмосферному, определим на каком расстоянии l_d от свободной поверхности жидкости вдоль смоченной

плоскости стенки находится точка Δ приложения равнодействующей сил манометрического давления P на плоскую площадку ω .

1.6.2 Определение центра давления на плоские стенки

В дальнейшем точку Δ будем рассматривать как центр манометрического давления или просто центром давления.

Рассматриваемая площадка имеет вертикальную плоскость симметрии. Поэтому центр давления будет расположен на оси симметрии, и для его определения в таких случаях достаточно найти расстояние l_d .

Будем исходить из положения теоретической механики, что момент равнодействующей силы относительно любой оси равен сумме моментов сил составляющей относительно той же оси.

За ось моментов возьмём линию уреза жидкости.

$$\text{Имеем:} \quad Pl_d = \int l dP. \quad (17)$$

учитывая, что $P = \omega \gamma h_{у.м.}$, а $dP = \gamma h d\omega = \gamma l \sin \alpha d\omega$, перепишем уравнение моментов в виде $\gamma h_{у.м.} \omega l_d = \gamma \sin \alpha \int l^2 d\omega = \gamma \sin \alpha j_x$, (18)

где $j_x = \int l^2 d\omega$ - момент инерции смоченной площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади параллельно линии уреза жидкости.

Подставив значение j_x в (18), получим:

$$l_d = l_{у.м.} + \frac{j_0}{\omega l_{у.м.}}, \quad (19)$$

Уравнение (19) показывает, что центр давления, т.е. точка приложения равнодействующей сил манометрического давления жидкости, всегда расположен ниже центра тяжести на величину отношения j_0 - момента инерции площади относительно центральной оси к $\omega l_{ц.т.}$ - статическом моменту той же площади относительно линии уреза.

1.6.3 Определение центра давления для типичных случаев

Определение центра давления для типичных случаев проходит в следующих этапах:

1. *Трапециевидальная стенка с большим основанием в уровень со свободной поверхностью*

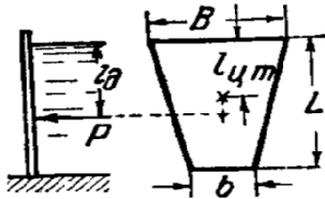


Рис. 1.4.

Воспользуемся формулой (2-34): $l_d = \frac{j_x}{\omega l_{ц.м.}}$.

Для трапеции имеем: $j_x = \frac{(B + 3b)L^3}{12}$;

$$\omega = (B + b) \frac{L}{2};$$

$$l_{ц.м.} = \frac{B + 2b}{B + b} \cdot \frac{L}{3}.$$

Подставив эти значения в, получим:

$$l_d = \frac{B + 3b}{B + 2b} \cdot \frac{L}{2}. \quad (20).$$

2. *Прямоугольная стенка в уровень со свободной поверхностью.*

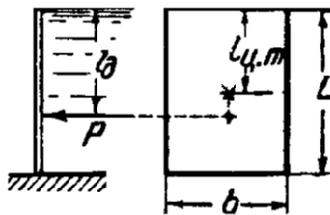


Рис. 1.5.

Для прямоугольника имеем:

$$j_x = \frac{bL^3}{3};$$

$$\omega = bL$$

$$l_{ц.м.} = \frac{L}{2}.$$

Подставим эти значения в (18), получим:

$$l_d = \frac{2}{3}L. \quad (21)$$

Такое же значение l_d можно получить и из (20), положив $B = b$.

Центр давления может быть определён и из эпюры давления.

Так как центр давления есть точка приложения равнодействующей параллельных элементарных сил давлений, то ясно, что эта равнодействующая должна проходить через центр тяжести эпюры давления.

В рассматриваемом случае эпюра представлена прямоугольным треугольником и, следовательно, центр давления, так же как и центр тяжести эпюры, расположен на расстоянии $\frac{2}{3}L$ от вершины треугольника.

3. Прямоугольная стенка с верхним основанием на глубине e .

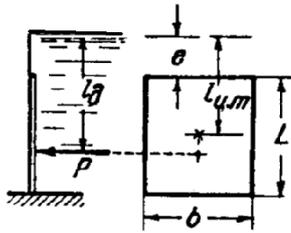


Рис. 1.6.

Воспользуемся формулой $p=f(x, y, z)$:

$$l_d = l_{ц.м.} + \frac{J_0}{\omega l_{ц.м.}}$$

Для прямоугольника имеем:

$$J_0 = \frac{bL^3}{12};$$

$$l_{ц.м.} = e + \frac{L}{2};$$

$$\omega = bL.$$

Подставив значения в (19), получим:

$$l_d = \left(e + \frac{L}{2}\right) + \frac{bL^3}{12bL\left(e + \frac{L}{2}\right)} = e + \frac{(3e + 2L)L}{(2e + L)3}. \quad (22)$$

4. Треугольная стенка (вершиной вниз) в уровень со свободной поверхностью.

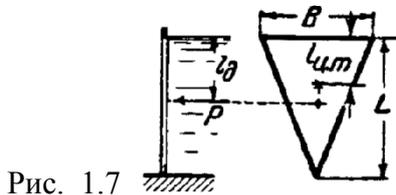


Рис. 1.7

Для треугольника имеем:

$$J_x = \frac{bL^3}{12};$$

$$l_{ц.м.} = \frac{L}{3};$$

$$\omega = \frac{bL}{2}.$$

Воспользуемся формулой (18).

Подставив в (18), получим:

$$l_d = \frac{bL^3}{12 \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{bL}{2}} = \frac{L}{2}. \quad (23)$$

5. Треугольная стенка (вершиной вниз) с верхним основанием на глубине e .

Воспользуемся формулой (19).

Для треугольника имеем:

$$J_0 = \frac{bL^3}{36};$$

$$l_{y.m.} = e + \frac{L}{3};$$

$$\omega = \frac{bL}{2}.$$

Подставляя, получим:

$$l_o = \left(e + \frac{L}{3}\right) + \frac{bL^3}{36\left(e + \frac{L}{3}\right) \frac{bL}{2}} = e + \frac{(2e + L)L}{(3e + L)2} \quad (24)$$

1.6.4 Зависимость давления от глубины погружения. Эпюры давления

Применим уравнение $dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz)$ к произвольной точке, погруженной на глубину h от поверхности и к точкам, лежащим на поверхности:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_o + \frac{p_o}{\rho g}$$

отсюда

$$p = p_o + \rho g(z_o - z),$$

или

$$p = p_o + \rho gh$$

Эта формула позволяет определить давление в любой точке в зависимости от ее глубины погружения. В открытом резервуаре (рис. 13) давление на поверхности жидкости равно атмосферному (т. е. манометрическое давление $p_o = 0$) и

$$p = \rho gh.$$

Из формул $p = p_o + \rho gh$ и $p = \rho gh$ видно, что давление изменяется по закону прямой линии, а эпюры давления представляют собой трапецию или треугольник (рис. 13. а, б). Если жидкость производит давление на криволинейную поверхность, то эпюра давления является криволинейной (рис. 14).

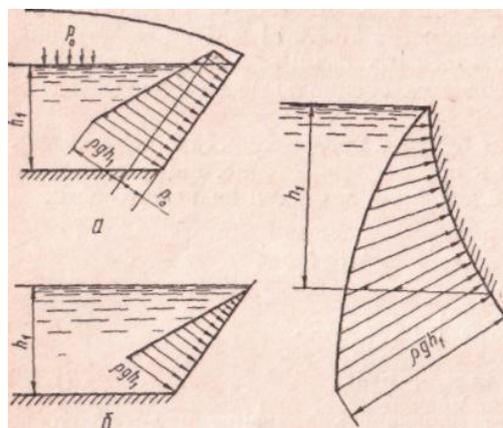


Рис. 1.8.

Рис. 1.9.

1.7 Давление жидкости на криволинейные поверхности. Эпюры давления

1.7.1 Сила давления жидкости на криволинейные поверхности

При определении силы давления жидкости на криволинейные поверхности заранее неизвестна точка приложения этой силы, а, следовательно, и ее направление, так в каждой точке направление силы будет нормально к поверхности в этой точке. Поэтому при определении силы давления предварительно определяют ее три составляющие, параллельные координатным осям.

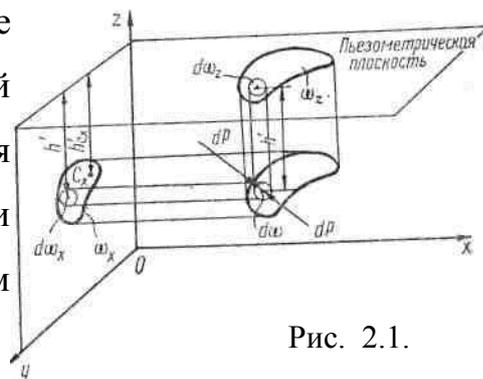


Рис. 2.1.

Рассмотрим произвольную криволинейную поверхность бесконечно малой толщины, на которую с двух сторон давит жидкость (рис. 2). Сила давления на бесконечно малую площадку $d\omega$

$$dP = p d\omega = \rho g \left(\frac{p_0}{\rho g} + h \right) d\omega = \rho g h' d\omega, \quad (6)$$

где $h' = \frac{p_0}{\rho g} + h$ — глубина погружения точки в центре бесконечно малой площадки, отсчитываемая от пьезометрической плоскости.

Составляющие силы dP , параллельные координатным осям, определяются как произведение этой силы на косинус угла между направлением силы и соответствующей осью:

$$dP_x = p d\omega \cos(dP, x); \quad dP_y = p d\omega \cos(dP, y); \quad dP_z = p d\omega \cos(dP, z).$$

Нетрудно убедиться, что произведение бесконечно малой площади $d\omega$ на соответствующий косинус угла между силой и координатной осью является проекцией этой площади на плоскость, перпендикулярную соответствующей оси, т. е.

$$d\omega \cos(dP, x) = d\omega_x; \quad d\omega \cos(dP, y) = d\omega_y; \quad d\omega \cos(dP, z) = d\omega_z.$$

Отсюда
$$dP_x = p d\omega_x.$$

Интегрируя это выражение, получим составляющую всей силы давления, параллельную оси x ,

$$P_x = \int_{\omega_x} p \, d\omega_x = \rho g \int_{\omega_x} h' \, d\omega_x = \rho g h'_{c_x} \omega_x \quad (7)$$

и по аналогии

$$P_y = \rho g h'_{c_y} \omega_y, \quad (8)$$

где ω_x и ω_y – проекции площади криволинейной поверхности на вертикальные плоскости, перпендикулярные осям x и y ; h'_{c_x} и h'_{c_y} — глубины погружения центров тяжести этих проекций от пьезометрической плоскости.

Сравнивая выражения (7) и (8) с $P = \rho g h'_c \omega$, приходим к выводу, что проекции на горизонтальные оси силы давления жидкости на криволинейную поверхность равны силам давления на проекции этой поверхности на вертикальные плоскости, соответственно перпендикулярные этим осям.

Рассмотрим теперь вертикальную составляющую силы давления

$$P_z = \int_{\omega_z} p \, d\omega_z = \rho g \int_{\omega_z} h' \, d\omega_z.$$

Выражение $h' \, d\omega_z$ представляет собой объем dW' вертикального столба жидкости, опирающегося на бесконечно малую площадку $d\omega$ и ограниченного сверху пьезометрической плоскостью:

$$h' d\omega_z = dW'.$$

Интеграл этого выражения является объемом W' всего столба жидкости, опирающегося на криволинейную поверхность и ограниченного сверху пьезометрической плоскостью. Такой столб жидкости называется телом давления W' :

$$W' = \int_{\omega_z} h' \, d\omega_z = \int_{\omega_z} dW'$$

Тогда

$$P_z = \rho g W'. \quad (9)$$

Вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна силе тяжести тела давления. Равнодействующая сил давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (10)$$

Так как толщина криволинейной поверхности была принята нами бесконечно малой, то глубина h' будет одинакова для обеих сторон поверхности. Следовательно, и силы dP , действующие на бесконечно малую площадку, будут одинаковы с обеих сторон площадки. Силы P на всю криволинейную поверхность будут одинаковы с обеих сторон поверхности, но противоположны по направлению. Таким образом, не имеет значения, с какой стороны поверхности находится жидкость, а важно положение поверхности в системе координат.

Если на свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному (манометрическое давление $p_0 = 0$), то формулы для составляющих силы давления приводятся к виду:

$$P_x = \rho g h_{c_x} \omega_x; \quad (11)$$

$$P_y = \rho g h_{c_y} \omega_y; \quad (12)$$

$$P_z = \rho g W. \quad (13)$$

В этом случае глубины погружения центра тяжести проекций площади h_{c_x} и h_{c_y} измеряются от свободной поверхности. Также свободной поверхностью ограничивается сверху тело давления.

На практике криволинейные поверхности часто являются цилиндрическими.

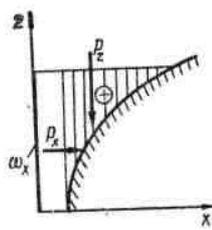


Рис. 2.2.

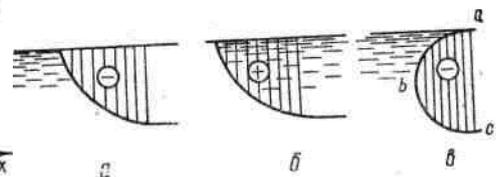


Рис. 2.3.

Это поверхности водопроводных и водоотводных труб, круглых

резервуаров, сегментных затворов и т. д. В этом случае (рис. 3), располагая систему координат так, чтобы ось y была параллельной образующей цилиндрической поверхности, получим формулу равнодействующей силы давления:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \quad (14)$$

где составляющие P_x и P_z определяются по приведенным выше формулам.

Для практических расчетов важно получить навыки в определении тела давления. На рис. 4 приводятся некоторые характерные случаи. В случаях, показанных на рис. 4, а и 4, б, тела давления одинаковы по величине, но в первом из них вертикальная составляющая направлена вверх (знак «—»), а во втором — вниз.

Тело давления, заполняемое жидкостью (рис. 4, б), называется *действительным*, в отличие от *фиктивного тела давления*, которое заполняется жидкостью условно (а). Фиктивное тело давления иногда называют *телом выпора*.

Если на часть криволинейной поверхности (ab) жидкость давит сверху вниз, а на другую часть (be) снизу вверх (рис. 4, в), то тело давления определяется как сумма тел давления на каждую часть криволинейной поверхности с соответствующими знаками.

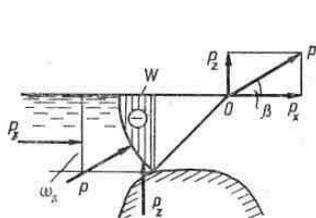


Рис. 2.4

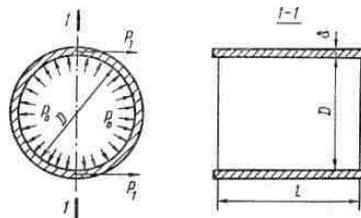


Рис. 2.5.

Направление равнодействующей силы давления характеризуется углом наклона ее к горизонту

$$\beta = \arctg \frac{P_z}{P_x}. \quad (15)$$

Если образующая цилиндрической поверхности в основании цилиндра описывает окружность, то равнодействующая P пройдет через центр окружности, так как она нормальна к касательной в точке приложения и, следовательно, должна совпадать с направлением радиуса. На рис. 5 показана схема определения составляющих и равнодействующей силы давления, а также ее направление на криволинейную поверхность сегментного затвора.

Рассмотрим также определение допускаемого давления жидкости в круглой трубе (рис. 6). При давлении по оси трубы p_0 давление в любой другой точке сечения трубы будет равно:

$$P = P_0 + \rho g z,$$

где z — расстояние по вертикали от оси трубы до рассматриваемой точки (если точка расположена ниже оси, то значение z будет положительным, а если выше, то отрицательным).

Обычно в напорных трубах p_0 значительно больше, чем величина $\rho g z$, поэтому с достаточной степенью точности можно считать $p = p_0$.

Мысленно разделив трубу диаметральной плоскостью 1—1, определим силу, действующую на одну половину трубы длиной l ,

$$P = p_0 \omega_x = p_0 D l.$$

Эта сила уравнивается двумя силами, приложенными к стенкам трубы в местах условного разреза,

$$P_1 = \sigma \delta l,$$

где σ — растягивающее напряжение в стенках трубы; δ — толщина стенки трубы. Таким образом

$$P = 2P_1 \quad \text{и} \quad p_0 D = 2\sigma \delta.$$

Если напряжение в стенке трубы σ будет равно допускаемому $[\sigma]$, то допускаемое давление в трубе

$$[p_0] = 2[\sigma] \frac{\delta}{D}. \quad (16)$$

Из этой формулы можно также определить необходимую толщину стенки трубы δ при заданном давлении p_0 .

6. Стенка круглая, столб жидкости над верхним краем-е.

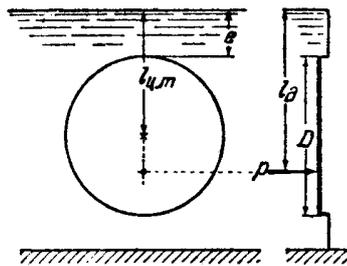


Рис. 2.6.

Воспользуемся формулой (19).

Для круга имеем:

$$J_0 = \frac{\pi D^4}{64};$$

$$l_{ц.м.} = e + \frac{D}{2};$$

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Подставив в (19), получим:

$$l_{\delta} = \left(e + \frac{D}{2}\right) + \frac{\pi D^4}{64 \frac{\pi D^2}{4} \left(e + \frac{D}{2}\right)} = e + \frac{D}{8} \cdot \frac{8e + 5D}{2e + D}. \quad (25)$$

7. Стенка полукруглая с диаметром на уровне жидкости.

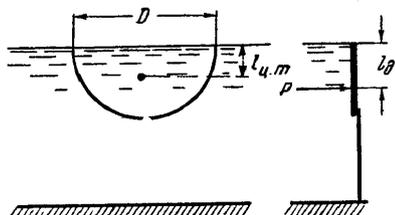


Рис. 2.7.

Для полукруга имеем:

$$J_x = \frac{\pi D^4}{128};$$

$$l_{ц.м.} = \frac{4D}{6\pi};$$

$$\omega = \frac{\pi D}{8}.$$

Воспользуемся формулой (18).

Подставив в (18), получим:

$$l_{\delta} = \frac{\pi D^4}{128 \cdot \frac{4D}{6\pi} \cdot \frac{\pi D^2}{8}} = \frac{3}{32} \pi D. \quad (26).$$

1.8 Основы гидродинамики. Основные понятия и определения.

Уравнение неразрывности

1.8.1 Основы гидродинамики. Кинематика жидкости. Способы изучения движения жидкости

В гидромеханике рассматривают возможные виды и формы движений жидкости, не ставя пока вопроса о причинах движений. Раздел гидромеханики, рассматривающий виды и формы движений жидкости, не касаясь вопроса о силах, под влиянием которых происходят эти движения, называется кинематикой жидкости. Под жидкостью в данном случае понимают систему материальных частиц, образующих непрерывную, сплошную массу, формы которой могут изменяться каждое мгновение. Движение жидкости, как и всякого материального тела, вполне определено тогда и только тогда, когда известны движения всех её частиц или, иначе говоря, когда положение каждой такой частицы задано как функция времени.

Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 положение каждой частицы жидкости определено её начальными координатами a, b, c . В последующие моменты времени t движущаяся частица жидкости изменит своё положение в пространстве и её координаты от значений a, b, c перейдут к переменным для каждого момента времени значениям x, y, z как функции t , т.е. когда

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t); \\ y &= y(a, b, c, t); \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где a, b, c являются аргументами, определяющими значения различных функций, характеризующих движение некоторой фиксированной частички потока, и называются переменными Лагранжа. В общем случае величины a, b, c могут быть криволинейными координатами. Для более полного описания состояния жидкости нужно задать и плотность ρ как функцию тех же координат:

$$\rho = \rho(a, b, c, t). \quad (2)$$

В силу данного выше определения жидкости будем полагать, что эти функции непрерывны, т.е. что масса жидкости не распадается во время движения на отдельные части.

Уравнения (1) могут быть однозначно разрешены относительно a, b, c . В результате этого a, b, c будут определены как функции от x, y, z , которые дадут ответ на вопрос о том, в каком месте находилась в начальный момент та или иная частица жидкости с координатами x, y, z , в данный момент времени. При задании движения в переменных Лагранжа проекции в скорости частицы \mathbf{u} , например u_x определяют по формуле

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad (3)$$

проекция ускорения - по формуле

$$w_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (4).$$

Таким образом, имея уравнение (1), можно узнать как «историю» движения частицы жидкости, так и её «будущее». Этот способ описания движения жидкости дан Эйлером, но известен в гидродинамике под названием способа Лагранжа, ввиду того что сам Эйлер мало пользовался им, а Лагранж применил его к своей теории распространения волн на мелкой воде. Представим себе теперь некоторое неподвижное пространство, занятое движущейся жидкостью, через каждую точку которого проходят непрерывные частицы жидкости с той или иной скоростью u , проекции которой на оси координат обозначим через u_x, u_y, u_z .

В различные моменты времени и в различных местах неподвижного пространства скорость частиц будет различна. Мы сможем это пространство характеризовать как поле скоростей, в общем случае непрерывно меняющимся во времени. Дать закон изменения этого поля, значит выразить скорость u , а следовательно, и её проекции на оси координат как функцию четырёх аргументов, а именно: времени t и координат x, y, z , которые являются точками неподвижного пространства:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t); \\ u_y &= u_y(x, y, z, t); \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для более полного описания состояния жидкости, занимающей пространство, нужно задать и плотность ρ как функцию тех же переменных:

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \quad (6)$$

Этот способ описания движения жидкости известен под названием способа Эйлера, а совокупность величин x, y, z, t называют переменными Эйлера. Зная функции (5), которые должны быть однозначными, конечными и непрерывными, вместе с их первыми производными по координатам, можно определить:

А) скорость в любой точке пространства в любой момент времени;
 Б) скорость в данной точке пространства в любой момент времени (в этом случае $x = const, y = const, z = const$);

В) скорость в данный момент времени, но в различных точках пространства (в этом случае $t = const$).

Уравнения (5) в отличие от (1) не разрешают, однако, вопроса о поведении в пространстве индивидуальной движущейся частицы жидкости.

Связь между переменными Эйлера и переменными Лагранжа можно установить, воспользовавшись (6-3) и (6-5). Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= u_x(x, y, z, t); \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= u_y(x, y, z, t); \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя полученные выражения, найдём x, y, z в функции от t и трёх произвольных постоянных, т.е. получим уравнения (1).

Если в каждой точке неподвижного пространства, занятого движущейся жидкостью, скорости с течением времени изменяются, то движение жидкости называется неустановившимся и определяется уравнениями (5).

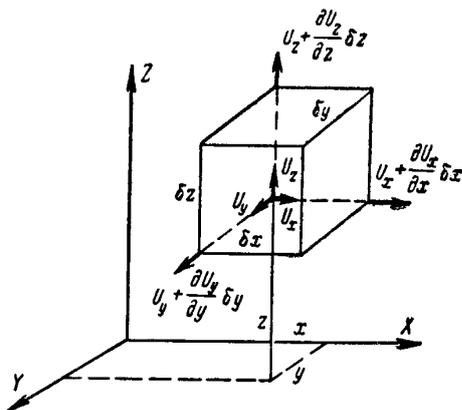
Если в каждой точке неподвижного пространства, занятого движущейся жидкостью, скорости не зависят от времени и остаются, следовательно, постоянными в течение всего времени движения жидкости, то движение называется установившимся. В этом случае уравнение (5) становятся независимыми от времени и имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z); \\ u_y &= u_y(x, y, z); \\ u_z &= u_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (8).$$

Учение о движении жидкости покоится на понятии её бесконечно малой частицы. В отличие от движения материальной точки, с изучения которого

начинается кинематика твёрдого тела, кинематику жидкости начинают с изучения изменения формы объёма бесконечно малой частицы, так как частица жидкости с течением времени может изменять не только положение, но и форму.

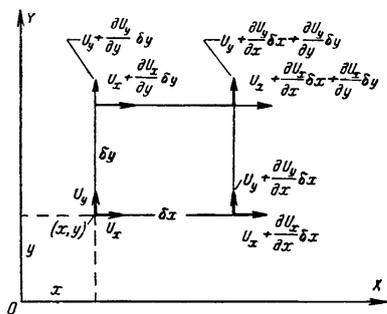
Рассмотрим (рис. 1) элемент жидкости в форме параллелепипеда с



малыми, но конечными размерами рёбер $\delta x, \delta y, \delta z$, параллельных осям координат. Пусть в угловой точке имеем компоненты скорости u_x, u_y, u_z . Вследствие непрерывности функции скоростей компоненты скорости в других угловых точках будут иметь разные значения.

Рис.2.8.

Для примера рассмотрим (рис. 2) грань, ближайшую к плоскости осей X, Y ; компоненты скоростей в направлениях x, y



в углах этой грани показаны на рисунке.

При таких компонентах скорости сама грань не только будет перемещаться в пространстве, но и будет изменять свою первоначальную форму.

Рис. 2.9.

Смещение рассматриваемой грани можно свести к следующим элементарным формам, схематически показанным на рис. 3

А) простое перемещение грани по направлениям x, y ;

Б) изменение длины каждой пары сторон (линейная деформация);

В) изменение каждого из четырёх углов грани (угловая деформация);

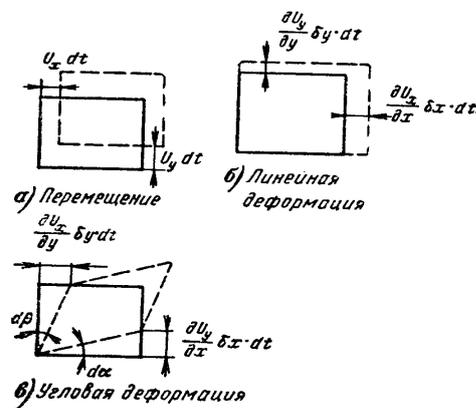


Рис. 2.10.

Г) поворот грани в том или ином направлении (вращение грани как твёрдого тела).

Перемещения по двум направлениям за время dt выразятся величинами $u_x dt; u_y dt$ величина линейной деформации

определится разность расстояний, пройденных каждой парой противоположных рёбер:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x dt; \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta y dt.$$

Для выяснения угловой деформации рассмотрим изменение прямого угла в точке (x, y, z) . Оно определится угловыми движениями $d\alpha; d\beta$ двух сторон: $\delta x; \delta y$.

За бесконечно малое время dt эти угловые приращения можно рассматривать равными их соответствующим тангенсам. Тогда абсолютные значения угловых перемещений будут

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} \delta x dt}{\delta x}; d\beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} \delta y dt}{\delta y}$$

и полное значение угловой деформации будет

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dt. \quad (9)$$

Заметим, что угловая деформация, обусловленная поворотом каждого из рёбер грани, оказывается равной

$$d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dt.$$

Зная угловую деформацию каждой из граней, можно определить и угол поворота грани как твёрдого тела. Для этого достаточно вычислить значение $d\theta_{\text{сп}}$:

$$d\theta_{\text{сп}} = d\alpha - d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Угловая скорость вращения (в рассматриваемом случае вращения вокруг оси Z) будет равна:

$$\omega_z = \frac{d\theta_{e.p.}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (10).$$

В итоге, распространив полученные выводы на все три координатные направления, придём к следующим положениям. Скорости линейной деформации по координатным направлениям будут соответственно:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx; \frac{\partial u_y}{\partial y} dy; \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

Эти значения показывают скорости, с которыми раздвигаются соответственно противоположные грани.

Скорости угловой деформации характеризуют скорость относительного сдвига пары параллельных граней. Обозначим угловую деформацию $\theta_x \theta_y \theta_z$. Индекс при θ показывает, что рассматривается угловая деформация в плоскости, нормальной к данной координатной оси. Искомые скорости угловых деформаций согласно (9) будут:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}; \\ \theta_y &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \theta_z &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (11).$$

Значение компонентов угловой скорости в соответствии с (10) будут:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (12).$$

А величина угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (13).$$

Движение жидкости, сопровождающееся вращением частиц жидкости вокруг осей, через них проходящих, называется вихревым движением. Движение, при котором это вращение отсутствует ($\omega = 0$), называется безвихревым движением.

Равенство $\omega = 0$ требует, чтобы

$$\omega_x = 0; \omega_y = 0; \omega_z = 0. \quad (14).$$

Из этого согласно (12) следует, что при безвихревом движении существуют зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (15).$$

Безвихревое движение обычно в гидромеханике называют потенциальным движением. Происхождение такого названия будет пояснено ниже.

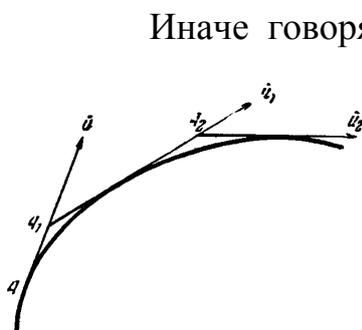
1.8.2. Линии токов жидкости и вихревые линии. Элементарная струйка жидкости

Для примера проверим, к какому из видов движений относится движение, заданное в переменных Эйлера в таком виде:

$$u_x = -3x; u_y = 3y; u_z = 0.$$

Выделим в пространстве, занятом движущейся жидкостью, в некоторый момент времени точку, скорость в которой u . В бесконечно близкой точке, расположенной на первом векторе, скорость в тот же момент времени будет равна u_1 . В то же момент времени в бесконечно близкой точке во

втором векторе скорость будет u_2 и т.д. огибающая всех этих векторов даст в пределе при бесконечно большом числе точек некоторую пространственную кривую, называемую линией тока.



Иначе говоря, **линия тока** (рис. 4) представляет собой кривую, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости жидкости касателен к кривой. Если бы движение было установившимся, то по этой кривой двигались бы соответствующие частицы. Поэтому при установившемся движении жидкости линии тока и

Рис.2.10. траектории движения частиц жидкости, на ней расположенных, совпадают.

В случае неустановившегося движения линии тока и траектории не совпадают, т.к. каждая частичка находится на данной линии тока лишь одно мгновение. Да и сама линия тока существует лишь одно мгновение. В следующий момент времени будут существовать другие линии тока, на одной из которых частица будет располагаться. Таким образом, линия тока является огибающей траекторией в неустановившемся движении; с течением времени она меняется, а следовательно, и картина течения, изображенная семейством линий тока, в каждый момент времени также изменяется. Разлагая время на бесконечно малые промежутки, можно картину всякого неустановившегося движения жидкости разложить на ряд «кадров» движения, изменяющихся от одного промежутка времени к другому.

Дифференциальные уравнения линии тока могут быть получены из условия, что касательная к линии тока совпадает с вектором скорости.

Косинусы углов касательной к линии тока с осями координат равны

соответственно: $\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}$,

где ds - элемент дуги на линии тока; $dx; dy; dz$ - проекции этого элемента на оси координат.

Косинусы углов вектора скорости с осями координат соответственно

равны:

$$\frac{u_x}{u}, \frac{u_y}{u}, \frac{u_z}{u}.$$

Из определения понятия линии тока косинусы углов должны быть соответственно равны. Тогда имеем:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u_x}{u}, \frac{dy}{ds} = \frac{u_y}{u}, \frac{dz}{ds} = \frac{u_z}{u},$$

или

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = \frac{ds}{u};$$

так как последнее из этих равенств есть следствие предыдущих, то дифференциальные уравнения линий токов для данного момента времени будут:

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}, \quad (16)$$

где t надо рассматривать как параметр. Задаваясь рядом значений t , можно для каждого момента времени определить и линии тока.

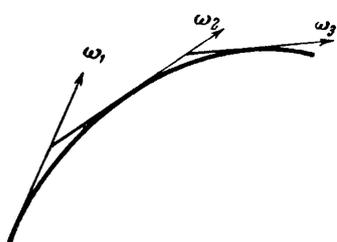
Аналогично также могут быть получены уравнения вихревых линий, т.е. линий, в каждой точке которых вектор угловой скорости совпадает с направлением касательной к ним. Очевидно, что уравнения вихревой линии будут иметь следующий вид:

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)}, \quad (17),$$

где t надо рассматривать как параметр.

1.8.3 Уравнение неразрывности жидкости. Уравнение неразрывности для элементарной струйки однородной жидкости. Поток жидкости

Понятие о линиях тока (рис. 5) является исходным для представления о



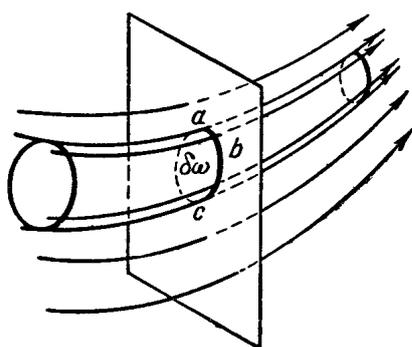
«струйчатой модели движения жидкости», положенной в основу гидравлики с самого начала её возникновения и не утратившей своего значения и до сих пор.

Пусть на рисунке 6 изображена система линий

Рис. 5.

токов для некоторого потока жидкости. Будем для

общности полагать движение неустановившимся. Тогда изображённая картина линий токов может соответствовать лишь некоторому мгновенному



состоянию потока. Выделим мысленно внутри потока некоторый достаточно малый замкнутый контур *abca*. Поверхность, образуемая линиями тока, проходящими через точки этого контура, называется **трубкой тока**; она представляет как бы канал, по которому в продолжение бесконечно малого промежутка времени будет течь

Рис. 6

наполняющая его жидкость.

Жидкость, наполняющая трубку тока, называется **стружкой**.

Элементарно малая площадка $\delta\omega$ представляет собой поперечное сечение струйки поверхностью и называется «**живым сечением трубки**». Очевидно, в общем случае размеры живых сечений струйки жидкости будут различны по длине струйки.

Заметим, что не во всяком потоке можно образовать поверхность, нормальную к линиям потока. Обратим внимание на разницу в положении «элементарных струек» жидкости при установившемся и неустановившемся движениях. На основании сказанного ранее в установившемся потоке жидкости струйки будут всегда занимать устойчивое во времени положение

в пространстве. Наоборот, при неустановившемся движении струйки будут непрерывно менять своё положение.

Объёмное количество жидкости δQ , протекающее в единицу времени через какое-либо живое сечение струйки, называется расходом элементарной струйки. Эта величина имеет размерность $\left[\frac{L^3}{T} \right]$.

Если обозначить площадь живого сечения через $\delta \omega$, то отношение $\frac{\delta Q}{\delta \omega} = v$, имеющее размерность скорости:

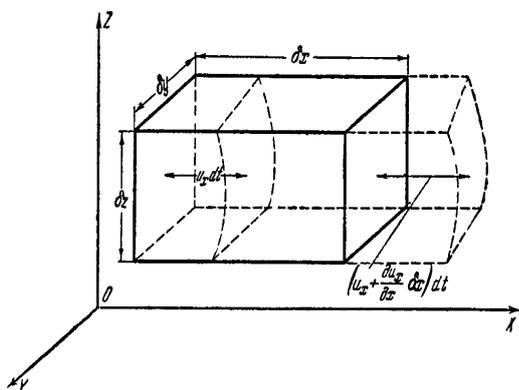
$$[v] = \frac{[\delta Q]}{[\delta \omega]} = \left[\frac{L^3 \cdot T^{-1}}{L^2} \right] = \left[\frac{L}{T} \right],$$

называется **средней скоростью** v в данном поперечном сечении струйки. Из приведённого выше отношения находим формулу расхода элементарной струйки:

$$\delta Q = v \cdot \delta \omega.$$

В вопросах, изучаемых в настоящем курсе, будут рассматриваться потоки, внутри которых не образуются разрывы, т.е. такие, в которых жидкость сплошным образом наполняет пространство. Это обуславливает такое состояние движения, при котором не происходит количественного изменения массы движущейся жидкости.

Вообразим в пространстве, занятом движущейся жидкостью, неподвижный контур в виде бесконечно малого параллелепипеда с рёбрами



$\delta x, \delta y, \delta z$, параллельными координатным осям, и определим массу жидкости, входящую за элементарный промежуток времени dt внутрь параллелепипеда и входящую из параллелепипеда за этот же промежуток времени.

Рис. 7.

Через грань $\delta y \cdot \delta z$, ближайшую к плоскости YOZ , внутрь параллелепипеда поступает объём жидкости, равный объёму призмочки с

основанием $\delta y \cdot \delta z$ и длиной $u dt$, где u - скорость в центре тяжести этого основания. Высота этой призмочки равна проекции длины её на нормаль к её основанию $\delta y \cdot \delta z$, т.е. проекции на ось Ox .

$$\rho \cdot u_x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot dt$$

Поэтому искомый объём равен $u_x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot dt$, а масса этого объёма равна

Так как скорости движения жидкости и её плотность мы предполагаем функциями непрерывными, то масса жидкости, выходящая из параллелепипеда в течении промежутка времени dt через другую грань $\delta y \cdot \delta z$, параллельную первой, буде равна

$$\rho \cdot u_x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot dt + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot dt.$$

Подобным же образом для масс, входящих через площадки $\delta z \cdot \delta x; \delta x \cdot \delta y$, ближайšie к соответствующим координатным плоскостям ZOX и XOY , найдём выражения

$$\rho \cdot u_y \cdot \delta z \cdot \delta x \cdot dt; \rho \cdot u_z \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot dt,$$

а для выходящих через противоположные грани, параллельные этим площадкам, - выражения

$$\rho \cdot u_y \cdot \delta z \cdot \delta x \cdot dt + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} \delta y \cdot \delta z \cdot \delta x \cdot dt$$

и

$$\rho \cdot u_z \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot dt + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \delta z \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot dt$$

Изменение массы внутри параллелепипеда будет равняться разности между массами, втекшими через первые три грани и вытекшими через противоположные им грани, а именно:

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot dt \quad (18).$$

Но масса жидкости, наполнявшая без пустот параллелепипед в момент времени t , была равна $\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$, а в следующий за тем момент времени $t + dt$ эта масса должна равняться

$$\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z,$$

если только в промежутке времени dt внутри параллелепипеда не произошло разрыва жидкости. Следовательно, изменение массы за элемент времени dt

выражается количеством
$$\frac{d\rho}{dt} dt \delta x \delta y \delta z, \quad (19)$$

в котором $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ есть частная производная от плотности ρ по времени t , так как положение параллелепипеда в пространстве, а следовательно, и координаты x, y, z не менялись.

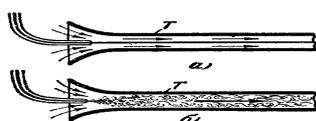
Приравняв (18) и (19) и сделав сокращения, получим следующее условие неразрывности жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (20),$$

или, что тоже самое,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (20)'$$

Это и есть дифференциальное уравнение неразрывности в форме Эйлера. Отсюда легко получить уравнение неразрывности для частного случая – несжимаемой жидкости. Для несжимаемой жидкости $\rho = const$ и $\frac{d\rho}{dt} = 0$, и следовательно, уравнение (6-20) примет вид



$$(21)$$

Отсюда следует, что объём несжимаемой жидкости, который втекает в рассматриваемый параллелепипед, равен объёму жидкости, вытекающему из него.

Для примера проверим, удовлетворяет ли условию неразрывности движение жидкости, при $\rho = const$.

Так как движение задано условиями

$$u_x = -3x; u_y = 3y; u_z = 0, \text{ то } \frac{\partial u_x}{\partial x} = -3; \frac{\partial u_y}{\partial y} = 3; \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Подставим найденные значения в уравнение (25), найдём:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -3 + 3 + 0 = 0$$

видим, что условие неразрывности движения удовлетворяется и, следовательно, такое движение жидкости возможно.

Если бы движение задано было в следующем, например, виде:

$$u_x = -3x; u_y = -3y; u_z = 0,$$

то уравнение (21) уже не соблюдалось бы, что свидетельствовало бы о нарушении сплошности потока.

Применительно к элементарной струйке уравнение неразрывности, данное выше в форме Эйлера (20), может быть представлено и в другом виде.

Выделим из струйки жидкости двумя бесконечно близкими сечениями $\omega_1; \omega_2$, находящиеся на расстоянии ds друг от друга, отсек объёмом ωds , где ω - средняя между ω_1 и ω_2 площадь поперечного сечения струйки.

В рассматриваемый момент времени жидкость втекает и вытекает из элементарной струйки только через живые её сечения, так как через боковую поверхность протекания нет. Масса жидкости, вошедшая в рассматриваемый объём через сечение ω_1 , в течении некоторого элементарного промежутка времени dt при расходе в струйке, равном Q , будет равна $\rho Q dt$. Масса жидкости, вышедшая через противоположное сечение ω_2 , будет равна

$(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds) dt$. Разность между поступившей и вышедшей массами

должна равняться изменению за тот же промежуток времени массы $\rho \omega ds$,

первоначально заключённой в выделенном объёме, т.е. $\frac{\partial(\rho\omega ds)}{dt} dt$.

Следовательно,

$$\rho Q dt - \left(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right) dt = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} dt \cdot ds$$

откуда

$$-\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \cdot dt = \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} dt \cdot ds$$

или

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} = 0$$

Учитывая, что $\rho = \rho(s, t)$, эта формула может быть представлена в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = 0 \quad (22).$$

Это и есть уравнение неразрывности в элементарной струйке в общем виде. Для несжимаемой жидкости, т.е. при $\rho = const$, это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad (23).$$

Для случаев установившегося движения или хотя бы и неустановившегося, но с $\omega = const$ в каждом сечении имеем $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ и (23)

обращается в

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (24),$$

т.е. расход по длине струйки имеет одно и то же значение $Q = idem$.

Для установившегося движения из его определения следует, что $Q = const$.

Элементарная струйка жидкости является основным элементом, из которого складывается понятие о потоке жидкости.

Под потоком жидкости в гидравлике подразумевают движение массы жидкости, ограниченное системой поверхностей твёрдых тел и - в общем случае- поверхностей соприкосновения жидких и газообразных тел.

Поток жидкости будем представлять образованным совокупностью элементарных струек жидкости, движущихся с различными скоростями. В простейшем случае поток можно представить состоящим лишь из одной струи. В качестве общего примера можно указать на поток в реке. Здесь поток ограничен частично неподвижной поверхностью ложа, частично воздухом на свободной поверхности. Поток жидкости в трубе, работающей полным сечением, является примером потока, ограниченного лишь поверхностью твёрдого тела – стенками трубы. Струя, вытекающая из брандспойта или отверстия в сосуде, представляет собой пример потока, ограниченного лишь окружающей средой.

Соответственно перечисленным случаям потоки делятся на:

1) безнапорные потоки, т.е. потоки, ограниченные твёрдыми стоками, но имеющими свободную поверхность, например поток в канале;

2) напорные потоки, т.е. потоки, не имеющие свободной поверхности, например поток в водопроводной трубе;

3) гидравлические струи, т.е. потоки, ограниченные лишь жидкостной или газовой средой.

Проведём мысленно поверхность, обладающую тем свойством, что во всех её точках линии токов, пересекающую эту поверхность, нормальны к ней. Тогда площадь поверхности будет равна сумме площадей живых сечений элементарных струек, её пронизывающих:

$$\omega = \int_{\omega} d\omega$$

Площадь эта, заключённая между граничными контурами потока, называется площадью живого сечения потока, сама поверхность – живым сечением потока. Объём жидкости, проходящий в единицу времени через

живое сечение потока, будет равен сумме расходов элементарных струек, пересекающих эту площадь:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega \quad (25).$$

Эта величина называется расходом потока в данном сечении. Разделив расход Q на площадь живого сечения ω , получим:

$$\frac{Q}{\omega} = \vartheta \quad (6-26).$$

Частное от деления расхода на площадь живого сечения имеет размерность скорости $[L \cdot T^{-1}]$ и именуется средней скоростью потока ϑ в данном сечении.

Вообще скорости движения жидкости в различных точка сечения будут различными, и потому среднюю скорость для всего сечения нужно понимать как некоторое абстрактное представление.

Средняя скорость в сечении представляет собой такую воображаемую одинаковую для всех точек сечения скорость при которой через сечение проходил бы тот же расход, какой фактически имеет место при действительных скоростях, различных для разных точек сечения.

Уравнение неразрывности для потока капельной жидкости при установившемся движении в соответствии с (6-24) запишется в виде

$$Q = \vartheta_1 \omega_1 = \vartheta_2 \omega_2 = \dots = \vartheta_i \omega_i = idem$$

Всё многообразие возможных случаев установившегося движения с точки зрения кинематики можно подразделить на два класса:

Равномерное движение, при котором система линий токов выражается семейством взаимно параллельных прямых. Площади живых сечений в любом месте струйки жидкости будут при этом одинаковыми. Постоянно, следовательно. Будет и скорость в пределах струйки. Постоянство площади и скорости в пределах отдельных струек приводит к такому же постоянству живых сечений и средних скоростей для всего потока. Поэтому понятие о равномерном движении связывается с постоянством формы и площади

живых сечений ω , а также средних скоростей \mathcal{V} по длине прямолинейного потока жидкости. Неравномерное движение, при котором линии токов имеют различные взаиморасположение, а площадь живых сечений и скоростей меняются по длине потока. Из класса неравномерных движений жидкости следует особо отметить движение с некоторыми кинематическими особенностями, позволяющими назвать движение плавно изменяющимся. Эти кинематические особенности следующие:

а) линии токов приставлены почти прямыми, кривизна их весьма мала;

б) угол расхождения между линиями токов весьма мал, благодаря чему можно полагать, что живые сечения потока являются плоскостями, а площадь живых сечений изменяется вдоль потока весьма плавно.

В гидротехнике чаще всего приходится иметь дело с равномерным и неравномерным, но плавно меняющимся движением жидкости. Поэтому под потоками, если не делают специальной оговорки, подразумевают потоки только с такими кинематическими характеристиками.

Для живых сечений потоков важной геометрической характеристикой наряду с площадью ω является длина линии, по которой живое сечение соприкасается со стенками русла. Эту длину называют **смоченным периметром русла** и обозначают буквой χ .

Отношение площади живого сечения ω к смоченному периметру χ существенно сказывается на пропускной способности живого сечения.

Это отношение называется гидравлическим радиусом и обозначается буквой R :

$$R = \frac{\omega}{\chi}$$

Необходимо отметить, что для круглых живых сечений гидравлический радиус R не равен геометрическому радиусу r . В самом деле, для круглого живого сечения с геометрическим радиусом r для напорного потока имеем:

$$\omega = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{и} \quad \chi = 2\pi r = \pi d$$

и, следовательно, гидравлический радиус будет равен $R = \frac{r}{2}$, или $R = \frac{d}{4}$.

Глава II

2.1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки и потока идеальной и реальной жидкости. Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли для элементарной струйки

Полное описание динамики жидкости невозможно без закона, устанавливающего также связь энергетических характеристик.

Для установления связи, между работой, действующей в жидкости сил и, кинетической энергии в качестве исходных возьмём дифференциальные уравнения движения жидкости Эйлера. При установившемся движении линии тока совпадает с траекториями. Проекция элементарного отрезка такой линии на соответствующие оси координат обозначения dx, dy, dz .

Умножение членов каждого уравнения на соответствующую величину dx, dy, dz и сложение их левых частей в условиях существования потенциала массовых сил даёт выражение вида.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx + X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dy + Y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) + X dx + Y dy + Z dz = -\frac{1}{\rho} dP + d\Pi \end{aligned}$$

В правой части рассмотрим пока только одно какое-нибудь слагаемое, например $\frac{dU_x}{dt} dx$

При установившемся движении для линии тока, совпадающих с траекториями выражения вида $\frac{dx}{dt}$ равны проекциям скорости на соответствующие оси, поэтому рассматриваемое выражение $\frac{dU_x}{dt} dx$ можно предоставить:

$$\frac{dU_x}{dt} dx = U_x dU_x = d \frac{U_x^2}{2}$$

По аналогии запишем выражения остальных слагаемых

$$\frac{dU_y}{dt} dy = U_y dU_y = d \frac{U_y^2}{2}$$

$$\frac{dU_z}{dt} dz = U_z dU_z = d \frac{U_z^2}{2}$$

В соответствии с изложенным суммированием уравнение получим:

$$-\frac{1}{\rho} d(\rho\Pi + p) = d \left(\frac{U_x^2}{2} + \frac{U_y^2}{2} + \frac{U_z^2}{2} \right) = d \left(\frac{U^2}{2} \right)$$

Или

$$d \left(-\rho\Pi + p + \rho \frac{U^2}{2} \right) = 0$$

Интегрируя

$$-\rho\Pi + p + \rho \frac{U^2}{2} = const$$

$$-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = const$$

Выражение называют *интегралом Бернулли* и характеризует энергию жидкости при её движении вдоль траектории совпадающей при установившемся движении в линией тока.

В частном наиболее распространённом случае, если у массовых сил на жидкость действует только силы тяжести, то;

$$x = y = 0$$

$$z = -g = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

$$\text{Тогда } \partial \Pi = -g dz \quad \Pi = -gz + c$$

С учётом этого интеграл Бернулли.

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = const$$

Уравнение называется *уравнением Бернулли* и является *частной формой закона сохранения энергии*.

В этом виде оно обычно применяется к элементарной струйке невязкой жидкости и доказывает постоянство суммы трёх членов для всех её живых сечений вдоль течения.

2.2 Уравнение Бернулли для потока

Энергия потока в живом сечении

Уравнение Бернулли для элементарной струйки характеризует энергию в сечении струйки, очевидно энергия потока в живом сечении будет состоять из суммы энергий всех элементарных струек.

Коэффициент кинетической энергии α - коэффициент кинетической энергии (коэффициент Кориолиса), который представляет собой отношение действительной кинетической энергии к кинетической энергии, подсчитанной по средней скорости и отражает неравномерность распространения скоростей по сечению

α при неравномерном распределении скоростей по сечению всегда ≤ 1 .

В трубопроводах и каналах: $\alpha = 1,05-1,1$ и тогда $\alpha = 1,0$

Обычно его определяют по данным опытов.

Уравнение Бернулли для потока невязкой (идеальной) жидкости

Так как по закону сохранения энергии удельная энергия потока будет постоянна для разных живых сечений, то можно записать уравнение Бернулли для потока невязкой жидкости:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = const$$

Или для двух расчетных сечений

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g}$$

По аналогии с уравнением Бернулли для струйки все члены уравнения Бернулли для потока имеют энергетический смысл:

z – удельная потенциальная энергия положения;

$\frac{p}{\rho g}$ – удельная потенциальная энергия давления;

$\frac{\alpha v^2}{2g}$ – удельная кинетическая энергия.

Уравнение Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости

При движении вязкой жидкости часть энергии потока расходуется на преодоление сил сопротивления между расчетными сечениями. Следовательно, в уравнение Бернулли удельная энергия во втором и любом последующем сечении будет меньше, чем удельная энергия в первом сечении. С учетом этого можно записать:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{\pi_{1-2}}$$

где $h_{\pi_{1-2}}$ — затраты удельной энергии на преодоление сопротивлений между сечениями 1—1 и 2—2. Для упрощения терминологии эту величину обычно называют потерями энергии и обозначают h_{π} , имея в виду, что они относятся к участку между расчетными сечениями.

Зависимость $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{\pi_{1-2}}$ называется

уравнением Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости и представляет собой уравнение баланса удельной энергии потока. С энергетической точки зрения затраты (потери) энергии h_{π} на преодоление сопротивлений являются диссипацией (рассеиванием) энергии. Это означает, что при движении жидкости часть механической энергии переходит безвозвратно в тепловую энергию, т. е. для потока теряется.

2.3 Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения

Бернулли

2.3.1 Уравнение Бернулли

Полное описание динамики жидкости невозможно без закона, устанавливающего также связь энергетических характеристик.

Для установления связи, между работой, действующей в жидкости сил и, кинетической энергии в качестве исходных возьмём дифференциальные уравнения движения жидкости Эйлера. При установившемся движении

линии тока совпадает с траекториями. Проекция элементарного отрезка такой линии на соответствующие оси координат обозначения dx, dy, dz .

Умножение членов каждого уравнения на соответствующую величину dx, dy, dz и сложение их левых частей в условиях существования потенциала массовых сил даёт выражение вида.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx + X dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dy + Y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) + X dx + Y dy + Z dz = -\frac{1}{\rho} dP + d\Pi \end{aligned}$$

В правой части рассмотрим пока только одно какое-нибудь слагаемое, например $\frac{dU_x}{dt} dx$

При установившемся движении для линии тока, совпадающих с траекториями выражения вида $\frac{dx}{dt}$ равны проекциям скорости на соответствующие оси, поэтому рассматриваемое выражение $\frac{dU_x}{dt} dx$ можно предоставить:

$$\frac{dU_x}{dt} dx = U_x dU_x = d \frac{U_x^2}{2}$$

По аналогии запишем выражения остальных слагаемых

$$\frac{dU_y}{dt} dy = U_y dU_y = d \frac{U_y^2}{2}$$

$$\frac{dU_z}{dt} dz = U_z dU_z = d \frac{U_z^2}{2}$$

В соответствии с изложенным суммированием уравнение получим:

$$-\frac{1}{\rho} d(\rho\Pi + \rho) = d \left(\frac{U_x^2}{2} + \frac{U_y^2}{2} + \frac{U_z^2}{2} \right) = d \left(\frac{U^2}{2} \right)$$

Или

$$d \left(-\rho\Pi + \rho + \rho \frac{U^2}{2} \right) = 0$$

Интегрируя

$$-\rho\Pi + \rho + \rho \frac{U^2}{2} = const$$

$$-\Pi + \frac{\rho}{\rho} + \frac{U^2}{2} = const$$

Выражение называют *интегралом Бернулли* и характеризует энергию жидкости при её движении вдоль траектории совпадающей при установившемся движении в линией тока.

В частном наиболее распространённом случае, если у массовых сил на жидкость действует только силы тяжести, то;

$$x = y = 0$$

$$z = -g = \frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

Тогда $\partial\Pi = -gdz$ $\Pi = -gz + c$

С учётом этого интеграл Бернулли.

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = const$$

Уравнение называется *уравнением Бернулли* и является *частной формой закона сохранения энергии*.

В этом виде оно обычно применяется к элементарной струйке невязкой жидкости и доказывает постоянство суммы трёх членов для всех её живых сечений вдоль течения.

2.3.2 Уравнение Бернулли для потока

Энергия потока в живом сечении

Уравнение Бернулли для элементарной струйки характеризует энергию в сечении струйки, очевидно энергия потока в живом сечении будет состоять из суммы энергией всех элементарных струек.

Коэффициент кинетической энергии α - коэффициент кинетической энергии (коэффициент Кориолиса), который представляет собой отношение действительной кинетической энергии к кинетической энергии,

подсчитанной по средней скорости и отражает неравномерность распространения скоростей по сечению

α при неравномерном распределении скоростей по сечению всегда 1.

В трубопроводах и каналах: $\alpha = 1,05-1,1$ и тогда $\alpha = 1,0$

Обычно его определяют по данным опытов.

Уравнение Бернулли для потока невязкой (идеальной) жидкости

Так как по закону сохранения энергии удельная энергия потока будет постоянна для разных живых сечений, то можно записать уравнение Бернулли для потока невязкой жидкости:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} = const$$

Или для двух расчетных сечений

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g}$$

По аналогии с уравнением Бернулли для струйки все члены уравнения Бернулли для потока имеют энергетический смысл:

z – удельная потенциальная энергия положения;

$\frac{p}{\rho g}$ – удельная потенциальная энергия давления;

$\frac{\alpha v^2}{2g}$ – удельная кинетическая энергия.

Уравнение Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости

При движении вязкой жидкости часть энергии потока расходуется на преодоление сил сопротивления между расчетными сечениями. Следовательно, в уравнение Бернулли удельная энергия во втором и любом последующем сечении будет меньше, чем удельная энергия в первом сечении. С учетом этого можно записать:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{\pi 1-2}$$

где $h_{п1-2}$ — затраты удельной энергии на преодоление сопротивлений между сечениями 1—1 и 2—2. Для упрощения терминологии эту величину обычно называют потерями энергии и обозначают $h_{п}$, имея в виду, что они относятся к участку между расчетными сечениями.

Зависимость $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{п1-2}$ называется уравнением Бернулли для потока вязкой (реальной) жидкости и представляет собой уравнение баланса удельной энергии потока. С энергетической точки зрения затраты (потери) энергии $h_{п}$ на преодоление сопротивлений являются диссипацией (рассеиванием) энергии. Это означает, что при движении жидкости часть механической энергии переходит безвозвратно в тепловую энергию, т. е. для потока теряется.

2.3.3 Энергетический смысл уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии, каждое слагаемое, входящее в уравнение также имеет энергетический смысл.

Сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ - представляет удельную потенциальную энергию, состоящую из удельной энергии положения z и удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\rho g}$. Выражение $\frac{U^2}{2g}$ - удельной кинетической энергии.

2.3.4 Геометрический смысл уравнения Бернулли

Из гидростатики известно, что $z + \frac{p}{\rho g} = H$ является пьезометрическим напором, состоящим из линейных величин, отметки z и пьезометрической высоты $\frac{p}{\rho g}$. Член $\frac{U^2}{2g}$ также имеет размерность линейной величины и называется *скоростным напором*.

Сумма пьезометрического и скоростного напора называется *полным или гидростатическим напором*

$$H_0 = H + \frac{U^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = const$$

Уравнение Бернулли устанавливает зависимость между положением точки давления и скоростью, в каком либо сечении струйки и аналогичными характеристиками в любом другом сечении этой же струйки.

При постоянстве отметок z в разных сечениях из уравнения Бернулли вытекает важное свойство движущейся жидкости: *с увеличением скорости давление уменьшается, а с уменьшением скорости – увеличивается.*

2.4 Общие сведения о потерях напора. Основное уравнение равномерного движения. Физическая природа гидравлических сопротивлений

При движении вязкой жидкости возникают потери энергии (напора). Причиной этих потерь являются различные гидравлические сопротивления, механизм которых обычно настолько сложен, что, как правило, не дает возможности получить теоретические зависимости для потерь напора.

Поэтому при изучении гидравлических сопротивлений обращаются к специальным экспериментальным исследованиям, в которых определяются величины z , входящие в уравнение Бернулли, а затем вычисляются потери напора. В процессе этих исследований устанавливаются не только количественные значения потерь, но и влияние на них формы сечения потока, скорости протекания жидкости, ее вязкости, кинематической структуры потока и некоторых других факторов. В результате обычно удается получить эмпирические или полуэмпирические зависимости для определения потерь напора. Сопротивления могут характеризоваться вязкостными или инерционными силами. Первые зависят от внутреннего трения между частицами движущейся жидкости, а вторые — от способности жидкости» (ее частиц) оказывать сопротивление изменению своего движения. Обычно действуют обе эти причины, но в конкретных случаях может преобладать одна из них.

Сопротивления могут проявляться равномерно на всей длине потока. Эти сопротивления называются *сопротивлениями по длине*, они возникают при

протекании воды в трубах или каналах при равномерном, а также неравномерном плавноизменяющемся движениях.

Другой вид сопротивлений проявляется на коротком участке в местах резкого изменения конфигурации потока. Такие сопротивления называются *местными*. Соответственно потери напора (энергии) также делятся на *потери напора по длине* и *местные потери напора*.

В общем случае в потоке возникают оба вида потерь напора (местных и по длине) и их значения необходимо суммировать при вычислении величины общих потерь. Однако в некоторых случаях различные виды сопротивлений влияют друг на друга и, следовательно, на величины потерь напора, и тогда вместо сложения потерь следует определять общие потери напора для комбинации ряда сопротивлений.

2.4.1 Основное уравнение равномерного движения

Для установления зависимости потерь напора от сил сопротивления по длине необходимо рассмотреть такой поток жидкости, в котором имеются только сопротивления по длине и отсутствуют местные.

При соблюдении этих условий поток может протекать при установившемся равномерном движении.

Выделим отсек такого потока между сечениям $1-1$ и $2-2$ (рис. 1) и рассмотрим действие на него внешних сил (поверхностных и массовых) и сил трения. При равномерном движении отсутствуют ускорения движения и силы, вызывающие движение, уравновешиваются силами, препятствующими ему.

На выбранный отсек жидкости действуют его сила тяжести G , силы давления P_1 и P_2 в сечениях $1-1$ и $2-2$ со стороны отброшенных объемов жидкости, сила сопротивления по длине T и нормальные силы давления со стороны стенок русла на боковые поверхности потока N . Рассмотрим уравнение проекций всех указанных сил на ось потока $0-0$. В этом случае проекции сил ΣP будут равны нулю и уравнение движения примет вид

$$P_1 - P_2 + G \cos(90 - \beta) = T, \quad (1)$$

где β — угол наклона оси потока к горизонту.

Так как движение в сечениях 1—1 и 2—2 является плавноизменяющимся, то давление в них распределяется по закону гидростатики и силы давления будут равны:

$$P_1 = p_1 \omega; \quad P_2 = p_2 \omega, \quad (2)$$

где p_1 и p_2 — давление в центрах тяжести соответствующих сечений;

ω — площадь живого сечения потока.

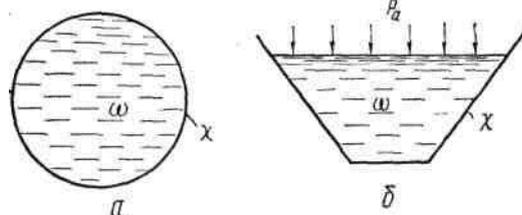
$$\text{Сила тяжести отсека} \quad G = \rho g \omega l, \quad (3)$$

где l — длина выбранного отсека между расчетными сечениями.

Значение $\cos(90 - \beta)$ может быть представлено в виде

$$\cos(90 - \beta) = \sin \beta = \quad (4)$$

Что касается силы сопротивления по длине T , то она характеризуется трением между потоком и стенками русла, а также сопротивлением на преодоление сцепления между соседними частицами жидкости, которые движутся с различными скоростями. Однако в общем случае учесть второй фактор очень сложно, поэтому условно сила сопротивления по длине представляется как сила трения между



потоком и стенками русла и выражается формулой

$$T = \tau_0 \chi l, \quad (5)$$

Рис. 2

где χ — смоченный периметр т. е. часть периметра живого сечения, соприкасающаяся со стенками русла; при напорном движении χ совпадает с периметром живого сечения (рис. 2, а), а при безнапорном представляет лишь часть последнего (рис. 2, б), τ_0 — среднее значение касательных напряжений на единице площади соприкосновения потока с руслом.

При равномерном движении все характеристики потока, в том числе и касательные напряжения, не изменяются по длине, однако в разных точках

смоченного периметра τ_0 может быть различным, поэтому принимается его среднее значение по смоченному периметру. Кроме того, величина τ_0 должна учитывать истинные сопротивления, в том числе силы трения (сцепления) между частицами жидкости, т. е. зависеть от ее вязкости, распределения скоростей и их изменения, образование вихрей в потоке, перемешивания частиц жидкости при движении.

С учетом выражений (2), (3), (4) и (5) уравнение (1) примет вид

$$p_1\omega - p_2\omega + \rho g\omega l = \tau_0\chi l$$

Разделим все члены этого уравнения на силу тяжести, приложенную к рассматриваемому отсеку $G = \rho g\omega l$, и после некоторых преобразований получим

$$(6)$$

Левая часть этого выражения представляет пьезометрический уклон i_p , который на всем участке равномерного движения является величиной постоянной, так как сопротивления по длине также постоянны для всего участка. С учетом этого уравнение (6) приводится к виду

$$i_p = \frac{\tau_0\chi l}{\rho g\omega l} \quad (7)$$

где R — гидравлический радиус сечения, определяемый по формуле

$$R = \frac{\omega}{\chi} \quad (8)$$

Уравнение (7) называется *основным уравнением равномерного движения*. При равномерном движении, ввиду постоянства скорости V и скоростного напора $\frac{V^2}{2g}$, напорная линия параллельна пьезометрической, и гидравлический уклон равен пьезометрическому:

$$J = i_p \quad (9)$$

Это выражение также называют *уравнением равномерного движения*. В соответствии с формулой $J =$

$$J = \quad (10) \quad \text{и} \quad h_l = \quad (11)$$

Уравнения (7) и (11) показывают зависимость потерь энергии (напора) по длине h_l от касательных напряжений τ_0 и, следовательно, от сил сопротивления по длине. Для расчетов по формуле (11) необходимо знать величину касательных напряжений τ_0 , которые в общем случае определяются на основании опытных данных.

2.4.2 Потери напора по длине в круглых трубах

Для круглых труб гидравлический радиус $R = \quad = \quad$. С учетом этого формула (11) принимает вид

$$h_l = \quad (12)$$

На основании многочисленных опытов, проведенных на парижском водопроводе, французский инженер А. Дарси в 1857 г. установил, что потери напора в трубах пропорциональны также скоростному напору и предложил формулу

$$h_l = \lambda \quad (13)$$

где λ — гидравлический коэффициент трения, определяемый опытным путем.

Сравнивая выражения (13) и (12), получим формулу

$$\tau_0 = \rho \quad V^2 \quad (14)$$

из которой следует, что касательные напряжения прямо пропорциональны квадрату скорости.

Формула (13) является расчетной для определения потерь напора по длине в трубах. В таком виде эти потери учитываются при применении уравнения Бернулли.

Следует отметить, что гидравлический коэффициент трения при некоторых условиях зависит от средней скорости в живом сечении V , в связи

с чем потери напора по длине h_t и касательные напряжения τ_0 не всегда пропорциональны квадрату скорости.

Из формулы (14) также следует вывод, что коэффициент λ , должен зависеть от тех факторов, которые влияют на величину касательных напряжений τ_0 , о чем указывалось в пояснении к формуле (5). Это особенно проявляется при разных режимах движения жидкости — ламинарном и турбулентном.

Глава III.

Режимы движения жидкости. Число и критерий Рейнольдса

3.1 Режимы движения жидкости

Широкие экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений показывают, что потери энергии существенно зависят от поведения самих частиц жидкости при её движении.

Изучению поведения частиц жидкости в потоке стали уделять необходимое внимание лишь в последние десятилетия.

Однако ещё в 1880 году Д.И. Менделеев в работе «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавания» превосходил открытия последующего периода. В своей работе он указывает на наличие видов движения жидкости, которые отличаются разными зависимостями сил трения от скорости движения.

Физическая характеристика условий, определяющих режим движения жидкостей, была найдена английским физиком Осборном Рейнольдсом в 1883 году.

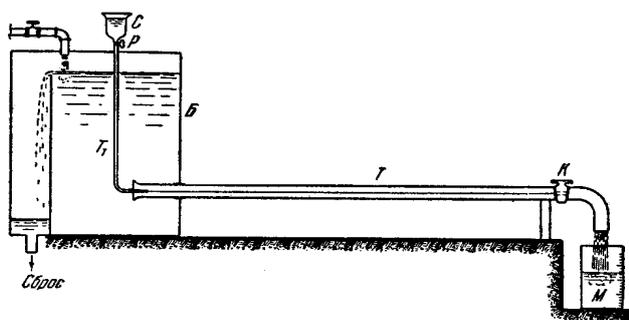


Рис.3.1.

Схема опытной установки для исследования режимов движения показана на рисунке 1. К баку B достаточно больших размеров, наполненному исследуемой жидкостью, присоединена стеклянная трубка T с площадью сечения ω , снабжённая на конце краном K для регулирования расхода через трубу. Величина расхода определяется мерным баком M .

Для уменьшения возмущений, вносимых в поток, вход из бака в трубу сделан плавным. Над большим баком расположен маленький бачок C , наполненный раствором какой – нибудь краски с плотностью, близкой к плотности исследуемой жидкости. От бачка C отходит тоненькая трубка T_1 , изогнутая внизу так, чтобы заострённый выходной конец её несколько вдвинут вол входной участок большой стеклянной трубы. Расход через тоненькую трубку регулируется краном P .

Опишем явления, которые наблюдаются в процессе эксперимента. Если слегка приоткрыть кран K большой стеклянной трубы, жидкость начнёт медленно вытекать из бака B . В трубе T устанавливается некоторая средняя скорость \mathcal{V} соответственно расходу и живому сечению трубы. если теперь несколько приоткрыть кран тонкой трубки T_1 , то из последней в трубу T начнёт поступать краска в виде тонкой прямолинейной и резко выделяющейся струйки. Замечательно, что краска при этом движется в трубе T , не смешиваясь с остальной жидкостью. Создаётся на первый взгляд впечатление, что окрашенная струйка как бы застыла внутри трубы. Заметного объёма частицами между подкрашенной струйкой и окружающей

её массой жидкости не происходит. если впустить в жидкость несколько подкрашенных струек, то все они будут двигаться отдельными струйками, не смешиваясь с остальной массой жидкости. Таким образом, в прямой стеклянной трубе T вся жидкость движется отдельными слоями, не смешивающимися между собой линии тока прямолинейны и устойчивы.

Если затем ещё несколько приоткрыть кран K стеклянной трубы, то расход воды через трубу, а соответственно и скорость \mathcal{Q} несколько увеличатся. Качественно картина явления несколько не изменится. По-прежнему окрашенные струйки будут двигаться, не смешиваясь с остальной массой жидкости в трубе T . Так будет продолжаться довольно долго, если открытие крана K увеличивать понемногу и плавно.

Но вдруг при некотором большом открытии крана окрашенная струйка начинает искривляться, линия тока становится извилистой. Сама струйка становится дрожащей, колеблющейся, что может происходить только в результате непрерывно изменения во времени вектора скорости в точках пространства.

При усилении пульсации скорости происходит перемешивание окрашенной струйки со всей массой потока, и струйка быстро распадается в виде завихрений по всему сечению трубы (рис 2).

Характер движения, а также само движение жидкости, при котором отсутствует пульсация скорости, приводящая к перемешиванию частиц, называют ламинарным.

В отличие от него режим движения и само движение жидкости с пульсацией скоростей, приводящей к перемешиванию частиц потока, называют турбулентным.

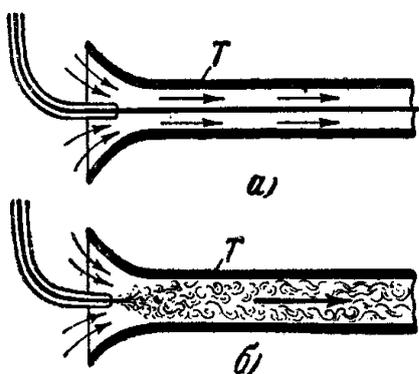


Рис.3.2.

При обратном поведении опыта, т.е. при постепенном закрывании крана после полного его открытия, явление повторяется в обратном порядке,

однако переход от турбулентного режима к ламинарному происходит при скорости, меньшей той, при которой наблюдался переход от ламинарного движения к турбулентному. Режим потока в этой сравнительно небольшой переходной области является ламинарным или турбулентным, так как в этой переходной зоне режим неустойчив и под влиянием случайных факторов может принимать как ту, так и другую формы.

Важно то обстоятельство, что изменения в общем режиме движения жидкости непосредственно влияют на законы гидравлического сопротивления. Все опыты согласованно показывают различное влияние скорости \mathcal{G} на величину потерь энергии при разных режимах движения.

Если результаты опытов изобразить графически, откладывая значения $\lg h_{mp}$ по оси ординат, а значение $\lg \mathcal{G}$ по оси абсцисс, то зависимость между $\lg h_{mp}$ и $\lg \mathcal{G}$ получается в виде отрезков прямых линий.

Уравнение этих линий можно записать в виде

$$\lg h_{mp} = \lg b + m \lg \mathcal{G} \quad (1).$$

В формуле (9-1) $m = \operatorname{tg} \theta$, где θ - угол наклона соответствующего отрезка прямой к оси абсцисс.

Из (9-1) следует:

$$h_{mp} = b \mathcal{G}^m \quad (2),$$

где b и m - некоторые величины, учитывающие: первая – влияние размеров трубы, свойств её стенок и рода жидкости, а вторая влияние скорости движения жидкости на потери удельной энергии в потоке.

Все опыты по определению гидравлических сопротивлений прямых трубопроводов, проведённые различными экспериментаторами, притом с самыми разнообразными жидкостями, включая воздух, позволяют утверждать, что:

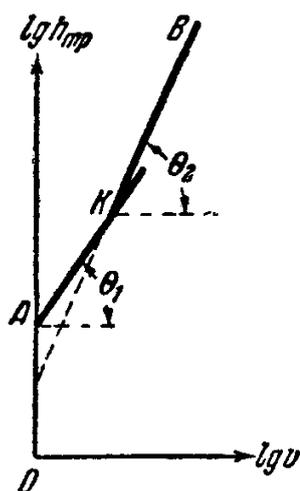


Рис.3.3.

а) ламинарному режиму движения жидкости соответствует участок AK (рис. 3) зависимости потерь от скорости; отрезок AK образует с осью абсцисс угол $\theta_1 = 45^\circ$; $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$; значит при ламинарном режиме потери удельной энергии по длине пропорциональны первой степени скорости;

б) турбулентному режиму движения жидкости соответствует участок прямой KB с углом наклона $\theta_2 > 45^\circ$; значит, в формуле (2) показатель $m > 1$; при турбулентном режиме потери удельной энергии по длине пропорциональны скорости в степени m , изменяющейся от 1,75 до 2,0.

Как уже отмечалось, режим движения жидкости влияет на величину потерь энергии по длине потока.

Опыты показали, что режим движения жидкости зависит от вязкости жидкости μ и её плотности ρ , средней скорости течения \mathcal{V} и геометрических размеров русла l , где l - некоторый характерный геометрический размер русла, например для круглой трубы – её диаметр.

Характеристикой режима потока может служить безразмерный комплекс из четырёх величин: $l, \mu, \rho, \mathcal{V}$. Из этих четырёх величин может быть составлена только одна безразмерная величина в виде

$$\frac{\mathcal{V} l}{\mu \sqrt{\rho}} = \frac{\mathcal{V} l}{\nu} \quad (3).$$

которую, как уже упоминалось, называют «число Рейнольдса» и обозначают символом Re . При этом в зависимости от того, какая величина l принята за характерный линейный размер, обозначению Re можно придать соответствующий индекс.

Так, например, если в качестве линейной характеристики русла принять диаметр трубы d либо гидравлический радиус R , или глубину канала h , то обозначения примут вид:

$$Re_d = \frac{\rho d}{\nu}; Re_R = \frac{\rho R}{\nu}; Re_h = \frac{\rho h}{\nu}.$$

В дальнейшем числа Re_d будем обозначать Re без индекса.

Сравнительно точными измерениями движения жидкости в круглых гладких трубах на участках, достаточно удалённых от входа и при отсутствии различных возмущающих условий, установлено, что когда число Рейнольдса меньше значения $Re_d = 2320$ или $Re_R = 580$, режим движения будет устойчиво ламинарным.

Значение числа Рейнольдса, соответствующее устойчивому переходу от турбулентного режима к ламинарному, называют критическим числом Рейнольдса $Re_{кр}$.

Как уже указывалось. При движении жидкости в круглых трубах имеем:

$$Re_{кр} = \frac{\rho d}{\nu} = 2320.$$

Для открытых русел критическое значение Re можно принимать равным

$$Re_{R(кр)} = \frac{\rho R}{\nu} \approx 580,$$

где R - гидравлический радиус.

Следует отметить, что при увеличении числа Рейнольдса выше его критического значения режим движения может остаться ламинарным. Однако это возможно только при соблюдении особых предосторожностей для тщательного успокоения жидкости в резервуаре и недопущении каких-

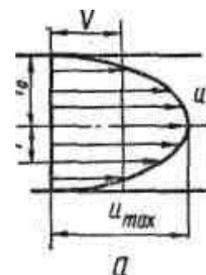
либо возмущений. Достаточно незначительных возмущений потока, чтобы режим движения в этих случаях перешел в турбулентный. Поэтому в прикладных расчётах будем придерживаться упомянутых значений критического числа Рейнольдса.

В гидротехнической практике условия движения жидкости обычно таковы, что числа Рейнольдса значительно больше упомянутых критических значений, и потому режим движения турбулентный. Например, в канале с $R = 1,5 м$ при скорости воды $g = 0,8 м/сек$ и кинематическом коэффициенте вязкости $\nu = 0,01 см^2/сек$ имеем:

$$Re_R = \frac{gR}{\nu} = \frac{80 \cdot 150}{0,01} = 1,2 \cdot 10^6.$$

3.2 Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости

При ламинарном режиме движения имеет место значительная неравномерность распределения скоростей по сечению (рис. а). У стенки трубы жидкость прилипает к последней, и скорость в этом слое равняется нулю. Второй цилиндрический слой скользит по первому, третий по второму и т. д. По мере удаления слоя от стенки скорость движения увеличивается и достигает максимального значения по оси трубы. При такой картине движения силы трения характеризуются сцеплением частиц жидкости, находящихся в двух соседних слоях и движущихся с разными скоростями. Иными словами, силы трения зависят от вязкости жидкости. Гипотеза И. Ньютона о внутреннем трении в жидкости, полностью применима к ламинарному движению.



Механизм турбулентного движения значительно сложнее, чем ламинарного. При турбулентном режиме частицы жидкости беспорядочно перемешиваются между

собой, а скорости в любой точке потока непрерывно изменяются по величине и направлению около

Рис. б некоторого среднего значения. Это явление носит название *пульсации скорости* (рис. б). Скорость в данный момент времени в данной точке турбулентного потока называется *местной мгновенной скоростью u* . Средняя по времени скорость в данной точке называется *местной осредненной скоростью \bar{u}* .

Осредненная скорость в любой точке может быть определена как

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt,$$

где T — отрезок времени, на котором проводится осреднение.

Величина осредненной скорости \bar{u} представляет собой высоту прямоугольника шириной T , равновеликого фигуре, ограниченной осями координат, ординатой T и кривой, характеризующей изменение мгновенной скорости u по времени.

Введение понятия осредненной скорости в точке позволяет считать турбулентный поток *квазиустановившимся*, т. е. *условно установившимся*. В этом случае сохраняются такие понятия, как линия тока, элементарная струйка, средняя скорость в живом сечении. При турбулентном движении можно так же, как и при ламинарном, применять уравнения неразрывности движения и уравнение Бернулли. Влияние же режима движения может быть отражено зависимостями для потерь энергии, которые из-за турбулентных пульсаций будут отличаться от потерь энергии при ламинарном режиме.

3.3 Число Рейнольдса и его критическое значение

На основании обработки опытных данных установлено, что более полно режим движения жидкости характеризуется численным значением безразмерного параметра, который называется числом Рейнольдса,

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu},$$

где D — диаметр трубы; ν — кинематическая вязкость жидкости. При значении $V = V_{н.к}$ число Рейнольдса называется *нижним критическим числом Рейнольдса* $Re_{н.к}$, а при $V = V_{в.к}$ — *верхним критическим числом Рейнольдса* $Re_{в.к}$. На основании обработки опытных данных принимают $Re_{н.к} = 2320$. Верхнее критическое число Рейнольдса не имеет строго установленного значения, а зависит от таких факторов, как местные сопротивления (например, форма входа в трубу), сотрясение трубопровода и т. д. В лабораторных условиях иногда удается сохранить ламинарный режим до чисел Рейнольдса порядка 12000—13000 и даже более. Однако ввиду неустойчивости ламинарного движения в области $Re_{н.к} < Re < Re_{в.к}$ на практике принимают, что ламинарный режим существует при $Re < Re_{н.к} = 2320$. В связи с этим часто нижнее критическое число Рейнольдса называют просто критическим числом Рейнольдса и обозначают $Re_{к}$.

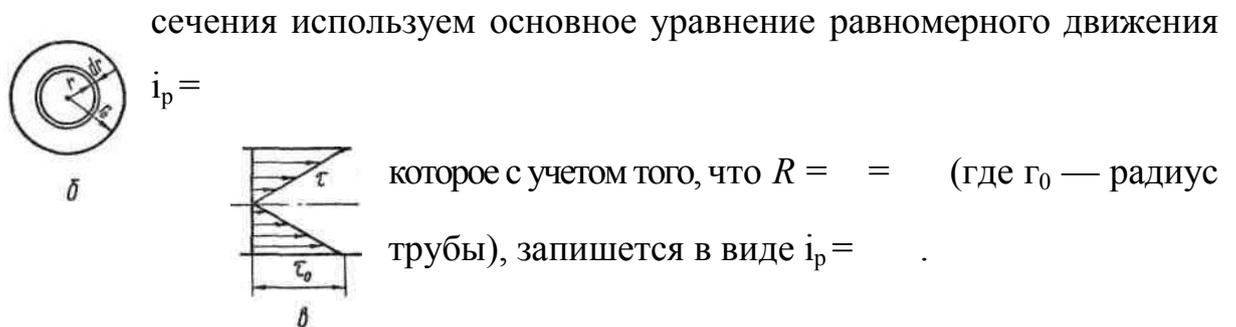
Для каналов и других русел некруглого сечения число Рейнольдса выражают через гидравлический радиус

$$Re_R = \frac{vR}{\nu},$$

Для круглых труб при гидравлическом радиусе $R = \frac{D}{4}$ критическое число Рейнольдса, выраженное через гидравлический радиус, будет $Re_R = 580$, а для открытых каналов, согласно опытным данным, $Re_R = 300 \text{--} 500$. Отличаются между собой также критические числа Рейнольдса для труб с большой шероховатостью и на сужающихся или расширяющихся участках труб. Такие различия свидетельствуют о недостаточной изученности этого вопроса.

3.4 Распределение ламинарного движения в круглой трубе

Распределение касательных напряжений и скоростей по сечению. Для установления характера изменения касательных напряжений в разных точках



Если представить себе некоторый цилиндрический слой жидкости с радиусом r (рис. б), скользящий по внешнему соседнему слою, то на границе этих слоев возникают касательные напряжения τ . Учитывая, что для всех точек каждого сечения $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$, пьезометрический уклон i_p , характеризующий уменьшение величины $z + \frac{p}{\rho g}$ по длине, также будет постоянным при вычислении его для разных точек сечения, т. е.

$i_p = \frac{2}{R} \tau_0$.

Приравнявая выражения $i_p = \frac{2}{R} \tau_0$ и $i_p = \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dr}$, получим $\tau = \mu \frac{du}{dr}$.

Эта зависимость выражает линейный закон изменения касательных напряжений по сечению (рис. в), которые уменьшаются до нуля по оси трубы, где скорости соседних слоев выравниваются. Касательные напряжения могут быть представлены также в виде

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Знак (—) в правой части принят в связи с тем, что скорость при удалении от оси трубы уменьшается, т. е. градиент скорости является величиной отрицательной, а касательные напряжения τ являются величиной положительной. Решая совместно уравнения $\tau = \mu \frac{du}{dr}$ и $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$, получим

$$du = - \frac{\tau}{\mu} r dr.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$u = - \frac{\tau_0}{4\mu} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из условия, что при $r = r_0$ скорость $u = 0$:

$$C = \frac{\tau_0}{4\mu} r_0^2.$$

Отсюда

$$u = \frac{\tau_0}{4\mu} (r_0^2 - r^2).$$

Это уравнение показывает, что скорость в живом сечении распределяется по параболическому закону. Максимальная скорость по оси трубы определится из условия, что $r = 0$ и тогда

$$u_{\max} = \frac{\tau_0}{4\mu} r_0^2.$$

Следовательно,

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Найдем среднюю скорость в живом сечении.

$$V = \frac{1}{2} u_{\max}.$$

Следовательно, при ламинарном режиме движения в круглой трубе средняя скорость в живом сечении равна половине максимальной.

Определим также коэффициент кинетической энергии α , входящий в уравнение Бернулли, $\alpha = 2$.

Такое значительное отклонение коэффициента кинетической энергии от единицы характерно для ламинарного режима движения в связи с ярко выраженным неравномерным распределением скоростей по сечению.

Потери напора по длине и гидравлический коэффициент трения при ламинарном режиме. Определив из формулы $u_{\max} = \frac{\tau_0}{4\mu} r_0^2$ и подставив его значение в выражение $i_p = \frac{4\mu V}{r_0^2}$, с учетом $V = \frac{1}{2} u_{\max}$ получим зависимость для пьезометрического уклона

$$i_p = \frac{8\mu V}{r_0^2} = \frac{4\mu V}{r_0^2} \cdot 2,$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематическая вязкость жидкости.

Потери напора по длине с учетом равенств $J = i_p$ и $J =$ определяются из выражения $h_l =$

Отсюда вытекает важная особенность ламинарного режима движения жидкости: потери напора по длине прямо пропорциональны вязкости жидкости и первой степени скорости и не зависят от характеристики поверхности стенок трубы.

3.5 Структура турбулентного потока в трубе

Экспериментальные исследования показывают, что турбулентный поток в трубе разделяется на две, резко отличные по структуре области. Непосредственно у стенки образуется очень тонкая область чисто вязкого движения — так называемый *вязкий подслой*. Остальная часть потока — *турбулентное ядро* — является областью мало или почти не зависящей от вязкости, областью турбулентного перемешивания.

В пределах вязкого подслоя динамическая вязкость μ значительно больше турбулентной вязкости ε_T и напряжения вязкостного трения значительно больше напряжений, возникающих под действием сил инерции. Обратная картина наблюдается в турбулентном ядре, где касательные напряжения от турбулентного перемешивания во много раз больше напряжений вязкостного трения. Строго говоря, такое разделение потока на две области несколько условно и схематично. В действительности по мере удаления от стенок трубы влияние вязкости убывает постепенно и между вязким подслоем и турбулентным ядром можно еще различать *переходную область*, в которой величины ε_T и μ , имеют одинаковый порядок. Введение такой области необходимо при изучении тепломассопередачи. В то же время в гидродинамике обычно ограничиваются схемой двух областей — вязкого подслоя и турбулентного ядра.

Глава IV.

Ламинарное движение в круглой трубе. Потери напора по длине и гидравлический коэффициент при ламинарном режиме. Турбулентное движение жидкости. Пульсация и осредненная скорость. Структура турбулентного потока в трубе

4.1 Ламинарное движение жидкости в круглой трубе

Общая характеристика ламинарного режима. При ламинарном режиме движения имеет место значительная неравномерность распределения скоростей по сечению (рис. 11-1, а). У стенки трубы жидкость прилипает к последней и скорость в этом слое равняется нулю. Второй цилиндрический слой скользит по первому, третий по второму и т.д.

По мере удаления слоя от стенки скорость движения увеличивается и достигает максимального значения по оси трубы.

При такой картине движение силы трения характеризуются сцеплением частиц жидкости находящихся в двух соседних слоях и движущихся с разными скоростями. Силы трения зависят от вязкости жидкости.

Распределение касательных напряжений и скоростей по сечению. Для установления характера изменения касательных напряжений в разных точках сечения используем основное уравнение равномерного движения

$$i_p = \frac{\tau_0}{\rho g R}$$

Которое с учётом того, что $R = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2}$ записывается в виде

$$i_p = \frac{\tau_0}{\rho g r_0} \quad (11-1)$$

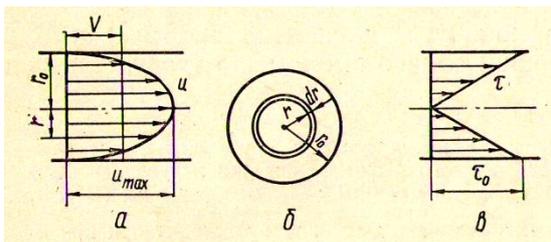


Рис. 4.1.

Если представить себе некоторый цилиндрический слой жидкости с радиусом r (рис. 4.1, б), скользящий по внеш-

нему соседнему слою, то на границе этих слоёв возникают касательные напряжения τ . Учитывая, что для всех точек каждого сечения $z + \frac{p}{\rho g} = const$

пьезометрический уклон i_p , характеризующий уменьшение величины $z + \frac{p}{\rho g}$ по длине, также будет постоянным при вычислении его для разных точек сечения т.е.

$$i_p = \frac{2\tau}{\rho g r} \quad (11-2)$$

приравнявая выражения (11-1) и (11-2), получим

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} \quad (11-3)$$

Эта зависимость выражает линейный закон изменения касательных напряжений по сечению (рис. 11-1, в), которое уменьшается до нуля по оси трубы, где скорости соседних слоев выравниваются.

Касательные напряжения могут быть представлены в виде:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (11-4)$$

Знак «-» в правой части принят в связи с тем, что скорость при удалении от оси трубы уменьшается, т.е. градиент скорости $\frac{du}{dr}$ является величиной отрицательной, а касательное напряжение τ – является величиной положительной.

Решая совместно уравнения (11-3) и (11-4), получим:

$$du = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} r dr \quad (11-5)$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$u = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} \frac{r^2}{2} + C$$

Постоянную интегрирования C определяем из условия $r = r_0$, а на стенке трубы скорость $u = 0$, получим её:

$$C = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu}$$

отсюда

$$u = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (11-6)$$

Это уравнение показывает, что скорость в живом сечении распределяется по параболическому закону. Максимальная скорость по оси трубы определяется из условия $r = 0$ и тогда

$$u_{\max} = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu} \quad (11-7)$$

или

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (11-8)$$

Найдём среднюю скорость в живом сечении

$$V = \frac{\int u d\omega}{\omega} = \frac{u_{\max}}{2} \quad (11-9)$$

Следовательно, при ламинарном режиме движения в круглой трубе средняя скорость в живом сечении равна половине максимальной.

Коэффициент кинематической энергии $\alpha = 2$. Такое значительное отклонение α от 1 характерно для ламинарного режима движения в связи с ярко выраженным неравномерным распределением скоростей по сечению.

4.2 Потери напора по длине и гидравлический коэффициент при ламинарном режиме

Определив из формулы (11-7) τ_0 и подставив его значение в выражение (11-1), с учетом выражения (11-9) получим зависимость для пьезометрического уклона

$$i_p = \frac{2 \cdot 2\mu \cdot 2V}{\rho g r_0 r_0} = \frac{32\nu}{2d^2} V \quad (11-10)$$

Где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематическая вязкость жидкости.

Потеря напора по длине с учётом равенства $I = i_p$, $I = \frac{h_\ell}{\ell}$ определяется из выражения

$$h_\ell = \frac{32\nu}{gd^2} V\ell \quad (11-11)$$

Отсюда вытекает важная особенность ламинарного режима движения жидкости: потеря напора по длине прямо пропорциональна вязкости жидкости, и первой степени скорости, и не зависит от характеристики поверхности стенок.

Приравнивая потери напора по длине (11-11) и $h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}$, получим

$$\frac{32\nu}{2d^2} V\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}$$

Отсюда гидравлический коэффициент трения при ламинарном режиме

$$\lambda = \frac{64\nu}{Vd} \quad (11-12)$$

или с учётом $Re = \frac{Vd}{\nu}$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (11-13)$$

4.3 Турбулентное движение жидкости. Пульсация и осредненная скорость

Механизм турбулентного режима движения значительно сложнее ламинарного. При турбулентном режиме частицы жидкости беспорядочно перемешиваются между собой и скорости в любой точке потока непрерывно меняются по величине и направлению около некоторого среднего значения. Это явление носит название *пульсации скорости* (рис. 11-2). Скорость в данный момент времени, в данной точке турбулентного потока называется *местной мгновенной скоростью* u . Средняя по времени скорость в данной точке называется *местной осредненной скоростью* \bar{u} .

Осредненная скорость любой точки может быть определена как:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (11-14)$$

где T – отрезок времени, на котором проводится осреднение.

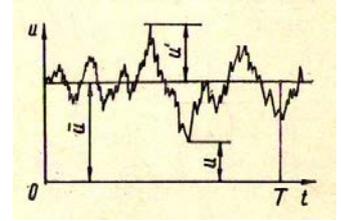


Рис. 4.2.

Величина осреднённой скорости \bar{u} представляет собой высоту прямоугольника шириной T , равновеликого фигуре ограниченной осями координат, ординатой T и кривой, характеризующей изменение мгновенной скорости u по времени.

Разность между мгновенной и осреднённой скоростью в точке называется *пульсационной скоростью или пульсацией*.

$$u' = u - \bar{u} \quad (11-15)$$

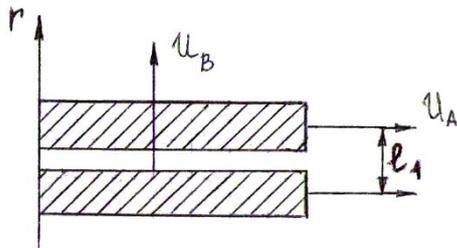


Рис. 4.3.

Выделив в жидкости два слоя A и B , которые имеют площадь взаимного сопротивления S и относительную скорость движения слоя A по слою B равную u_A .

В результате относительно движения слоя A со скоростью u_A по слою B между ними возникает напряжения трения равное:

$$\tau_1 = \mu \frac{du}{dn}$$

Как уже отмечалось, кроме перемещения жидкости в направлении общего движения потока жидкости происходит поперечное движение частиц жидкости от слоя B к слою A , т.е. обмен количеством движения между слоями, в результате чего возникает касательная сила.

Таким образом, суммарное напряжение трения в условиях турбулентного режима движения получаем выражение

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \mu \frac{du}{dn} + \rho \ell \left(\frac{du}{dn} \right)^2 \quad (11-16)$$

где ℓ по Прандтлю – длина пути перемешивания

$$\ell = \sqrt{k_1 k_2 \ell_1^2}$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности

Турбулентная вязкость в отличие от динамической учитывает не молекулярную структуру жидкости, а особенности турбулентного режима движения. Величина ее не является постоянной для всех точек потока и зависит от кинематических характеристик в этих точках и, следовательно, числа Рейнольдса Re . Пульсации скоростей возрастают с ростом Re , поэтому возрастает и турбулентная вязкость. При большой степени турбулентности турбулентная вязкость во много раз больше вязкости динамической, влиянием которой на касательные напряжения в этом случае можно пренебречь.

При меньшей степени турбулентности величина динамической вязкости μ соизмерима с турбулентной вязкостью и при определении касательных напряжений и, следовательно, потерь напора необходимо учитывать как вязкостные, так и инерционные силы.

4.4 Структура турбулентного потока в трубе

Экспериментальные исследования показывают, что турбулентный поток в трубе разделяется на 2 резко отличные по структуре области непосредственно у стенки образуется очень тонкая область число вязкого движения – так называемый *вязкий подслой*, остальная часть потока – *турбулентное ядро* – является областью мало или почти независимой от вязкости. Областью *турбулентного перемешивания* (рис. 11-4).

В пределах вязкого подслоя динамическая вязкость μ значительно больше турбулентной вязкости, и напряжения вязкостного трения значительно больше напряжений, возникающих под действием сил инерции.

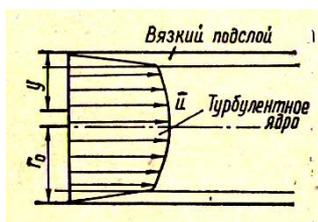


Рис. 11-4

Обратная картина наблюдается в турбулентном ядре, где касательные напряжения от турбулентного перемешивания во много раз больше напряжений вязкостного трения. Строго говоря, такое разделение потока на две области несколько условно и схематично. В действительности по мере удаления от стенок трубы влияние вязкости убывает

постепенно и между вязким подслоем и турбулентным ядром можно ещё различить переходную область, в которой величины динамической и турбулентной вязкости имеют одинаковый порядок. В то же время в гидродинамике ограничиваются схемой двух областей – вязкого подслоя и турбулентного ядра.

Глава V.

Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Гидравлический коэффициент трения λ . График Никурадзе. График Кольбрука-Мурина

5.1 Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Гидравлический коэффициент трения λ . График Никурадзе. График Кольбрука-Мурина

Ранее нами было введено понятие коэффициента гидравлического трения λ

$$h_e = \lambda \frac{\ell V^2}{d 2g}$$

В общем случае коэффициент λ зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости $\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{\Delta}{d}\right)$

Для решения многих практических задач влияние граничных условий можно оценивать, рассматривая только узкую пристеночную область – *вязкий слой*. Толщина вязкого слоя δ – это значение δ следует сравнивать с высотой выступов шероховатости Δ , т.к. фактическая высота всех выступов не является одинаковой, вводится понятие *эквивалентной шероховатости*, т.е. такой равномерной шероховатости, которая даёт при подсчёте одинаковую с заданной шероховатостью величину коэффициента гидравлического трения λ .

Если выступы шероховатости полностью покрыты вязким слоем, то такая поверхность называется *гидравлически гладкой* или просто *гладкой* (а),

если выступы шероховатости выходят за пределы вязкого слоя, то поверхность называется *гидравлически шероховатой* или просто *шероховатой*.

$$\delta = \frac{30d}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \quad (12-1)$$

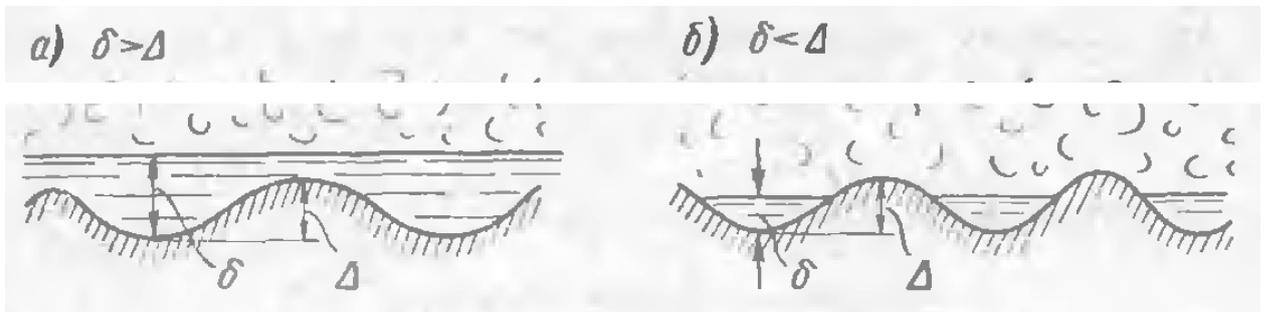


Рис. 5.1. *а* – гидравлически гладкие трубы, *б* – гидравлически шероховатые трубы.

Особыми исследованиями было установлено, что толщина вязкого потока уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Отсюда ясно, что понятие гладкой и шероховатой поверхности стенок является понятием относительным. Одна и та же стенка в одних условиях (при малых Re) может быть «гладкой», в других же условиях (при больших Re) может быть «шероховатой».

Одной наиболее известных работ в области изучения коэффициент гидравлического трения является исследования Никурадзе, он исследовал круглые цилиндрические трубы, где он создал искусственную шероховатость наклеивая на стенки трубы песчинки одинаковом расстоянии друг от друга.

Представим схему трубы с задвижкой k и двумя пьезометрами, при

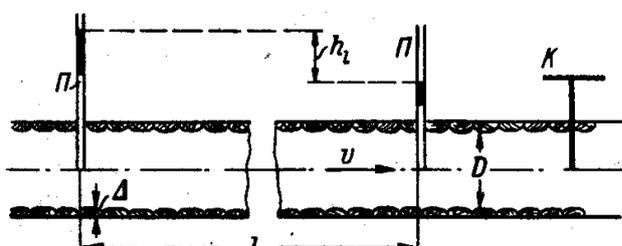


Рис. 5.2. Схема опытов Никурадзе.

помощи которых можно определить потерю напора h_l на участке длиной l .

Результаты опытов Никурадзе представил в виде особого графика с

осями $\lg 100\lambda$ и $\lg \text{Re}$. На этом графике был нанесён ряд кривых, каждая отвечала определенной так называемой *относительной шероховатостью*

$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}$. Этот график позволил в удобной форме обобщить вопрос о потерях

напора и наглядно показать, что:

1) что коэффициент λ в самом общем случае зависит от относительной шероховатости и числа Re;

2) имеются частные случаи движения, когда λ зависит или только от относительной шероховатости или только от числа Рейнольдса

Все поле графика можно разбить на 3 зоны:

1-я зона ламинарного движения

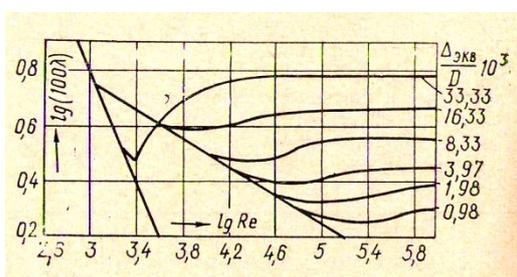


Рис. 5.3. График Никурадзе

$$\lambda = f(\text{Re})$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (12-2)$$

2-я зона переходная, она

характеризуется числами Рейнольдса и находится в пределах $\text{Re} = 2320 \div 3000$

$$\lambda = f(\text{Re})$$

3-я зона турбулентного режима движения. Она разбита на 3 области:

а) область гидравлически гладких труб

$$\lambda = f(\text{Re})$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}} \quad \text{— формула Блазиуса} \quad (12-3)$$

б) область доквадратичного сопротивления

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{\Delta}{d}\right)$$

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \frac{64}{\text{Re}} \right)^{0,25} \quad \text{— формула А. Д. Альтшуля} \quad (12-4)$$

в) область квадратичного сопротивления :

$$\lambda = f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$$

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} \quad \text{— формула Б. Л. Шифринсона} \quad (12-5)$$

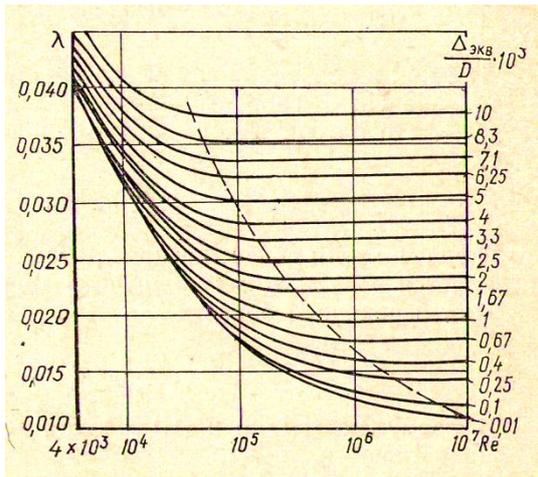


Рис. 5.4. График Кольбука-Мурина. от графика Никурадзе, что в переходной области значение λ получается больше, чем в квадратичной. Это положение необходимо учитывать при расчёте труб, работающих в переходной области.

5.2 Формулы скорости при равномерном движении. Формула Шези.

Потеря энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)

5.2.1 Формулы скорости при равномерном движении. Формула Шези

Из основного уравнения равномерного движения

$$i_p = \frac{\tau_0}{\rho g R}$$

Подставив в него значение касательных напряжений по формуле

$\tau_0 = \rho \frac{\lambda}{8} V^2$, можно получить расчётную формулу для скорости

$$V = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{Ri_p} \quad \text{или} \quad V = C \sqrt{Ri_p} \quad (12-6)$$

где $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ – скоростной множитель или коэффициент Шези.

В условиях, которых Шези проводил опыты, он не смог получить зависимость скоростного множителя C от каких либо параметров и считал его *const.* При более поздних исследованиях в основном для квадратичной об-

ласти сопротивления для коэффициента Шези C был предложен ряд эмпирических формул, из которых наиболее распространена формула Павловского:

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (12-7)$$

где n – коэффициент шероховатости, определяется по таблице, в зависимости от характеристики русла;

y – показатель степени;

$$y = -0,13 + 2,5\sqrt{n} - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R} \quad (12-8)$$

Обычно y бывает в пределах от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{7}$. Имеются частные случаи фор-

мулы Павловского: $y = \frac{1}{6}$ (формула Маннинга); $y = \frac{1}{5}$ (формула Форхгеймера).

С учётом зависимости (12-7), формулу (12-6) можно представить

$$V = W \sqrt{i_p} \quad (12-9)$$

где $W = C \sqrt{R}$ – скоростная характеристика, или скорости при пьезометрическом уклоне $=1$.

$$W = \frac{1}{n} R^Z \quad (12-9)$$

где $Z = y + 0,5$ – показатель степени, определяемый с учётом y по формуле (12-8).

Зависимость скоростей характеристик W от гидравлического радиуса R и

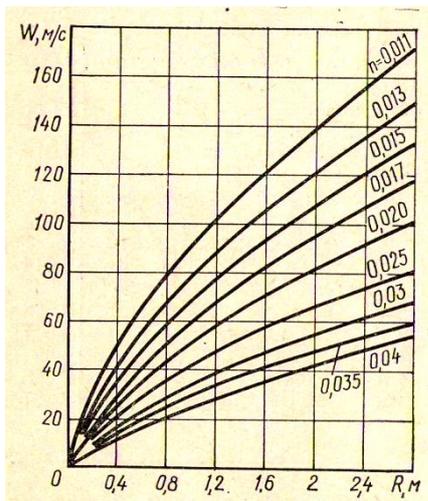


Рис. 5.5.

коэффициента шероховатости n приводятся на графике (рис. 12-5). Для практических расчётов в справочниках и пособиях приводятся специальные таблицы для определения W или C .

Кроме формулы Павловского имеются и другие предложения по определению скоростного множителя C или скоростной характеристики W . Некоторые из них будут рассмотрены при изучении равномерного движения воды в открытых руслах.

5.2.2 Потеря энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости(газа)

При установившемся движении сжимаемой жидкости (газа) в круглоцилиндрическом трубопроводе диаметром d потери энергии, представляемые как падение гидродинамического давления dp на участке длиной dx , вычисляются по формуле Вейсбаха—Дарси $h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{V^2}{2g}$:

$$dp = \lambda \frac{dx}{d} \frac{\rho V^2}{2} \quad (12-10)$$

Эту зависимость следует преобразовать, имея в виду, что закон сохранения массы для несжимаемой жидкости вдоль цилиндрической трубы имеет вид $V = const$, в то время как для сжимаемой жидкости он имеет вид $\rho V = const$. Из зависимости (12-10) видно, что вследствие увеличения скорости V вдоль трубы, обусловленного уменьшением давления из-за потерь энергии по длине, потери давления на единицу длины трубы $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ увеличиваются. Как правило, эту особенность расчета потерь по длине следует принимать во внимание при расчете магистральных газопроводов; если термоизоляция трубопровода отсутствует, то температуру газа T вдоль всей трубы можно считать постоянной и рассматривать изотермическое течение газа.

Введем в расчет связь между плотностью газа ρ и давлением p , согласно уравнению состояния газа:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (12-11)$$

здесь R — газовая постоянная.

Подставим (12-11) в (12-10) и представим последнее в виде

$$p dp = \lambda \frac{dx}{d} \frac{(\rho V)^2}{2} RT \quad (12-12)$$

Для простоты полагаем, что область сопротивления квадратичная и $\lambda = \lambda(\Delta_r)$. Проинтегрируем это уравнение по x от сечения 1 до сечения 2, удаленных на расстояние ℓ друг от друга:

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda \frac{\ell}{d} (\rho V)^2 RT \quad (12-13)$$

Полученное уравнение позволяет найти, например, давление в сечении 2, если известно давление в сечении 1:

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - \lambda \frac{\ell}{d} (\rho V)^2 RT} \quad (12-14)$$

Из полученного выражения, в частности, следует, что с увеличением температуры газа (одинаковой вдоль всей трубы) потери напора возрастают. Кроме того, использование формулы (12-14) целесообразно лишь при больших сравнительно с p_1 перепадах давления, в противном случае, когда

$$p_1 \gg \lambda \frac{\ell}{d} (\rho V)^2 RT \quad (12-15)$$

выражение (15-14) можно упростить, разложив бином в правой части в ряд:

$$p_2 = p_1 \left(1 - \lambda \frac{\ell}{d} \frac{(\rho V)^2}{p_1^2} RT \right)^{\frac{1}{2}} \approx p_1 \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \frac{\ell}{d} \frac{(\rho V)^2}{p_1^2} RT \right) = p_1 - \lambda \frac{\ell}{d} \frac{(\rho V)^2}{2 p_1} RT = p_1 - \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\rho V^2}{2}$$

Здесь использовано допущение о том, что

$$\frac{RT}{p_1} = \frac{1}{\rho_1} \approx \frac{1}{\rho}$$

Таким образом, при выполнении условия (12-15) можно пользоваться формулой Вейсбаха—Дарси без учета сжимаемости газа:

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{\rho V^2}{2} \quad (12-16)$$

5.3 Местные сопротивления и потери напора. Потери напора при внезапном расширении потока. Формула Борда. Формула Вейсбаха для определения местных потерь напора

5.3.1 Местные сопротивления и потери напора

Местные сопротивления в трубопроводах и каналах обуславливаются различными факторами. К ним можно отнести резкое изменение конфигурации живого сечения потока, течение с изменением скорости, поперечную циркуляцию на изгибе потока, соединение и разделение потоков.

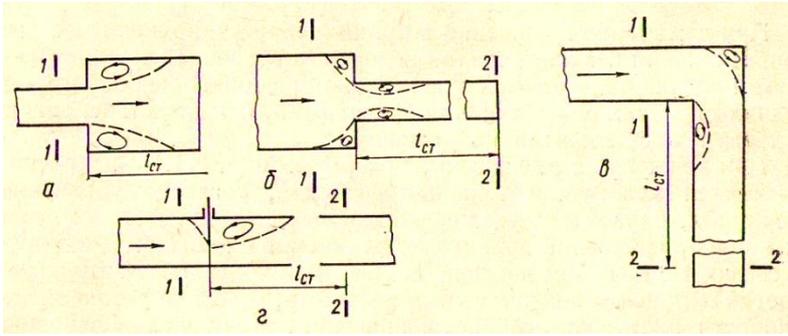


Рис. 5.6.

При резком изменении конфигурации живого сечения или резком изгибе поток обтекает углы,

образованные изменением направления стенок русла. При обтекании углов или элементов арматуры за ними возникают водоворотные области (рис. 13.1, а, б, в, г), на поддержание течений, в которых расходуется напор (энергия). Между транзитным потоком и водоворотными зонами возникают поверхности раздела, которые отделяют между собой течения с разными скоростями и являются одним из признаков местных сопротивлений. На поверхностях раздела образуются отдельные вихри, которые непрерывно перемещаются. При этом одни массы жидкости в водоворотных зонах заменяются другими, но в целом это явление является установившемся. Такие течения в этих зонах называются отрывными.

При отрывных течениях возникают крупномасштабные пульсации, постепенно переходящие в пульсации более мелкого масштаба, которые вызывают диссипацию (потерю) энергии с выделением тепла.

При ламинарном движении струйки жидкости обтекают местные сопротивления без образования водоворотных зон. Потери энергии в этом случае объясняются значительной разницей скоростей в соседних струйках при обтекании преграды и как следствие, значительными касательными напряжениями.

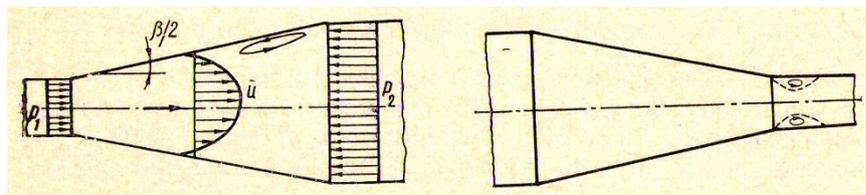


Рис. 5.7.

Рис. 5.8.

При движении с уменьшением скорости (рис. 13-2) на расширяющихся участках потока (диффузорах), согласно уравнению Бернулли, происходит увеличение давления. Таким образом движение на расширении происходит от сечения с меньшим давлением к сечению с большим давлением. Это противодавление затрудняет поступательное движение частиц жидкости, особенно у стенок, где скорости их имеют небольшие значения. Во избежание больших потерь напора рекомендуется выполнить расширение трубы с углом $\beta < 8^\circ$.

При движении на сужающихся участках (конфузорах) разность давлений не препятствует, а способствует движению.

Потери напора на конфузорах меньше потерь напора на диффузорах, в этом случае они являются следствием переформирования скоростной структуры потока при сужении, а также обтекания угла при выходе из конфузора (рис. 13-3).

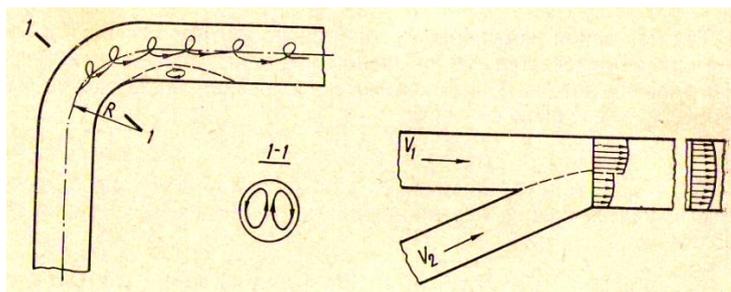


Рис. 5.9.

Рис. 5.10.

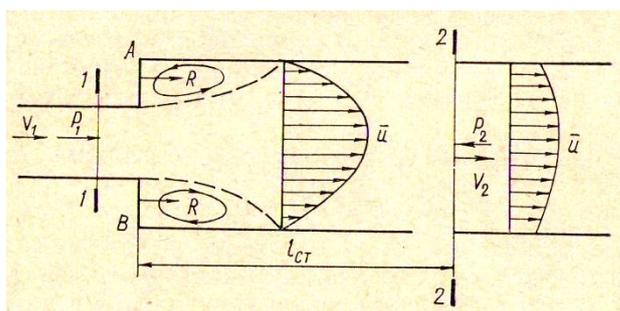
При плавном повороте трубы или канала возникают центробежные силы, которые увеличивают давление у вогнутой стенки и уменьшают у выпуклой. В результате создаются условия для движения частиц жидкости в поперечном направлении от области большего давления к области меньшего давления. Такое явление называется поперечной циркуляцией (в круглых трубах оно имеет вид, показанный на рис. 13-4). После поворота возникает вращательно-поступательное движение, которое затухает на некотором расстоянии. При соединении двух потоков (рис. 13-5) поверхность раздела возникает из-за разных скоростей частиц жидкости по обе стороны от нее.

Потери энергии обуславливаются ее затратами на переформирование кинематической структуры потока.

5.3.2 Потери напора при внезапном расширении потока

Формула Борда

В случае потерь напора на внезапное расширение потери напора для квадратичной области сопротивлений с достаточной степенью точности могут быть определены теоретическим



путем. Применим закон изменения количества движения для отсека жидкости на участке внезапного

расширения потока между сече-

ниями 1-1 и 2-2 (рис 13-6). При применении этого закона учитываются только внешние силы, приложенные к этому отсеку.

Изменение количества движения должно равняться сумме импульсов действующих внешних сил.

Изменение количества движения между сечениями 1-1 и 2-2

$$\Delta KД = \rho \alpha_0 V_2^2 \omega_2 - \rho \alpha_0 V_1^2 \omega_1 \quad (13-1)$$

На рассматриваемый отсек жидкости действуют следующие силы: сила тяжести, силы трения на стенках трубы, силы давления в сечениях 1-1 и 2-2 и силы реакции стенки АВ в месте расширения. Ввиду того, что мы рассматриваем горизонтальной трубопровод, проекция силы тяжести на ось трубы будет равна нулю. Из-за небольшого расстояния между сечением 1-1 и 2-2 можно пренебречь так же силами трения на стенках. Силы давления в сечениях 1-1 и 2-2

$$P_1 = p_1 \omega_1 \quad \text{и} \quad P_2 = p_2 \omega_2 \quad (13-2)$$

Давление на стенки АВ может быть принято таким же, как и в сечении 1-1. Такое допущение основывается на том, что в сечении, где труба расширя-

ется, поток еще не успел расширяться, поэтому скорость и, следовательно, давление в этом сечении могут быть приняты такими же, как и в сечении до расширения. С учетом этого реакции стенок АВ

$$R = p_1(\omega_2 - \omega_1) \quad (13-3)$$

В результате уравнение изменения количества движения может быть представлено в виде:

$$\rho\alpha_0 V_2^2 \omega_2 - \rho\alpha_0 V_1^2 \omega_1 = p_1 \omega_1 + p_1(\omega_2 - \omega_1) - p_2 \omega_2$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены, а, затем разделив на $\rho g \omega_2$, получим: $\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\alpha_0 V_2^2}{g} - \frac{\alpha_0 V_1^2}{g} \frac{\omega_1}{\omega_2}$,

или с учетом уравнения неразрывности:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\alpha_0 V_2^2}{g} - \frac{\alpha_0 V_1 V_2}{g}, \quad (13-4)$$

Применением теперь к потоку между сечениями 1-1 и 2-2 уравнение Бернулли

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_{e.p.}$$

$$h_{e.p.} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} - \frac{\alpha V_2^2}{2g} \quad (13-5)$$

или с учетом (13-4) и принимая $\alpha_0 \approx \alpha$,

$$h_{e.p.} = \frac{\alpha V_2^2}{g} - \frac{\alpha V_1 V_2}{g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} - \frac{\alpha V_2^2}{2g} = \frac{\alpha(V_1^2 - 2V_1 V_2 + V_2^2)}{2g}$$

окончательно

$$h_{e.p.} = \frac{\alpha(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad (13-6)$$

Эта формула называется формулой Борда, по которой потери напора на внезапное расширение равны скоростному напору от потерянной $(V_1 - V_2)$ скорости.

5.3.3 Формула Вейсбаха для определения местных потерь напора

В 1840 г. Ю.Вейсбах предложил определять местную потерю напора в любом случае по формуле

$$h_M = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (13-7)$$

где ξ - коэффициент местных сопротивлений, определяемый как правило, опытным путем.

Скоростной напор, если нет оговорки, вычисляется обычно по скорости за сопротивлением.

При измерении за величину местных потерь напора h_M следует принимать разность гидродинамических напоров до и после сопротивления. Для горизонтального трубопровода:

$$h_M = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} + \alpha \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \quad (13-8)$$

В случае, если диаметр трубы до и после сопротивления одинаков,

$$h_M = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} \quad (13-9)$$

Каждое местное сопротивление деформирует поток, увеличивает пульсацию и приводит к перераспределению осредненных скоростей по сечению. Обычно а непосредственно за сопротивлением больше, чем при равномерном движении. По мере удаления от сопротивления дополнительных пульсации затухают, распределение скоростей и коэффициент α стабилизируются, т.е. становятся такими же, как и при равномерном движении на расстоянии $(40 \div 60) d$. В связи с разностью коэффициентов кинетической энергии в конце и начале участка стабилизации потери напора на этом участке возникают больше чем при равномерном движении и их следует включать в величину местных потерь. Поэтому сечение со II пьезометром следует брать в конце участка стабилизации.

Рассмотрим некоторые значения коэффициентов местных сопротивлений.

Сравнивая зависимость (13-6) и (13-7) получим коэффициент сопротивления при внезапном расширении

$$\xi_{\text{в.р.}} = \alpha_1 \frac{(V_1 - V_2)^2 2g}{2gV_2^2} = \alpha_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \quad (13-10)$$

Коэффициент сопротивления при внезапном сужении $\xi_{\text{в.р.}}$ может быть определен по приближенной формуле И. Идельчика:

$$\xi_{\text{в.р.}} = 0,5 \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right) \quad (13-11)$$

Глава VI

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

Простой трубопровод. Короткие трубы: сифон, всасывающая труба насоса. Вытяжная дымовая труба.

6.1 Простой трубопровод постоянного диаметра

Простым трубопроводом называется трубопровод, не имеющий боковых ответвлений.

1. Случай истечения жидкости под уровень. Рассматриваем установившееся движение: скорость \mathcal{Q} в трубопроводе не изменяется по времени; разность Z уровней в сосудах A и B , соединяемых трубопроводом, постоянна (считаем, что в сосуд A жидкость всё время каким – либо образом доливается, а из сосуда B - удаляется).

Найдём величину расхода Q для трубопровода. С этой целью используем уравнение Бернулли, следуя той схеме, которая пояснялась ранее:

1) Намечаем живые сечения 1 - 1 и 2 - 2: для этих сечений известно давление ($p = p_a$) и, кроме того, известны скорости ($\mathcal{Q}_A \approx \mathcal{Q}_B \approx 0$);

2) Намечаем плоскость сравнения OO ; эту плоскость удобно провести по сечению 2 – 2; при этом z_2 обратится в нуль;

3) Пишем уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha \mathcal{G}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha \mathcal{G}_2^2}{2g} + h_f; \quad (14-1)$$

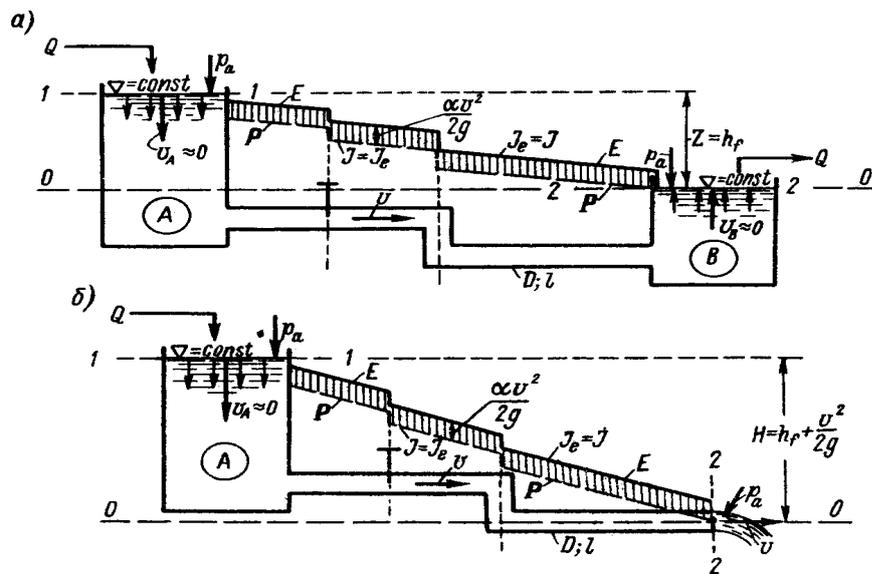


Рис. 6.1. Короткий трубопровод: *а* - истечение под уровень; *б* - истечение в атмосферу.

4) Выясняем значения отдельных членов, входящих в это уравнение:

$$z_1 = Z; \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_A = 0; \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_B = 0; p_1 = p_2 = p_a; z_2 = 0; \alpha \approx 1,0 \quad (14-2),$$

где Z - разность уровней жидкости в сосудах A и B ;

5) Подставляем (14-2) в (14-1); при этом получаем

$$Z = h_f. \quad (14-3).$$

Как видно, при истечении под уровень разность уровней Z целиком расходуется (тратится) на потери напора в трубе.

Выразим теперь потерю напора h_f через скорость \mathcal{G} в трубе:

$$h_f = \zeta_f \frac{\mathcal{G}^2}{2g}, \quad (14-4),$$

где ζ_f - полный коэффициент сопротивления для трубы.

Подставляя (14-4) в (14-3), имеем

$$Z = \zeta_f \frac{g^2}{2g} \quad (14-5)$$

и, следовательно,

$$g = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} \sqrt{2gZ} \quad (14-6),$$

откуда

$$Q = \omega g = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} \sqrt{2gZ} \quad (14-7).$$

2. Случай истечения в атмосферу. Здесь также рассматриваем установившееся движение: $g = const; H = const$, где H - превышение уровня жидкости в сосуде A над центром выходного сечения.

Используя уравнение Бернулли, сечения 1 – 1, 2 – 2 и плоскость сравнения OO намечаем, как показано на чертеже. Имеем

$$z_1 = H; g_1 = g_A = 0; g_2 = g; p_1 = p_2 = p_a; \alpha = 1, 0. \quad (14-4).$$

Подставляя эти величины в уравнение Бернулли (14-1), получаем

$$H = h_f + \frac{g^2}{2g} \quad (14-5),$$

где g - скорость в трубе, в частности в сечении 2 – 2.

Из рассмотрения (14-5) можно дать следующее правило: *при истечении в атмосферу напор H тратится (расходуется) на потери напора в трубе и на образование скоростного напора в выходном живом сечении.*

Выражая по-прежнему h_f формулой (14-4) и подставляя эту зависимость в (14-5), имеем

$$H = \zeta_f \frac{g^2}{2g} + \frac{g^2}{2g} \quad (14-6),$$

откуда

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} \sqrt{2gH} \quad (14-7)$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} \sqrt{2gH} \quad (14-8).$$

3. Окончательные расчётные зависимости. Формулы (14-5) и (14-8) можно соответственно представить в виде следующих расчётных зависимостей:

$$Q = \mu_T \omega \sqrt{2gZ}; \quad (14-9')$$

$$Q = \mu_T \omega \sqrt{2gH}, \quad (14-9''),$$

где μ_T равно:

а) при истечении под уровень

$$\mu_T = \frac{1}{\sqrt{\zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_l + \sum \zeta_j}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda l}{D} + \sum \zeta_j}}; \quad (14-10)$$

б) при истечении в атмосферу

$$\mu_T = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_f}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda l}{D} + \sum \zeta_j}} \quad (14-11).$$

Коэффициент μ_T называется коэффициентом расхода трубопровода.

Формулами (14-9') и (14-9'') следует всегда пользоваться при расчёте коротких простых трубопроводов постоянного диаметра. По этим формулам можно решать следующие практические задачи:

- 1) Даны D и Z , требуется найти Q ; 2) даны D и Q требуется найти Z ;
- 3) даны Q и Z , требуется найти D . Последнюю задачу приходится решать подбором.

В отношении формулы (14-10) надо сделать следующее замечание.

При выводе её мы располагали сечение 2 – 2 по уровню воды в сосуде B . При этом, составляя уравнение Бернулли (14-1), считали, что в полную потерю напора h_l входят не только потери напора в самой трубе, но и потери напора на выход из трубы, т.е. та потеря, которая имеет место за трубой – в пределах сосуда B . Поэтому перепад Z при истечении под уровень, строго говоря, равен не потерям напора в трубе, сумме потерь напора в трубе и в сосуде B . Если бы при выводе формулы (14-10) сечение 2 – 2 намечалось на по уровню воды в сосуде B , а в конце самой трубы, то при этом для коэффициента расхода μ_T при истечении под уровень мы получили бы формулу того же вида, что и при истечении в атмосферу. Только в этой формуле под величиной ζ_f следовало бы понимать полный коэффициент сопротивления,

подсчитанный без учёта потерь напора на выход. Таким образом, при расчёте истечения под уровень можно пользоваться двумя разными способами, дающими один и тот же конечный результат.

1-й способ: коэффициент μ_r определяется по формуле (14-10); при этом под ζ_f понимаем полный коэффициент сопротивления, включающий коэффициент $\zeta_{\text{вых}} = 1,0$.

2-й способ: коэффициент μ_r определяется, как и в случае истечения в атмосферу, по формуле (14-11); при этом под ζ_f понимаем полный коэффициент сопротивления, подсчитанный без учёта величины $\zeta_{\text{вых}} = 1,0$.

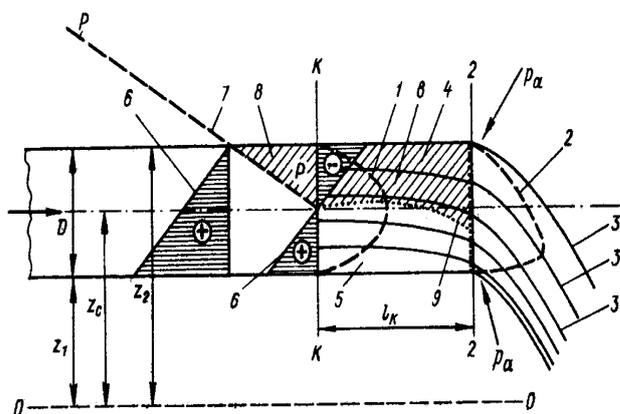
Дополнительно надо обратить внимание ещё на следующие два обстоятельства.

1) При рассмотрении коротких трубопроводов длина начального участка трубы может быть соизмерима с длиной всей трубы. При таком положении пояснённый выше расчёт короткого трубопровода оказывается несколько условным, поскольку формулы равномерного движения, которыми мы пользовались выше, строго говоря, не являются справедливыми для начального участка, где имеет место особый закон распределения скоростей по живым сечениям.

2) Выше было показано, что уравнение Бернулли применимо только к тем сечениям трубопровода, для которых $z + \frac{\rho}{\gamma} = \text{const}$, т.е. к сечениям, в пределах которых имеет место плавно изменяющееся движение.

Рассматривая сечение 2 – 2 на рисунке (14-1 б), видим, что для этого сечения $z + \frac{\rho}{\gamma} \neq \text{const}$, поскольку как в верхней точке этого сечения, так и в нижней его точке давление равно ρ_a . Отсюда заключаем, что в данном сечении мы имеем резко изменяющееся движение, к которому уравнение Бернулли, строго говоря, неприменимо.

Более подробное рассмотрение вопроса об истечении жидкости из трубопровода в атмосферу приводит к следующим выводам:



1 - эпюра скоростей симметричная; 2 - то же, асимметричная; 3 - линия тока; 4 - элементарная струйка, верхняя расширяющаяся; 5 - то же, нижняя сужающаяся; 6 - эпюра давлений; 7 - пьезометрическая линия; 8 - область вакуума (покрыта наклонной штриховкой); 9 - приближенное положение линии атмосферного давления.

Рис. 6.2. Концевой участок трубы (при истечении в атмосферу).

а) эпюра скоростей u в пределах концевой участка трубы деформируется и приобретает в сечении 2 – 2 несимметричный вид 2, как то показано на рисунке.

б) В связи с этим линии тока 3 в пределах концевой участка должны искривляться, причём верхняя элементарная струйка 4 должна расширяться, а нижняя элементарная струйка 5 – сужаться. Напомним, что вдоль элементарной струйки расход $\delta Q = const$; поэтому при изменении скорости вдоль струйки площадь её живого сечения также должна изменяться.

в) Рассматривая самую верхнюю расширяющуюся струйку 4, в конце которой давление атмосферное, видим, что в некотором сечении $K - K$ этой струйки мы должны получить вакуум; для нижней же сужающейся струйки 5 будем иметь обратную картину.

г) В некотором предконцевом сечении $K - K$, удалённом от сечения 2 – 2 на расстояние l_k давление распределяется по гидростатическому закону. Как видно, для сечения $K - K$ имеем

$$z + \frac{\rho}{\gamma} = z_c = const,$$

где z_c - возвышение оси трубы над плоскостью сравнения OO .

д) Вопрос о длине l_k концевой участка недостаточно исследован. Иногда длину l_k считают равной например, например, $1,5D$; однако такая рекомендация недостаточно проверена опытом. Вместе с тем ясно, что при относительно малом диаметре трубы длиной концевой участка можно пренебречь и условно считать, что предконцевое сечение $K - K$ совпадает с выходным сечением 2 - 2. Разумеется, в случае коротких труб большого диаметра вопрос о длине концевой участка, так же как и о длине начального участка, может быть достаточно точно решён только на основании опытов.

На рисунке 14-1 а, б в соответствии с указаниями, приведёнными выше, построены линии $E - E$ и $P - P$. Подчеркнём, что строго говоря, эти линии в пределах участков, где возникают местные потери напора, являются кривыми. Однако в практике такого рода действительные кривые линии $E - E$ и $P - P$ аппроксимируют прямолинейными ломаными линиями, образованными отрезками: а) прямыми наклонными и б) прямыми вертикальными, расположенными в тех местах, где возникают местные потери. При указанной аппроксимации, например линии $E - E$, вертикальные ступени этой линии выражают величину местных потерь напора.

6.2 Короткие трубопроводы – сифон, всасывающая труба насоса

1. Сифон. Сифоном называется самотечная труба, часть которой расположена выше горизонта жидкости в сосуде, который её питает.

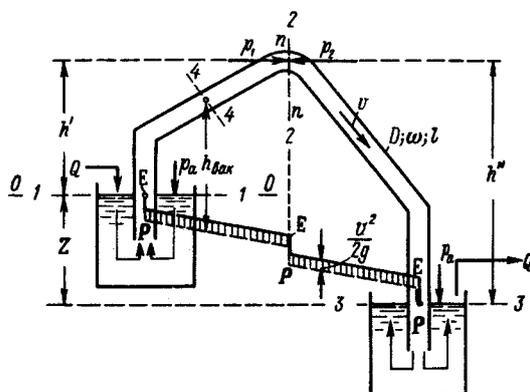


Рис. 6.2. Сифон.

Ограничимся рассмотрением истечения жидкости из сифона под уровень. Если трубу, представленную на чертеже, каким – либо образом заполнить жидкостью, то после этого начнётся движение жидкости из верхнего сосуда в нижний. В том, что жидкость в такой трубе будет двигаться, можно убедиться из следующего. Наметим сечение трубы $n - n$ и обозначим превышение его над горизонтом

жидкости: в левом сосуде – через h' и в правом сосуде – через h'' . Если предположить, что жидкость, заполняющая сифон, находится в покое, то можем написать:

а) давление в сечении $n-n$ с левой стороны

$$p_1 = p_a + (-h'\gamma);$$

б) давление в сечении $n-n$ с правой стороны

$$p_2 = p_a + (-h''\gamma),$$

где $(-h')$ и $(-h'')$ - соответствующие заглубления сечения $n-n$ под горизонтом жидкости в сосудах (эти заглубления отрицательны).

Как видно, $p_1 > p_2$; отсюда понятно, что жидкость в трубе не может находиться в покое: она будет двигаться слева направо, т.е. в сторону меньшего давления.

Рассмотрим установившееся движение жидкости в сифоне ($Z = const$). Наметим два сечения: 1 – 1 и 3 – 3. Соединяя эти сечения уравнением Бернулли получим формулу для расхода Q в трубе в виде зависимости (14-9') и (14-10). Характерным для сифона является то, что в нём имеет место вакуум. Наибольшая величина вакуума будет в сечении, наиболее высоко расположенном, т.е. в сечении $n-n$.

Найдём максимальную величину вакуума $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ в сифоне. С этой целью наметим по линии $n-n$, где ищем вакуум, сечение 2 – 2 и затем соединим сечения 1 – 1 и 2 – 2 уравнением Бернулли (плоскость сравнения проведём на уровне горизонта жидкости в левом сосуде):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha \mathcal{G}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha \mathcal{G}_2^2}{2g} + h'_f \quad (14-13),$$

где

$$z_1 = 0; z_2 = h'; \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}; \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_n}{\gamma};$$

$$\frac{\alpha \mathcal{G}_1^2}{2g} \approx 0; \frac{\alpha \mathcal{G}_2^2}{2g} \approx \frac{\mathcal{G}^2}{2g}; \quad (14-14)$$

здесь \mathcal{G} - скорость в тромбе; p_n - давление в сечении $n-n$.

Потери напора h'_f на пути от сечения 1 – 1 до сечения 2 – 2 выражаем обычной зависимостью:

$$h'_f = \zeta'_f \frac{g^2}{2g} \quad (14-15),$$

где ζ'_f - полный коэффициент сопротивления, учитывающий потерю напора не во всей трубе, а только от сечения 1 – 1 до сечения 2 – 2.

Подставляя (14-14) и (14-15) в (14-13), получаем:

$$\frac{p_a}{\gamma} = h' + \frac{p_n}{\gamma} + \frac{g^2}{2g} + \zeta'_f \frac{g^2}{2g} \quad (14-16)$$

или

$$\frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_n}{\gamma} = h' + (1 + \zeta'_f) \frac{g^2}{2g}; \quad (14-17),$$

так как

$$\frac{p_a}{\gamma} - \frac{p_n}{\gamma} = (h_{\text{вак}})_{\text{макс}} \quad (14-18),$$

то

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} = h' + (1 + \zeta'_f) \frac{g^2}{2g} \quad (14-19).$$

Пользуясь формулой (14-19), можно определить вакуум в любом сечении трубы, например в сечении 4 – 4. при этом в формуле (14-19) под величиной h' следует понимать только превышение сечения 4 – 4 над горизонтом жидкости в левом сосуде, а под величиной ζ'_f - полный коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора от сечения 1 – 1 до сечения 4 – 4.

Из формулы (14-19) видно, что $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ зависит от h' ; если h' будет велико, то и $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ будет велико. При больших $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ струя в сифоне может разорваться, и сифон перестанет работать. Считают, что для нормальной работы сифона величина $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$, вычисленная по формуле (14-19), должна быть такой, при которой удовлетворяется условие

$$(h_{\text{вак}})_{\text{макс}} \leq (h_{\text{вак}})_{\text{дон}},$$

где $(h_{\text{вак}})_{\text{дон}}$ - вакуум, допустимый по условиям невозможности образования разрыва турбулентной струи (характеризуемой пульсацией давления).

Величину $(h_{\text{вак}})_{\text{дон}}$ для воды (при нормальном атмосферном давлении) можно принять равной, например,

$$(h_{\text{вак}})_{\text{дон}} = 6 \div 7 \text{ М вод. ст.}$$

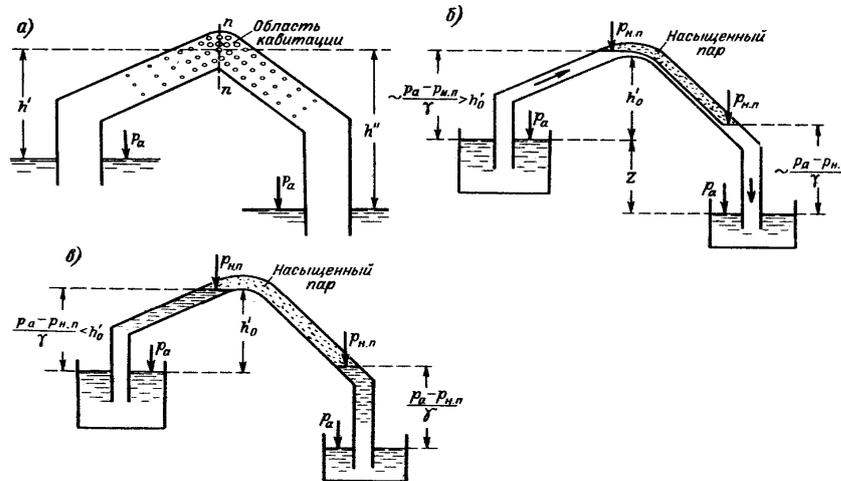


Рис. 6.3. Схема работы сифона при возникновении разрыва струи.

Анализируя вопрос о разрыве струи в сифоне, надо учитывать следующие обстоятельства.

1. В сифоне из жидкости должен выделяться растворённый воздух. Этот воздух должен скопиться в виде воздушного «мешка» в верхней точке сечения $n - n$. Выпуск его через какой-либо клапан невозможен: при открытии отверстия в районе сечения $n - n$ атмосферный воздух будет поступать в трубу, увеличивая воздушный «мешок». Этот «мешок» может быть удалён из сифона только при помощи особого насоса.

2. В формулу (14-19) входит средняя скорость \mathcal{Q} , найденная исходя из осреднённых во времени скоростей u . Поэтому $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$, установленный по указанной формуле, является осреднённым вакуумом. Мгновенный вакуум в какой-либо точке потока равен осреднённому вакууму, увеличенному на так называемый пульсационный вакуум. Из сказанного ясно, что мгновенные вакуумы в отдельных точках потока могут значительно превосходить величину, $(h_{\text{вак}})_{\text{макс}}$ вычисленную по формуле (14-19). Таким образом, можно

утверждать, что кавитация потока должна начаться ранее, чем осреднённое давление p_n , вычисленное по формуле (14-17), достигнет величины $p_{н.л.}$.

3. При достаточно большом h' движение жидкости в сифоне следует представлять себе по схеме на рисунке 14-4 (а): наибольший объём кавитационных паровоздушных областей имеет место в сечении $n-n$. По мере движения жидкости от сечения $n-n$ к выходу эти кавитационные области, увлекаемые потоком, закрываются и постепенно исчезают.

4. Увеличивая размер h' , можно получить условия, когда объём паровоздушной области увеличивается настолько, что мы получим картину, приближающуюся к схеме на рисунке 14-4 (б). Очевидно, здесь рассматриваемая труба уже не работает как сифон, причём расход Q в этом случае вообще не зависит от разностей Z уровней жидкости в сосудах.

При дальнейшем увеличении h' произойдёт полный разрыв струи, как показано на рисунке 14-4 (в).

5. Сечение $n-n$, где определяется максимальный вакуум, намечено на повороте. Условия движения жидкости на повороте носят особый характер; здесь возникают центробежные силы, которые способствуют: увеличению давления в верхней точке и уменьшению давления в нижней точке трубы. Благодаря этому вакуум в нижней точке может оказаться больше, чем в верхней точке трубы. Всех этих обстоятельств, связанных с поворотом трубы, формула (14-19) не учитывает. В заключении отметим, что напорная линия $E-E$ и пьезометрическая линия $P-P$ в случае сифона выглядят, как показано на рисунке 14-3: например, первая «ступенька» линии $E-E$ выражает потерю напора на выход в трубу, потерю по длине до первого поворота трубы и потерю напора в этом повороте. Полная потеря напора в сифоне равна Z . Линия $P-P$ лежит ниже линии $E-E$ на величину $\frac{g^2}{2g}$.

Превышение верха трубы над линией $P-P$, измеренное в любом вертикальном сечении выражает наибольший вакуум в соответствующем сечении трубы.

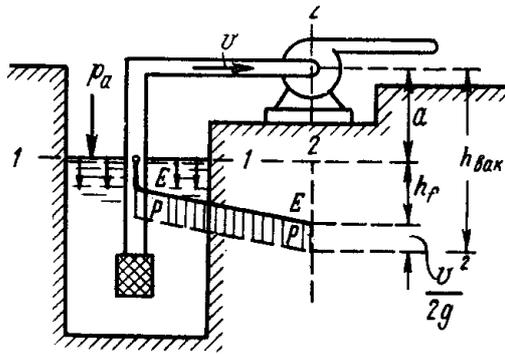


Рис. 6.4. всасывающая труба насоса (потери напора во всасывающем клапане занижены – показаны не в масштабе).

2. Всасывающая труба насоса.

«Всасывающей трубой» насоса называют трубу, по которой насос засасывает жидкость из бассейна. Эта труба обычно также как и сифон, характеризуется наличием вакуума. Наибольшая величина вакуума будет непосредственно у насоса, перед его рабочим колесом. Такой вакуум можно найти, соединяя уравнением Бернулли сечение 1 – 1, намеченное по поверхности жидкости в бассейне,

и сечение 2 – 2. Его можно также определить по формуле (14-19), подставив эту формулу вместо h' величину a , означавшую превышение оси насоса над горизонтом жидкости в бассейне, и вместо ζ'_f величину ζ_f , т.е. полный коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора во всей трубе. При этом получаем:

$$(h_{\text{вак}})_{\text{нас}} = a + (1 + \zeta_f) \frac{v^2}{2g} \quad (14-20),$$

где $(h_{\text{вак}})_{\text{нас}}$ - вакуум перед рабочим колесом насоса.

Если $(h_{\text{вак}})_{\text{нас}}$ оказывается большим, то при этом возникает кавитация, которая обуславливает снижение коэффициента полезного действия насоса, а также эрозию лопастей насоса. Различные типы насосов допускают различную величину вакуума. Обычно вакуум перед рабочим колесом насоса должен удовлетворять условию:

$$(h_{\text{вак}})_{\text{нас}} \leq 4,0 \div 6,5 \text{ м вод.ст.}$$

Величина допустимого вакуума зависит не только от типа насоса, но и от температуры и рода жидкости. С увеличением температуры жидкости величина допустимого вакуума снижается. Например, при температуре воды, равной 60°C , допустимый вакуум приобретает уже отрицательное значение.

Зная допустимый вакуум для данного насоса и данной жидкости $(h_{\text{вак}})_{\text{дон}}$, можно по формуле (14-20) найти предельное максимальное возвышение насоса над горизонтом жидкости в бассейне:

$$a_{\text{дон}} = (h_{\text{вак}})_{\text{дон}} - (1 + \zeta_f) \frac{g^2}{2g} \quad (14-21).$$

Для горячей воды $a_{\text{дон}}$ может быть отрицательным; в этом случае насос приходится располагать ниже горизонта воды в колодце.

6.3 Вытяжная дымовая труба

Функцией вытяжной трубы является создание потока воздуха из здания через печь, топку котла и т.п. в атмосферу (рис. 14.6,а). Устойчивый поток воздуха в такой трубе возникает под действием двух естественных побудительных факторов:

– при обдувании ветром оголовка трубы в выходном сечении возникает локальное понижение давления, при этом давление внутри здания может оказаться достаточным для создания потока воздуха из здания в атмосферу в условиях изотермического процесса, т.е. когда печь не топится;

– если печь топится и труба заполнена воздухом (дымом), температура которого выше, чем в атмосфере (а плотность, соответственно, меньше), то под действием силы тяжести более легкий теплый воздух (дым) "вытесняется" вверх, согласно закону Архимеда.

Рассмотрим раздельное и совместное действия этих факторов.

1. Оголовок вытяжной трубы может представлять собой просто окончание цилиндрической трубы (рис 14.6,б), может быть оборудован защитным колпаком, предупреждающим попадание в трубу атмосферных осадков (рис. 14.6,в), или оснащен устройством, улучшающим его аэродинамическое качество (дефлектором). Конструкции этих устройств должны быть осесиммет-

ричны, чтобы обеспечить одинаковые условия обтекания при любом направлении ветра.

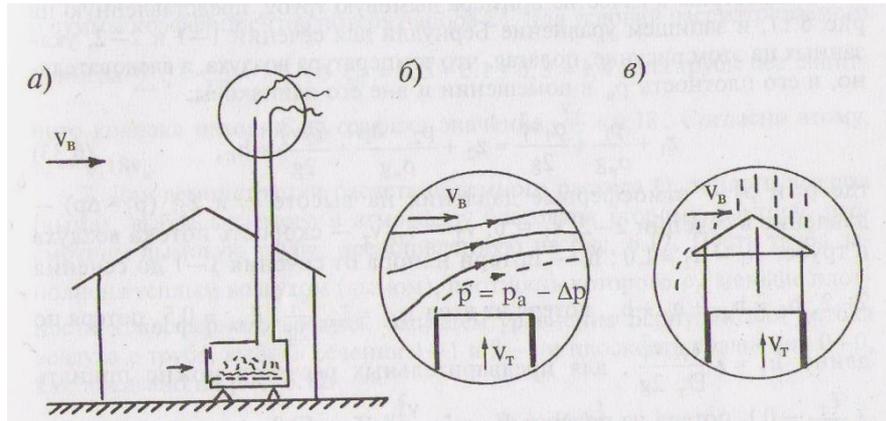


Рис.6.6. Дымовая труба: а – общая схема; б – обтекание выходного сечения; в – дефлектор.

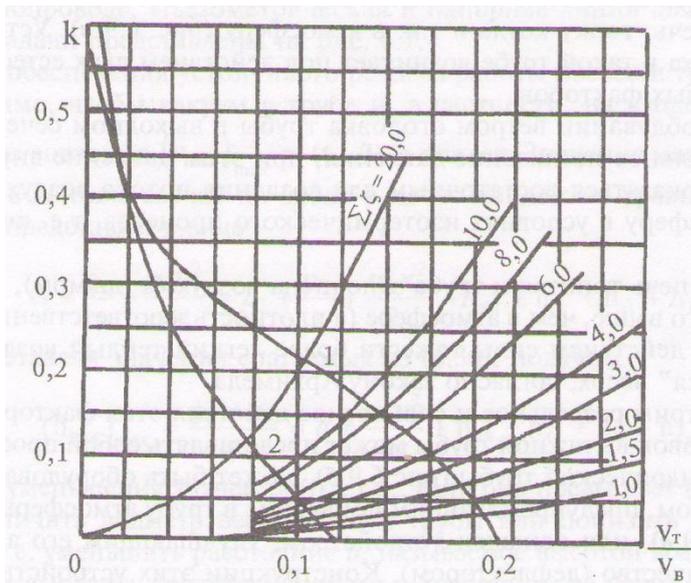


Рис. 14.7. Зависимость $k = k(v_T/v_B)$ для цилиндрической трубы (1), для трубы с оголовком, снабженным колпаком (2)

Локальное понижение давления Δp относительно атмосферного давления p_a в окрестности выходного сечения трубы оценим зависимостью

$$\Delta p = k \rho_v \frac{v_B^2}{2} \quad (14-22)$$

где v_B – скорость ветра на уровне оголовка трубы; k – коэффициент, значения которого зависят от конструкции оголовка;

ρ_v — плотность воздуха. На рис. 14.7 представлена экспериментальная зависимость коэффициента $k = k(v_T/v_B)$ для цилиндрической трубы и для трубы с оголовком, снабженным колпаком; $\sum \zeta$ — сумма коэффициентов потерь напора в системе печь—труба—оголовок.

Рассмотрим в качестве примера дымовую трубу, представленную на рис. 14.8, и запишем уравнение Бернулли для сечений 1–1 и 2–2, указанных на

этом рисунке, полагая, что температура воздуха, а следовательно, и его плотность ρ_B в помещении и вне его одинаковы:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_B g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2 - \Delta p}{\rho_B g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \quad (14-23)$$

где p_1 и p_2 — атмосферные давления на высоте z_1 и z_2 ; $(p_2 - \Delta p)$ — давление в сечении 2—2; $v_1 = 0$, $v_2 = v_T$, v_T — скорость потока воздуха в трубе; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$; h_f — потери напора от сечения 1 — 1 до сечения 2-2, $h_f = h_{вх} + h_l + h_{п}$,

потеря на вход $h_f = \zeta_{вх} \frac{v_T^2}{2g}$, $\zeta_{вх} = 0,5$, потеря по длине $h_l = \lambda \frac{l_T}{D_T} \frac{v_T^2}{2g}$, для

предварительных расчетов можно принять $\lambda \frac{l_T}{D_T} = 0,1$, потеря на поворот

$h_{п} = \zeta_{п} \frac{v_T^2}{2g}$, $\zeta_{п} = 0,8$, l_T — длина трубы, D_T — ее диаметр.

Полагая, что распределение давления в атмосфере и внутри здания (вне трубы) гидростатическое, имеем

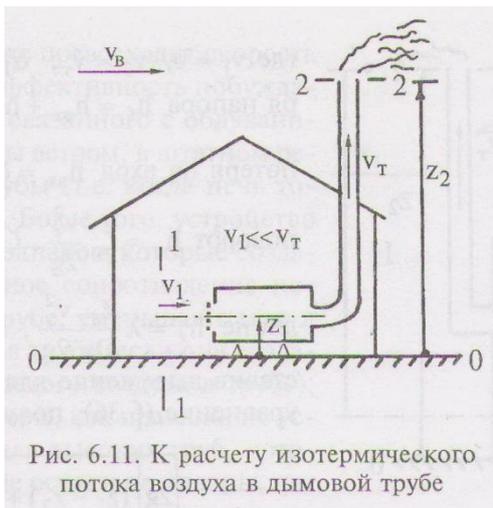


Рис. 6.11. К расчету изотермического потока воздуха в дымовой трубе

трубы) гидростатическое, имеем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_B g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_B g} \quad (14.24)$$

Подставив (14.24) и выражения для потерь напора в уравнение Бернулли (14.23) и используя (14.22), получим:

Рис. 6.8. К расчету изотермического потока воздуха в дымовой трубе

$$v_T = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_B (\zeta_{вх} + \lambda \frac{l_T}{D_T} + \zeta_{п} + 1)}} = v_B \sqrt{\frac{k}{\zeta_{вх} + \lambda \frac{l_T}{D_T} + \zeta_{п} + 1}}$$

Зависимость (14.25) показывает, что скорость воздуха в трубе v_T , пропорциональна скорости ветра v_B , следовательно, растопку печи целесообразно начинать в ветреную погоду.

Используя представленную на рис. 14.7 зависимость $k = k(v_T/v_B)$, найдем скорость воздуха в трубе v_T , при заданных значениях скорости ветра v_B , и суммы коэффициентов потерь напора $\sum \zeta$. Для условий рассматриваемого примера $\sum \zeta = \zeta_{\text{вх}} + \lambda \frac{\ell_T}{D_T} + \zeta_{\text{п}} = 0,5 + 0,1 + 0,8 = 1,4$; для трубы без защитного колпака находим из графика значение $\frac{v_T}{v_B} = 0,18$. Согласно этому, $v_T = 0,18v_B$.

2. Для демонстрации расчета объемного расхода Q_d теплого воздуха (дыма), выбрасываемого в атмосферу благодаря второму фактору, рассмотрим дымовую трубу, представленную на рис 14.9. Пусть труба заполнена теплым воздухом (дымом), плотность которого ρ_d меньше плотности атмосферного воздуха. Запишем уравнение Бернулли для потока воздуха в трубе, выбрав сечения 1—1 и 2—2 и плоскость сравнения 0—0, как показано на рис. 14.9:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_d g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_d g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \quad (14-26)$$

где $v_1 \approx 0$, $v_2 = v_T$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$; потеря напора $h_f = h_{\text{вх}} + h_{\text{п}} + h_\ell + h_{\text{п}}$, потеря напора на поворот

$h_{\text{п}} = \zeta_{\text{п}} \frac{v_T^2}{2g}$, $\zeta_{\text{п}} = 1,1$, потеря по длине $h_\ell = \lambda \frac{\ell_T}{D_T} \frac{v_T^2}{2g}$, $\lambda \frac{\ell_T}{D_T} = 0,1$. Подставив

выражение для потерь напора получим:

$$v_T = \sqrt{\frac{2g \left[(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho_d g} \right]}{1 + \zeta_{\text{вх}} + 2\zeta_{\text{п}} + \lambda \frac{\ell_T}{D_T}}}. \quad (14-27)$$

Значение $(p_1 - p_2)$ определим, предполагая, что распределение давления в атмосфере и внутри здания (вне трубы) гидростатическое, т.е. используя (14.24):

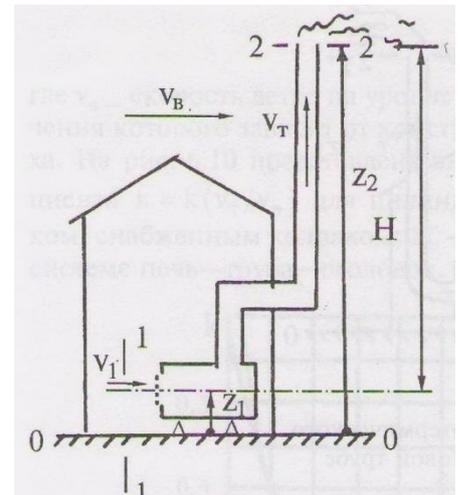
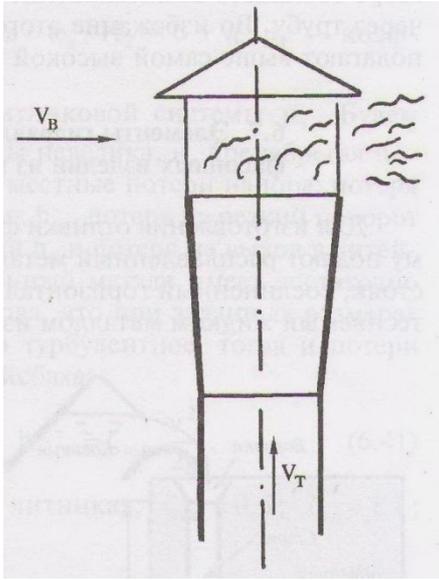


Рис. 6.9. К расчету потока нагретого воздуха в дымовой трубе

$$p_1 - p_2 = \rho_B g(z_2 - z_1) = \rho_B gH \quad (14.28)$$

Подставив (14.28) в (14.27), получим



$$v_T = \sqrt{\frac{2gH \left(\frac{\rho_B}{\rho_d} - 1 \right)}{1 + \zeta_{\text{вх}} + 2\zeta_{\text{п}} + \lambda \frac{\ell_T}{D_T}}}. \quad (14.27)$$

Рис. 14.10. Оформление выходного сечения дымовой трубы

Искомый расход Q определим, умножив v_T на площадь сечения трубы. Согласно (14.29), скорость нагретого воздуха (дыма) и его расход в трубе возрастают с *увеличением высоты трубы* H . Кроме того, из формулы (14.29) следует, что положительная тяга, когда поток воздуха направлен из здания наружу, имеет место только при условии $p_d < p_B$. Если

печь не топится и труба заполнена воздухом, температура которого равна температуре внутри здания, то положительная тяга возникает только тогда, когда температура наружного воздуха ниже температуры воздуха внутри здания (плотность газа обратно пропорциональна температуре). Поэтому печь легко затопить в *морозную* погоду, и, напротив, в жаркую безветренную погоду тяга может быть отрицательной, и пока печь и труба не прогреются выше температуры наружного воздуха и теплый дым не заполнит трубу, дым из печи будет поступать внутрь здания.

Для уменьшения потери кинетической энергии воздуха, выбрасываемого из трубы в атмосферу, и увеличения тяги на выходе из трубы устраивают диффузорный участок (рис. 14.10), который эффективно работает при угле конуса $\beta < 13^\circ$.

3. Совместное действие обоих факторов. Как правило, скорость нагретого воздуха и трубе, возникающая под действием архимедовой силы, соизмерима и даже превосходит скорость ветра, поэтому эффективность побуждающего фактора, связанного с обдуванием оголовка трубы ветром, в штат-

ном режиме работы трубы (т.е. когда печь топится) невелика. Более того, устройство дефлекторов и колпаков, которые создают дополнительное сопротивление потоку воздуха в трубе, уменьшают тягу и скорость потока в трубе (если она создается за счет нагретого воздуха в трубе); поэтому дефлекторы, как правило, не устанавливают, а для высоких труб, которым атмосферные осадки не опасны, нет необходимости в установке колпаков. Оголовки невысоких труб небольшого диаметра оборудуются и коническим диффузором и колпаком.

Побуждающий фактор, связанный с обдуванием оголовка трубы ветром, играет весьма важную роль в начале работы печи, когда ее разжигают. За счет этого фактора теплый воздух (дым) из печи поступает не внутрь помещения, где находится печь, а засасывается в трубу, которая заполняется нагретым воздухом ("заряжается"), и в результате возникает значительно более интенсивная тяга (большой объемный расход воздуха), обусловленная вторым фактором.

При проектировании печных труб зданий следует иметь в виду, что под

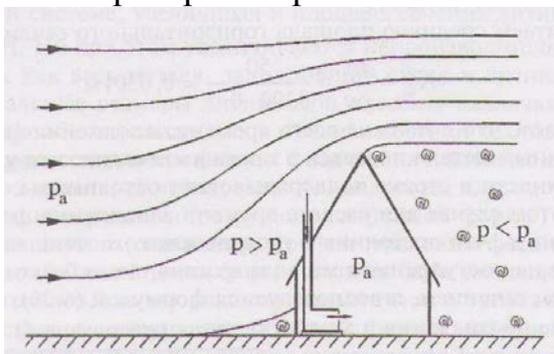


Рис. 14.11. Неправильное расположение выходного сечения дымовой трубы

действием ветра с наветренной стороны здания образуется область, в которой давление выше, чем атмосферное давление, вводимое в расчет зависимостью (14.24). Если выходное

сечение трубы находится в этой области (как показано, например, на рис. 14.11), то под действием локально го повышенного давления тяга и расход дыма уменьшатся, а при сильном ветре возможно возникновение потока наружного воздуха внутрь здания через трубу. Во избежание этого выходное отверстие печной трубы располагают выше самой высокой части здания (выше конька).

Глава VII

Длинные трубопроводы. Гидравлический расчет

7.1 Длинные трубопроводы

Трубопроводы рассчитываются по уравнению Бернулли с учетом потерь напора по длине и местных

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \sum \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} + \sum \xi \frac{V^2}{2g} \quad (15-1)$$

Если длина трубопровода достаточно большая, то потери напора по длине могут оказаться значительно больше местных потерь $\left(\sum \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} \gg \sum \xi \frac{V^2}{2g} \right)$ и последними в этом случае можно пренебречь. Такие трубопроводы называются *длинными*.

Для ориентировочных подсчетов при длине $\ell < 50$ м трубопровод можно рассчитывать как короткий, а при $\ell > 100$ м — как длинный. При $\ell = 50 \div 100$ м в зависимости от соотношения потерь напора трубопровод может быть длинным или коротким.

7.2 Расчет длинных трубопроводов

При расчете длинных трубопроводов местными потерями напора в уравнении можно пренебречь ввиду их незначительности по сравнению с потерями по длине.

В уравнении (15-1) суммы $z + \frac{p}{\rho g}$ представляют пьезометрические напоры H в сечениях 1—1 и 2—2, т. е. в начале и конце трубопровода. Если для водопроводных линий принимать z как отметку земли над данным сечением

трубопровода, то $\frac{p}{\rho g}$ будет пьезометрической высотой над поверхностью земли или *свободным напором* в этом сечении.

$$H_{св} = \frac{p}{\rho g}$$

Тогда

$$H = z + H_{св} \quad (15-2)$$

Обычно свободные напоры для водопроводов принимаются в зависимости от этажности здания, но не менее 10 м, поэтому всегда более 10 м будут и пьезометрические напоры $H = z + H_{св}$.

Скоростные напоры при обычных скоростях движения воды в трубопроводе $V = 1 \div 3$ м/с будут в диапазоне

$$\frac{\alpha V^2}{2g} = \frac{1,05(1 \div 3)^2}{2 \cdot 9,81} \approx 0,05 \div 0,48 м$$

Отсюда видно, что скоростными напорами $\frac{\alpha V^2}{2g}$ также можно пренебречь, ввиду их малых величин по сравнению с пьезометрическими.

При решении практических задач обычно заданной или искомой величиной является расход воды в трубопроводе Q . При этом удобно представить выражение для потерь напора по длине в виде

$$h_t = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{\ell}{d} \cdot \frac{Q^2 \cdot 16}{2g\pi^2 d^4} = S_0 Q^2 \ell$$

где $S_0 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$ — удельное сопротивление трубы, зависящее от ее диаметра d и гидравлического коэффициента трения λ .

Поскольку λ зависит от относительной шероховатости Δ/d и числа Рейнольдса, то в общем случае от этих же факторов зависит и удельное сопротивление трубы. В частном случае для водопроводных труб удельное сопротивление S_0 может быть представлено в зависимости от материала и диаметра трубы, а также средней скорости движения воды в ней. В качестве примера в табл. приводятся значения удельных сопротивлений для неновых (бывших в

эксплуатации) чугунных труб, работающих в квадратичной области сопротивления (при скорости $V \geq 1,2$ м/с).

При скоростях движения воды в трубе $V < 1,2$ м/с (переходная область сопротивления) удельные сопротивления таких труб определяются по формуле

$$S_0 = S_{0_{кв}} \Theta \quad (15-3)$$

где Θ – поправочный коэффициент, определяемый по следующим данным:

Скорость V , м/с	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,1
Коэффициент Θ	1,41	1,2	1,11	1,06	1,03	1

Удельные сопротивления S_0 , $\text{с}^2/\text{м}^6$, и расходные характеристики K , $\text{м}^3/\text{с}$, для бывших в эксплуатации чугунных труб при скорости $V \gg 1,2$ м/с

Диаметр условного прохода d , мм	Расчетный внутренний диаметр d_p , мм	$S_{0_{кв}}$, $\text{с}^2/\text{м}^6$	$K_{кв}$, $\text{м}^3/\text{с}$
50	51,6	11540	0,0093
80	82,6	953	0,0324
100	102	312	0,0565
125	127,2	96,7	0,102
150	152,4	37,1	0,164
200	202,6	8,09	0,352
250	253	2,53	0,628
300	304,4	0,95	1,027
350	352,4	0,437	1,512
400	401,4	0,219	2,14
450	450,6	0,199	2,91
500	500,8	0,0678	3,84
600	600,2	0,026	6,22
700	699,4	0,0115	9,32
800	799,8	0,0057	13,3
900	899,8	0,0031	18,17
1000	998,4	0,0018	24
1200	1199,2	0,00066	38,9

Более подробные значения удельных сопротивлений для труб из разных материалов приводятся в справочной литературе.

С учетом вышеизложенного уравнение (15-1) для длинных трубопроводов приводится к виду:

$$H_1 - H_2 = \sum S_0 Q^2 \ell \quad (15-4)$$

а для трубопровода, состоящего из одного участка.

$$H_1 - H_2 = S_0 Q^2 \ell = h_\ell \quad (15-5)$$

Рассмотрим способ расчета длинных трубопроводов, основанный на формуле скорости при равномерном движении

$$Q = \omega V = \omega W \sqrt{i_p} = K \sqrt{i_p} \quad (15-6)$$

где K – расходная характеристика трубы.

Для круглых труб (учитывая, что гидравлический радиус $R = d/4$)

$$K = \omega W = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{d}{4} \right)^z$$

т. е. расходная характеристика трубы зависит от ее диаметра и коэффициента шероховатости стенки n .

С учетом того, что при равномерном движении пьезометрический уклон равен гидравлическому, который является отношением потерь напора h_ℓ к длине трубопровода ℓ , получим

$$Q^2 = K^2 i_p = K^2 \frac{h_\ell}{\ell}$$

или

$$H_1 - H_2 = h_\ell = \frac{Q^2}{K^2} \ell \quad (15-7)$$

Сравнивая формулы (15-7) и (15-5), видим, что

$$S_0 = \frac{1}{K^2}$$

Значения $K_{кв}$ для бывших в эксплуатации чугунных труб ($n \approx 0,13$), работающих в квадратичной области сопротивления ($V \geq 1,2$ м/с), приведены в

таблице. Для труб, работающих в переходной области сопротивления ($V < 1,2$ м/с),

$$K = \frac{K_{кв}}{\sqrt{\Theta}} \quad (15-8)$$

где значения $\Theta > 1$ приведены выше.

В практике проектных организаций для расчета водопроводных труб применяются таблицы Ф. А. Шевелева, основанные на формуле (15-5), приведенной к виду

$$1000i_p = 1000 \frac{h_\ell}{\ell} = 1000SQ^2 = f(d, Q, \text{материала трубы}). \quad (15-19)$$

Величина $1000 i_p$ является потерями напора в трубе длиной 1000 м, подсчитанными для разных расходов в трубах различных диаметров и из разных материалов. При больших или меньших длинах труб потери напора, пропорционально увеличиваются или уменьшаются.

7.2 Уменьшение пропускной способности трубы в процессе эксплуатации

Следует отметить, что в новых чугунных, а также стальных трубах возникают меньшие потери напора. С течением времени стенки трубы подвергаются коррозии, на них образуются отложения, что приводит к увеличению гидравлического коэффициента трения S_0 удельного сопротивления S_0 и уменьшению расходной характеристики. В результате для чугунных труб уменьшение пропускной способности трубопровода с течением времени доходит до 6 – 20% (большие значения соответствуют меньшим диаметрам), а для стальных труб это уменьшение значительно больше. Удельные сопротивления для новых труб могут быть подсчитаны с учетом значений λ для таких труб, определенных по формулам $\lambda = \frac{m}{d^n} \left(1 + \frac{f}{V}\right)^n$ и $\lambda = \frac{m_1}{d^n}$, однако ими следует пользоваться только для проверки условий работы только что проложенных водопроводных линий.

7.3 Основные типы задач по расчету трубопроводов

Последовательное и параллельное соединение труб

Гидравлический удар в трубопроводах. Формула Н. Е. Жуковского.

Меры борьбы с гидравлическим ударом

7.3.1 Основные случаи расчета трубопроводов

Для трубопровода, состоящего из одного участка, имеют место следующие расчетные случаи:

Известные величины	Определяемые величины
1. Напоры в начале и конце трубопровода H_1 и H_2 , длина ℓ , диаметр d	Расход Q
2. H_2 , ℓ , Q , d	H_1
3. H_2 , ℓ , Q , H_1	d

Первый случай имеет место при проверке пропускной способности трубопровода при известных или измененных остальных параметрах. Второй и третий случаи относятся к проектированию нового трубопровода, когда нужно определить необходимый напор в начале трубопровода H_1 , обеспечивающий подачу воды по трубопроводу с заданными параметрами, или диаметр трубопровода d для обеспечения заданных пропускной способности и напора в конце трубопровода.

Расчет ведется по формулам

$$H_1 - H_2 = S_0 Q^2 \ell = h_\ell$$

$$Q = \omega V = \omega W \sqrt{i_p} = K \sqrt{i_p}$$

или

$$H_1 - H_2 = h_\ell = \frac{Q^2}{K^2} \ell$$

с учетом, что

$$S_0 = f(d) \text{ и } K = f(d).$$

В третьем случае из этих формул определяют S_0 или K , а затем по табличным данным — диаметр d . Если величины S_0 или K находятся между их табличными значениями, то принимают ближайший больший диаметр, в противном случае потери напора будут больше заданных и в конце трубопровода не будет обеспечен необходимый свободный напор.

7.3.2 Экономический диаметр трубопровода

При проектировании и расчете новых водопроводов могут быть неизвестным две величины: диаметр трубопровода d и напор в его начале H_1 . В этом случае с точки зрения гидравлики решений может быть столько, сколько выпускается промышленностью труб с различными диаметрами. Однако не все эти решения приемлемы. Оптимальное решение может быть найдено при совместном решении задач гидравлики и экономики. С увеличением диаметра трубопровода увеличивается стоимость строительства трубопровода $C_{стр}$ (рис. 16-1). В тоже время с увеличением диаметра уменьшаются потери напора в трубопроводе, что требует меньшей мощности насоса для подачи воды и следовательно, меньшего расхода электроэнергии. Это дает уменьшение ежегодной стоимости эксплуатации $C_{эк}$. Так как

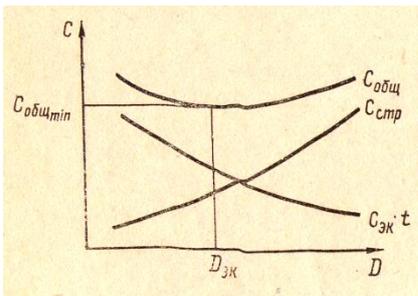


Рис. 7.1

строительные расходы производятся одновременно, а эксплуатационные ежегодно, то общие расходы на строительство и эксплуатацию трубопровода за t лет (срок окупаемости трубопровода)

$$C_{общ} = C_{стр} + C_{эк}t \quad (16-1)$$

Минимум функции $C_{общ} = f(d)$ соответствует экономическому диаметру трубопровода.

Представив расход в трубе в виде $Q = V_{np} \frac{\pi d^2}{4}$, найдем значение экономического диаметра

$$d_{\text{эк}} = 1,13 \sqrt{\frac{Q}{V_{\text{пр}}}} \quad (16-2)$$

где $V_{\text{пр}}$ – предельная скорость, при которой данный диаметр трубы будет более выгоден, чем другие диаметры.

7.4 Последовательное соединение труб

В случае последовательного соединения труб потеря напора от сечения A до сечения B будет равно

$$h_{\ell_{AB}} = h_{\ell_1} + h_{\ell_2} + h_{\ell_3} \quad (16-3)$$

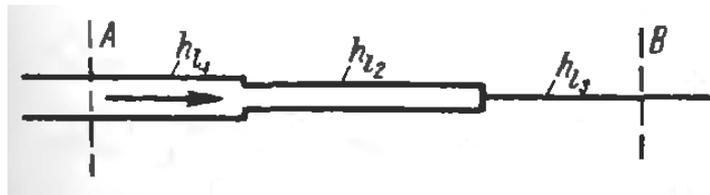


Рис. 7.2. Последовательное соединение труб.

т. е. при последовательном соединении труб для нахождения потери напора от сечения A до сечения B , потери напора в отдельных трубах необходимо сложить.

7.4.1 Параллельное соединение труб

К узлам A и B мысленно подключим пьезометр Π_1 и Π_2 . Потеря напора

на пути от узла A до узла B будет

$$h_{\ell_{AB}} = H_{\ell_A} - H_{\ell_B} \quad (16-4)$$

где H_{ℓ_A} и H_{ℓ_B} – напоры соответственно в узлах A и B .

С другой стороны,

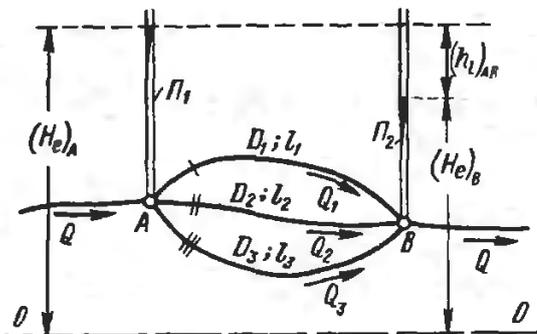


Рис. 7.3. К расчету параллельного соединения длинных труб.

$$\begin{aligned}
 h_{\ell_1} &= H_{\ell_A} - H_{\ell_B}; \\
 h_{\ell_2} &= H_{\ell_A} - H_{\ell_B}; \\
 h_{\ell_3} &= H_{\ell_A} - H_{\ell_B}.
 \end{aligned}
 \tag{16-5}$$

где $h_{\ell_1}, h_{\ell_2}, h_{\ell_3}$ – потери напора соответственно на длине 1-й, 2-й и 3-й труб;
 величины же H_{ℓ_A} и H_{ℓ_B} в зависимости (16-5) можно рассматривать как
 напоры в начале и в конце каждой трубы.

Учитывая (16-4) и (16-5), можем записать:

$$h_{\ell_{AB}} = h_{\ell_1} = h_{\ell_2} = h_{\ell_3} = H_{\ell_A} - H_{\ell_B} \tag{16-6}.$$

Как видно, *потери напора во всех трубах, соединённых параллельно, одинаковы*. Так как

$$h_{\ell} = \frac{Q^2}{K^2} \ell \tag{16-7}$$

то вместо (16-6) имеем:

$$h_{\ell_{AB}} = \frac{Q_1^2}{K_1^2} \ell_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} \ell_2 = \frac{Q_3^2}{K_3^2} \ell_3 \tag{16-8}$$

Соотношения (14-17) дают три уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 (I) \quad Q_1 &= K_1 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_1}} \\
 (II) \quad Q_2 &= K_2 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_2}} \\
 (III) \quad Q_3 &= K_3 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_3}}
 \end{aligned} \right\} \tag{16-9}$$

Дополнительно можем написать четвёртое уравнение:

$$(IV) \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{16-10}$$

Если дано Q и заданы размеры отдельных трубопроводов (ℓ, d) , имеем систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными: $Q_1, Q_2, Q_3, h_{\ell_{AB}}$.

Решим приведённую систему уравнений. Подставляя в уравнение (IV) уравнения (I), (II), (III), получаем:

$$Q = K_1 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_1}} + K_2 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_2}} + K_3 \sqrt{\frac{h_{\ell_{AB}}}{\ell_3}} \tag{16-11}$$

или

$$Q = \sqrt{h_{\ell_{AB}}} \sum \frac{K}{\sqrt{\ell}}, \quad (16-12)$$

или

$$h_{\ell_{AB}} = \frac{Q^2}{\left(\sum \frac{K}{\sqrt{\ell}} \right)^2}. \quad (16-23)$$

Зная из (16-23) $h_{\ell_{AB}}$, по (16-9) находим Q_1, Q_2, Q_3 .

7.5 Общая характеристика гидравлического удара

Гидравлическим ударом называется изменение (повышение или понижение) давления в трубопроводе при резком изменении скорости движения жидкости. Повышение давления при гидравлическом ударе может быть настолько большим, что способно привести к разрыву трубопровода. Собственно и изучение гидравлического удара началось в связи с частыми авариями на новых линиях Московского водопровода, построенных в конце XIX в. Причины аварий исследовал выдающийся русский ученый Н. Е. Жуковский, который и разработал теорию гидравлического удара.

По Н. Е. Жуковскому, при быстром закрытии задвижки в трубопроводе скорость движения воды в нем уменьшается до нуля и происходит переход кинетической энергии потока в потенциальную, что приводит к повышению давления. **Чем** больше длина трубопровода, тем больше в нем масса жидкости и величина кинетической энергии и тем больше будет повышение давления.

Если в трубопроводе, по которому вытекает вода из резервуара (рис.17-1), будет закрыта задвижка, то течение жидкости остановится вначале не во всей трубе, а лишь непосредственно перед задвижкой. Это становится возможным потому, что благодаря упругим свойствам жидкости и материала трубы жидкость несколько сжимается, а труба расширяется. Затем повышение давления весьма быстро распространяется по трубопроводу от задвижки к резервуару.

Скорость распространения повышения давления называется *скоростью ударной волны* C_V . После того, как во всей трубе давление повысится, жидкость начнет выходить из зоны повышенного давления обратно в резервуар и давление в трубе начнет понижаться. Затем в зону пониженного давления снова пойдет жидкость из резервуара и давление снова повысится. Благодаря упругим свойствам жидкости и стенок трубы этот процесс постепенно затухает (рис. 17-2). Наиболее опасным является первое повышение давления.

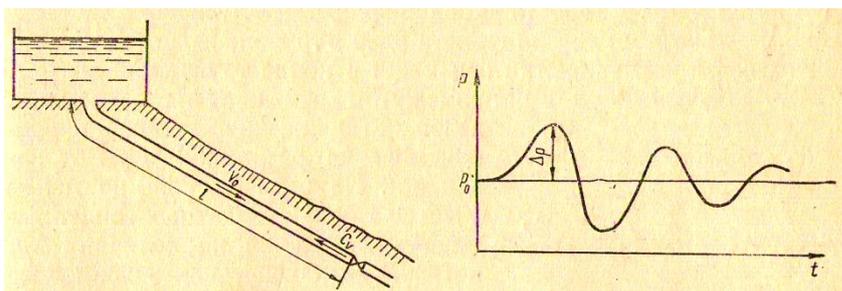


Рис. 7.3.

Рис. 7.4.

Ударная волна пройдет по всему трубопроводу за время $\frac{l}{C_V}$ (l – длина трубопровода). Время одного цикла, включающего повышение и понижение давления, называется фазой удара T . Считая скорость ударной волны при повышении и понижении давления одинаковой, определим фазу удара как

$$T = \frac{2l}{C_V} \quad (17-1)$$

Если время закрытия задвижки меньше или равно фазе удара ($t_3 \leq T$), то удар называется *прямым*. При $t_3 > T$ за время повышения и понижения давления задвижка еще не будет закрыта, движение жидкости в трубе еще не остановится и не вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную, т. е. повышение давления будет меньше, чем при прямом ударе. Такой удар называется *непрямым*.

Удар может возникнуть и при внезапной остановке насоса, подающего воду по нагнетательному трубопроводу в резервуар (рис. 17-3). Жидкость по-

сле выключения насоса по инерции некоторое время будет двигаться, и в трубопроводе образуется пониженное давление. Затем начнется обратное движение жидкости из резервуара в область пониженного давления в трубопроводе и давление повысится (рис. 17-4) подобно тому,, как это имело место при прямом ударе.

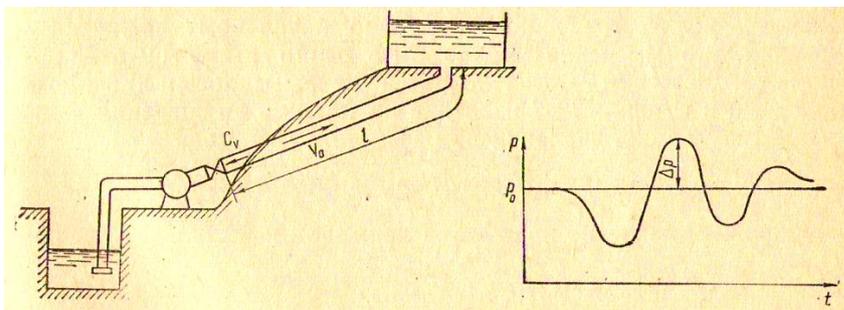


Рис. 7.5.

Рис. 7.6.

Из изложенного видно, что характеристики движения жидкости при гидравлическом ударе изменяются с течением времени. Следовательно, удар относится к категории неустановившегося движения.

7.6 Прямой удар. Скорость ударной волны. Формула Н. Е. Жуковского

Рассмотрим гидравлический удар в трубопроводе при внезапном (мгновенном) закрытии задвижки в конце трубопровода: (рис. 17-5). За

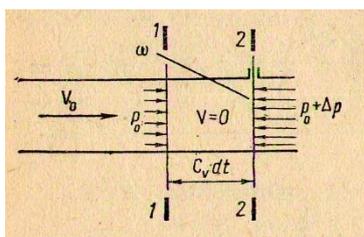


Рис. 7.7.

бесконечно малый промежуток времени dt после закрытия задвижки движение жидкости прекратится на расстоянии $C_v dt$ от задвижки. На этом бесконечно малом участке трубопровода произойдет повышение давления на величину Δp , которую можно

определить с помощью закона изменения количества движения. Количество движения в рассматриваемом объеме до закрытия задвижки было равно:

$$KД = \rho \omega C_v dt V_0$$

где ω — площадь сечения трубы; V_0 — скорость течения жидкости в трубе до закрытия задвижки.

После закрытия задвижки движение остановилось, скорость и количество движения уменьшились до нуля, т. е. в этом случае изменение количества движения равно начальному, количеству движения. Это изменение должно быть равно импульсу действующих сил. В сечении 1–1 давление еще не повысилось и имеет значение p_0 , а в сечении 2–2 давление повысилось до значения $p_0 + \Delta p$. Импульс сил давления на рассматриваемый объем

$$IS = (p_0 + \Delta p)\omega dt - p_0\omega dt = \Delta p\omega dt$$

Приравняв значение количества движения и импульса сил, получим

$$\rho\omega C_V dt V_0 = \Delta p\omega dt$$

Отсюда

$$\Delta p = \rho V_0 C_V \quad (17-2)$$

Эта формула *Н. Е. Жуковского* позволяет, определить повышение давления при прямом гидравлическом ударе при известной скорости распространения ударной волны C_V . Гидравлический удар можно также характеризовать повышением напора:

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{V_0 C_V}{g} \quad (17-3)$$

Скорость ударной волны определим из условия сохранения массы жидкости при гидравлическом ударе. Запишем закон сохранения массы при гидравлическом ударе

$$\rho\omega V_0 = \rho C_V d\omega + \omega C_V dp = C_V(\rho d\omega + \omega dp) \quad (17-4)$$

Отсюда

$$C_V = \frac{V_0}{\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dp}{\rho}} \quad (17-5)$$

т. е. скорость ударной волны зависит от деформации трубы и сжатия жидкости, которые соответственно характеризуются упругими свойствами материала трубы и жидкости.

Представим выражение для относительной деформации площади трубы в виде

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{2dD}{D} \quad (17-6)$$

Из механики упругих тел известно, что относительная деформация $\frac{dD}{D}$ может быть выражена в зависимости от вызываемого ею растягивающегося напряжения в материале трубы $\Delta\sigma$ и модуля его упругости $E_{тр}$ по закону Гука:

$$\frac{dD}{D} = \frac{\Delta\sigma}{E_{тр}} \quad (17-7)$$

Напряжение, вызываемое ударной волной в стенках трубы, может быть определено в зависимости от повышения давления:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D}{2\delta} \quad (17-8)$$

где δ — толщина стенки трубы.

С учетом зависимостей (17-7) и (17-8) выражение (17-6) приводится к виду

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2dD}{D} = \frac{2\Delta\sigma}{E_{тр}} = \frac{\Delta p D}{E_{тр} \delta} \quad (17-9)$$

Относительное изменение плотности жидкости $\frac{d\rho}{\rho}$ зависит от повышения давления Δp и модуля объемной упругости жидкости $E_{ж}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_{ж}} \quad (17-10)$$

Подставим выражения для $\frac{d\omega}{\omega}$ и $\frac{d\rho}{\rho}$ по формулам (17-9) и (17-10) в формулу (17-5)

$$C_v = \frac{V_0}{\frac{\Delta p D}{E_{тр} \delta} + \frac{\Delta p}{E_{ж}}}$$

или с учетом Δp по формуле (17-2)

$$C_V = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{жс}} + \frac{D}{\delta} \frac{\rho}{E_{мп}}}} \quad (17-11)$$

Рассмотрим физический смысл величин, находящихся под корнем в правой части формулы (17-11), в частности, теоретически предельный случай при $E_{тр} = \infty$, когда гидравлический удар происходит в трубе из абсолютно неупругого материала. Тогда

$$C_V' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{жс}}}} = \sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}} \quad (17-12)$$

В этом случае C_V' — скорость распространения упругих деформаций (ударной волны) в жидкости. Из физики известно, что выражение $\sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}$ является скоростью звука в жидкой среде. Для воды $C_V' = 1425$ м/с. В другом предельном случае при $E_{жс} = \infty$ можно считать, что гидравлический удар в трубе, по которой протекает абсолютно неупругая жидкость. Тогда

$$C_V'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{\delta} \frac{\rho}{E_{мп}}}} = \sqrt{\frac{\delta E_{мп}}{D\rho}} \quad (17-13)$$

Можно также считать, что C_V'' является скоростью распространения упругих деформаций (ударной волны) исключительно по телу трубы.

С учетом вышеизложенного

$$C_V = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C_V'^2} + \frac{1}{C_V''^2}}} = \frac{C_V'}{\sqrt{1 + \frac{C_V'^2}{C_V''^2}}} \quad (17-14)$$

или

$$C_V = \frac{\sqrt{\frac{E_{жс}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{E_{жс}}{E_{мп}}}} \quad (17-15)$$

Для трубопровода с водой скорость ударной волны, м/с,

$$C_V = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \cdot \frac{E_{жс}}{E_{тр}}}} \quad (17-16)$$

Обычно по этой формуле определяют скорость распространения ударной волны и подставляют ее значение в формулу (17-2).

Отношение для воды в зависимости от материала стенки трубы принимается равным:

Вид труб	$E_{жс}/E_{тр}$
Стальные	0,01
Чугунные	0,02
Асбестоцементные	0,11
Винипластовые	0,68—0,73
Полиэтиленовые	1—1,45
Бетонные	0,1—0,14
Резиновые	333—1000

С учетом приведенных данных видно, что знаменатель в формуле (17-16) для ряда видов труб (особенно металлических) несколько больше единицы, а это означает, что скорость распространения ударной волны в таких трубах составляет величину порядка сотен метров в секунду и может быть даже более 1000 м/с. При этом повышение давления при гидравлическом ударе может достигать весьма большой величины.

7.7 Непрямой удар

Если время закрытия задвижки на трубопроводе t_3 больше фазы удара T , то, имеет место не прямой удар. В этом случае за время T движение воды в трубопроводе еще не остановилось, и поэтому не вся кинетическая энергия переходит в потенциальную, что приводит к меньшему, чем при прямом ударе, повышению давления. Существуют разные способы расчета непрямого удара, основанные на ряде допущений. При непрямом ударе теряется не вся начальная скорость V_0 , а, только часть ее, так называемая потерянная скорость $V_{\text{пот}}$ (рис. 17-6):

$$V_{\text{пот}} = V_0 - V \quad (17-17)$$

где V – скорость при данной степени открытия задвижки.

Подставляя значения вместо V в формулу (17-2), получим

$$\Delta p = \rho C_v (V_0 - V) \quad (17-18)$$

Кроме того, при частичном закрытии задвижки на трубопроводе возросшее давление в начале трубопровода должно равняться возросшим потерям давления в нем.

$$p_n + \Delta p = \rho \left(\lambda \frac{\ell}{d} + \sum \zeta + \zeta_3 \right) \frac{V^2}{2g} \quad (17-19)$$

где p_n – давление в начале трубопровода до закрытия задвижки; λ – гидравлический коэффициент трения; ℓ и d — длина и диаметр трубопровода; $\sum \zeta$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений в трубопроводе до закрытия задвижки; ζ_3 – коэффициент сопротивления задвижки при данной степени ее открытия a/d . Обычно значение ζ_3 растет медленно в начале закрытия задвижки и быстро в его конце, т. е. при малых значениях a/d (рис. 17-7). Можно принять, что степень открытия задвижки a/d изменяется равномерно во времени (рис. 17-8). Если изменение a/d от 1 до 0 происходит за время t_3 , то степень открытия задвижки в конце первой фазы удара

$$a_1/d = \frac{t_3 - T}{t_3} = 1 - \frac{T}{t_3} \quad (17-20)$$

Изменение степени открытия в течение любой фазы

$$\Delta a / d = T / t_3 \quad (17-21)$$

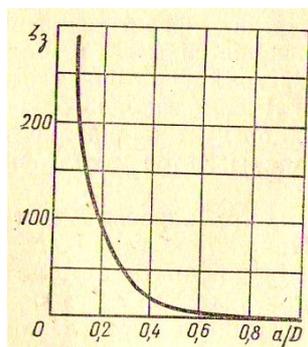


Рис. 17-7

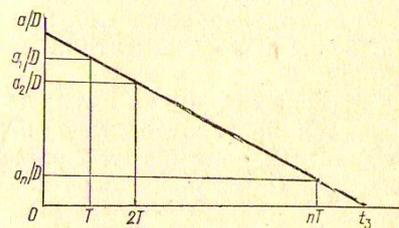


Рис. 17-8

Решая совместно уравнения (17-18) и (17-19), можно найти повышение давления Δp и скорость в конце первой фазы удара при соответствующей величине $\zeta_{31} = f(a_1/d)$.

В такой же последовательности может быть найдено повышение давления в конце второй и последующих фаз удара. При этом в формулу (17-18) вместо V_0 подставляется скорость в конце предыдущей фазы удара, а в формулу (17-19) вместо p_n возросшее давление в конце предыдущей фазы и соответствующее значение ζ_3 .

7.8 Меры борьбы с гидравлическим ударом

Из изложенного видно, что повышение давления при гидравлическом ударе зависит от характера изменения сопротивления задвижки и, следовательно, эффективным средством смягчения действия гидравлического удара является подбор такого закона закрытия задвижки, при котором давление не превысит допустимого.

Повышение давления будет тем меньше, чем меньше потерянная скорость $V_{ном} = V_0 - V$ в трубопроводе. Чем медленнее закрывается задвижка, т. е. чем фаза удара T меньше времени полного закрытия задвижки t_3 , тем меньше будет изменение степени открытия задвижки $\frac{\Delta a}{d}$ в течение каждой

фазы. При этом меньше будет изменяться и коэффициент сопротивления задвижки ζ_3 и скорость V при данной степени открытия a/d . Это приводит к меньшему повышению давления Δp в конце каждой фазы удара. Поэтому одной из самых существенных мер по предотвращению вредного влияния гидравлического удара является медленное закрытие задвижек, что обеспечивается их конструкцией, правилами эксплуатации, автоматическим закрытием в течение заданного времени. Для трубопроводов малых диаметров следует устанавливать не пробочные краны, а вентили, которые закрываются достаточно медленно.

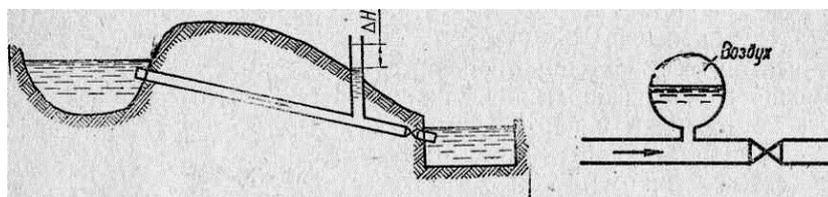


Рис. 17-9

Рис. 17-10

На насосных станциях в начале напорных трубопроводов устанавливаются противоударные аппараты. При остановке насоса и понижении давления в трубопроводе клапаны аппарата автоматически открываются и при обратном подходе воды часть ее вышибается через клапаны без повышения давления, после чего клапаны зарываються.

На трубопроводах могут быть установлены также уравнивательные резервуары (рис. 17-19). При гидравлическом ударе в резервуар поступает некоторое количество воды, что снижает добавочное давление в трубопроводе. Аналогичная картина наблюдается в воздушных колпаках (рис. 17-10), где сжатие воздуха амортизирует повышение давления.

7.9 Гидравлический таран

Повышение давления при гидравлическом ударе может быть использовано в полезных целях, например, для подъема воды с помощью гидравлического тарана (рис. 17-11).

При этом часть воды, поступающей из водоема A с напором H можно поднять на высоту $H_2 > H_1$.

Таран состоит из рабочей коробки B с ударным клапаном 1 и нагнетательным клапаном 2 и воздушного колпака C на напорном трубопроводе. Принцип действия

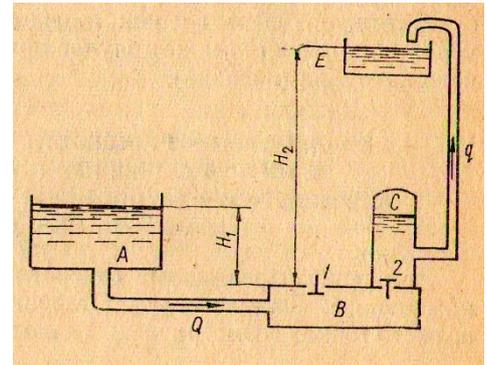


Рис. 17-11

тарана заключается в следующем. При открытии ударного клапана 1 вода поступает из резервуара в коробку тарана. Благодаря давлению обтекающего потока ударный клапан закрывается и в коробке возникает гидравлический удар. В результате повышения давления открывается нагнетательный клапан 2 , часть воды войдет в воздушный колпак, сжимая находящийся в нем воздух, а последний вытеснит затем воду по напорному трубопроводу в резервуар E на высоту H_2 . Вследствие вытеснения части воды из рабочей коробки давление в ней понизится и клапан 1 под действием собственного веса снова откроется, в это время клапан 2 под действием давления воздуха в колпаке будет закрыт. Затем снова поток воды закрывает клапан 1 и цикл повторяется.

Коэффициент полезного действия тарана представляет собой отношение полезной работы к затраченной, т.е.

$$\eta = \frac{\rho g q H_2}{\rho g Q H_1} = \frac{q H_2}{Q H_1} \quad (17-22)$$

где q – подача (расход) тарана; Q – расход, поступающий в таран из водоема.

Высота нагнетания тарана может находиться в пределах $H_2 = (2 \div 10) H_1$; при этом подача будет $q = (0,4 \div 0,07) Q$, а коэффициент полезного действия $\eta = 0,85 \div 0,4$.

Гидравлические тараны, выпускаемые промышленностью, могут поднимать воду на высоту до 60 м, при подаче до 20–22 л/мин. Гидравлические тараны просты в эксплуатации и могут непрерывно работать длительное время, снабжая водой небольшие поселки и предприятия.

Глава VIII

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре. Типы сжатия струи

8.1 Истечение из малого отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре

Отверстие считают *малым*, если его размер по высоте значительно меньше напора $d < 0,1 H$.

Тонкой стенкой считают такую стенку, у которой отверстие имеет заостренную кромку при этом струя, вытекающая из отверстия, преодолевает лишь местное сопротивление.

Картина истечения жидкости из некоторого сосуда через малое отверстие в вертикальной тонкой стенке имеет вид, изображенный на рис. 18-1. Где обозначено: p_0 – давление на поверхности жидкости в сосуде; в общем случае p_0 не равно атмосферному давлению p_a ; ω – площадь отверстия; ω_c – площадь сечения струи в некотором сечении С–С, называемом *сжатым сечением*; H – заглубление центра тяжести ЦТ площади ω отверстия под уровнем жидкости в сосуде.

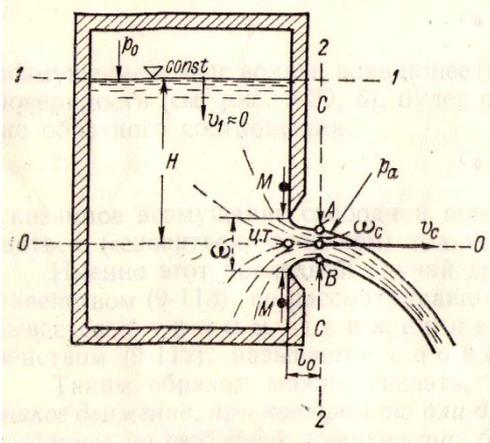


Рис. 18-1. Истечение жидкости из малого отверстия в атмосферу

Струи жидкости по выходе из отверстия резко сжимается на протяжении до сечения С–С. Такое сжатие обусловливается инерцией частиц жидкости, движущихся при подходе к отверстию по криволинейным траекториям.

До сечения С–С имеется резко изменяющееся движение; после сечения С–С – плавно изменяющееся движение. Сечение струи по линии СС и называется *сжатым сечением*.

Если отверстие круглое, то расстояние от внутренней поверхности стенки до сжатого сечения, согласно имеющимся опытам, будет

$$l_0 \approx 0,5d \quad (18-1)$$

где d – диаметр отверстия.

Введем обозначение:

$$\frac{\omega_c}{\omega} = \varepsilon \quad (18-2)$$

где ε – коэффициент сжатия струи.

Найдем среднюю скорость V_c в сжатом сечении и расход Q жидкости, вытекающей из сосуда. Для решения этой задачи соединяем уравнением Бернулли два сечения: 1–1 и 2–2, из которых первое намечаем на уровне жидкости в сосуде и второе – по линии С–С. Плоскость сравнения ОО проведем на уровне центра тяжести ЦТ площади ω_c .

Уравнение Бернулли имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_f \quad (18-3)$$

Выясняем значения отдельных слагаемых, входящих в это уравнение:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= H; \quad \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma}; \quad \frac{\alpha V_1^2}{2g} \approx 0 \\ z_2 &= 0; \quad \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}; \quad \frac{\alpha V_2^2}{2g} \approx \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_c^2}{2g} \end{aligned} \right\} \quad (18-4)$$

Величину потерь напора h_f от сечения 1–1 до сечения 2–2, которое представлено С–С, представим в виде

$$h_f = \zeta \frac{V_c^2}{2g} \quad (18-5)$$

где ζ — коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора от сечения 1–1 до сечения 2–2. Потери напора сосредотачиваются в основном в районе самого отверстия, где скорости движения жидкости уже достаточно велики.

Подставляя (18-4) и (18-5) в (18-3) получим

$$H + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g} + \zeta \frac{V_c^2}{2g} \quad (18-6)$$

Обозначим

$$H + \left(\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma} \right) = H_{np} \quad (18-7)$$

где H_{np} — приведенный напор.

Тогда

$$H_{np} = (1 + \zeta) \frac{V_c^2}{2g} \quad (18-8)$$

откуда

$$V_c = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}} \sqrt{2gH_{np}} \quad (18-9)$$

или

$$V_c = \varphi \sqrt{2gH_{np}} \quad (18-10)$$

где

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}} \quad (18-11)$$

φ — коэффициент скорости

В частном случае, когда $p_0 = p_a$, т.е. сосуд открыт $H_{np} = H$, тогда вместо (18-10) получаем

$$V_c = \varphi \sqrt{2gH} \quad (18-12)$$

Для идеальной жидкости

$$h_f = \zeta \frac{V_c^2}{2g} \quad (18-13)$$

т.е. в этом случае

$$\zeta = 0; \quad \varphi = 1 \quad (18-14)$$

Следовательно для идеальной жидкости

$$V_c = \sqrt{2gH} \quad (18-15)$$

Эта формула называется *формулой Торричелли*.

Зная скорость V_c в сжатом сечении найдем расход Q для случая $p_0 = p_a$ (сосуд открыт). Очевидно

$$Q = \omega_c V_c = \omega_c \varphi \sqrt{2gH} = \omega \frac{\omega_c}{\omega} \varphi \sqrt{2gH} \quad (18-16)$$

Подставляя ε по формуле (18-2), получим

$$Q = \varepsilon \rho \omega \sqrt{2gH} \quad (18-17)$$

или

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH} \quad (18-18)$$

где

$$\mu_0 = \varepsilon \rho \quad (18-19)$$

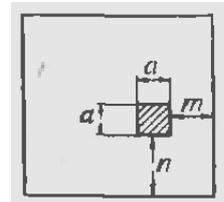
μ_0 – коэффициент расхода отверстия. Этот коэффициент учитывает и потери напора h_f , и степень сжатия струи, выходящей из отверстия.

Как видно, при рассмотрении истечения жидкости из отверстия были введены четыре новых коэффициента: сжатия ε ; сопротивления ζ , скорости φ ; расхода отверстия μ_0 .

8.2 Типы сжатия струи

На степень сжатия струи могут влиять боковые стенки, а также дно сосуда. В зависимости от удаления отверстия от боковых стенок и дна сосуда различают следующие типы сжатия струи.

1. **Совершенное сжатие.** Совершенным сжатием называется сжатие, возникающее, когда боковые стенки и дно сосуда (или водоема) практически не оказывают влияния на степень сжатия струи (не влияют на истечение). Такое сжатие



получается, когда отверстие расположено достаточно далеко от боковых стенок и дна сосуда, именно, когда расстояния m и n (рис. 18-2) удовлетворяют условиям

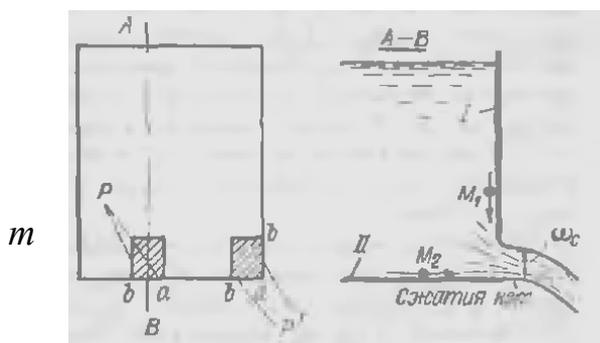
$$m > 3a; n > 3a \quad (18-20)$$

Для случая совершенного сжатия имеем следующие средние численные значения коэффициентов ε , ζ , φ и μ_0 относящиеся к круглым и квадратным,

отверстиям (найденные опытным путем) для квадратичной области сопротивления:

$$\varepsilon = 0,63 \div 0,64; \quad \zeta = 0,6; \quad \varphi = 0,97; \quad \mu_0 = 0,62 \quad (18-21)$$

2. Несовершенное сжатие. Несовершенное сжатие получается при несоблюдении условий (18-20), т. е. когда отверстие расположено сравнительно близко к боковой стенке или дну сосуда. В этом случае величина ε зависит от размеров m и n ; чем меньше размеры m и n , тем меньше сжатие струи и,



следовательно, тем больше величина ε .

3. Неполное сжатие. Неполное сжатие получается, когда m или n или m и n оказываются равными нулю (рис. 18-3).

Рис. 18-3.

4. Замечания:

1) Коэффициент скорости φ , как правило, близок к единице (несколько меньше единицы); коэффициенты же ε и μ_0 очень часто лежат в пределах от 0,6 до 1,0 (в среднем равны приблизительно 2/3).

2) Расход Q в случае неполного и несовершенного сжатия при равных прочих условиях всегда больше расхода Q в случае совершенного сжатия.

3) Приведенные значения μ_0 относятся как к воде, так и к другим жидкостям в случае турбулентного режима, когда число Рейнольдса Re достаточно велико.

4) Если истечение происходит, например, из квадратного отверстия, то, как показывает опыт, поперечное сечение струи меняет свою форму по длине ее (вдоль течения).

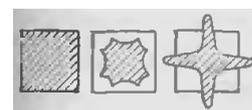


Рис. 18-4.
Инверсия струи.

Подобное явление, называемое *инверсией струи*, происходит благодаря тому, что скорости подхода к отверстию оказываются неодинаковыми для различных участков периметра отверстия.

8.3 Траектория струи

Траекторией струи называют ось струи жидкости, свободно падающей после истечения из отверстия. Для того чтобы найти уравнение оси струи намечаем сжатое сечение струи С–С, местоположение которого определяется известным размером ℓ_0 . В центре O этого сечения располагаем начало координатных осей x и y . Сопротивлением воздуха пренебрегаем. В точке O мысленно помещаем материальную частицу, имеющую некоторую массу, причем этой частице приписываем скорость V_c .

Прилагаем к упомянутой материальной частице уравнения движения, известные из теоретической механики

$$x = V_c t \quad y = \frac{gt^2}{2} \quad (18-22)$$

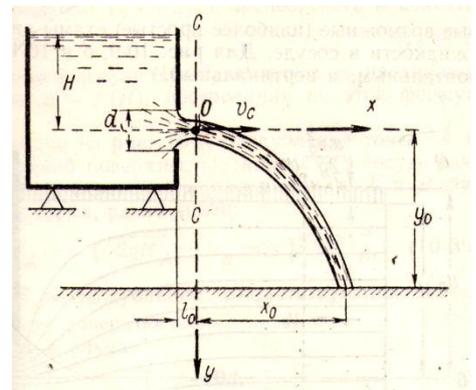
Рис. 18-5

где t — время, получаем уравнение траектории материальной частицы, имеющей начальную скорость V_c в виде:

$$y = \frac{gx^2}{2V_c^2} \quad (18-23)$$

где $V_c = \sqrt{2gH}$ (18-24)

Уравнение (18-23) и принимаем за *уравнение оси струи*. Полученное уравнение дает ось струи в виде параболы. Подставляя в (18-23) заданную величину y_0 (рис. 18-5), можем найти величину x_0 , т.е. дальность боя струи.



Глава IX.

Коэффициенты сжатия, скорости, расхода Истечение из малого отверстия под уровень. Истечение жидкости из насадков при постоянном напоре. Типы насадков

9.1 Коэффициенты сжатия, скорости, расхода

При рассмотрении истечения жидкости из отверстия были введены четыре новых коэффициента: сжатия ε ; сопротивления ζ , скорости φ ; расхода отверстия μ .

Коэффициент сжатия струи ε .

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (19-1)$$

где ω_c – площадь живого сечения трубы;

ω – площадь сечения отверстия.

Коэффициент сжатия струи ε зависит от формы отверстия и условий сжатия и определяется по данным опытов.

Коэффициент скорости φ .

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad (19-2)$$

где ζ – коэффициент сопротивления;

Коэффициент скорости φ зависит от вида отверстия и определяется опытным путем.

Коэффициент φ всегда меньше единицы и характеризует уменьшение скорости вязкой (реальной) жидкости по сравнению со скоростью невязкой жидкости за счет потерь энергии при протекании через отверстие.

Коэффициент расхода отверстия μ .

$$\mu = \varphi \varepsilon \quad (19-3)$$

Коэффициент расхода μ характеризует уменьшение расхода вязкой жидкости по сравнению с расходом невязкой жидкости вследствие возникающих потерь энергии и сжатия струи.

Обычно потери энергии при истечении через отверстия в тонкой стенке, когда струя касается только кромки отверстия, сравнительно небольшие. Так для малого круглого отверстия коэффициент сопротивления $\zeta = 0,06$, а коэффициент скорости $\varphi = 0,97$. В то же время сжатие струи весьма существенно и диаметр струи в сжатом сечении уменьшается по сравнению с диаметром отверстия на 20% и даже более. Так как площади струи и отверстия относятся как $\frac{d_c^2}{d^2}$, то из формулы (19-1) можно определить, что в этом случае коэффициент сжатия струи $\varepsilon \leq 0,64$. По данным разных исследователей, при весьма малых размерах отверстий по сравнению с размерами стенки, в которой расположено отверстие, коэффициент сжатия струи может достигать значения $\varepsilon = 0,61$. С учетом таких значений в средние значения коэффициента расхода $\mu = 0,59 \div 62$.

Более подробные данные о коэффициентах расхода через круглые и квадратные отверстия приведены в табл.-9.1.

таблица-9.1

Коэффициенты расхода для малых круглых и квадратных отверстий

Напор над центром отверстия $H, \text{ м}$	Коэффициенты расхода μ					
	для круглого отверстия с диаметром $d, \text{ м}$			для квадратного отверстия со стороной квадрата $d, \text{ м}$		
	0,015	0,06	0,3	0,015	0,06	0,3
0,2	0,62	0,6	—	0,63	0,61	—
0,3	0,62	0,6	0,59	0,62	0,61	0,6
0,5	0,61	0,6	0,59	0,62	0,61	0,6
1	0,61	0,6	0,6	0,61	0,61	0,6
2	0,6	0,6	0,6	0,61	0,6	0,6
6	0,6	0,6	0,59	0,6	0,6	0,6
15	0,59	0,59	0,59	0,6	0,6	0,6

Для случая *совершенного сжатия* имеем следующие средние численные значения коэффициентов ε , ζ , φ и μ_0 относящиеся к круглым и квадратным отверстиям (найденные опытным путем) для квадратичной области сопротивления:

$$\varepsilon = 0,63 \div 0,64; \quad \zeta = 0,6; \quad \varphi = 0,97; \quad \mu_0 = 0,62 \quad (19-4)$$

В случае *несовершенного сжатия* коэффициент расхода увеличивается и может быть определен по формуле

$$\mu_n = \mu \left[1 + 0,641 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \quad (19-5)$$

где ω – площадь отверстия;

Ω – площадь стенки, в которой расположено отверстие.

В случае *неполного сжатия* коэффициент расхода определяется по формуле

$$\mu_{n.n} = \mu \left(1 + k \frac{\chi_1}{\chi} \right) \quad (19-6)$$

где χ – полный периметр отверстия;

χ_1 – часть периметра, где отсутствует сжатие;

k – коэффициент, зависящий от формы отверстия; для круглых отверстий $k = 0,128$, для квадратных $k = 0,152$.

9.2 Истечение из малого отверстия под уровень (случай затопленного отверстия)

Так называемое затопленное отверстие представлено на рис. 19-1. Здесь Z – разность уровней в левом и правом сосудах. Соединяя уравнением Бернулли показанные на чертеже сечения 1–1 и 3–3 и выражая потерю напора между этими сечениями известной зависимостью

$$h_f = Z = \zeta \frac{V_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + \zeta_{2-3}) \frac{V_c^2}{2g} = (\zeta_{1-2} + 1) \frac{V_c^2}{2g} \quad (19-7)$$

окончательно получаем формулу для расхода Q того же вида, что и в случае истечения в атмосферу; только в эту формулу вместо величины H входит разность уровней Z жидкости в сосудах

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gZ} \quad (19-8)$$

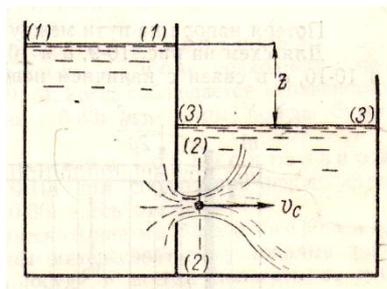


Рис. 9.1. Истечение из отверстия под уровень (затопленное отверстие).

Заметим, что в зависимости (19-7) через ζ_{1-2} и ζ_{2-3} обозначены коэффициенты сопротивления, учитывающие потери напора соответственно от сечения 1–1 до сечения 2–2 и от сечения 2–2 до сечения 3–3 (рис. 19-1). Имея в виду, что за сечением 2–2 получается резкое расширение струи до весьма больших размеров, можно считать $\zeta_{2-3} = 1,0$. Что касается численного значения μ_0 входящего в (19-8), то, как показывают опыты, она оказывается примерно таким же, как и при истечении в атмосферу.

Насадком называется весьма короткая напорная труба, присоединенная к отверстию.

Различают следующие основные типы насадков:

- a)* внешний цилиндрический насадок или насадок Вентури;
- b)* внутренний цилиндрический насадок или насадок Борда;
- c)* конические насадки;
- d)* коноидальный насадок, имеющий форму струи жидкости, вытекающей из отверстия в тонкой стенке.

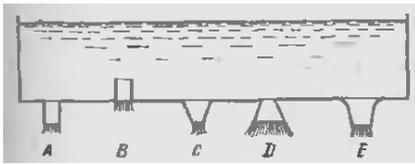


Рис. 9.2. Типы насадков

Представим себе истечение жидкости из отверстия, сделанного не в тонкой стенке, а в толстой (рис. 20-1, *a*). С гидравлической точки зрения здесь получаем насадок Вентури *ab*. Таким образом, изучая истечение жидкости из насадков, мы при этом изучаем также и истечение жидкости из отверстий, сделанных в *толстой стенке*.

Назовем сечение *a-a* «входным» (в отверстие), а сечение *b-b*, где струя при истечении в атмосферу *отделяется от стенки*, «выходным» (из отверстия).

Расстояние между сечениями *a-a* и *b-b* обозначим через l_n и назовем его «шиной насадка» или «гидравлической толщиной стенки».

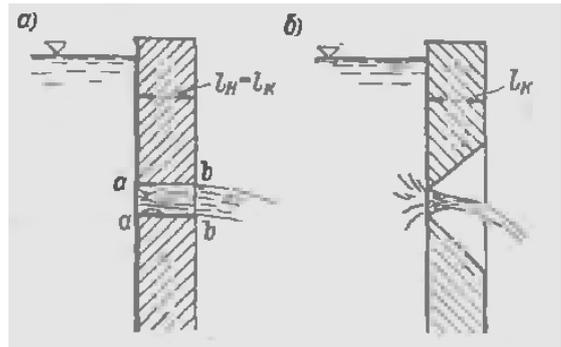


Рис. 9.3. Истечение из отверстия в тонкой стенке (*a*) и толстой стенке (*b*)

Для стенки на рис. 20-2, *b* «входное» и «выходное» сечения практически совпадают, причем $l_n \approx 0$. Поэтому стенка на этом рисунке в гидравлическом отношении должна рассматриваться, как тонкая (хотя конструктивная ее толщина l_k велика).

Толстой стенкой следует называть такую стенку при которой расстояние l_n между входным и выходным сечением нельзя практически считать равным нулю. Можно сказать, что насадок представляет собой весьма короткий напорный (на всем своем протяжении) водопровод при расчёте которого должны учитываться только местные потери напора. Величину же потерь напор по длине следует считать равным нулю.

Внешний круглоцилиндрический насадок (насадок Вентури)

Струя жидкости, обходя кромку *a*, благодаря силам инерции частиц жидкости, поступающих в насадок, сжимается до сечения ω_c , затем струя

расширяется и заполняет весь насадок. При этом получаем одну вальцовую область A , имеющую кольцевую форму.

В выходном сечении $B-B$, где на жидкость действует атмосферное давление ρ_a , имеем площадь живого сечения транзитной струи жидкости

$$\omega_B = \omega, \quad (20-1),$$

причём здесь ω - площадь отверстия, к которому присоединён насадок; как видно, при выходе в среду атмосферного давления сжатие струи отсутствует.

В отношении вальцовой области A , а также поверхности раздела, отделяющей транзитную струю от вальцовой области, следует иметь в виду всё то, что говорилось ранее. Вальцовая область, равно как и транзитная струю в пределах этой области, характеризуется наличием вакуума. Максимальный вакуум получается в сечении $C-C$, где струя имеет наибольшее сжатие и где скорости, а также кинетическая энергия жидкости, образующей транзитную струю, оказываются небольшими.

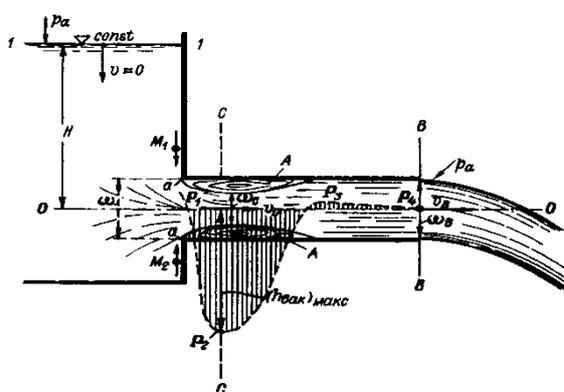


Рис. 20-3. Насадок Вентури.

Известно, что с возрастанием кинетической энергии потенциальная энергия должна уменьшаться. Если в сечении $B-B$ имеем атмосферное давление, то, двигаясь от этого сечения против течения и попадая в область, где скорости

благодаря сжатию струи оказываются большими, чем в сечении $B-B$, мы получим давление в этой области меньшее, чем в сечении $B-B$, т.е. меньше атмосферного давления.

Пьезометрическая линия $P_1P_2P_3P_4$ для насадка в соответствии со сказанным получает вид, изображённый на рисунке 20-1. Соединяя сечения 1-1 и $B-B$ или сечения 1-1 и 2-2 уравнением Бернулли получаем следующие расчётные формулы.

1. Случай истечения в атмосферу:

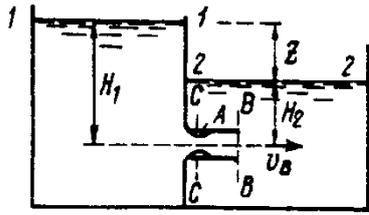


Рис. 20-4. Истечение из насадка Вентури под уровень.

$$g_B = \varphi \sqrt{2gH} \quad (20-2)$$

где g_B - скорость в выходном сечении $B-B$; H - превышение свободной поверхности жидкости в

сосуде над осью насадка; φ - коэффициент скорости:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + (\zeta_{нас})_a}}; \quad (20-3),$$

причём здесь $(\zeta_{нас})_a$ - коэффициент сопротивления в формуле

$$(h_j)_{1-B} = (\zeta_{нас})_a \frac{g_B^2}{2g} \quad (20-4),$$

где $(h_j)_{1-B}$ - местная потеря напора в насадке.

Расход Q при истечении из насадка

$$Q = \mu_H \omega \sqrt{2gH} \quad (20-5),$$

где μ_H - коэффициент расхода насадка,

$$\mu_H = \varepsilon_B \varphi = \varphi \quad (20-6),$$

так как для насадка коэффициент сжатия, отнесённый к сечению $B-B$, где давление атмосферное,

$$\varepsilon_B = \frac{\omega_B}{\omega} = 1,0 \quad (20-7).$$

2. Случай истечения под уровень. Здесь вместо (20-2) и (20-5) получаем

$$g_B = \varphi \sqrt{2gZ}; \quad (20-8)$$

$$Q = \mu_H \omega \sqrt{2gZ} \quad (20-9)$$

где Z - разность уровней жидкости; φ - коэффициент скорости, равный в данном случае:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{нас})_{подур}}} = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{нас})_a + 1}} \quad (20-10);$$

μ_H - коэффициент расхода насадка; μ_H имеет тот же смысл и то же численное значение, что и в предыдущем случае ($\mu_H = \varphi$).

Коэффициент сжатия ε_B для выходного сечения $B-B$ равен единице, т.е. $\varepsilon_B = 1,0$. Коэффициент сжатия ε_C для сечения $C-C$, где имеется максимальный вакуум, равняется коэффициенту сжатия при истечении из отверстия в тонкой стенке:

$$\varepsilon_C = 0,63 \div 0,64 \quad (20-11).$$

Коэффициент сопротивления при истечении из насадка в атмосферу равен коэффициенту сопротивления на вход в трубу.

$$(\zeta_{нас})_a = \zeta_{вх} = 0,5 \quad (20-12);$$

при истечении под уровень:

$$(\zeta_{нас})_{подур} = \zeta_{вх} + \zeta_{вых} = 0,5 + 1,0 = 1,5 \quad (20-13),$$

где $\zeta_{вых} = 1,0$.

Коэффициент скорости φ и коэффициент расхода насадка μ_H , как в случае истечения в атмосферу, так и в случае истечения под уровень, равны:

$$\varphi = \mu_H = \sqrt{\frac{1}{1 + (\zeta_{нас})_a}} = \sqrt{\frac{1}{(\zeta_{нас})_{подур}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,5}} = \sqrt{\frac{1}{1,5}}$$

или

$$\varphi = \mu_H = \sqrt{\frac{1}{1,5}} = 0,82 \quad (20-14).$$

Установим ещё величину коэффициента сопротивления ζ_{C-B} ; этот коэффициент нам понадобится в дальнейшем.

Коэффициент сопротивления ζ_{1-C} равен $\zeta_{отв}$ в случае отверстия в тонкой стенке. Относя ζ_{1-C} к скорости ϑ_B , имеем

$$\zeta_{1-C} = \frac{\zeta_{отв}}{\varepsilon_C^2} = \frac{0,06}{0,63^2} \approx 0,15 \quad (20-15),$$

а потому искомый коэффициент ζ_{C-B} оказывается

$$\zeta_{C-B} = (\zeta_{нас})_a - \zeta_{1-C} = 0,5 - 0,15 = 0,35 \quad (20-16).$$

В случаеб насадка Вентури (при истечении в атмосферу)

$$Q_{нас} = 0,82\omega\sqrt{2gH}; (\vartheta_B)_{нас} = 0,82\sqrt{2gH}. \quad (20-17).$$

В случае отверстия в тонкой стенке (при истечении в атмосферу)

$$Q_{отв} = 0,62\omega\sqrt{2gH}; (g_C)_{отв} = 0,97\sqrt{2gH} \quad (20-18).$$

Если величины H и ω для насадка и отверстия одинаковы, то в результате деления (20-17) на (20-18) получаем

$$\frac{Q_{нас}}{Q_{отв}} = \frac{0,82}{0,62} \approx 1,34 \quad (20-19)$$

$$\frac{(g_B)_{нас}}{(g_C)_{отв}} = \frac{0,82}{0,97} \approx 0,85 \quad (20-20).$$

Как видно, внешний цилиндрический насадок, присоединённый к отверстию, сделанному в тонкой стенке, даёт следующие эффекты: а) скорость истечения жидкости в атмосферу уменьшается на 15%; б) расход жидкости, вытекающей из сосуда, увеличивается на 34%.

Такое положение объясняется следующим. В связи с резким расширением струи в насадке, получается соответствующая дополнительная потеря напора, которая, в основном, и обуславливает, как мы видели, снижение скорости $(g_B)_{нас}$ в сечении $B-B$ примерно в $\left(\frac{1}{0,85}\right)$ раза, т.е. на 15% сравнительно со скоростью $(g_C)_{отв}$.

9.3 Внутренний круглоцилиндрический насадок (насадок Борда)

Рассмотрим только истечение жидкости в атмосферу (рис. 20-5).

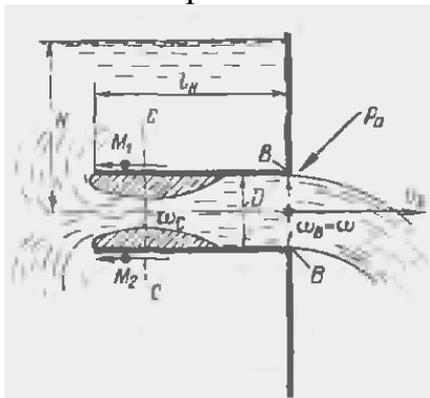


Рис. 9.5. Насадок Борда.

Насадок Борда отличается от насадка Вентури только условиями входа. Считая, что длина насадка Борда должна быть не менее $(3,5 \div 4) d$ коэффициент сжатия ϵ_C получаем равным

$$\epsilon_C = \frac{\omega_C}{\omega} = 0,5 \quad (20-21)$$

Как видно, для насадка Борда сжатие в сечении $C-C$ получается большим, чем для насадка Вентури. В связи с этим обстоятельством потеря напора, а также

скорость и вакуум в сечении С—С для насадка Борда также получаются большими, чем для насадка Вентури (при равных прочих условиях).

Коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{нас}}$ при $\varepsilon_C = 0,5$ оказывается равным

$$\zeta_{\text{нас}} = 1,0 \quad (20-22)$$

Остальные известные коэффициенты приобретают в случае насадка Борда следующие численные значения:

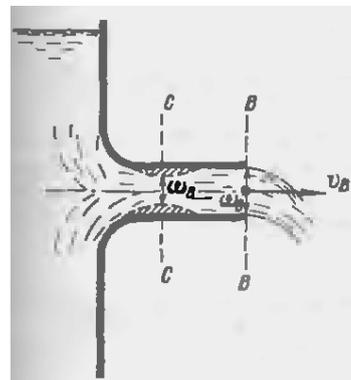
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{\text{нас}}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1}} = 0,71; \\ \mu_n &= \varphi = 0,71; \varepsilon_B = 1,0 \end{aligned} \right\} \quad (20-23)$$

Расчетные формулы здесь остаются те же, что и для насадка Вентури. Легко убедиться, что насадок Борда увеличивает расход жидкости, вытекающей из отверстия, но несколько меньше, чем насадок Вентури.

9.4 Насадки прочих типов

Будем иметь в виду только случай истечения в атмосферу.

1. Насадок со скругленными входными кромками. Если входные кромки скруглены, то сжатие струи в насадке уменьшается и площадь сечения струи ω_C увеличивается. В результате степень расширения струи от сечения С—С до сечения В—В снижается, причем потери напора уменьшаются, а следовательно, скорость истечения V_B увеличивается.



Как показывают опыты, путем скругления кромок насадка коэффициент расхода можно довести до величины $\mu_n = 0,95$.

2. Конические сходящийся и расходящиеся насадки. Представим на рис. 20-7 два указанных насадка, причем будем считать, что площадь отверстия, к которому приключен сходящийся насадок (ω_1), равна площади отверстия, к которому приключен расходящийся насадок (ω_1), т. е.

Рис. 20-6. Насадок со скругленными входными кромками

$$\omega_I = \omega_{II} \quad (20-24)$$

Сопоставляя в этом предположении сходящийся и расходящийся, а также внешний цилиндрический насадки, имеем

$$(h_f)_{сх} < (h_f)_{ц} < (h_f)_{расх} \quad (20-25)$$

поскольку потеря напора определяется степенью расширения струи в насадке; как и ниже, индексы «сх», «ц», «расх» указывают на то, что рассматриваемая величина относится или к сходящемуся, или к цилиндрическому, или к расходящемуся насадку.

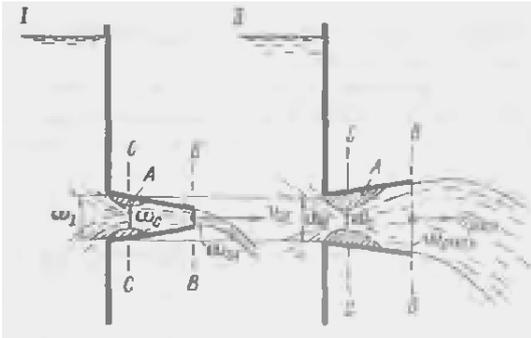


Рис. 20-6. Конические насадки

Учитывая (20-25), можем утверждать, что при одинаковых значениях напора H для всех рассматриваемых насадков будем иметь соотношение

$$V_{сх} > V_{ц} > V_{расх} \quad (20-26)$$

Действительно, легко видеть, что для расходящегося насадка в связи с неравенством (20-25) возвышение напорной линии (построенной для насадка) над центром входного сечения $B—B$ (равное, как известно, величине скоростного напора в сечении $B—B$) будет наименьшим, а следовательно, и скорость $V_{расх}$ будет также наименьшей.

3. Комбинированный насадок. С точки зрения увеличения расхода особенно выгодна комбинация коноидального насадка $a—б$ с расширяющимся насадком $б—в$. Здесь благодаря скруглению входных кромок мы добиваемся снижения потерь напора, а следовательно, увеличения скоростей в выходном сечении $в—в$.

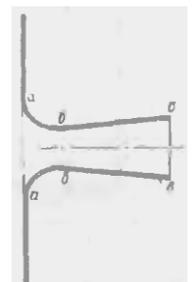


Рис. 20-7. Комбинированный насадок

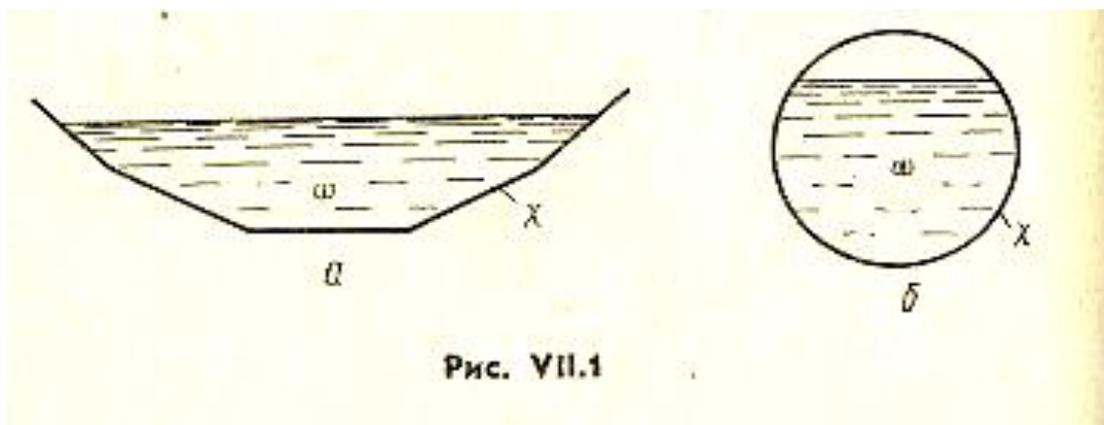
Глава X.

Равномерное движение жидкости в открытых руслах. Уравнение равномерного движения. Эмпирические формулы для коэффициента Шези и скоростной характеристики.

Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала. Основные типы задач по расчёту каналов. Допустимые минимальные и максимальные скорости

10.1 Особенности равномерного движения жидкости в открытых руслах

Движение в открытых руслах характеризуется наличием свободной поверхности, при этом смоченный периметр χ является лишь частью общего периметра живого сечения (рис.1). При равномерном движении в открытом русле в виду постоянства средней скорости вдоль движения будут постоянны также площадь и форма живого сечения и, следовательно, глубина, ширина, смоченный периметр, гидравлический радиус и другие характеристики движения. Необходимо отметить, что, кроме средней скорости $V = \frac{Q}{\omega}$ должны быть постоянны и местные скорости вдоль каждой линии тока. Следовательно, эпюры местных осреднённых скоростей в разных живых

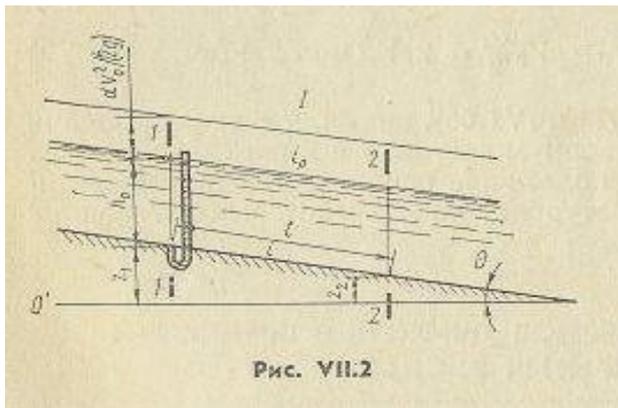


сечениях должны быть одинаковы. Несоблюдение последнего условия не позволяет считать движение равномерным, так как на переформирование скоростной структуры потока затрачивается дополнительная энергия, которая не характеризуется обычными потерями энергии по длине при

равномерном движении. Равномерное движение встречается в каналах, лотках, безнапорных трубах постоянного сечения.

10.2 Уравнение равномерного движения

Глубина равномерного движения называется *нормальной глубиной* и обозначается h_0 . При постоянной средней скорости и глубине (a ,



следовательно, и давлении $p = \rho gh_0$) вдоль движения потока потери энергии в уравнении Бернулли (II.57) могут быть только за счёт уменьшения отметки z по ходу движения (рис. VII.2). Разность отметок $z_1 - z_2$ в двух расчётных сечениях, отнесённая к

расстоянию между этими сечениями называется *уклоном дна русла*

$$i = \frac{z_1 - z_2}{l} = \sin \Theta, \quad (1)$$

где Θ - угол наклона дна русла к горизонту.

Таким образом, при равномерном движении в открытых руслах обязательно должен быть положительный уклон дна, т.е. снижение отметок сечений z в то время как при равномерном движении в напорных трубах уменьшается пьезометрический напор $H = z + \frac{p}{\rho g}$, в частности

пьезометрическая высота $\frac{p}{\rho g}$ (и, следовательно, давление p), а отметка z может оставаться постоянной или даже увеличиваться. Так как уклон дна обычно невелико, то условно считаются живые сечения и глубины вертикальными, а не перпендикулярными линиями дна. Если в дне или стенках русла в каком-либо сечении установить пьезометры, то уровень

жидкости в них совпадает с уровнем воды в русле в этом сечении. Отсюда следует, что пьезометрический уклон i_p равен уклону поверхности потока и, следовательно, уклону дна i . С учётом (III.9) можно записать

$$i = i_p = J, \quad (2)$$

где J – гидравлический уклон.

Уравнение (2) называют *уравнением равномерного движения в открытых руслах*.

10.3 Эмпирические формулы для скоростного множителя (коэффициента Шези) и скоростной характеристики

Уравнение (2) позволяет преобразовать зависимости равномерного движения для расчёта открытых русел. Скорость определяется с учётом зависимостей (III.73) и (III.76) по формуле Шези

$$V = C \sqrt{Ri} \quad (3)$$

Или по формуле $V = W \sqrt{i} \quad (4)$

Расход $Q = \omega W \sqrt{i} \quad (5)$

В этих формулах C называется *скоростным множителем* (коэффициентом Шези), а $W = C \sqrt{R}$ *скоростной характеристикой*.

Для C и W разными исследователями был предложен ряд эмпирических формул, многие из которых в настоящее время имеют лишь историческое значение. Здесь приводятся лишь наиболее распространённые формулы.

К таким, прежде всего, относится формула Н.Н Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y$$

Выведенная из неё формула для скоростной характеристики

$$W = \frac{1}{n} R^{y+1/2} = \frac{1}{n} R^z. \quad (6)$$

В этих формулах: n – коэффициент шероховатости, зависящий от поверхности стенок русла и приводимый в табл. III.4; $z=y+1/2$ – показатель степени, определяемый по формуле Н. Н Павловского

$$z = 0,37 + 2,5 \sqrt{n} - 0,75 (\sqrt{n} - 0,1) \sqrt{R}. \quad (7)$$

(III.74). Применение готовых табличных значений значительно облегчает расчёты, освобождая проектировщика от необходимости возводить в дробную степень значения гидравлического радиуса R . Однако при анализе зависимостей для гидравлических и геометрических характеристик русла удобно всё же пользоваться формулами типа (III.74) или (VII.6), но с постоянным показателем степени.

В литературе приводятся формулы типа (III.74) с показателям степени $y=1/5$ (формула Форхгеймера) и $y=1/6$ (формула Манинга). С учётом этого частные виды формулы для скоростной характеристики приводятся к виду

$$W = \frac{1}{n} R^{0,7} \quad (8)$$

и

$$W = \frac{1}{n} R^{0,67} \quad (9)$$

Выбор осреднённого показателя степени z может быть сделан с помощью таблицы (III.5) построенные графики широко применяются в инженерной практике при расчётах каналов, лотков, безнапорных труб и тоннелей. Однако эти формулы имеют и недостатки. Так как в § III.6 было показано, что скоростной множитель C зависит от гидравлического коэффициента трения λ

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (10)$$

и, следовательно, C в общем случае зависит от тех же факторов, от которых зависит λ , т.е. от относительной шероховатости и числа Рейнольдса. С учётом того, что открытые русла, в отличие от напорных труб, характеризуются в качестве линейного размера гидравлическим радиусом R ,

зависимости для C при турбулентном режиме в общем виде можно записать так:

$$C=f\left(\frac{\Delta_{эkv}}{R}, Re=\frac{VR}{\nu}\right), \quad (11)$$

где $\Delta_{эkv}$ — эквивалентная высота выступов шероховатости, зависящая, как и коэффициент шероховатости n , от характеристики поверхности.

Зависимости (VII.11), а также аналогичные ей зависимости (III.64) и (III.65) для труб при определении λ показывают, что именно относительная шероховатость $\Delta_{эkv}/R$ должна влиять на гидравлические сопротивления и скоростной множитель C

В двух первых областях на величину λ влияет число Рейнольдса $Re=\frac{VR}{\nu}$.

Таким образом, и скоростной множитель C , и скоростная характеристика W также зависят от числа Re , но формулы (III.74) и (III.6) этой зависимости не отражают. Следовательно, эти формулы справедливы только для гидравлически шероховатых русел и квадратичного сопротивления).

При работе каналов в переходной области сопротивления значения λ возрастают, а скоростной множитель C , согласно формуле (III.10), должен уменьшиться, что не учитывает формула (III.74), она завышает фактическую скорость и пропускную способность канала.

Обычно в переходной области сопротивления работают канализационные (водоотводные) безнапорные трубы (рис. VII.1,б), что следует учитывать при их расчёте. Для таких труб Н. В. Фёдоровым предложена формула

$$W=41g \left(\frac{\Delta_2}{13,86R} + \frac{a_2}{Re} \right) \sqrt{2gR}, \quad (12)$$

эквивалентная шероховатость Δ_2 и коэффициент a_2 определяются по табл. III.3. Эта формула отражает зависимость скоростной характеристики W от относительной шероховатости $\frac{\Delta_2}{R}$ и числа Рейнольдса Re .

Н.Ф. Фёдоровым по формулам (VII.5) и (VII.4) с учётом (VII.12) составлены расчётные таблицы пропускной способности и скорости, водоотводных трубах разных диаметров D при разных уклонах i и разных наполнениях $\frac{h_0}{D}$.

Для каналов и лотков произвольного сечения А.Д. Альтшулем предложена формула

$$C = 25 \left[\frac{R}{(80n)^6 + \frac{0.025}{\sqrt{Ri}}} \right]^{1/6} \quad (13)$$

Эта формула косвенно учитывает влияние числа $Re = \frac{VR}{\nu}$, зависящего скорости, которая пропорциональна величине \sqrt{Ri} . Пользование формулой, однако, затруднительно из-за необходимости возводить расчётные величины в степени 6 и 1/6 (вспомогательные таблицы зависимостей скоростного множителя от трёх параметров R , n и i не составлены).

Влияние уклона отражает также формула Гангилье-Куттера, которой в настоящее время практически не пользуются из – за её громоздкости. Из формул многочленного типа следует отметить формулу И.И.Агроскина

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \lg R, \quad (14)$$

которая приводит к результатам, близким к полученным по формуле Н.Н Павловского, но она также не учитывает влияние числа Рейнольдса.

В работах А. А. Угинчуса, Н.Д. Касьянова и других показан..., что в некоторых случаях движения жидкости гидравлический радиус R не является достаточной характеристикой живого сечения при определении C или W .

Из изложенного выше можно сделать вывод, что приводимые в литературе формулы для скоростного множителя или скоростной характеристики носят более или менее приближённый характер.

**Таблица VII.1. Коэффициент шероховатости n для естественных русел
(по М. Ф. Срибному)**

Характеристика русла	n
Естественные русла в благоприятных условиях по засорению	0,025
Русла равнинного типа больших и средних рек в благоприятном состоянии ложа	0,033
Сравнительно чистые русла постоянных равнинных водотоков с некоторыми искривлениями в плане или профиле	0,04
Русла больших и средних рек значительно засоренные, извилистые и частично заросшие	0,05
Русла периодических водотоков сильно засоренные и извилистые. Галечно-валунные русла горного типа	0,067
Валунные русла горного типа с бурливым пенистым течением	0,08—0,1
Реки болотного типа	0,133
Потоки типа селевых, состоящие из грязи и камней	0,2

Примечание. Настоящая таблица, как и некоторые другие, даны в сокращённом виде.

**Таблица VII.2. Коэффициент шероховатости n для равнинных рек по
(Б. В. Полякову)**

Характеристика русел	n
Русло песчаное, ровное, без растительности с незначительным влечением донных наносов	0,02—0,023
Русло песчаное, извилистое, с большим перемещением донных наносов, пойма, покрытая лугом без кустарников	0,023—0,033
Пойма, покрытая кустарником или редким лесом	0,033—0,045
Пойма, покрытая лесом	0,045—0,06

В естественных руслах форма живого сечения изменяется по длине русла, поэтому движение в них не является равномерным. Однако в тех случаях, когда сечение русла мало изменяется по длине, можно с известным приближением пользоваться формулами равномерного движения. Коэффициенты шероховатости n принимаются при этом по данным М.Ф. Срибного (табл. VII.1) или В. Полякова (табл. VII.2).

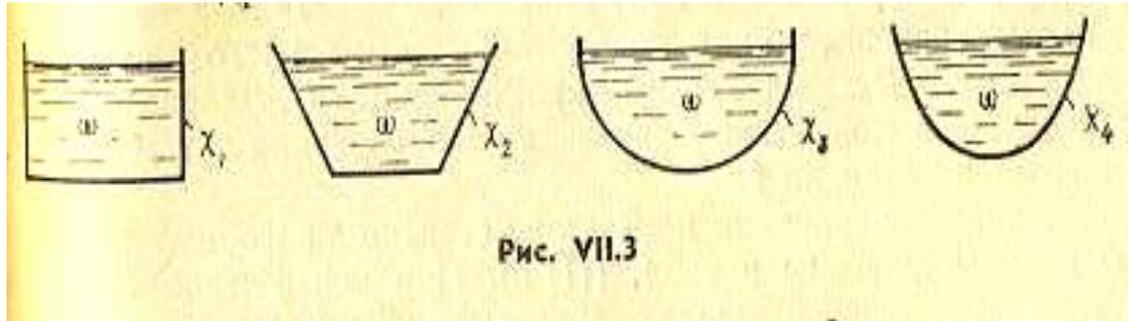
10.4 Гидравлически наивыгоднейшее сечение и максимальный гидравлический радиус

Расход в открытом канале или лотке может быть выражен формулой (5) с учётом зависимости (6) и (8)

$$Q = \omega \frac{1}{n} \left(\frac{\omega}{\chi} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{i} \quad (15)$$

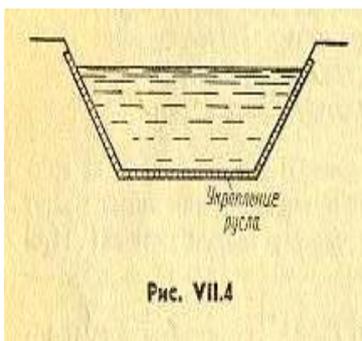
где χ – смоченный периметр.

Русла различных форм поперечного сечения (рис.3) при одинаковой площади ω имеют разный смоченный периметр χ и, следовательно, гидравлический радиус $R = \frac{\omega}{\chi}$. При заданных уклоне дна i , площади сечения ω и коэффициенте шероховатости n наибольшая пропускная способность будет у русла, имеющего максимальный гидравлический радиус или минимальный смоченный периметр.



Сечение таких русел называются *гидравлически наивыгоднейшими*. Может быть и другое определение такого сечения – при заданном расходе Q , уклоне i и коэффициенте шероховатости оно имеет наименьшую площадь живого сечения. На сооружение каналов с гидравлически наивыгоднейшими сечениями затрачивается минимум земляных работ (площадь сечения) или минимум работ по укреплению дна и берегов (смоченный периметр). Следует при этом иметь ввиду, что обычно бровка канала и уровень укрепления возвышаются над уровнем воды (рис. 4), поэтому площадь сечения и смоченный периметр принимаются с некоторым запасом по сравнению с гидравлически наивыгоднейшими.

Из различных форм живого сечения (рис.3) наиболее выгодным будет полукруговое сечение, так как в этом случае при заданной площади будет наименьший смоченный периметр. На практике чаще делают трапецеидальные и параболические сечения, так как полукруг имеет в верхней части вертикальные стенки и требует бетонного или железобетонного укрепления, даже в случаях, когда по допустимым на



размыв скоростям в этом нет необходимости.

Для определения гидравлически наивыгоднейшего сечения необходимо найти величину максимального гидравлического радиуса.

Умножим и разделим правую часть уравнения (15) на R^2 и после простых преобразований получим

$$\frac{Qn}{\sqrt{i\psi}} = R^{2+z} \quad (16)$$

где функция ψ представляет собой отношение $\psi = \omega/R^2$ (17)

Для гидравлически наивыгоднейшего сечения $R=R_{\max}$, а $\psi = \psi_{\min} = \psi$ г. н. тогда

$$\frac{Qn}{\sqrt{i\psi}_{\text{г.н.}}} = R_{\max}^{2+z} \quad (18)$$

или

$$R_{\max} = \left(\frac{Qn}{\sqrt{i\psi}} \right)^{\frac{1}{2+z}} = f \left(\frac{Qn}{\sqrt{i\psi}}, z \right). \quad (19)$$

Таким образом, для определения максимального гидравлического радиуса R_{\max} необходимо кроме расхода Q , уклона i и коэффициента шероховатости n знать также значение величины ψ г.н. и показателя степени z .

Осредненные значения показателя степени z в формулах (6) и (19) приведены в таблице (5). При неизвестном R значениями z задаются в пределах, соответствующих заданному значению коэффициента шероховатости n .

Величина ψ г.н. зависит от формы сечения русла. Так, например, для сегментного русла гидравлически наивыгоднейшее значение ψ г.н. = ψ_{\min} соответствует полукругу, когда $\omega = \frac{\pi D^2}{8}$, а

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2 \cdot 2}{8\pi D} = \frac{D}{4} \text{ и } \psi_{\text{г.н.}} = 2\pi = 6,28. \text{ При известном } \psi \text{ г.н. по формуле (19)}$$

определяется величина R_{\max} . Затем, при необходимости, по таблице (5) уточняется значение z , а затем и R_{\max} .

Для упрощения расчетов R_{\max} находят по специальным таблицам в зависимости от значений Qn/\sqrt{i} ψ г.н. и осредненных z [5,6 и др.] или по графику (рис.5), построенному по зависимости (19). Анализ графика показывает, что влияние z на R_{\max} сказывается лишь для относительно больших каналов.

Для русел, отличающихся от гидравлически наивыгоднейших, $R < R_{max}$. Решая совместно уравнения (16) и (18), получим

$$\left(\frac{R}{R_{max}}\right)^{2+z} = \frac{\psi_{г.н.}}{\psi} \quad (20)$$

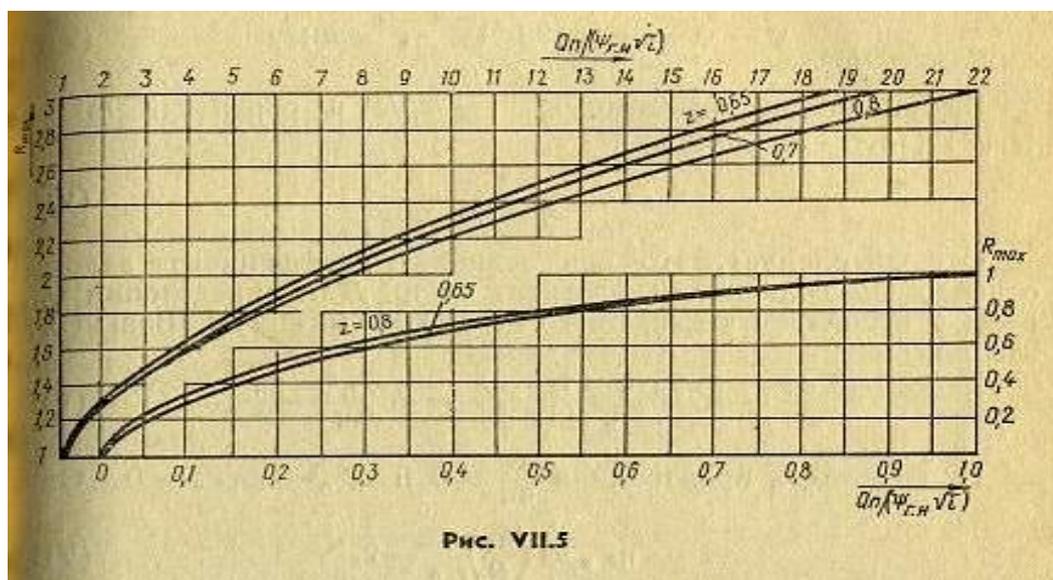


Рис. VII.5

Зависимости между основными геометрическими и гидравлическими характеристиками русел трапецидального сечения. Зависимости между основными гидравлическими и геометрическими и геометрическими характеристиками русел параболического сечения

Площадь ω и смоченный периметр χ трапецидального сечения (рис.6) могут быть выражены формулами.

$$\omega = bh_0^2 + mh_0^2 \quad (21)$$

$$\chi = b + 2h_0\sqrt{1+m^2} \quad (22)$$

где $m = \text{ctg } \Theta$ – коэффициент заложения откосов, принимаемый либо по конструктивным соображениям для укрепленных русел, либо в зависимости от категории грунта неукрепленных каналов: для мелкозернистых песчаных грунтов $m = 3 \div 3,5$; для

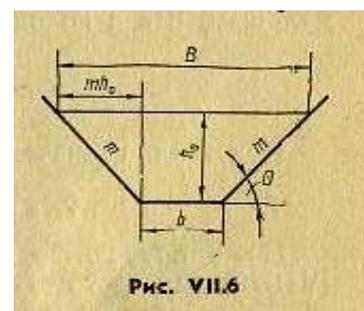


Рис. VII.6

супесчаных грунтов $m = 2 \div 2,5$; для плотных супесей и лёгких суглинков $m = 1,5 \div 2$; для тяжёлых суглинков – $m = 1 \div 1,5$; для тяжёлых плотных глин – $m = 1$; для скальных пород $m = 0,5 \div 0,1$.

В частных случаях по формулам (21) и (22) ведётся также расчёт русел прямоугольного сечения (при $m=0$) и треугольного (при $b=0$).

Решая совместно уравнения (21) и (22) относительно χ , получим их формулу

$$\chi - \frac{\omega}{h_0} = h_0 \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right) \quad (23)$$

Разделим обе части уравнения (23) на R . Тогда с учётом (17) и того, что $\chi = \omega/R = \psi R$, получим

$$\psi - \psi \frac{R}{h_0} = \frac{h_0}{R} \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right) \quad (24)$$

Введя новую переменную $\eta = h_0/R$ и, обозначив $m' = 2\sqrt{1+m^2} - m$, получим

$$\psi = m' \frac{\eta^2}{\eta - 1} \quad (25)$$

Отсюда следует, что при заданном коэффициенте заложения откосов m величина ψ зависит от η . Для определения ψ г.н. = ψ_{\min} исследуем выражение (25) на минимум. Возьмём производную

$$\frac{d\psi}{d\eta} = m' \frac{2\eta(\eta - 1) - \eta^2}{(\eta - 1)^2} = m' \frac{\eta^2 - 2\eta}{(\eta - 1)^2} \quad (26)$$

При $\psi = \psi$ г.н. производная $d\psi/d\eta = 0$ и $\eta_{г.н.}^2 - 2\eta_{г.н.} = 0$. Отсюда

$$\eta_{г.н.} = \left(\frac{h_0}{R} \right)_{г.н.} = 2, \quad (27)$$

т. е. для всех гидравлически наивыгоднейших сечений трапецидальных русел гидравлический радиус (а он является максимальным) = половине глубины:

$$R_{\max} = \frac{h_{0г.н.}}{2} \quad (28)$$

Подставляя значение $\eta_{г.н.} = 2$ в формулу (25), получим

$$\psi_{z.H.} = 4m' = 8\sqrt{1+m^2} - 4m \quad (29)$$

Ниже приводятся величины $\psi_{z.H.}$, подсчитанные по формуле (29) для часто встречающихся значений m ;

m	0	0,5	1	1,5	2,0	2,5
$\psi_{z.H.}$	8	6,944	7,312	8,424	9,888	11,54

В литературе по гидравлике приводится также гидравлически наивыгоднейшее отношение ширины по дну к глубине канала

$$\beta_{z.H.} = \left(\frac{b}{h_0} \right)_{z.H.}$$

Из формул (21) получим

$$\beta_{z.H.} = \left(\frac{b}{h_0} \right)_{z.H.} = \left(\frac{\omega}{h_0^2} \right)_{z.H.} - m = \frac{\omega_{z.H.}}{R_{\max}^2} \cdot \frac{R_{\max}^2}{h_0^2} - m = (8\sqrt{1+m^2} - 4m) \times \frac{1}{4} - m = 2\sqrt{1+m^2} - 2m. \quad (30)$$

Отсюда следует, например, что при $m = 1$ $\beta_{z.H.} = 0.82h_0$, а при $m = 0$ (прямоугольное сечение) $\beta_{z.H.} = 2h_0$

Для русел, отличающихся от гидравлически наивыгоднейших, установим зависимости геометрических характеристик от максимального гидравлического радиуса R_{\max} . Для этого разделим все члены уравнения (24) на ψ и с учётом (29) запишем его в виде

$$1 - \frac{R}{h_0} - \frac{h_0}{R} \cdot \frac{\psi_{z.H.}}{4\psi} = 0. \quad (31)$$

Далее умножим это выражение на $\frac{R_{\max}^2}{h_0 R}$ и с учётом (20) получим

$$\left(\frac{R_{\max}}{h_0} \right)^2 - \frac{R_{\max}^2}{h_0 R} + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^z = 0. \quad (32)$$

Выведём обозначения: $\eta_h = \frac{h_0}{R_{\max}}$ - относительная глубина; $\eta_R = \frac{R}{R_{\max}}$ - относительный гидравлический радиус.

С учётом этого решаем уравнение (32) относительно $\eta_h = \frac{h_0}{R_{\max}}$:

$$\eta_h = \frac{2R}{1 \pm \sqrt{1 - (\eta_R)^{2+z}}} \quad (33)$$

Отсюда нормальной глубина

$$h_0 = \frac{2R}{1 \pm \sqrt{1 - (\eta_R)^{2+z}}} \quad (34)$$

Таблица VII.3. Основные геометрические соотношения для трапецидальных каналов

$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}}$	$\eta_h = \frac{h_e}{h_{\max}}$	$\frac{b}{R_{\max}}$	$\eta_b = b/R_{\max}$ при m					
			0	0,5	1	1,5	2	2,5
0,65	0,71	1,35	15,23	12,86	13,21	14,98	17,38	20,18
0,7	0,78	1,28	13,12	11,01	11,22	12,65	14,65	16,97
0,75	0,86	1,22	11,33	9,43	9,52	10,66	12,25	14,21
0,8	0,96	1,17	9,8	8	7,98	8,88	10,17	11,71
0,85	1,06	1,12	8,43	6,77	6,64	7,26	8,27	9,48
0,9	1,2	1,08	7,16	5,62	5,35	5,75	6,46	7,34
0,92	1,22	1,06	6,67	5,15	4,83	5,13	5,7	6,49
0,94	1,35	1,044	6,2	4,65	4,31	4,5	4,95	5,56
0,96	1,44	1,029	5,7	4,23	3,77	3,83	4,16	4,61
0,98	1,6	1,014	5,07	3,61	3,04	2,95	3,07	3,33
0,99	1,7	1,007	4,74	3,26	2,63	2,44	2,46	2,59
0,998	1,87	1,001	4,3	2,8	2,07	1,72	1,58	2,48
1	2	1	4	2,47	1,66	1,21	0,94	0,76 Г. н. с.*
0,999	2,1	1,001	3,8	2,24	1,37	0,84	0,54	0,28
0,998	2,15	1,001	3,72	2,17	1,25	0,69	0,34	0,01
0,997	2,19	1,002	3,65	2,07	1,15	0,56	0,13	—
0,99	2,37	1,007	3,39	1,77	0,74	0,04	—	—
0,98	2,53	1,014	3,21	1,53	0,42	—	—	—
0,97	2,7	1,021	3,03	1,29	0,08	—	—	—
0,96	2,87	1,029	2,87	1,06	—	—	—	—
0,94	3,09	1,044	2,7	0,83	—	—	—	—
0,92	3,34	1,06	2,54	0,53	—	—	—	—
0,9	3,58	1,08	2,4	0,26	—	—	—	—
0,85	4,21	1,12	2,13	—	—	—	—	—

* Г. н. с. — гидравлически наиболее выгодные сечения.

Анализ формулы (34) показывает, что для каждого значения $\eta_R = \frac{R}{R_{\max}}$ в общем случае может быть два значения h_0 . Одно решение получается при $R = R_{\max}$ ($\eta_R = 1$), в этом случае русло является гидравлически наиболее выгодным и $h_0 = 2 R_{\max}$. Если же $R < R_{\max}$, т.е. $\eta_R < 1$, то при знаке (+) перед корнем $h_0 < 2R$, что соответствует расширенному (по сравнению с гидравлически наиболее выгодным) сечению, а при знаке (-) $h_0 > 2R$, что соответствует суженному сечению. Анализ также показывает, что влияние показателя степени z в формулах (33) и (34) существенно не сказывается на величине глубины h_0 и практически можно принимать средние значения $z =$

0,7. С учётом этого в табл.3. приведены значения $\eta h = h_0/R_{\max}$ в зависимости от $\eta R = R/R_{\max}$ для суженных и расширенных сечений.

Далее найдём зависимость площади живого сечения от относительного гидравлического радиуса ηR .

Для этого разделим обе части уравнения (20) на $(R/R_{\max})^2$ и с учётом ψ по формуле (17) получим

$$\frac{\omega}{\psi_{z,h} R_{\max}^2} = \left(\frac{R_{\max}}{R} \right)^z \quad (35)$$

или в относительных величинах

$$\eta_{\omega} = \frac{1}{\eta^z R}, \quad (36)$$

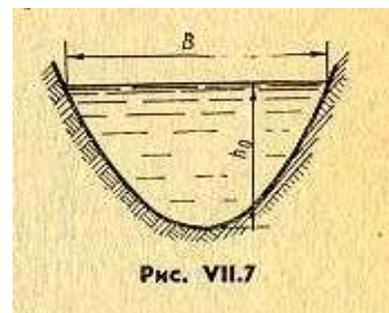
Где: $\eta_b = \frac{\omega}{h_0 R_{\max}} \cdot \frac{R_{\max}}{R_{\max}} - m \frac{h_0}{R_{\max}} = \psi_{z,h} \left(\frac{R_{\max}}{R} \right)^z \frac{R_{\max}}{h_0} - m \frac{h_0}{R_{\max}} = \frac{\psi_{z,h}}{\eta_K^y \eta_p} - m \eta_h. \quad (37)$

В табл.3. в зависимости от $\eta R = \frac{R}{R_{\max}}$ приведены также значения относительной площади живого сечения η_{ω} и (для разных коэффициентов заложения откосов m) значения относительного ширины η_b .

Таблица позволяет определить три из четырёх величин R , h_0 , b или ω при известной одной из них.

Анализ таблицы показывает, что даже при значительных изменениях ширины по дну b или глубины h_0 площадь живого сечения изменяется незначительно. Область, в которой $\omega \leq 1,05\omega_{\min} = 1.05\omega_{г.н}$ (т.е. $\eta_{\omega} \leq 1,05$), можно считать областью гидравлически выгодных сечений. В пределах этой области глубина h_0 и ширина по дну b могут принимать из конструктивных или эксплуатационных соображений, а объём земляных работ будет близок к минимальному.

Необходимо отметить, что диапазон суженных сечений ограничен минимальной шириной по дну $b = 0$. Такое сечение является треугольным.



Поэтому в табл.3. не для всех суженных сечений имеются значения относительной шириной η_b .

Зависимости между основными гидравлическими и геометрическими и геометрическими характеристиками русел параболического сечения (рис.7). Ширина параболическими русла определяется по формула

$$B = 2\sqrt{2ph_0}, \quad (38)$$

где p – параметр параболы.

Площадь живого сечения

$$\omega = \frac{2}{3}Bh_0 = \frac{2}{3}2\sqrt{2ph_0}h_0 = \frac{1.8856h_0^2}{\sqrt{\frac{h_0}{p}}}. \quad (39)$$

Смоченный периметр

$$\chi = \rho \left[\sqrt{2\frac{h_0}{p} \left(1 + 2\frac{h_0}{p}\right)} + \ln \left(\sqrt{2\frac{h_0}{p}} + \sqrt{1 + 2\frac{h_0}{p}} \right) \right] = pf_1\left(\frac{h_0}{p}\right), \quad (40)$$

где $f_1\left(\frac{h_0}{p}\right)$ - выражение в квадратных скобках.

Гидравлический радиус

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{1.8856h_0^2}{\sqrt{\frac{h_0}{p}} p \cdot f_1\left(\frac{h_0}{p}\right)} = \frac{1.8856h_0\sqrt{\frac{h_0}{p}}}{f_1\left(\frac{h_0}{p}\right)} = f_2\left(\frac{h_0}{p}\right)h_0 \quad (41)$$

где

$$f_2\left(\frac{h_0}{p}\right) = \frac{1.8856\sqrt{\frac{h_0}{p}}}{f_1\left(\frac{h_0}{p}\right)}$$

При $z = 0,7$ из уравнения (20) следует

$$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}} = 2,7\sqrt{\frac{\psi_{z.н.}}{\psi}} \quad (42)$$

где функция ψ определяется по формуле

$$\psi = \frac{\omega}{R^2} = \frac{\chi}{R} = \frac{Pf_1\left(\frac{h_0}{P}\right)}{f_2\left(\frac{h_0}{P}\right)h_0} = f_3\left(\frac{h_0}{P}\right) \quad (43)$$

Исследуя функцию ψ на минимум, И. И. Агроскин показал, что $\psi_{г.н} = \psi_{\min} = 6,56$ (вывод здесь опускаем).

Из формулы (41) следует, что $h_0 = \frac{R}{f_2\left(\frac{h_0}{P}\right)}$, и, разделив это выражение на

R_{\max} , получим

$$\eta_h = \frac{\eta_R}{f_2\left(\frac{h_0}{P}\right)} \quad (44)$$

Таким образом, относительная глубина η_h зависит от относительного гидравлического радиуса η_R . Более подробный анализ показывает, что функция $f_2\left(\frac{h_0}{P}\right)$ имеет максимум и, следовательно, для одного значения η_R имеется два значения η_h , т.е. имеются суженные и расширенные сечения.

С помощью зависимостей (38) и (39) могут быть подсчитаны значения

$$\eta_B = \frac{B}{R_{\max}}, \quad \eta_P = \frac{P}{R_{\max}}, \quad \eta_\omega = \frac{\omega^2}{\psi_{г.н.} R_{\max}^2}$$

Результаты этих подсчетов приведены в таблице (4), в которой также

Таблица VII.4. Основные геометрические соотношения для параболических каналов

$\frac{h}{p}$	$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}}$	$\tau_h = \frac{h}{R_{\max}}$	$\eta_B = \frac{B}{R_{\max}}$	$\tau_p = \frac{p}{R_{\max}}$	$\eta_{\omega} = \frac{\omega}{\psi_{г. н.} R_{\max}^2}$
0,1	0,75	1,16	10,38	11,6	1,223
0,15	0,8	1,26	9,17	8,37	1,171
0,2	0,83	1,33	8,41	6,65	1,136
0,3	0,88	1,44	7,45	4,81	1,093
0,4	0,91	1,53	6,85	3,83	1,067

0,5	0,93	1,61	6,43	3,21	1,049
0,6	0,95	1,67	6,1	2,79	1,037
0,7	0,96	1,73	5,85	2,47	1,027
0,8	0,97	1,78	5,64	2,23	1,021
0,9	0,98	1,83	5,46	2,03	1,015
1	0,984	1,88	5,31	1,88	1,011
1,2	0,992	1,96	5,06	1,63	1,006
1,4	0,996	2,03	4,86	1,45	1,003
1,6	0,999	2,1	4,69	1,31	1,001

1,885	1	2,19	4,5	1,16	1 Г. н. с.

2	1	2,22	4,44	1,11	1,002
2,2	0,998	2,28	4,35	1,04	1,003
2,4	0,997	2,32	4,26	0,97	1,004
2,6	0,996	2,37	4,18	0,913	1,005
2,8	0,995	2,42	4,1	0,864	1,006
3	0,989	2,47	4,03	0,82	1,008
3,5	0,986	2,566	3,88	0,73	1,011
4	0,978	2,656	3,76	0,66	1,016
4,5	0,972	2,748	3,67	0,61	1,022
5	0,965	2,825	3,57	0,565	1,028
5,5	0,957	2,9	3,5	0,527	1,031
6	0,949	2,97	3,43	0,495	1,035

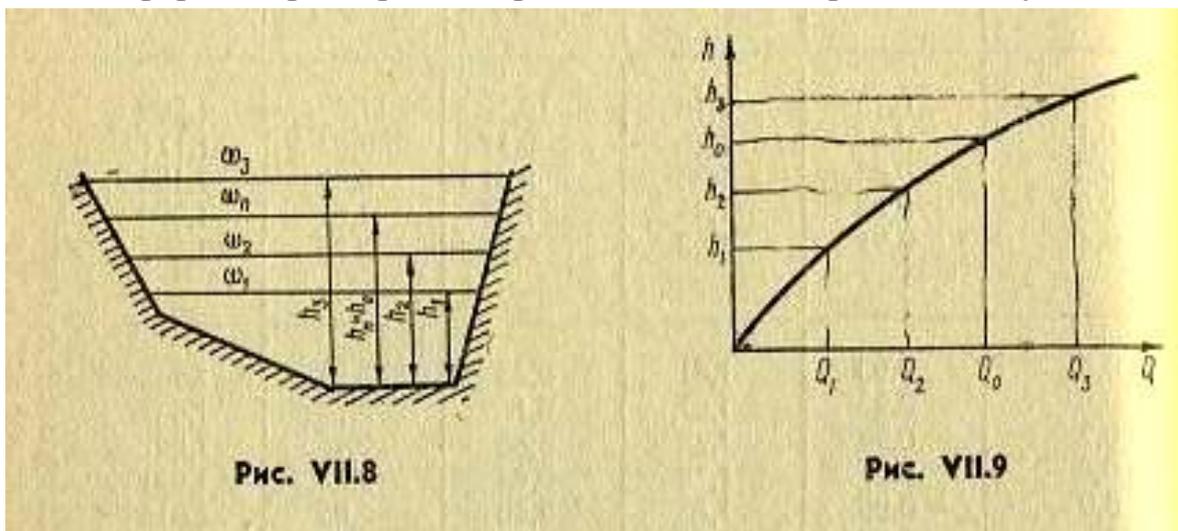
выделена область гидравлически выгодных сечений.

Аналогично можно установить соответствующие зависимости и для других форм русел.

10.5 Основные типы задач по расчёту каналов

Расчёт каналов в общем случае ведется по формуле (5), из которой определяются те или иные неизвестные величины в зависимости от условий задачи.

Определение нормальной глубины h_0 . В этой задаче обычно известны форма и размеры поперечного сечения, продольный уклон дна i ,



характеристика (и, следовательно, коэффициент

шероховатости n) поверхности дна и стенок русла и расчетный расход Q .

Для русел произвольной формы поперечного сечения (рис.8) для определения нормальной глубины можно пользоваться способом подбора, при котором задаются глубинами h_1, h_2, \dots, h_n , затем вычисляют соответствующие значения площадей живого сечения ω , смоченных периметров χ , гидравлических радиусов R , скоростных характеристик W и расходов $Q = \omega W \sqrt{i}$. Найденные значения расходов сравниваются заданным расходом Q . Если $Q_n = Q$, то $h_n = h_0$. Средняя скорость в живом сечении определяется как $V = \frac{Q}{\omega_n}$. Подбор можно упростить, построив график $Q = f(h)$

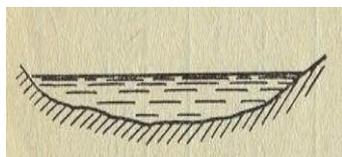


Рис.10.

по нескольким произвольным точкам (рис.9). По графику находят глубину h_0 , соответствующую заданному значению расхода Q_0 .

Зависимость $Q = f(h)$ называют *кривой расходов*. Ею удобно пользоваться для определения глубин, соответствующих разным расходам в русле, т. е. расходам разной обеспеченности. Способы подбора и построения кривой расходов применяются также для определения бытовой глубины в естественных руслах (рис. 10) в случаях, когда движение воды в них условно можно считать равномерным.

Аналитически нормальную глубину можно найти также из приближенной зависимости, называемой *показательным законом*, согласно которому

$$\frac{K_2^2}{K_1^2} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^x \quad (45)$$

где x – гидравлический показатель русла; h_1 и h_2 – произвольно назначенные глубины; K_1 и K_2 – им соответствующие расходные характеристики, определяемые по формуле

$$K = \omega W. \quad (46)$$

Гидравлический показатель русла x определяют из формулы (45)

$$x = \frac{21g \frac{K_2}{K_1}}{1g \frac{h_2}{h_1}} \quad (47)$$

Вычислив предварительно значение расчётной расходной характеристики $K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}$, определяют затем искомую нормальную глубину протекания потока

$$h_0 = h_1 \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^{\frac{2}{x}} \quad (48)$$

По исследованиям Р. Р. Чугаева [26], гидравлический показатель русла x является постоянным при разных глубинах в треугольных, узких и весьма широких руслах.

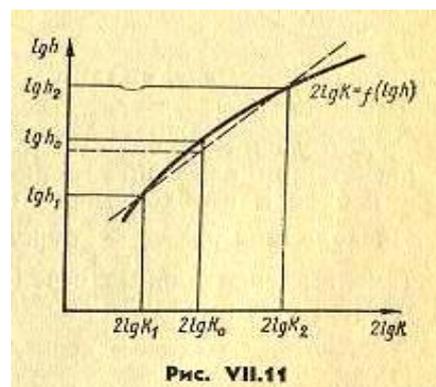


Рис. VII.11

Для таких русел средней ширины, а также трапецидальных зависимость

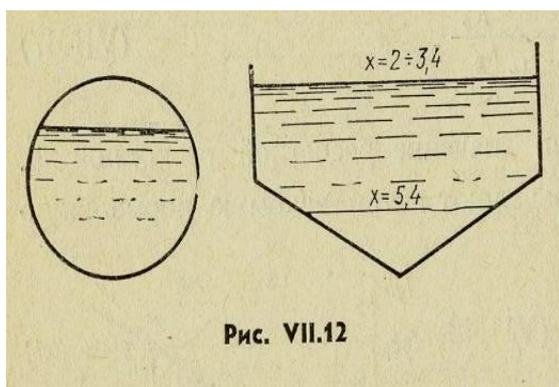
$$21g \frac{K_2}{K_1} = f \left(1g \frac{h_2}{h_1} \right)$$

является криволинейной и, следовательно, гидравлический

показатель русла не будет постоянным для разных глубин, а применение для расчёта зависимости (48) считается приближённым. Очевидно, такое приближение может быть приемлемым, когда кривая, показанная на (рис. 11), близка к прямой.

Гидравлический показатель русла существенно изменяется в каналах замкнутого сечения и составного профиля (рис.12), для которых этот метод расчёта применять нельзя.

Для русел правильной формы имеются различные вспомогательные таблицы, помогающие определить нормальную глубину h_0 из уравнения (5), в которой она входит в неявной форме. В частности, для расчёта русел трапецеидального, прямоугольного (при $m=0$) и треугольного (при $b=0$) сечений удобно пользоваться табл. 3, а для русел параболического сечения табл. 4. В этом случае, кроме расхода Q , уклона i , коэффициент шероховатости n , бывают заданными также для трапецеидальных русел ширина по дну b и коэффициент заложения откоса m , а для параболических русел – параметр параболы p . Порядок определения нормальной глубины следующий:



1) по формуле (19) или по графику (рис.5) находится R_{\max} в зависимости от величины $\frac{Q_n}{\sqrt{i \psi_{г.н.}}}$

2) в зависимости от относительных величин $\eta_b = \frac{b}{R_{\max}}$ (для

трапецеидальных русел) или $\eta_p = \frac{p}{R_{\max}}$ (для параболических русел)

соответственно по табл.3 или 4 находят значения ηh , а затем и нормальную глубину $h_0 = \eta h R_{\max}$. По этим же таблицам можно найти значение площади живого сечения ω , а затем и средней скорости протекания воды в живом сечении $V = Q/\omega$.

Другие расчётные случаи. Аналогично ведётся расчет при известной нормально глубине h_0 протекания воды в канале и необходимости определить другие линейные размеры. По величине $\eta h = h_0 / R_{\max}$ определяют с помощью таблиц величины ηb (для трапецеидальных сечений)

η_p и η_b (для параболических сечений), а затем находят соответствующие значения b или p и B .

Пример: Определить необходимую ширину по дну и среднюю скорость протекания воды в трапецидальном канале с уклоном $i = 0,0001$, коэффициентом заложения откосов $m=1$, коэффициентом шероховатости $n=0,01$ и глубиной протекания воды $h_0 = 1,25$ м. для пропуска расхода $Q = 15$ м³/сек.

Для $m=1$ значение $\psi_{z,n} = 7,312$. Определяем величину

$$\frac{Q_n}{\sqrt{i\psi_{z,n}}} = \frac{15 \cdot 0,013}{\sqrt{0,0001 \cdot 7,312}} = 2,64$$

По графику, приведённому на рис.5, при $z = 0,7$ $R_{\max} = 1,45$ м. По табл.8, при $\eta h = h_0 / R_{\max} = 1,25 / 1,45 = 0,86$ находим $\eta_b = 9,52$ и $\eta_\omega = 1,22$.

Необходимая ширина канала по дну

$$b = \eta_b R_{\max} = 9,52 \cdot 1,45 = 13,8 \text{ м.}$$

Площадь сечения канала

$$\omega = \eta_\omega \psi_{z,n} R_{\max}^2 = 1,22 \cdot 7,312 \cdot 1,45^2 = 18,77 \text{ м}^2.$$

Средняя скорость в живом сечении

$$V = Q / \omega = 15 / 18,77 = 0,79 \text{ м/с/}$$

Если в условиях задачи не установлены значения каких-либо линейных величин для сечений русла, то такое русло может быть рассчитано как гидравлически наивыгоднейшее. В этом случае, как и в предыдущих, определяется величина максимального гидравлического радиуса R_{\max} , а затем по табл.3 и 4, при $R / R_{\max} = 1$ находят необходимые геометрические характеристики сечения и среднюю скорость V .

При расчёте открытых русел может быть ограничена средняя скорость протекания воды. Это ограничение связано с недопущением размыва земляных или разрушения укреплённых каналов.

В этом случае необходимо определить размеры сечения канала при известных расходе Q , уклоне i , характеристике дна и береговых откосов, их укрепления, если таковое имеется. Порядок расчёта при этом следующий.

По графикам (рис.5) находят максимальный гидравлический радиус R_{max} , а затем максимальную скоростную характеристику W_{max} , в зависимости от которой определяется максимально возможная скорость в канале $V_{max} = W_{max} \sqrt{i}$. Эта скорость сравнивается с допустимой $V_{доп.}$. При $V_{доп.} \geq V_{max}$ за расчётную скорость V_p принимают V_{max} , так как допустимая скорость в этом случае не может установиться в канале. Русло при этом будет гидравлически наивыгоднейшим, и его размеры определяются по табл.3. или табл.4. при $R/R_{max} = 1$.

Если же $V_{доп.} < V_{max}$, то за расчётную скорость принимается $V_p = V_{доп.}$. Затем определяется площадь живого сечения канала $\omega = \frac{Q}{V_p}$ и в зависимости от отношения $\frac{\omega}{\psi_{с.н} R_{max}^2}$ по табл.3, и табл.4, определяются геометрические размеры сечения.

При заданных размерах сечения, расходе и средней скорости протекания воды в живом сечении из формул (5) и (3) может быть определён необходимый или допустимый уклон дна русла.

10.6 Допустимые максимальные скорости. Распределение скоростей по сечению

10.6.1 Минимальные допустимые средние в сечении скорости

В зависимости от характеристики грунтов стенок и дна канала, а также способности его противостоять размыву, устанавливаются допустимые максимальные скорости протекания воды в канале. Допустимые скорости также устанавливаются для различных креплений укрепленных каналов. Многообразие грунтов и искусственных укреплений затрудняет

установление общих зависимостей для предельных максимальных скоростей в различных случаях. Для определения допустимых скоростей в практике применяются эмпирические формулы. Одной из таких формул, соблюдающих теорию размерностей, является формула И.И.Леви

$$V_{дон} = A\sqrt{gd} \lg \frac{R}{7d} \quad (49)$$

где R – гидравлический радиус; d – средний диаметр частиц грунта; A – коэффициент, учитывающий уплотнённость грунта (для хорошо уплотнённых грунтов $A = 3,2$, для грунтов с более рыхлой структурой $A = 2,8$).

Формулу (49) следует применять при $R/d = 50 \div 5000$.

При ориентировочных расчётах можно применять также формулы Б.И.Студеничникова (при $h/d \leq 600$)

$$V_{дон} = 3,6\sqrt[4]{hd}, \text{ м/с} \quad (50)$$

и А.И.Латышенкова (при $h/d > 600$)

$$V_{дон} = 5d^{0,3}h^{0,2} \text{ м/с} \quad (51)$$

где средний диаметр частиц грунта d и глубина потока h подставляют в метрах.

В зависимости от назначения сооружения и их роли в народном хозяйстве различными ведомствами устанавливаются значения допустимых максимальных скоростей, которые приводятся в справочной литературе [6.4].

В табл.5, приведены ориентировочные значения допустимых максимальных скоростей для земляных и укреплённых каналов

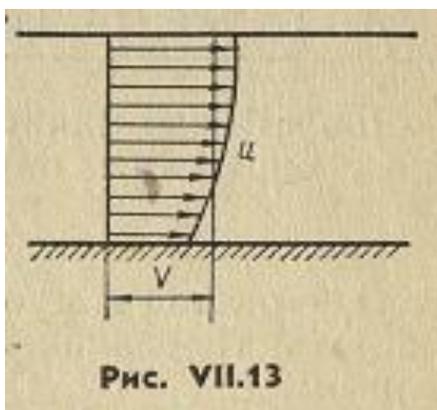
Таблица VII.5. Максимальные допустимые скорости для земляных и укрепленных каналов

Характеристика стенок и дна канала	$V_{\text{доп}}$ м/с	Характеристика стенок и дна канала	$V_{\text{доп}}$ м/с
Пыль, ил, растительная земля	0,15—0,45	Граниты, диабазы, базальты	15—20
Песок мелкий	0,2—0,6	Каменная кладка	4—10
Песок крупный	0,5—0,9	Одиночное мощение	2,3—4
Гравий	0,65—1,3	Двойное мощение	2,8—4
Суглинок, глина	0,35—2	Бетонная облицовка	9—20
Конгломерат, сланцы, пористый и слоистый известняки	2—4,5	Дерево	25—30

Широкий диапазон изменения максимальных допустимых скоростей объясняется разными глубинами потока в канале (нижний предел $V_{\text{доп}}$ соответствует глубинам $h=0,4\text{ м}$, а верхний $h=3\text{ м}$), а также разными размерами частиц грунта, камней мостовой, различными марками бетона и т.п.

Распределение скоростей по сечению. Следует отметить, что фактически на размыв влияет только скорость у берегов и у дна русла, а поэтому расчёт по средним в сечении допускаемым скоростям является условным и справедливым лишь для равномерного движения, при котором средние и местные скорости связаны определёнными полуэмпирическими зависимостями. Так, для гладких поверхностей скорость в точке на расстоянии y от дна канала можно принимать

$$\bar{u} = 5.75 \frac{\sqrt{gR}}{W} V \lg \frac{9yu_*}{\nu}, \quad (52)$$



для шероховатых поверхностей стенок и дна канала

$$\bar{u} = 5.75 \frac{\sqrt{gR}}{W} V \lg \frac{30y}{\Delta}. \quad (53)$$

В этих зависимостях: W – скоростная характеристика, определяемая по графику; u_* –

динамическая скорость, определяемая по формуле $u_* = \sqrt{gKi}$; Δ – высота

выступов эквивалентной шероховатости; ν – кинематическая вязкость жидкости.

Логарифмический закон распределения скоростей по сечению представлен на рис.13. Непосредственно вблизи дна зависимости (52) и (53) не отражают действительной картины движения, поэтому донная скорость может быть определена по формуле

$$\bar{u}_d = \frac{1,25V}{\lg \frac{6,15h_0}{\Delta}} \quad (54)$$

Если в следствие влияния внешних факторов распределение скоростей по сечению не соответствует приведённым выше зависимостям, то по известной донной скорости \bar{u}_d из формулы (54) определяют условную среднюю скорость

$$V_{усл.} = 0,8u_d \lg \left(\frac{6,15h_0}{\Delta} \right) \quad (55)$$

и сравнивая её с допускаемой на размыв средней в сечении скоростью или подбирают по ней необходимое укрепление.

Минимальные допустимые средние в сечении скорости. Эти скорости устанавливаются из условия недопущения заиления канала и зависят от размеров и количества взвешенных в потоке частиц. Минимальные допустимые скорости также определяются опытным путём. Здесь приводятся некоторые рекомендации для определения минимальных допустимых скоростей. В общем случае для этого пользуются формулой И.И.Леви

$$V_{\min} = 0,01 \frac{V_{г.к}}{\sqrt{d}} \sqrt[4]{\frac{p}{0,01}} \frac{0,0225}{n} \sqrt{R}, \quad (56)$$

где $V_{г.к}$ – гидравлическая крупность взвешенных частиц, принимаемая по таблице; d – средний диаметр частиц преобладающей массы взвешенных наносов с $d_{cp} \geq 0,25\text{мм}$; n – коэффициент шероховатости русла; R – гидравлический радиус, м.

Если массовая насыщенность потока с диаметром частиц более 0,25мм не превышает 0,01%, то то пользуются упрощенной формулой

$$V_{\min} = a\sqrt{R}, \quad (57)$$

где a – множитель, принимаемый по табл.6, в зависимости от среднего

Таблица VII.6. Значения множителя a в формуле (VII.57) в зависимости от среднего диаметра частиц d

d , мм	a , м ^{0,5} /с	d , мм	a , м ^{0,5} /с	d , мм	a , м ^{0,5} /с	d , мм	a , м ^{0,5} /с
0,1	0,22	0,6	0,82	1,2	1	1,8	1,07
0,2	0,45	0,8	0,9	1,4	1,02	2	1,1
0,4	0,67	1,0	0,95	1,6	1,05	3	1,11

диаметра частиц преобладающей массы взвешенных наносов.

Допустимую минимальную незаиляющую скорость, м/с, можно также определять по формуле А.С.Гиршкана

$$V_{\min} = AQ^{0,2}, \quad (58)$$

где Q – расход в м³/с; A – коэффициент, принимаемый в зависимости от гидравлической крупности $V_{г.к}$ частиц по следующим данным:

$V_{г.к}$ мм/с	<1,5	1,5 – 3,5	>3,5
A	0,33	0,44	0,55

Глава XI.

Установившееся неравномерное движение жидкости в открытых руслах. Основные понятия и определения. Основные дифференциальные уравнения установившегося плавноизменяющегося движения жидкости в открытых руслах

11.1 Основные понятия и определения

При неравномерном установившемся движении в открытых руслах средняя скорость и глубина потока изменяются вдоль движения, но не изменяются в любом сечении с течением времени. Неравномерное движение устанавливается в следующих случаях:

при устройстве в русле перепада (рис.1, а), плотины (рис.1, б) или другого сооружения, а также при изменении уклона;

в руслах с горизонтальным дном или с обратным уклоном (известно, что равномерное движение может быть только при прямом уклоне дна);

в руслах непризматических, сечение которых изменяется по длине.

При неравномерном движении глубины могут уменьшаться или увеличиваться. В первом случае кривая свободной поверхности называется *кривой спада* (рис.1, а), а во втором случае кривой подпора (рис.2, б).

Основной задачей при расчёте неравномерного движения является построение кривых свободной поверхности. При этом в случаях кривых подпора можно определить отметки подъёма уровня воды в русле и принять меры против затопления соответствующих территорий и сооружений на них.

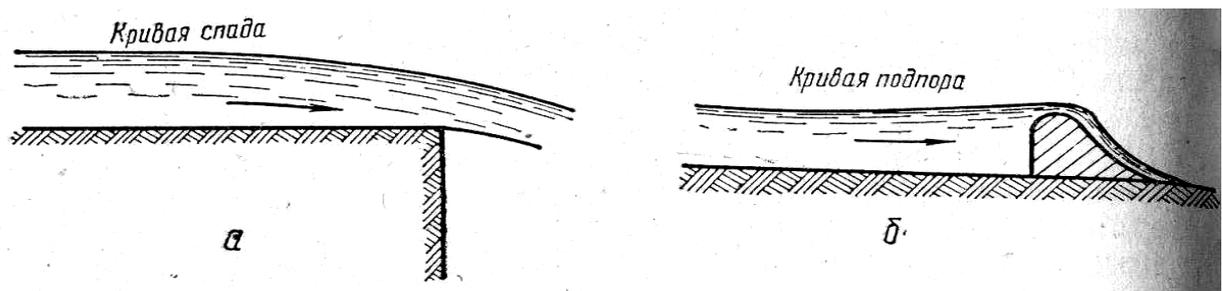


Рис.11.1.

При кривых спада, в результате уменьшения глубин и увеличения скоростей, следует рассчитать необходимые укрепления русла, обеспечивающие нормальную его работу без размыва.

11.2 Удельная энергия сечения и критическая глубина

Для анализа условий неравномерного движения недостаточно применить уравнение Бернулли, выражающее удельную энергию относительно

Рис.11.2.

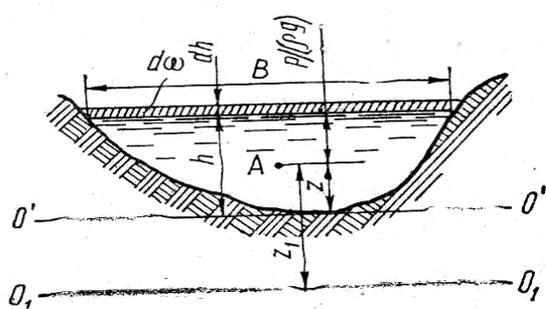
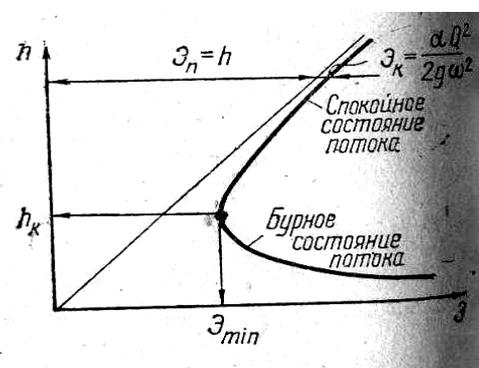


Рис.11.3.



произвольной горизонтальной плоскости сравнения $O_1 - O_1$ (рис.2). В зависимости от выбора плоскости сравнения значение удельной энергии будут различными. *Удельной энергией сечения* называется удельная энергия, подсчитанная относительно плоскости сравнения $O' - O'$, проведённой через наинищую точку сечения. С учётом этого можно записать

$$\boxed{\mathcal{E} = z + p / \rho g + \alpha V^2 / 2g.} \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что для открытых русел для любой точки (например для точки А)

$$\boxed{z + p / \rho g = h,} \quad (2)$$

где h – глубина потока. Тогда

$$\boxed{\mathcal{E} = h + \alpha V^2 / 2g,} \quad (3)$$

или с учётом того, что $V = Q / \omega$,

$$\boxed{\mathcal{E} = h + \alpha Q^2 / 2g\omega^2.} \quad (4)$$

Удельная энергия сечения наглядно характеризует энергетические особенности потока. При постоянном расходе Q , изменении глубины неравномерного движения h и площади сечения, состоящая из удельной потенциальной энергии $\mathcal{E}_п = h$ и удельной кинетической энергии $\mathcal{E}_к = h + \alpha Q^2 / 2g\omega^2$ (рис.3).

Анализ зависимости (4) показывает, что удельная энергия сечения \mathcal{E} стремится к бесконечности при $h \rightarrow \infty$ и при $h \rightarrow 0$, когда ω также стремится к нулю.

Если функция \mathcal{E} при граничных значениях переменной h стремится к бесконечности, то она должна иметь минимум. Глубина, при которой удельная энергия сечения \mathcal{E} достигает минимального значения \mathcal{E}_{\min} , называется *критической глубиной* h_k . Для нахождения критической глубины исследуем функцию \mathcal{E} (рис. 3) на минимум. Возьмём производную

$$\frac{d\mathcal{E}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}$$

Приращение площади живого сечения может быть представлено как $d\omega \approx Bdh$ (где B – ширина живого сечения по верху – рис.2). Тогда

$$dh = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B \quad (5)$$

При глубине $h = h_k$ $d\mathcal{E} / dh = 0$ и

$$\boxed{\omega_k^3 / B_k = \alpha Q^2 / g,} \quad (6)$$

где ω_k и B_k – площадь живого сечения и ширина его по верху при критической глубине h_k .

Уравнение (6) позволяет определить критическую глубину для любых форм русел. Так как h_k входит в это уравнение неявным образом, то в общем случае критическую глубину находят способом подбора. Для этого

назначаются разные значения h_1, h_2, \dots, h_n и вычисляются им соответствующие значения ω и B . Глубина, при которой удовлетворяется условие (6), будет критической. Подбор можно упростить, построив по нескольким точкам график функции $\omega^3 / B = f(h)$ (рис. 4). Откладывая на оси абсцисс величину $\alpha Q^2 / g$, на оси ординат получим искомое значение h_k .

Для некоторых форм поперечных сечений русел критическая глубина определяется аналитическим путём или с помощью вспомогательных таблиц (или графиков). Так, например, для русел прямоугольного

Рис.11.4.

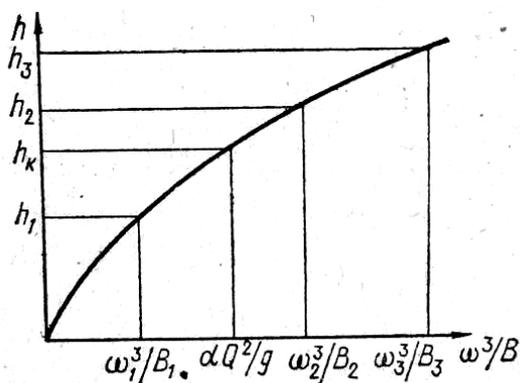
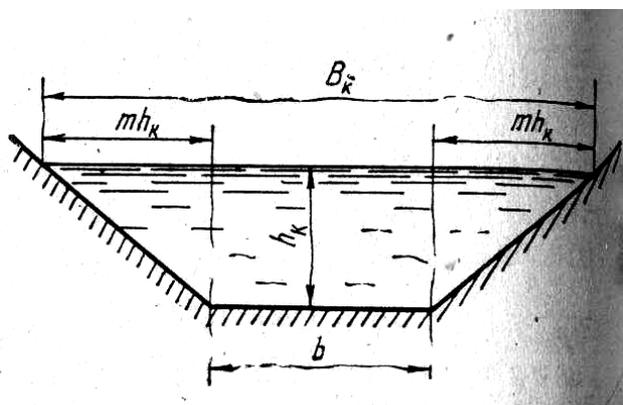


Рис.11.5.



сечения критическая глубина может быть определена непосредственно из формулы (6) с учётом того, что $b = B_k$, а $\omega_k = bh_k$

Тогда

$$\boxed{hk = \sqrt[3]{\alpha Q^2 / gb^2}} \quad (7)$$

Для русел параболического сечения $B_k = 2 \sqrt{2phk}$ и $\omega_k = 4/3 \sqrt{2phk}hk$ (где p – параметр параболы) и уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{(4/3 \sqrt{2phk}hk)^3}{2\sqrt{2phk}} = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

Отсюда

$$hk = \sqrt[4]{\frac{27}{64} \frac{\alpha Q^2}{gp}} \quad (8)$$

Для русел трапецидального сечения (рис.5) $\omega_k = bhk + mhk^2$, $B_k = b + 2mhk$ и

$$\frac{(bhk + mhk^2)^3}{b + 2mhk} = \frac{\alpha Q^3}{g}$$

Разделив числитель левой части этого выражения на b^3hk^3 , знаменатель на b , а правую часть соответственно на b^3hk^3 и обозначив

$$\mu^* = mhk / b, \tag{9}$$

получим после некоторых преобразований

$$\frac{(1 + \mu^*)^3}{1 + 2\mu^*} = \frac{\alpha Q^2}{gb^2} \frac{m^3}{(\mu^*)^3 b^3}$$

или

$$f(\mu^*) = \alpha \frac{g}{1 + 2\mu^*} \frac{(1 + (\mu^*)^3)(\mu^*)^3}{b^2} \left[\frac{Q}{b} \right]^2 \frac{m^3}{b}, \tag{10}$$

где $f(\mu^*) = \alpha \frac{g}{1 + 2\mu^*} \frac{(1 + (\mu^*)^3)(\mu^*)^3}{b^2}$ - вспомогательная функция, значения которой для разных μ^* приведены в таблице.1., составленной В.Н.Поповым.

Табл.1. Параметры для определения критических глубин в русле трапецидального сечения.

$f(\mu_*)$	μ_*	$f(\mu_*)$	μ_*	$f(\mu_*)$	μ_*
0,331	0,3	3,59	0,6	70,4	1,32
0,454	0,33	6,94	0,72	99,7	1,44
0,609	0,36	12,29	0,84	138	1,56
0,798	0,39	20,35	0,96	187	1,68
1,21	0,44	31,01	1,08	248	1,8
1,88	0,5	48,3	1,2	325	1,92

При определении $f(\mu^*)$ по (10) расход Q принимается в m^3/c , а ширина русла по дну b в m . В зависимости от значения $f(\mu^*)$ по табл.1. определяют соответствующую величину μ^* и находят критическую глубину

$$hk = (\mu^* / m) \cdot b. \quad (11)$$

Для безнапорных русел замкнутого сечения с учётом того, что $\omega = \omega' r^2$ и $V = V' r$, уравнение (6) может быть записано в виде

$$\omega^3 k r / V^3 k r = \alpha Q^2 / g.$$

или

$$f_1(\Delta k) = \omega^3 k r / V^3 k r = \alpha Q^2 / g = PQ, \quad (12)$$

где безразмерное число $PQ = \alpha Q^2 / g r^3$ - называется *расходным параметром трубы*; $\Delta k = hk / r$ - степень наполнения при критической глубине.

Для разных форм сечения русла могут быть составлены таблицы зависимости $\Delta k = f(PQ)$. В некоторых случаях устанавливается зависимость $\Delta k = f(Q / r)$. Например, для круглых сечений может быть определена по табл.2. величина $\Delta = \Delta k$, а критическая глубина $hk = \Delta k r$.

Табл.2. Относительные параметры труб круглого поперечного сечения,

Δ	$\frac{Q}{r^{2,5}}$	ψ	E
0,25	0,28	0,0044	9,72
0,5	1,09	0,073	1,33
0,75	2,4	0,35	0,43
0,9	3,4	0,68	0,27
1	4,16	0,98	0,2
1,2	5,89	1,77	0,13
1,4	7,94	2,75	0,091
1,6	10,44	3,74	0,069
1,8	14,01	4,44	0,056
2	∞	3,91	0,051

**применяемые в расчётах
неравномерного движения.**

Таким же образом может быть определена критическая глубина и для русел параболического сечения [5,6]. Для этого составляются таблицы.

$\Delta k = f(Q / p^{2,5})$, а критическая глубина определяется

как $hk = \Delta k r$ (где p - параметр параболы). Установление критической глубины hk является очень важным обстоятельством при исследовании и расчётах неравномерного движения воды в открытых руслах. В зависимости от соотношения глубины неравномерного движения h и критической глубины потока обладают различными энергетическими особенностями.

Анализируя зависимость $\mathcal{E} = f(h)$ (рис.3.), можно установить, что при $h < h_k$ удельная энергия сечения \mathcal{E} растёт с уменьшением глубины h , т.е. $d\mathcal{E} / dh < 0$. Если же $h > h_k$, то увеличение удельной энергии сечения происходит с увеличением глубины h , т.е. $d\mathcal{E} / dh > 0$. Визуальное наблюдение позволяет обнаружить и внешнее качественное отличие потоков в этих случаях. При $h > h_k$ поток протекает спокойно и такое его состояние так и называется *спокойным состоянием* потока. Если же $h < h_k$, то состояние потока называется *бурным*. При глубине, равной критической ($h = h_k$), поток находится в *критическом состоянии*.

Пример. Установить состояние потока в русле трапецеидального сечения с шириной по дну $b = 1$ м, коэффициент заложения откосов $m = 1$ при расходе $Q = 1,1 \text{ м}^3/\text{с}$ и глубиной потока $h = 1$ м. По формуле (10) определяем значение

$$f(\mu^*) = (1.1 / 1)^2 \cdot (1 / 1)^3 = 1.21 \quad \text{по табл.1. находим } \mu^* = 0,44.$$

Критическую глубину находим по формуле (11)

$$h_k = (0.44 / 1) \cdot 1 = 0.44 \text{ м.}$$

Так как $h > h_k$, то поток находится в спокойном состоянии.

Параметр кинетичности и число Фруда. Критический уклон.

Знак производной $d\mathcal{E} / dh$ по формуле (5), характеризующей состояние потока, зависит от величины $\alpha Q^2 / g\omega^2 \cdot B / \omega^3$, называемой *параметром кинетичности* Π_k , который может быть представлен в виде

$$\Pi_k = \frac{\alpha Q^2}{g\omega^2} \cdot \frac{B}{\omega} = \frac{\alpha V^2}{gh_{cp}} \quad (13)$$

где $h_{cp} = \omega / B$ – средняя глубина потока.

Для русел прямоугольного сечения $h_{cp} = h$, а параметр кинетичности в этом случае называется числом Фруда Fr :

$$\boxed{Fr = \Pi_k = \alpha V^2 / gh.} \quad (14)$$

Число Фруда, таким образом, является отношением удвоенной кинетической энергии к глубине в данном сечении. С учётом $V = Q / bh$ и (7) зависимость (14) приводится к виду

$$\boxed{Fr = hk^3 / h^3 .} \quad (15)$$

Эта формула показывает, что при бурном состоянии потока $Fr > 1$, при критическом состоянии $Fr = 1$, а при спокойном состоянии $Fr < 1$. Это же относится и к параметру кинетичности $Пк$ для русел с произвольной формой сечения, что видно из графика на рис.4. при сравнении величин $\alpha Q^2 / g$ и ω^3 / B .

Критический уклон. Приведённые выше зависимости для определения критической глубины показывают, что последняя зависит формы русла и расхода, но не зависит от уклона и шероховатости стенок русла. В то же время при равномерном движении нормальная глубина h_0 зависит как от расхода и формы русла, так и от уклона его шероховатости. При изменении уклона i критическая глубина остаётся постоянной, а нормальная изменяясь, может при некотором значении уклона стать равной критической. Такой уклон, при котором $h_0 = hk$ называется *критическим уклоном* i_k (рис.6.а.).

При критическом уклоне i_k

И при $h_0 = hk$ формулу можно записать в виде

$$\boxed{Q = \omega_k W_k \sqrt{i_k} ,} \quad (16)$$

где ω_k и W_k – площадь живого сечения и скоростная характеристика при критической глубине.

Из формулы (16) может быть получена зависимость для определения критического уклона

$$\boxed{i_k = Q^2 / \omega_k^2 W_k^2 .} \quad (17)$$

Зависимость (16) обозначая через ω_0 и W_0 площадь и скоростную характеристику при нормальной глубине, получим

$$\frac{i}{i_k} = \frac{\omega_k^2 W_k^2}{\omega_0^2 W_0^2} = \frac{K_k^2}{K_0^2} , \quad (18)$$

где K_k и K_0 – расходные характеристики при критической и нормальной глубине.

С увеличением глубины расходная характеристика возрастает, и поэтому при $h_0 > hk$, $K_0 > K_k$ и $i < i_k$ (рис.6.б.), и поэтому при $h_0 < hk$ $i > i_k$ (рис.6.в.).

Следовательно, при $i < i_k$ при равномерном движении наблюдается спокойное состояние потока, а при $i > i_k$ – бурное состояние потока.

Критический уклон может быть также определён путём подстановки в уравнение (6) значение расхода по (16). Тогда

$$i_k = g\omega_k / \alpha V_k W_k^2. \quad (19)$$

Диапазон изменения критических уклонов рассмотрим на примере широких прямоугольных русел (рис.7), для которых можно считать $b = B_k \approx \chi_k$. В этом случае $\omega_k / V_k = h_k \approx R_k$, а скоростная характеристика W_k с учётом $z \approx 2/3$ может быть представлена как

$$W_k = n h_k^{2/3}. \quad \text{Тогда формула (19) примет вид}$$

$$i_k \approx gn^2 / \alpha h_k^{1/3}. \quad (20)$$

Для наиболее часто встречающегося диапазона изменения критических глубин от $h_k = 0,2\text{м}$ (малые русла) до $h_k = 2\text{м}$ (большие русла) при диапазоне изменения коэффициента шероховатости $n = 0.012 \div 0.035$ критический уклон определяется

$$\text{в пределах } i_k = 9.81 (0.012 \div 0.035)^2 / 1.1 (2 \div 0.2)^{1/3} = 0.001 \div 0.02.$$

Следует отметить, что формулой (20) можно пользоваться и для широких русел произвольной формы (рис.7.), приближённо считая их прямоугольными.

Для русел замкнутых сечений формула (17) приводится к виду

$$i_k = \frac{Q^2 n^2}{\omega' k r R' r} = \left(\frac{Q}{r} \right)^2 \frac{n^2}{\psi k} \sqrt[3]{r}, \quad (21)$$

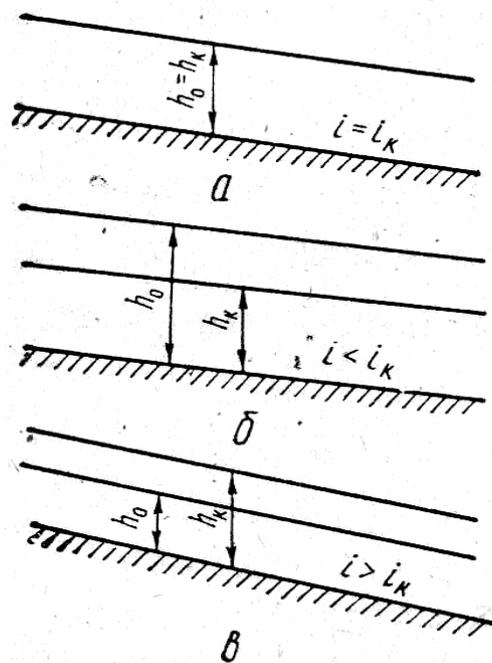
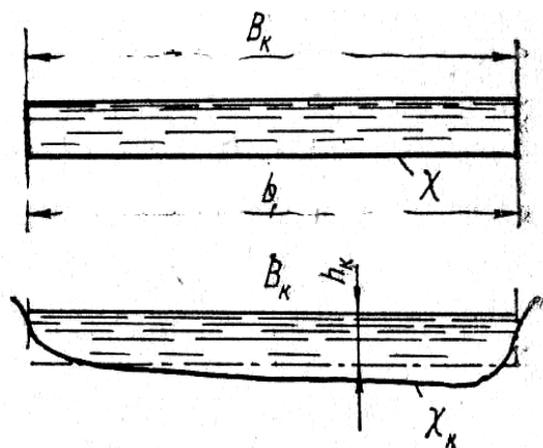


Рис.11.1



$$2 \frac{4}{3}$$

где $\psi_k = \omega' k R' k$ определяется в зависимости от $\Delta k = h_k / r$ (например, для круглых сечений по табл.2.). По этой же таблице определяют значения $2.5 Q / r$. Аналогично таблицы могут быть составлены для

рис.11.2. других замкнутых сечений, а также для параболических русел при расчёте которых в формулу (21) вместо r следует подставлять параметр параболы p .

11.3 Основные дифференциальные уравнения установившегося неравномерного плавноизменяющегося движения жидкости в открытых руслах

Общий случай неравномерного движения в непризматических руслах. Будем полагать, что изменение сечения русла по длине

Рис.11.3

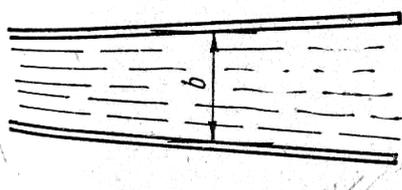
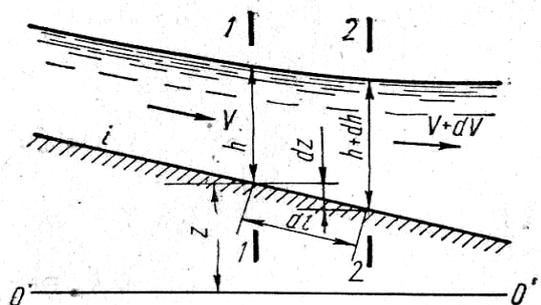


Рис.11.4



происходит постепенно и в такой мере, что не нарушается условие плавной изменяемости движения. Рассмотрим продольный профиль потока, протекающего при неравномерном движении. Для этого применим уравнение Бернулли к двум вертикальным сечениям 1 – 1 и 2 – 2, находящимся на

бесконечно малом расстоянии dl друг от друга. Отметка дна в первом сечении z , глубина h , средняя скорость V , а во втором сечении соответственно $z + dz$, $h + dh$, $V + dV$ (приращение отметки дна, глубины и средней скорости могут быть и положительными и отрицательными). С учётом этого

$$z + h + Pa / \rho g + \alpha V^2 / 2g = z + dz + h + dh + Pa / \rho g + \alpha (V + dV)^2 / 2g + dh_l ,$$

где dh_l – потери энергии по длине между расчётными сечениями.

Пренебрегая величиной второго порядка малости $\alpha / 2g (dV)^2$, после преобразования получим

$$\boxed{dh + \alpha / 2g 2VdV = - dz - dh_l.} \quad (22)$$

Принимая во внимание, что $\alpha / 2g 2VdV = d\alpha V^2 / 2g$, а $dh + d\alpha V^2 / 2g = d\mathcal{E}$, и разделив обе части уравнения на dl , получим

$$\boxed{d\mathcal{E} / dl = i - if,} \quad (23)$$

где $i = - dz / dl$ – уклон дна русла (уклон принимается положительным в сторону уменьшения отметок дна);

$if = dh_l / dl$ – уклон трения, т.е. частный случай гидравлического уклона J при учёте только потерь по длине.

Уравнение (23) называется *основным дифференциальным уравнением установившегося неравномерного движения в открытом русле*. Оно может применяться в общем случае для движения воды в непризматическом русле и, в частности, в призматическом русле.

При определении уклона трения if допускается, что потери напора при неравномерном плавноизменяющемся движении выражаются теми же формулами, что и при равномерном движении воды.

Так как при равномерном движении $i = J = if$, то можно получить

$$\boxed{if = i = Q^2 / \omega^2 W^2.} \quad (24)$$

При неравномерном движении

$$\boxed{if = Q^2 / \omega^2 W^2.} \quad (25)$$

Если при неравномерном движении воды величина уклона трения остаётся постоянной по длине потока, то при неравномерном движении в связи с изменением глубины h , площади живого сечения ω и скоростной характеристики W уклон трения if также изменяется вдоль потока.

Следует отметить, что в случае неравномерного движения распределение скоростей по сечению в общем случае отличается от распределения скоростей при равномерном движении. Поэтому, строго говоря, потери энергии по длине и уклон трения при неравномерном движении следовало бы определять по иным зависимостям. Однако, ввиду недостаточной изученности этого вопроса, на практике пользуются формулой (25) с учётом приведённого выше допущения.

11.4 Неравномерное движение воды в призматических руслах с прямым уклоном дна. Неравномерное движение воды в призматических руслах с нулевым или обратным уклоном дна

В призматическом русле $i > 0$ движение воды с расходом Q может быть как неравномерным, так и равномерным (рис.10.). Во втором случае

$$Q = \omega_0 W_0 \sqrt{i}, \quad (26)$$

где ω_0 и W_0 – площадь живого сечения и скоростная характеристика при нормальной глубине h_0 .

Подставляя значения Q из формул (26) в (25),

получим

$$if = i \frac{\omega^2 W^2}{\omega_0^2 W_0^2} = i \frac{K^2}{K_0^2}, \quad (27)$$

где $K = \omega W$ и $K_0 = \omega_0 W_0$ –

расходные

характеристики при неравномерном и равномерном

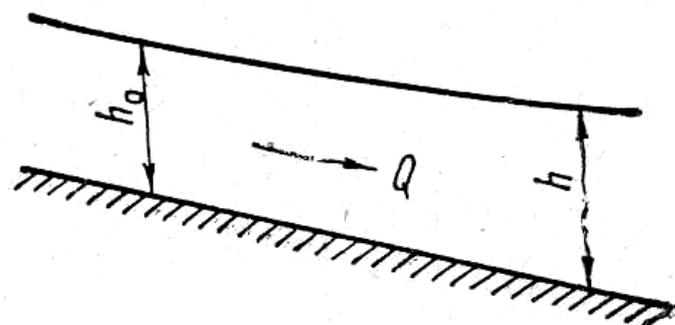


Рис.11.5.

движении воды. Представляя для призматических русел $d\Theta / dh$ как $\frac{d\Theta}{dh} = \frac{dh}{dl}$ и учитывая зависимость (27), приведём уравнение (23) к виду

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2 / K^2}{g \omega^3} \quad (28)$$

или, принимая во внимание формулу (5), запишем

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2 / K^2}{g \omega^3} \quad (29)$$

Это основное дифференциальное уравнение неравномерного плавноизменяющегося движения воды в открытых призматических руслах при прямом уклоне дна.

Неравномерное движение воды в призматических руслах

с нулевым или обратным уклоном дна. Равномерное движение может установиться только в русле с положительным (прямым) уклоном дна. Поэтому в руслах с нулевым или обратным уклоном дна не существует нормальной глубины и, следовательно, для них не может применяться формула (27) для уклона трения.

Для горизонтальных участков русла ($i=0$) уравнение (27) с учётом зависимостей (25), (5) и (16) приводится к виду

$$\frac{dh}{dl} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \frac{Kk^2}{K^2} = -ik \frac{1 - \alpha Q^2}{g \omega^3} \frac{B}{\omega^3} \quad (30)$$

где $Kk = \omega_k W_k = Q / \sqrt{ik}$ – расходная характеристика при критическом уклоне.

Для участков русла с обратным уклоном дна ($i < 0$) уравнение (23) с учётом зависимостей (5) и (25) может быть представлено в виде

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - Q^2 / K^2}{g \omega^3} \quad (31)$$

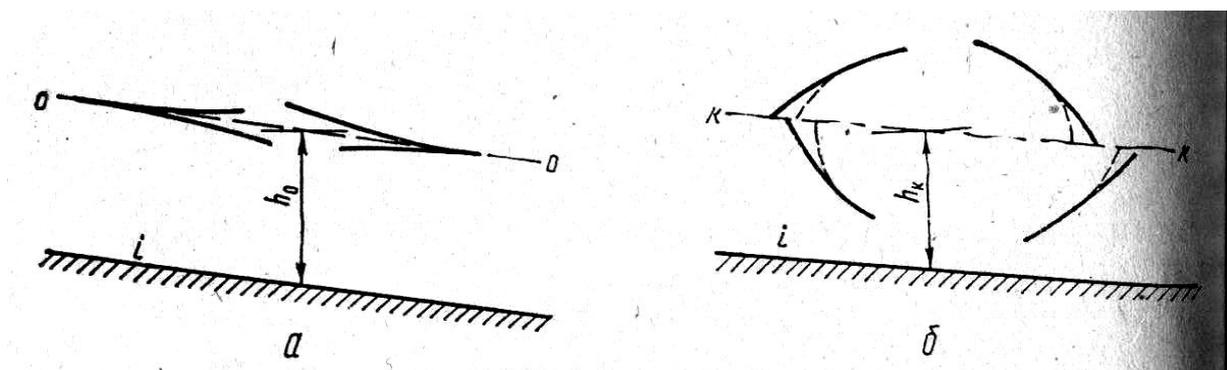
Глава XII.

Исследование форм кривых свободной поверхности потока в открытых руслах. Построение кривых свободной поверхности в открытых руслах и безнапорных трубах

12.1 Общие положения

При неравномерном движении воды кривые свободной поверхности могут приближаться к линиям нормальной (при $i > 0$) или критической глубины, которые для призматического русла остаются постоянными на всём его протяжении.

Рис.12.1.



Рассмотрим особенности изменения глубин в этих случаях.

Если глубина неравномерного движения стремится к нормальной глубине ($h \rightarrow h_0$), то $K \rightarrow K_0$ и, согласно уравнению (29), $dh / dl \rightarrow 0$. Это означает, что глубина стремится стать постоянной по длине потока, т.е. кривая свободной поверхности асимптотически приближается к линии нормальных глубин.

Если глубина неравномерного движения приближается к линии критических глубин ($h \rightarrow h_k$), то знаменатель уравнения (29), согласно зависимости (6), стремится к нулю, а $dh / dl \rightarrow \infty$, т.е. функция глубины h претерпевает разрыв непрерывности и кривая свободной поверхности теоретически будет подходить нормально к линии критических глубин. Опыты показывают, что фактически кривая свободной поверхности

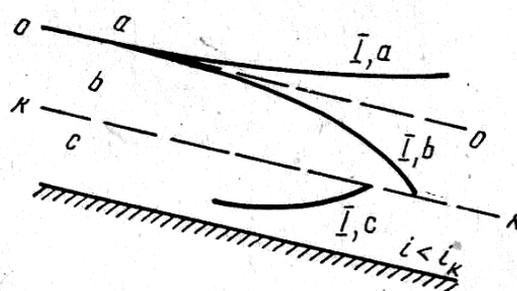
подходит к линии критических глубин не нормально, а под крутым углом (рис.11,б.). Это положение объясняется тем, что в области глубин, близкой к критической глубине, значительно увеличивается кривизна потока и нарушается условие плавноизменяющегося движения. В этом случае уравнение Бернулли и вытекающее из него уравнение (29) недостаточно точно отражают условия движения воды.

Характерным является также положение кривой свободной поверхности при весьма больших глубинах.

Рис.12.2



Рис.12.3



1 – 0

В предельном случае при $h \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$ и $\omega^3/V \rightarrow \infty$ (рис.4.), $dh/dl \rightarrow i$ $1 - 0 = i$. Так как и уклон дна равен i , то и в этом случае свободная поверхность стремится стать горизонтальной (рис.12.). Обычно такое положение наблюдается в водохранилищах, прудах и других водоёмах с большими глубинами.

Итак, следует помнить такие характерные особенности неравномерного движения: *кривые свободной поверхности подходят асимптотически к линии нормальных глубин, под крутым углом к линии критических глубин и при весьма больших глубинах стремятся стать горизонтальными.* Следует иметь в виду, что при уклоне дна, равном критическому уклону, когда $h_0 = h_k$, это положение не имеет места, так как кривая свободной поверхности не может асимптотически подходить к линии нормативных глубин и одновременно пересекать её под крутым углом.

При этих общих особенностях в зависимости от уклона дна i и соотношения глубины неравномерного движения h , нормальной глубины h_0 и критической глубины h_k возникают различные формы кривых свободной поверхности. Рассмотрим пять возможных случаев.

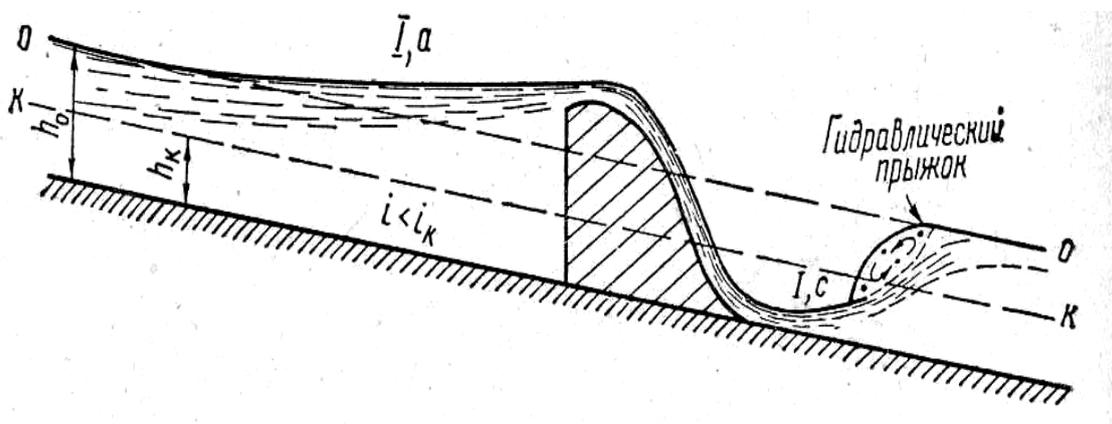
I случай. Уклон дна меньше критического ($i < i_k$).

В соответствии с §-1 при этом $h_0 > h_k$, т.е. линия нормальных глубин $0 - 0$ проходит выше линии критических глубин $K - K$ (рис.13.). Неравномерное движение может устанавливаться в трёх зонах: а) при $h > h_0$; в) при $h_0 > h > h_k$; с) при $h < h_k$. Рассмотрим особенности кривых свободной поверхности в каждой из этих зон.

Зона а. При этом $h > h_0$, а $K > K_0$ и $h > h_k$, а $\omega^3 / B > \alpha Q^2 / g$ (рис.4.) Следовательно, и числитель, и знаменатель производной dh / dl (29) положительны и положительна и сама производная $dh / dl > 0$.

Это означает, что глубина вдоль движения возрастает. В зоне *а* глубина может изменяться от нормальной глубины h_0 до весьма большой (теоретически бесконечно большой). В начале кривая свободной

Рис.12.4



поверхности асимптотически приближается к линии нормальных глубин, а в конце при больших глубинах стремится стать горизонтальной. Такая кривая называется *кривой подпора типа 1,а*. Она имеет вогнутую форму. Примером

такой кривой является кривая свободной поверхности перед плотиной или другой преградой в русле (рис.14.)

Зона b. В этом случае $h < h_0$, а $K < K_0$ и $h > h_k$, а $\omega^3 / V > \alpha Q^2 / g$. Тогда производная $dh / dl < 0$, т.е. глубина вдоль движения уменьшается от нормальной до критической глубины. Так как к линии нормальной глубины кривая свободной поверхности приближается асимптотически, а к линии критической глубины под крутым углом, то эта кривая имеет выпуклую форму и называется *кривой спада типа I,b* (рис.13.). Такая кривая может установиться, например, перед уступом (перепадом) в дне русла (рис.15.). В конце такой кривой (над уступом) теоретически должна установиться критическая глубина, однако опыты показывают, что эта глубина устанавливается на некотором расстоянии до уступа, что может быть объяснено отклонением движения в области, близкой к критическим глубинам, от условий плавноизменяющегося движения.

Зона c. В этом случае $h < h_k < h_0$, а $K < K_0$ и $\omega^3 / V > \alpha Q^2 / g$. Производная dh / dl по уравнению (29). $dh / dl > 0$, Следовательно, глубина вдоль движение возрастает от какой – то начальной $h < h_k$ до критической глубины (рис.13.). Кривая свободной поверхности имеет вогнутый характер и называется *кривой подпора типа I,c*. Такая кривая может установиться непосредственно за плотиной (рис.14). При падении воды с большой высоты в потоке устанавливаются большие скорости и, соответственно, малые глубины, которые возрастают при дальнейшем протекании воды в русле с небольшим уклоном.

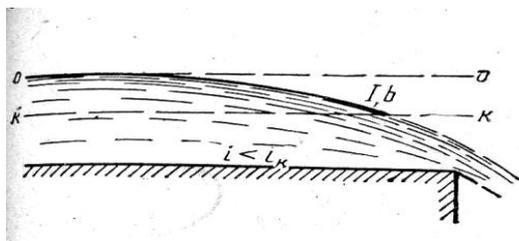


Рис.12.5

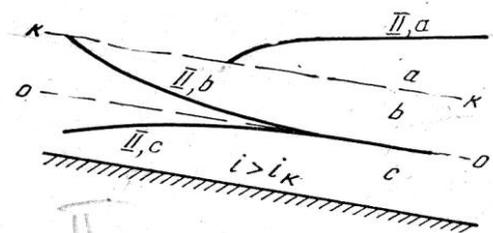


Рис.12.6

Если на некотором расстоянии за плотиной а потоке устанавливается равномерное движение, то переход к нему при плавноизменяющемся движении невозможен. Действительно, повышение глубин может происходить только в зоне *b*, согласно уравнению (29), повышения глубин до нормальной происходить не может, так как в этой зоне устанавливается только кривая спада. В этом случае возможен не плавный, а резкий скачкообразный переход от бурного состояния потока к спокойному. Такой переход называется *гидравлическим прыжком*.

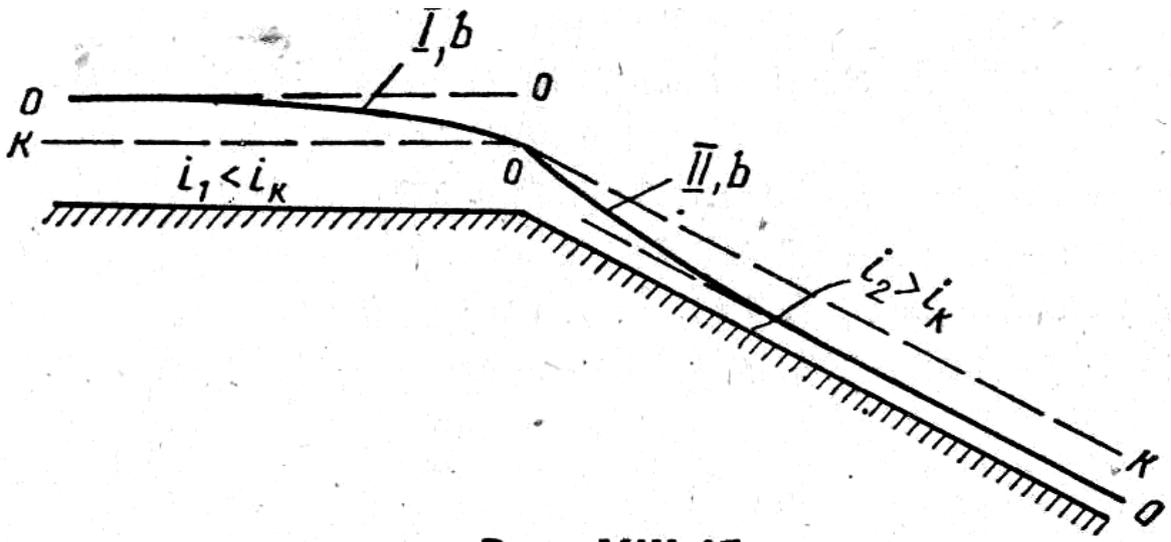
II случай. Уклон дна больше критического ($i > i_k$).

При этом линия нормальных глубин О – О проходит ниже линии критических глубин К – К (рис.16.). Как и в предыдущем случае, рассмотрим особенности неравномерного движения в трёх зонах.

Зона а. Здесь $h > h_k > h_0$, а $K > K_0$ и $\omega^3 / B > \alpha Q^2 / g$. При этом производная dh / dl по уравнению (29) получится положительной и, следовательно, глубина вдоль движения потока возрастает и имеет место выпуклая кривая подпора *типа 2,а*, подходящая под крутым углом к линии критических глубин и стремящаяся стать горизонтальной при больших глубинах.

Зона б. При этом $h < h_k$, а $\omega^3 / B < \alpha Q^2 / g$ и $h > h_0$, а $K > K_0$. Производная dh / dl будет отрицательной, т.е. кривая свободной поверхности понижается вдоль движения. Эта кривая имеет вогнутую форму и называется кривая спада *типа 2,б*. Такая кривая устанавливается после изменения уклона русла со значением менее

Рис.12.7



критического к уклону со значением более критического (рис.17.)

Зона с. В этом случае $h > h_0 > h_k$, $K < K_0$ и $\omega^3 / V < \alpha Q^2 / g$. Из уравнение (29) видно, что производная dh / dl

будет положительной и, следовательно, глубины будут повышаться вдоль движения, асимптотически приближаясь

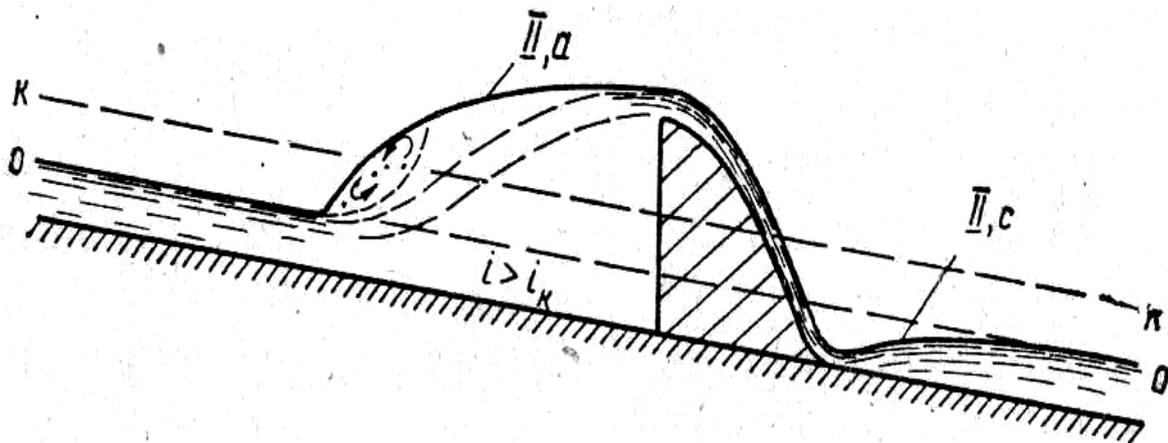


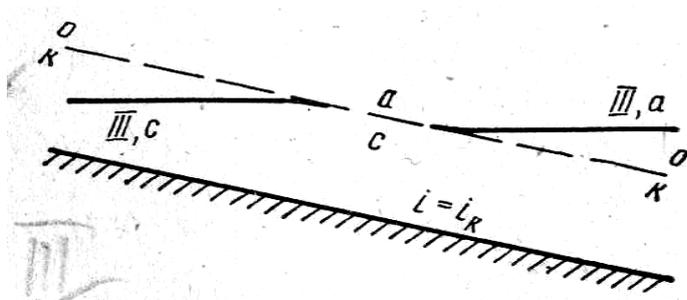
Рис.12.8

приближаясь к значению нормальной глубины h_0 . Такая кривая свободной поверхности называется кривой подпора типа 2,с. На рис.18. показаны кривые свободной поверхности перед плотиной и после неё при уклоне дна

русла более критического ($i > i_k$). В этом случае перед плотиной образуется гидравлический прыжок, а за ним устанавливается кривая подпора типа 2,а, а после плотины – кривая подпора типа 2,с.

III случай. Уклон дна равен критическому уклону ($i = i_k$).

При этом линия нормальных глубин совпадает с линией критических глубин



и неравномерное движение может происходить в двух зонах а и с (рис.12.9.).

Рис.12.9.

Не трудно убедиться, что, как и в предыдущих случаях, в этих зонах производная dh / dl будет положительной, следовательно, глубины будут возрастать вдоль движения. В зоне а установится кривая подпора типа 3,а, а в зоне с кривая подпора типа 3,с. На примере широкого прямоугольного русла проанализируем форму этих кривых. В этом случае $b = B \approx \chi$, $\omega / B = h \approx R$, а скоростная характеристика W с учётом $z \approx 2/3$ можно представить в виде

$$\underline{1}$$

$W \approx n h^{2/3}$. С учётом того, что $\omega = bh$, $K = \omega W$, $K_0 = K_k$ и $\alpha Q^2 / gb^2 = hk^3$, уравнение (29) преобразуется следующим образом

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{4}{3}$$

$$3.33 \qquad 3.33$$

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2 / K^2}{1 - \alpha Q^2 / g \cdot B / \omega^3} \approx i \frac{1 - b^2 h k^2 / b^2 h^2 \cdot n^2 h k / n^2 h k}{1 - \alpha Q^2 / gb^3 \cdot b / h^3} = i \frac{1 - h k / h}{1 - h k^3 / h^3} \quad (32)$$

Считая приближённо $\left[\frac{hk}{h} \right] \approx \left[\frac{\beta,3\beta}{h} \right]$, получим $dh / dl \approx i$. Это означает, что кривые подпора 3,а и 3,с близки по своей форме к горизонтальным прямым.

Такой же вывод можно получить путём следующего объяснения. При $i < i_k$ в зонах а и с устанавливаются вогнутые кривые подпора (рис.13.), а при $i > i_k$

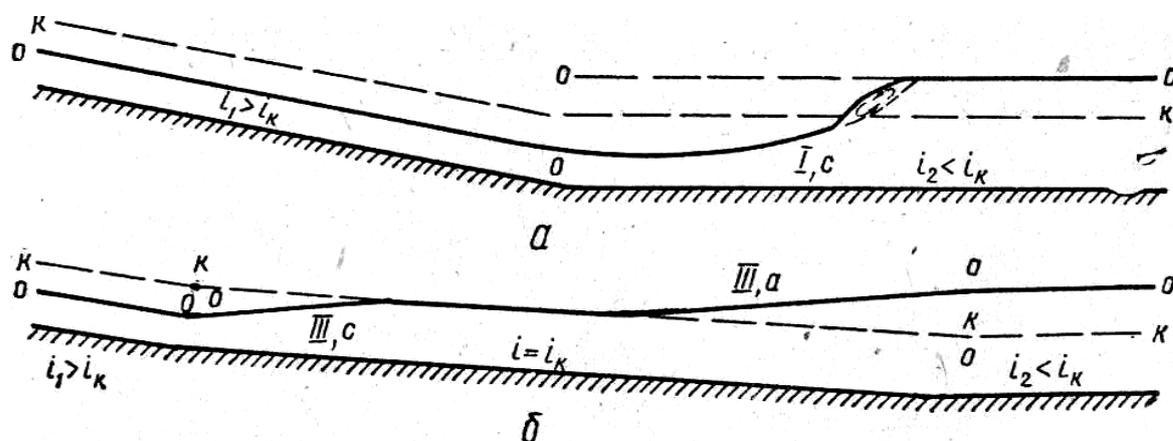


Рис.12.20

выпуклые кривые подпора (рис.16). При увеличении уклона то менее критического до более критического вогнутые кривые подпора превращаются в выпуклые. Промежуточной формой этих кривых при $i = i_k$ могут быть прямые линии. Опыты показывают, что эти прямые плавно сопрягаются с линией критических глубин. Если после участка канала с уклоном $i_1 > i_k$ будет участок с $i_2 < i_k$, то переход от бурного к спокойному состоянию потока возможен только с помощью гидравлического прыжка (рис.20.а.). Если же между участками с уклонами $i_1 > i_k$ и $i_2 < i_k$ вставить участок с уклоном, равным критическому ($i = i_k$), то установится безпрыжковое сопряжение бурного и спокойного состояния потока (рис.20.б). Такое сопряжение устраивается в плототоходах, чтобы избежать разрушения плота в зоне гидравлического прыжка.

IV случай. Уклон дна русла $i = 0$. V случай.

Русло имеет обратный уклон ($i < 0$).

В горизонтальном канале не может быть равномерного движения и, следовательно, нормальной глубины. Поэтому неравномерное движение может быть в двух зонах b и c (рис.21).

Рис.12.21

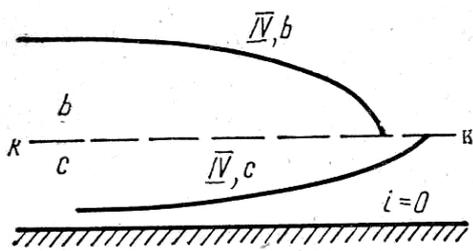
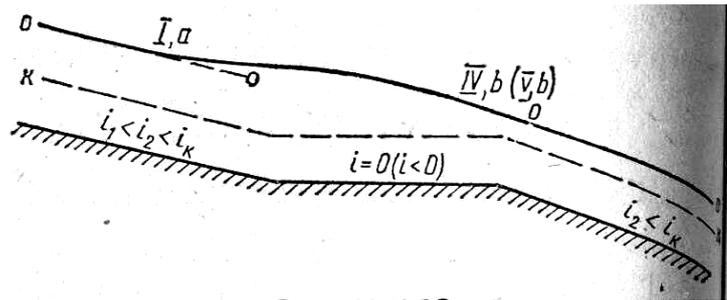


Рис.12.22



Зона *b*. При $h > h_k$ $\omega^3 / V > \alpha Q^2 / g$ и производная dh / dl по уравнению (30) получается отрицательной, т.е. глубины в этом случае понижаются вдоль движения и в русле устанавливается кривая спада типа 4,*b*. Такая кривая имеет место, если между участками канала с уклонами $i_1 < i_k$ и $i_2 < i_k$ при $i_1 < i_2$ устанавливается промежуточный участок с $i = 0$ (рис.22).

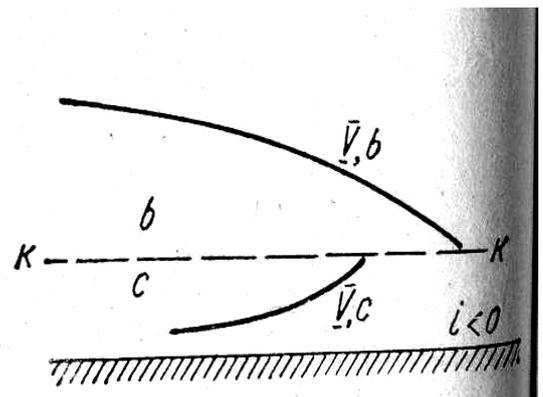
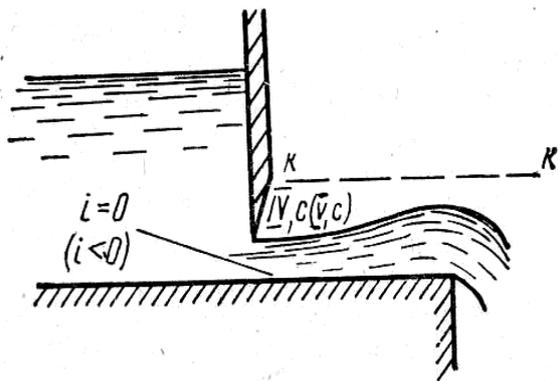


Рис.12.23

Рис.12.24

Зона *c*. При $h < h_k$ $\omega^3 / V < \alpha Q^2 / g$ и производная dh / dl будет положительной. Следовательно, в зоне *c* устанавливается кривая подпора типа 4,*c*. Такая кривая, например, может иметь место при истечении из-под щита в горизонтальный канал (рис.23).

V случай. Русло имеет обратный уклон ($i < 0$). Как и в предыдущем случае, здесь не может быть нормальной глубины и неравномерное движение рассматривается в двух зонах *b* и *c* (рис.24).

Зона *b*. При $h > h_k$ $\omega^3 / B > \alpha Q^2 / g$, а так как $i < 0$, то производная dh / dl , согласно уравнению (31), получается отрицательной и в этой зоне устанавливается кривая спада типа 5, *b*. По аналогии с кривой спада типа 4, *b* такая кривая имеет место, если между участками канала с уклонами $i_1 < i_k$ и $i_2 < i_k$ при $i_1 < i_2$ устраивается промежуточный участок с уклоном $i < 0$ (рис.22) или, например, перед перепадом при обратном уклоне подводящего русла (рис.25).

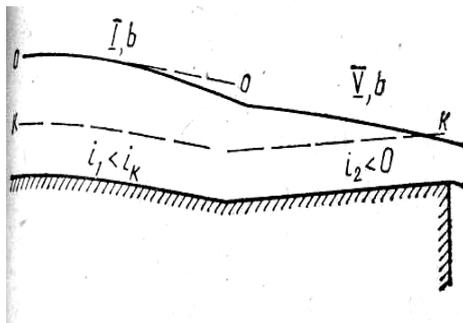


Рис.12.25

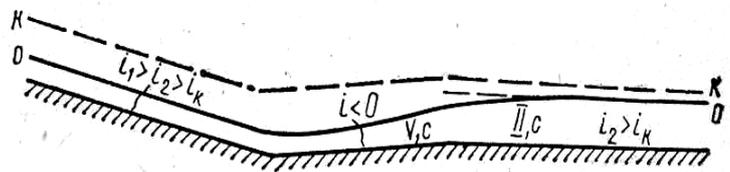


Рис.12.26

Зона *c*. Нетрудно убедиться, что здесь $dh / dl > 0$, и в канале устанавливается кривая подпора типа 5, *c*. Такая кривая может иметь место при истечении из – под щита в канале с обратным уклоном (23) или, например, если между участками канала с уклонами $i_1 > i_k$ и $i_2 > i_k$ при $i_1 > i_2$ устраивается промежуточный участок с уклоном $i < 0$ (рис.12.26). С помощью приведённых выше возможных форм кривых свободной поверхности могут быть установлены конкретные типы кривых подпора и спада и для других практических случаев. Некоторые из них приведены на рис.12.27.

Дополнительные замечания о формах кривых свободной поверхности. Преобразуем знаменатель уравнения (29). Так как расход Q может установиться в потоке при равномерном движении, то можно записать $Q = \omega_0 W_0 \sqrt{i}$, (где ω_0 и W_0 – площадь живого сечения и скоростная характеристика при нормальной глубине h_0). С учётом этого можно записать

$$1 - \alpha Q^2 / g \cdot B / \omega^3 = 1 - \frac{\alpha \omega_0^2 W_0^2 i B W^2}{g \omega^3 W^2} = 1 - j K^2, \quad (33)$$

где $K = \omega W$ и $K_0 = \omega_0 W_0$, а

$$j = \alpha W^2 Bi / g \omega. \quad (34)$$

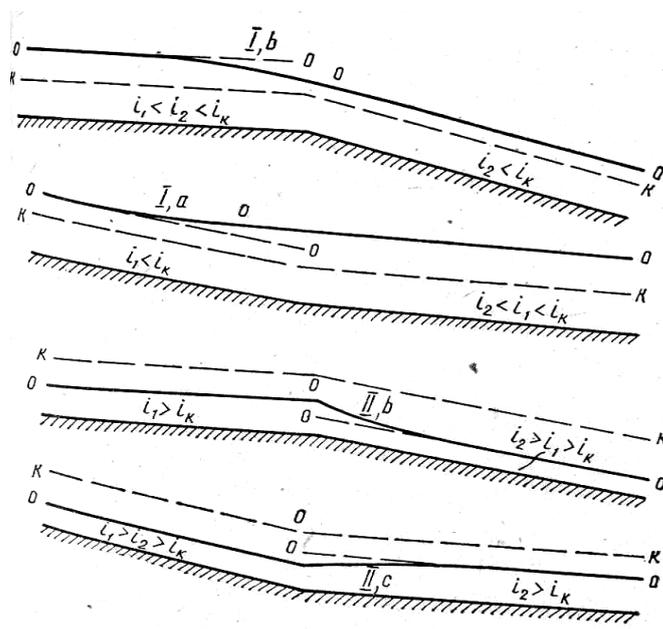


Рис.12.27

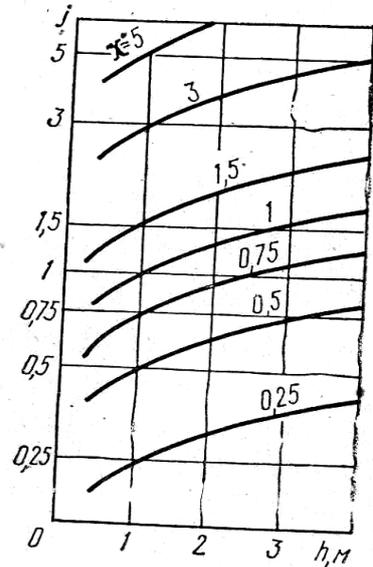


Рис.12.28

С учётом выражения (33) уравнение (29) приводится к виду

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2 / K^2}{1 - j K_0^2 / K^2} \quad (35)$$

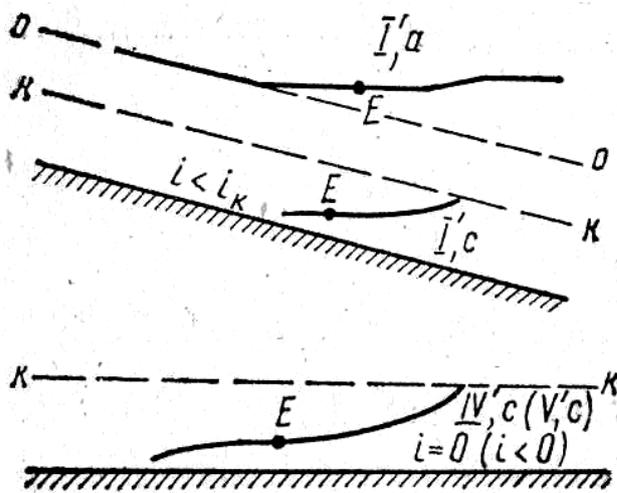
Величина j для русла с заданными формой сечения, уклоном i и коэффициентом шероховатости n зависит от глубины. Проанализируем изменение величины j для широкого прямоугольного русла. В этом случае

$$\omega = Bh, \quad h \approx R, \quad W = 1/n \cdot h^{2/3} \text{ и}$$

$$j = \frac{\alpha h Bi}{g B h} = \frac{\alpha i}{gn^2} h^{1/3} = \chi h^{1/3}, \quad (36)$$

где $\chi = \alpha i / gn^2$.

Рис.12.29



На рис.28. показаны зависимости $j = f(h)$ при разных значениях χ . Для некоторых χ при диапазоне глубин h , встречающихся в практических случаях, величина j может стать равной единице ($j = 1$). При этом производная по формуле (35) $dh / dl = i$ и касательная к кривой свободной поверхности

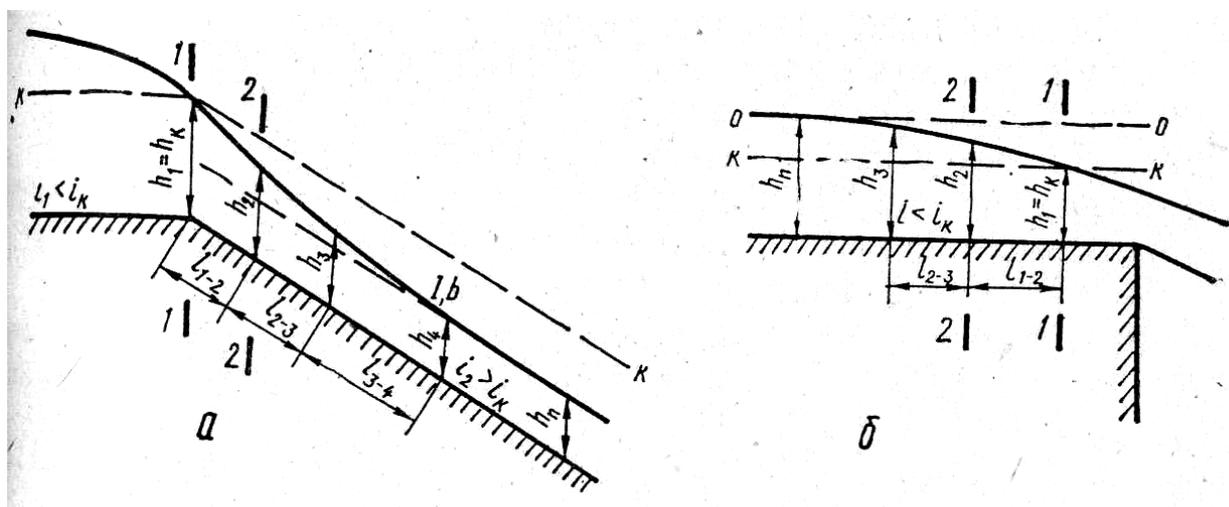
становится горизонтальной не только при бесконечно больших глубинах. Это означает, что при некоторых значениях глубин h кривые свободной поверхности могут иметь точку перегиба E при выпукло-вогнутом или вогнуто – выпуклом их характере (6;25).

На рис.29 приведены возможные формы таких кривых. Однако в практических расчётах двойкий характер их кривизны обычно не учитывается.

Общие положения

Для построения кривой свободной поверхности предварительно необходимо установить на основании положений §-3 форму этой кривой и исходное сечение для построения. Исходным сечением должно быть сечение, глубина в котором известна или может быть определена. Таким сечением может быть сечение с критической глубиной перед перепадом (рис.15) или сечение при изменении уклона дна русла (рис.17, 20, 22, 27 и т.п.). Исходное сечение может приниматься также непосредственно перед сооружением или за ним (рис.14, 18, 23 и др.). В этом случае глубина в исходном сечении определяется на основании специальных расчётов.

За исходное сечение нельзя принимать сечение с нормальной глубиной при асимптотическом приближении к ней кривой свободной поверхности, так как асимптота касается кривой только в бесконечности.



После установления исходного сечения и формы кривой свободной поверхности необходимо определить количественные характеристики этой кривой, т.е. установить зависимость $h = f(l)$, где l – расстояние от исходного сечения. В зависимости от положения исходного сечения $1-1$ на кривой свободной поверхности расстояние l может откладываться от исходного сечения как вниз по течению (рис.30.а.), так и против него (рис.30.б.).

Для нахождения зависимости $h = f(l)$ необходимо проинтегрировать основное дифференциальное уравнение неравномерного движения в форме (23), (35), (30) или (31). Следует отметить, что точных методов интегрирования этих уравнений нет, а имеется ряд приближённых способов, основанных на определённых допущениях. Некоторые из этих способов рассматриваются ниже.

Способ В.И.Чарномского

Этот способ основан на непосредственном решении уравнения (23), в которое глубина не входит в явном виде. Для этого дифференциального уравнения (23) приближённо заменяется уравнением в конечных разностях:

$$\Delta \varepsilon / l = i - i_f, \quad (37)$$

где $\Delta \mathcal{E}$ – разность удельных энергий сечений в расчётных сечениях (рис.30);
 if – средний уклон трения на участке между этими сечениями.

Отсюда, например, расстояние между сечениями 1-1 и 2-2

$$l_{1-2} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{i - if_{1-2}} \quad (38)$$

В связи с осреднением уклона трения и заменой дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях расстояние между сечениями по формуле (38) получается приближённым. Для большей точности расчёта кривую свободной поверхности следует разбить на несколько участков.

Порядок расчёта по формуле (38) следующий:

- 1) устанавливается форма кривой свободной поверхности;
- 2) назначается исходное сечение; например, для кривых спада показанных на рис.30,а,б, за исходное сечение 1-1 следует принять сечение с критической глубиной h_k , а за конечное сечение $n-n$ – сечение с нормальной глубиной h_0 ;
- 3) кривая свободной поверхности разбивается на участки 1-2, 2-3 и т.д. с глубинами в сечениях $h_2, h_3, h_4, \dots, h_{n-1}$, находящимися на интервале $h_1 - h_n$;
- 4) определяется удельная энергия сечения по формуле (4) в каждом расчётном сечении;
- 5) По формуле (25) для каждого сечения определяется уклон трения, а затем его средняя величина для участка $if_{1-2} = 0,5 (if_1 + if_2)$;
- 6) По формуле (38) определяется расстояние между сечениями 1-1 и 2-2;
- 7) Аналогично определяется расстояние между сечениями 2-2 и 3-3, 3-3 и 4-4 и т.д.;
- 8) Определяется общая длина кривой свободной поверхности

$$L = l_{1-2} + l_{2-3} + \dots + l_{n-1-n} \quad (39)$$

Способ В.И.Чарномского так же, как и уравнение (23) может применяться как для призматических, так и для непризматических русел.

Способ Н.Н.Павловского

Этот способ основан на интегрировании дифференциального уравнения неравномерного движения воды для призматических русел. В зависимости от уклона дна рассматриваем три случая: $i > 0$, $i = 0$, $i < 0$.

Русла с прямым уклоном дна ($i > 0$). В этом случае уравнение (29) приводится к виду (35), т.е.

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2 / K^2}{1 - j K_0^2 / K^2}$$

Обозначим $K / K_0 = \Pi$, где Π – относительная расходная характеристика.

Тогда

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - 1 / \Pi^2}{1 - j \cdot 1 / \Pi^2} = i \frac{1 - \Pi^2}{j - \Pi^2} \quad (40)$$

Левую часть этого уравнения можно представить в виде

$$dh / dl = dh / d\Pi \cdot d\Pi / dl.$$

С учётом этого записать

$$\frac{d\Pi}{dl} = i \frac{1 - \Pi^2}{j - \Pi^2} \cdot \frac{d\Pi^2}{dh} \quad (41)$$

Для подготовки к интегрированию преобразуем это уравнение следующим образом

$$i \frac{d\Pi}{dh} dl = \frac{j - \Pi^2}{1 - \Pi^2} d\Pi = \frac{1 - \Pi^2 - 1 + j}{1 - \Pi^2} d\Pi, \quad (42)$$

или

$$i \frac{d\Pi}{dh} dl = d\Pi - (1 - j) \frac{d\Pi}{1 - \Pi^2}. \quad (43)$$

Обозначим $a = d\Pi / dh$ и сделаем допущение, что для рассматриваемого участка канала $l-2$ эту производную можно считать постоянной и определять как отношение конечных разностей

$$d\Pi / dh = a \approx \Pi_2 - \Pi_1 / h_2 - h_1 \approx \text{const. (для участка канала)}. \quad (44)$$

Допустим также, что величину j можно определять как среднюю и постоянную для рассматриваемого участка. С учётом этого (34) получим

$$\bar{j} = \alpha i / g \cdot \bar{W}^2 \bar{B} / \omega. \quad (45)$$

Допущенное о постоянстве величины j по длине участка русла основывается на том, что j мало изменяется при изменении глубины. Так, например, для широкого прямоугольного русла, согласно формуле (36), при изменении глубины в 2 раза величина j изменится только в 1,26 раза.

С учётом изложенного уравнение (43) может быть проинтегрировано для участка канала между сечениями 1-1 и 2-2

$$ial_{1-2} = \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi / 1 - \Pi^2. \quad (46)$$

Выражение

$$\int d\Pi / 1 - \Pi^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \Pi}{1 - \Pi} = \Phi(\Pi) \quad (47)$$

Называется функцией Н.Н.Павловского, значения которой приведены в табл.3. С учётом этого длина участка кривой свободной поверхности

$$l_{1-2} = \frac{\Pi_2 - \Pi_1 - (1 - i) [\Phi(\Pi_2) - \Phi(\Pi_1)]}{ia} \quad (48)$$

Табл.3. Функции Павловского для построения кривых свободной поверхности.

Π	$\Phi(\Pi)$ (при $i > 0$)	$\Phi_0(\Pi_K)$ (при $i = 0$)	$\Phi'(\Pi)$ (при $i < 0$)	Π	$\Phi(\Pi)$ (при $i > 0$)	$\Phi_0(\Pi_K)$ (при $i = 0$)	$\Phi'(\Pi)$ (при $i < 0$)
0,2	0,203	0,0027	0,197	1,01	2,652	0,343	0,79
0,4	0,424	0,0213	0,38	1,05	1,857	0,386	0,81
0,6	0,693	0,072	0,54	1,1	1,573	0,444	0,833
0,8	1,098	0,171	0,674	1,2	1,199	0,576	0,876
0,9	1,472	0,243	0,732	1,5	0,805	1,125	0,983
0,95	1,831	0,286	0,759	2	0,55	2,667	1,107
0,99	2,646	0,323	0,708	3	0,346	9	1,249
1	∞	0,333	0,785	5	0,203	41,67	1,373

Примечание: 1. При $i = 0$ следует принимать $\Pi = \Pi_K$.

2. Таблица приводится в сокращенном виде.

При расчете по формуле (VIII.48), как и при использовании способа В. И. Чарномского, в первую очередь устанавливается исходное сечение 1—1, а сечение 2—2 назначается с глубиной, которая может установиться в потоке в соответствии с формой кривой свободной поверхности (§ VIII.3). Затем для расчетных сечений определяются величины $K = \omega W$, $\Pi = \frac{K}{K_0}$ и $\Phi(\Pi)$ по формуле (VIII.47) или по табл. VIII.3, а для расчетного участка по формулам (VIII.44) и (VIII.45) определяются величины a и i , а по формуле (VIII.48) — длина кривой свободной поверхности. В зависимости от необходимой точности расчета кривую свободной поверхности можно разбить на большее или меньшее количество участков. Тогда общая длина кривой определится по формуле (VIII.39). Для приближенных расчетов общую длину кривой свободной поверхности можно определять непосредственно по формуле (VIII.48), принимая значения h_1 и h_2 для начального и конечного сечений. Следует иметь в виду, что если одним из расчетных сечений является сечение с нормальной глубиной h_0 , то $\Pi = 1$, $\Phi(\Pi) = \infty$ и длина кривой свободной поверхности также будет равна бесконечности. Для получения практического результата расчеты следует вести до сечения с глубиной h , незначительно (на 1—2 см) отличающейся от нормальной.

Русла с горизонтальным дном ($t = 0$). Введем обозначения

$$\Pi_k = \frac{K}{K_k}$$

и по аналогии с выражением (VIII.34) получим

$$i_k = \frac{\alpha W^2 B}{g \omega} i_k$$

Преобразуем уравнение (VIII.30) следующим образом:

$$\frac{dh}{dl} = i_k \frac{-\frac{K_k^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}} = i_k \frac{-\frac{1}{\Pi_k^2}}{1 - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{B \omega_k^2 W_k^2 i_k W^2}{\omega^3 W^2}} = i_k \frac{\frac{1}{\Pi_k^2}}{\frac{j_k}{\Pi_k^2} - 1} = \frac{i_k}{j_k - \Pi_k^2} \quad (50)$$

Представляя левую часть этого выражения в виде $\frac{dh}{dl} = \frac{dh}{d\Pi_k} \frac{d\Pi_k}{dl}$, после некоторых преобразований получим

$$i_k \frac{d\Pi_k}{dh} dl = (j_k - \Pi_k^2) d\Pi_k \quad (51)$$

Полагая, что для рассматриваемого участка канала $\bar{j}_k = const$ и $\frac{d\Pi_k}{dh} \approx \frac{\Pi_{k1} - \Pi_{k2}}{h_1 - h_2} = a_k \approx const$, получим после интегрирования

$$l_{1-2} = \frac{j_k(\Pi_{k2} - \Pi_{k1}) - 1/3(\Pi_{k2}^3 - \Pi_{k1}^3)}{a_k i_k} \quad (52)$$

Или обозначая $\Phi_0(\Pi_k) = \Pi_k^3/3$, получим

$$l_{1-2} = \frac{j_k(\Pi_{k2} - \Pi_{k1}) - [\Phi_0(\Pi_{k2}) - \Phi_0(\Pi_{k1})]}{a_k i_k} \quad (53)$$

Значение функций $\Phi_0(\Pi_k)$ приведён в таблице VIII.3.

Р у с л а с о б р а т н ы м у к л о н о м д н а ($i < 0$). Учитывая, что уклон i является величиной отрицательной, при которой не может установиться равномерное движение, преобразуем уравнение (VIII.31) следующим образом:

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{k^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}} = - \frac{i' + \frac{Q^2}{k^2}}{1 - \frac{\alpha B}{g} \cdot \frac{\omega'^2 W_0^2 i' / W^2}{\omega^3 W^2}} = - \frac{i' \left(1 + \frac{K_0'^2}{K^2}\right)}{1 - j' \frac{K_0'^2}{K^2}} \quad (54)$$

где i' — абсолютная величина уклона русла; $K_0' = \omega_0' W_0'$ - расходная характеристика условного «вспомогательного» потока, который двигался бы с равномерным движением при уклоне i' ;

$j' = \frac{\alpha W^2 B}{g \omega} i'$ - величина, зависящая для данного русла (при заданных шероховатости и уклоне) от глубины h .

По аналогии с руслами с прямым уклоном дна, обозначим

$\frac{K}{K_0'} = \Pi$ и после подобных преобразований получим

$$i'adl = \frac{j' - \Pi^2 + 1 - 1}{1 + \Pi^2} d\Pi = -d\Pi + (j' + 1) \frac{d\Pi}{1 + \Pi^2} \quad (55)$$

где a определяется по формуле (VIII.44.)

Интегрируя уравнение (VIII.55) при условии постоянства a и j' для расчетного участка, получим

$$i'al_{1-2} = \Pi_1 - \Pi_2 + (\bar{j}' + 1) \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} \frac{d\Pi}{1 + \Pi^2} \quad (56)$$

Выражение

$$\int \frac{d\Pi}{1 + \Pi^2} = \text{arctg}\Pi = \Phi'(\Pi) \quad (57)$$

называется функцией Н. Н. Павловского и определяется по табл. VIII.3. С учетом этого длина кривой свободной поверхности (или ее участка)

$$l_{1-2} = \frac{\Pi_1 - \Pi_2 + (\bar{j}' + 1)[\Phi'(\Pi_2) - \Phi'(\Pi_1)]}{i'/a} \quad (58)$$

Способ Б. А. Бахметева

Этот способ основан на применении «показательного закона» (VII.45), что

позволяет заменить в формуле (VIII.40) величину $\Pi^2 = \frac{K^2}{K_0^2}$ величиной $\eta^x =$

$\left(\frac{h}{h_0}\right)^x$, где η — относительная глубина потока, а x — гидравлический

показатель русла, определяемый по формуле (VII.47).

После преобразований, аналогичных примененным в способе Н. Н.

Павловского, получаются расчетные уравнения для определения длины кривой свободной поверхности. Например, для русел с прямым уклоном

$$\frac{i}{h_0} l = \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j}') [\Phi_x(\eta_2) - \Phi_x(\eta_1)] \quad (59)$$

Где $\Phi_x(\eta) = \int \frac{d\eta}{1 - \eta^x}$ — функция Б. А. Бахметева, которая определяется по

таблицам, составленным для разных x и η [3, 6, 14 и др.].

Сравнение способов Н. Н. Павловского и Б. А. Бахметева позволяет отдать предпочтение первому из них. Для него не нужно громоздких таблиц при разных гидравлических показателях русла x которые, кроме того, не являются строго постоянными при разных глубинах в русле. Следует отметить, что для некоторых форм русел (см. § VII.3) «показательный закон» и, следовательно, основанный на нем способ Бахметева вообще неприменимы.

Способ осреднения производной

Способ осреднения производной (способ В. Ю. Даденкова) основан допущении, что при плавноизменяющемся движении производная $\frac{dh}{dl}$ на расчетном участке изменяется незначительно и может быть принята равной ее среднему значению

$$\bar{\theta} = 0.5 \left[\frac{dh}{dl} (1) + \frac{dh}{dl} (2) \right] \quad (60)$$

где $\frac{dh}{dl} (1)$ и $\frac{dh}{dl} (2)$ - значения производных, вычисленные в зависимости от уклона дна русла по формулам (VIII.29), (VIII.30) или (VIII.31) для сечений 1—1 и 2—2.

С учетом изложенного можно записать

$$\frac{dh}{dl} \approx \bar{\theta} \quad (61)$$

$$l_{1-2} = \frac{h_2 - h_1}{\bar{\theta}} \quad (62)$$

При приближении глубин неравномерного движения к критической глубине величина $\bar{\theta}$ стремится к бесконечности. В этом случае удобнее пользоваться формулой

$$l_{1-2} = \bar{\theta}_* (h_2 - h_1) \quad (63)$$

Где

$$\bar{\theta}_* = 0.5 \left[\frac{dh}{dl} (1) + \frac{dh}{dl} (2) \right] \quad (64)$$

Значения $\frac{dh}{dl}$ определяются как обратные величины к вычисленным по формулам (VIII.29), (VIII.30) или (VIII.31). Так, например, для русел с прямым уклоном

$$\frac{dh}{dl} = \frac{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3}}{i \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right)} \quad (65)$$

Этим способом можно также найти глубину потока h' на расстоянии l' от глубины h' (или h_2) внутри рассматриваемого участка (рис. VIII.31).

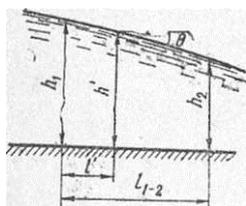
По аналогии с (VIII.62)

$$l' = \frac{(h' - h_1)}{\bar{\theta}} \quad (66)$$

Отсюда

$$h' = h_1 + l' \bar{\theta} \quad (67)$$

При этом значение $\bar{\theta}$ определяется по формуле (VIII.60) для глубин h_1 и h_2 . Для случая, показанного на рис. VIII.31 (кривая спада), производные $\frac{dh}{dl}$ и их среднее значение $\bar{\theta}$ будут отрицательными и, следовательно, $h' < h_1$.



12.2 Построение кривых свободной поверхности в безнапорных трубах

Рис. VIII.31 Эта задача решается с помощью большинства приведенных выше способов (В. И. Чарномского, Н. Н. Павловского, осреднения производной), а также некоторых других. Построение может быть упрощено при применении таблиц геометрических характеристик безнапорных сечений при различных степенях наполнения. Рассмотрим, в качестве примера, построение кривых свободной поверхности в безнапорных трубах с использованием способа В. И... Чарномского. В этом случае формула (VIII.4) для удельной энергии сечения приводится к виду

$$\Xi = (\Delta + \Pi_Q E)r \quad (68)$$

Где $\Delta = \frac{h}{r}$ - степень наполнения трубы;

$\Pi_Q = \frac{\alpha Q^2}{gr^5}$ - расходный параметр трубы, неизменяющийся по ее длине;

$E = \frac{1}{2\omega^{1/2}}$ - коэффициент, зависящий от степени наполнения и определяемый по табл. VIII.2.

Уклон трения i_f с учетом зависимостей (VIII.26), (VIII.27) и (VII.71) может быть представлен в виде

$$i_f = \frac{Q^2}{\omega^2 W^2} = \frac{K_0^2}{K^2} i = \frac{A_0^2 K_{\Pi}^2 i}{K^2}$$

Отсюда видно, что $K_0^2 = A_0^2 K_{\Pi}^2$ и, по аналогии, $K^2 = A^2 K_{\Pi}^2$ (где A_0 и A - относительные расходные характеристики, определяемые по графику, приведенному на рис. VII. 15, в зависимости от наполнения трубы $\Delta_0 = \frac{h_0}{r}$ и

$\Delta = \frac{h}{r}$. Тогда

$$i_f = \frac{A_0^2}{A^2} i \quad (69)$$

С учетом зависимостей (VIII.38), (VIII.69) и (VIII.68) расстояние между расчетными сечениями определится по формуле

$$l_{1-2} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1 + \Pi_Q (E_2 - E_1)}{1 - \frac{A_0^2}{\bar{A}^2}} \cdot \frac{r}{i} \quad (70)$$

Где $\bar{A} = \frac{A_1 + A_2}{2}$ - среднее значение относительной расходной характеристики для двух расчётных сечений.

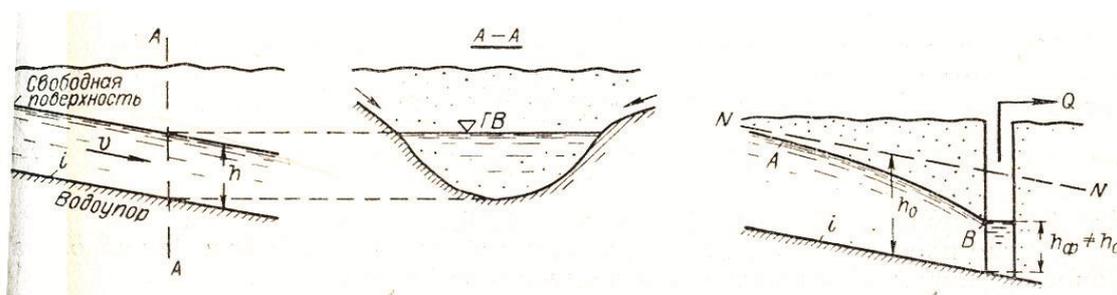
Глава XIII

Движение грунтовых вод. Виды фильтрации. Основной закон фильтрации. Коэффициент фильтрации. Методы определения коэффициента фильтрации

13.1 Основные понятия. Виды фильтрации

Водопроницаемый грунт состоит из отдельных частиц (песчинок), между которыми имеются поры. Явление движения воды в этих порах называется *фильтрацией*. Вода в поры может попасть различным образом. Например, выпадая на поверхность земли в виде дождя, она затем просачивается в грунт. На некоторой глубине такая вода может быть задержана водопроницаемого грунта (плотной глиной, скалой); при этом вода далее будет двигаться по поверхности водонепроницаемого слоя (рис.1).

Водонепроницаемый слой (так называемый *водоупор*) образует как бы русло потока грунтовой воды. В этом русле



двигается грунтовая вода, причём здесь получаем фильтрационный поток со свободной поверхностью, в каждой точке которой имеется атмосферное давление. Такие потоки называются *безнапорными*.

Движение грунтовой воды в песках и водопроницаемых глинистых грунтах является *ламинарным*.

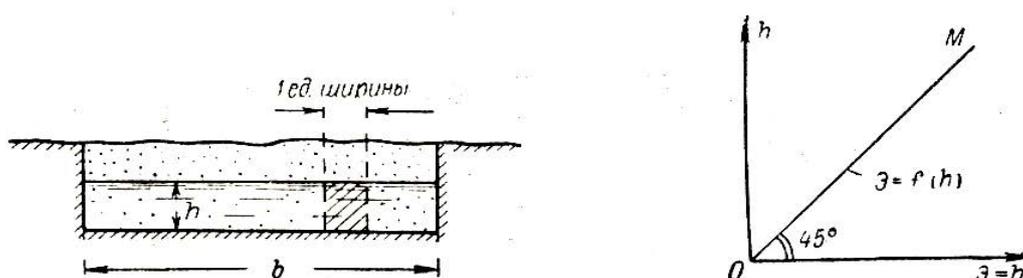
Турбулентное движение грунтовой воды может получиться только в крупнозернистых грунтах (например, в гравии, в гальке), а также в случае каменной наброски, трещиноватой скалы и т.п.

В данной главе будем рассматривать движение грунтовой воды: *безнапорное, установившееся, равномерное и неравномерное, ламинарное (турбулентного движения коснёмся только кратко в конце главы).*

На рис.1. представлен случай *равномерного* движения. Однако обычно в практике встречаются случаи *неравномерного* движения.

Неравномерность движения грунтовой воды обуславливается: или неправильностью формы русла; или тем, что уклон дна русла $i \leq 0$; или, наконец, тем, что в цилиндрическом русле с прямым уклоном дна каким-либо образом фиксируется глубина, отличная от глубины h_0 равномерного движения (от *нормальной* глубины); например, из траншеи (рис.2.) откачивается вода, причём в траншее всё время поддерживается глубина $h_f \neq h_0$. Свободная поверхность фильтрационного потока называется *депрессионной поверхностью*; кривая же свободной поверхности АВ (рис.2) – *кривой депрессии*.

В настоящей главе главным образом будем заниматься построением кривых депрессий; к этому часто и сводится расчёт плавно изменяющихся безнапорных фильтрационных потоков. Дополнительно ещё иногда отыскивают величину фильтрационного расхода. Существенной, впрочем, является также так называемая *внешняя* задача из области движения грунтовых вод, заключающаяся в выяснении величины сил, приложенных со стороны грунтовой воды к скелету грунта (“*фильтрационных сил*”); однако этого вопроса мы далее вовсе не будем касаться (он рассматривается в курсе “Механика грунтов” и в курсе “Гидротехническое сооружение”)



Ниже рассматриваем в основном так называемую *плоскую задачу*; при этом имеем в виду поток шириной, равной, например, 1 м или 1 см, характеризуемый удельным (единичным) фильтрационным расходом.:

$$Qq = b \text{ [м}^2\text{/сек или см}^2\text{/сек]} \quad (1)$$

где b – ширина грунтового русла (рис.3).

Решая плоскую задачу, оперируем координатами (x и z), располагая оси координат x и z в плоскости продольного сечения потока.

Выше, рассматривая вопрос о построении кривых свободной поверхности для открытых русел, поступали следующим образом:

а) Потерю напора рассчитывали, исходя из формул Шези ($v = C\sqrt{RJ}$), полагая, что v прямо пропорционально $J^{1/2}$;

б) Учитывали величину скоростного напора $v^2/2g$, поскольку скорости v в случае открытых русел относительно велики.

Надо особенно подчеркнуть, что, в отличие от упомянутого случая турбулентного движения воды в открытых руслах, при расчёте ламинарного движения грунтовых вод:

а) вместо формулы Шези пользуются другой формулой(формулой Дарси; см.ниже), согласно которой скорость прямо пропорциональна величине J в *первой* степени;

б) скоростным напором $v^2/2g$ ввиду малости скоростей движения грунтовых вод всегда пренебрегают.

Как видно, *напорная линия* EE в случае *грунтовых вод* всегда совпадает с *пьезометрической линией* PP . Линия, в которую сливаются кривые EE и PP , обычно называются *пьезометрической*. Понятия гидравлического и пьезометрического уклонов здесь оказываются тождественными:

$$J_e = J. \quad (2)$$

Понятия потенциального напора и полного напора (выражается в данном случае суммой только *двух* членов) здесь также совпадают):

$$H_e = H = z + p/\gamma \quad (3)$$

Имея в виду такое положение, далее пользуемся вместо обозначений J_e , J , H_e , H только обозначениями J и H , причём J называем *пъезометрическим уклоном*, а H – просто *напором*.

График удельной энергии сечения в случае грунтовых вод формально (для принимаемых далее расчётных схем) приобретает вид, показанный на рис.4. В связи с пренебрежением величиной $v^2/2g$ и весьма малым фильтрационным расходом кривая $\Theta = f(h)$ практически сливается со своими асимптотами, причём зависимость $\Theta = f(h)$ для грунтовых вод оказывается выраженной прямой OM . Из графика на рис.4. видно, что для грунтовых вод критическая глубина всегда практически равна нулю:

$$h_k = 0 \quad (4)$$

Поэтому известная линия критических глубин KK всегда должна в случае грунтовых вод практически совпадать с линией дна.

Что касается критического уклона, то для безнапорного движения грунтовых вод он должен был бы равняться бесконечности (т.к. только при таком условии можно получить $h_0 = h_k = 0$); однако такой уклон существовать не может. Поэтому следует считать, что фильтрационные потоки всегда характеризуются *спокойным* движением и уклоном дна $i < i_k$

13.2 Основной закон ламинарной фильтрации (формула Дарси).

Скорость фильтрации

Представим на рис. 6. металлическую трубу, заполненную песком, имеющую внутренний диаметр D . Предположим, что под действием разности давлений на концах этой трубы вода, полностью заполняющая все поры в песке, движется (фильтрует) в этих порах.

Наметим плоское поперечное сечение AA трубы. Рассматривая его, можем различать три различные площади:

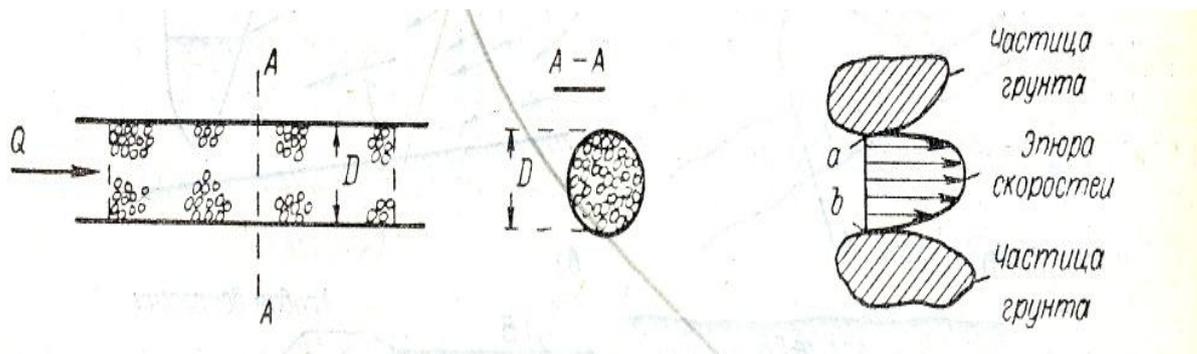
а) площадь сечения пор грунта ($\omega_{пор}$); эта площадь является площадью действительного живого сечения потока;

б) площадь сечения частиц грунта ($\omega_{\text{част}}$); через эту площадь вода в действительности не проходит;

в) площадь сечения всей трубы ($\omega_{\text{геом}}$); очевидно,

$$\boxed{\omega_{\text{геом}} = \pi D^2/4 = \omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{част}}} \quad (5)$$

Рассматривая движение воды в какой-либо отдельной поре, получим эпюру скоростей в виде, представленном на рис.7. Однако в практике, вовсе не считаясь с неравномерностью распределения



скоростей в порах, *действительной скоростью* движения воды в порах грунта называют величину

$$\boxed{u' = Q / \omega_{\text{пор}}} \quad (6)$$

где Q – расход воды, движущейся в трубе (рис.6.)

Наряду с этим вводят понятие так называемой *скорости фильтрации*

$$\boxed{u' = Q / \omega_{\text{геом}} = Q / \omega_{\text{пор}} + \omega_{\text{част}}} \quad (7)$$

Как видно, *скорость фильтрации* (u) *есть фиктивная (воображаемая) скорость, получающаяся в том случае, если мы себе представим, что вода движется не только через поры, но и через тельца частиц грунта, причём расход воды равен заданному (действительному расходу).*

Установим связь между действительной скоростью и скоростью фильтрации.

С этой целью обозначим коэффициент пористости грунта через n и коэффициент поверхностной пористости грунта через α :

$$\boxed{n = \text{объём пор грунта} / \text{объём пор грунта} + \text{объём частиц грунта} < 1,0;} \quad (8)$$

$$\boxed{\alpha = \omega_{\text{пор}} / \omega_{\text{геом}} < 1,0.} \quad (9)$$

Можно показать, что в случае однородного грунта

$$\boxed{n = \alpha} \quad (10)$$

Деля (7) на (6), получаем:

$$\boxed{u / u' = \omega_{\text{пор}} / \omega_{\text{геом}} = \alpha = n,} \quad (11)$$

откуда

$$\boxed{u = nu'.} \quad (12)$$

Так как $n < 1,0$, то скорость фильтрации (u) по величине всегда меньше действительной скорости (u').

Проводя опыты с фильтрацией в песках и глинах, ещё в середине прошлого столетия установили, что скорость фильтрации и в случае установившегося движения может быть представлена следующей зависимостью, называемой формулой Дарси и выражающей основной закон ламинарной фильтрации:

$$\boxed{u = R J,} \quad (13)$$

где u – скорость фильтрации в данной точке фильтрационного потока; J – пьезометрический уклон в той же точке; R – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом фильтрации*.

Коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости [поскольку J в формуле (13) – величина безмерная], *представляет собой скорость, фильтрации при уклоне $J = 1$* . Как показывают опыты, для воды определённой температуры величина R зависит только от рода грунта. Из формулы (13) видно, что *скорость фильтрации “ u ” прямо пропорциональна величине J в первой степени*.

Указанную формулу можно представить ещё в следующем виде:

$$\boxed{\omega_{\text{геом}} u = \omega_{\text{геом}} R J,} \quad (14)$$

или в виде:

$$\boxed{Q = \omega R J,} \quad (15)$$

Где под величиной ω понимаем $\omega_{\text{геом}}$ (значок “геом” как здесь, так и ниже опускаем). Зависимость (15) также называется *формулой Дарси*.

Формула (13) или (15), *относящаяся к ламинарной фильтрации*, имеет определённые границы применимости. Для воды обычной температуры ($v \approx$

0,01 см²/сек) различные авторы рекомендуют применять указанную формулу в случае, когда

$$\boxed{ud < 0.01 \div 0.07} \quad (16)$$

где u – в см/сек; d – диаметр частицы грунта (некоторого среднего размера в см.)

13.3 Методы определения коэффициента фильтрации

Существует три различных метода определения коэффициента фильтрации, входящего в формулу Дарси:

- 1) *Лабораторный метод*: k_f определяется в лаборатории на специальном приборе, в который закладывается образец интересующего нас грунта (с ненарушенной или нарушенной структурой) ;
- 2) *Расчётный метод*: k_f определяется расчётом по особым эмпирическим формулам в зависимости от величины диаметра частиц грунта;
- 3) *Полевой метод*: k_f определяется на месте строительства (“в поле”) путём откачки воды из специально устроенных колодцев.

1°. **Лабораторный метод.** Для определения k_f в лаборатории обычно применяют особый прибор, называемый *прибором Дарси*.

Прибор Дарси представляет собой металлический цилиндр А (рис.8) с сеткой, на которую укладывается испытываемый грунт. Через этот грунт под соответствующим напором фильтрует вода (например, снизу вверх). В сечениях 1-1 и 2-2, находящихся на расстоянии друг от друга, равном l , к цилиндру А приключены пьезометры П1 и П2, при помощи которых можно измерять напоры H_1 и H_2 в указанных двух сечениях. Вода, прошедшая через грунт, попадает в мерный сосуд Б, посредством которого можно определить величину фильтрационного расхода:

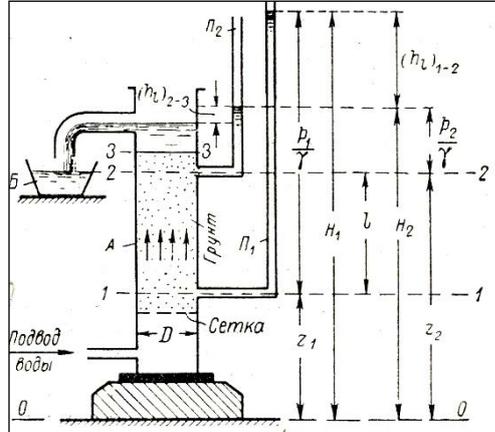
$$\boxed{Q = W / t,} \quad (17)$$

Где W – объём воды, скопившейся в мерном сосуде в течении времени t .

Решим формулу Дарси (15) в отношении k_f :

$$\boxed{\kappa = Q / \omega J.} \quad (18)$$

По этой зависимости можно найти κ для данного грунта. Очевидно, для этого в формулу (21) следует поставить Q , полученное по (20), и величину ω , равную:



$$\boxed{\kappa = Q / \omega J.} \quad (18)$$

По этой зависимости можно найти κ для данного грунта. Очевидно, для этого в формулу (21) следует подставить Q , полученное по (20), и величину ω , равную:

$\omega = \pi D^2 / 4$, где D – внутренний диаметр цилиндра A . Что касается величины J , то

$$\boxed{J = (hl)_{1-2} / l,} \quad (19)$$

Где $(hl)_{1-2}$ - потеря напора по длине между сечениями 1-1 и 2-2:

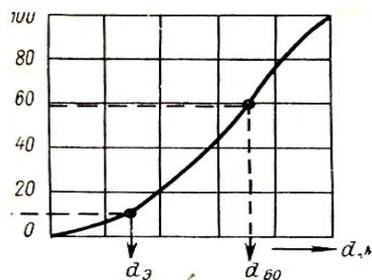
$$\boxed{(hl)_{1-2} = H_1 - H_2} \quad (20)$$

Заметим, что высота $(hl)_{2-3}$ показанная на чертеже, представляет собой потерю напора в грунте по длине от сечения 2-2 до сечения 3-3.

2°. Расчётный метод. В литературе имеется много эмпирических формул, предложенных разными авторами, для определения коэффициента фильтрации. Для примера приведём здесь одну формулу, предложенную для разнозернистого песка *Хэзен*; эта формула имеет вид:

$$\boxed{\kappa = A c t d^2 \varepsilon,} \quad (21)$$

где A – коэффициент, учитывающий размерность величины κ ; если κ измеряется в м/сут, то $A = 1$; c – коэффициент, зависящий от степени засорения песка глинистыми частицами (c с увеличением степени засорения c уменьшается):



$$c = 500 \div 1000; \quad (22)$$

τ – поправка на температуру воды:

$$\tau = 0,70 + 0,03t^\circ, \quad (23)$$

t° – температура в градусах по С; $d_э$ – диаметр в мм частиц грунта, вес которых вместе с весом частиц диаметром, меньше $d_э$ составляет 10% от веса всего грунта; $d_э$ называется *эффективным*, или *действующим*, диаметром частиц грунта (вместо $d_э$ иногда пишут d_{10}).

Величина $d_э$ может быть найдена по кривой гранулометрического состава грунта (рис.9). По этой кривой находят также диаметр d_{60} , который отвечает 60% от веса всего грунта. Величину отношения $d_{60} / d_э$ называют *коэффициентом разноразмерности* грунта.

Формула Хзена применима для песков, имеющих $d_э$ от 0,1 до 3,0 мм и притом таких, для которых коэффициент разноразмерности меньше 5,0.

В настоящее время эмпирические формулы для определения κ в практике почти не применяются. Проще найти κ при помощи прибора Дарси, чем на основании соответствующих лабораторных исследований строить кривую механического анализа. Кроме того, данные, полученные на приборе Дарси, являются значительно более точными, чем данные, найденные при помощи эмпирических формул.

Выше мы привели формулу Хэзена главным образом для того, чтобы в общих чертах пояснить те соотношения между κ и $d_э$ а также между κ и t° , которые здесь имеются.

3°. Полевой метод. Производя откачку воды из специально устроенного колодца, можем установить величину Q ; вместе с тем можно в натуре измерить также получающуюся в грунте кривую депрессии. Имея эту кривую и зная Q , по особым формулам можно вычислить и величину κ .

4°. Заключительные замечания. В заключении сделаем следующие замечания.

1. Величина κ тем меньше, чем меньше частицы грунта и чем грунт более разнотернистый.
2. Численные значения κ встречаются в практике самые различные. Приведём только для примера таблицу численных значений κ для разных грунтов (с тем, чтобы показать только порядок численного значения κ для этих грунтов).

Название грунтов	Коэффициент фильтрации κ , см/сек
песок крупнозернистый	0,01 – 0,05
песок мелкозернистый	0,001 – 0,005
супесь плотная	0,0001 – 0,0005
суглинок	0,00001 – 0,00005
глина	0,000001 – 0,000005

Величина пьезометрического уклона J для безнапорного движения обычно бывает значительно менее единицы: $J \ll 1,0$; только в исключительных случаях J может быть здесь более 1,0. Имея ввиду и учитывая формулу Дарси (13), заключаем, что скорости движения грунтовых вод бывают весьма малой величины, порядка 0,01 – 0,000001 см/сек.

Мозговой штурм (брейнсторминг – буря мозгов) – метод коллективной генерации идей решения практических или научных проблем.

Глава XIV.

Одномерные потоки газа.

Зависимость скорости звука от термодинамических параметров.

Термодинамические формы уравнения Бернулли.

14.1 Краткие сведения из термодинамики

В этой главе будут использоваться понятия, термины и зависимости, которые рассматриваются в курсе термодинамики.

Под *термодинамической системой* в данной главе будем понимать выделенный объем жидкости (газа). Состояние системы считается зафиксированным, если задано определенное (минимально необходимое) количество ее свойств (характеристик), называемых *параметрами состояния*. Для сжимаемого невязкого газа количество таких параметров равно двум (например, давление p и температура T). Параметров состояния системы может быть больше минимального (в рассматриваемом случае это еще плотность газа ρ , внутренняя энергии e и др.). Параметры состояния связаны между собой либо уравнениями состояния, либо определяющими зависимостями. Последовательность изменяющихся во времени состояний системы называют *процессом*, происходящим с этой системой. Примером процесса может являться движение выделенного элементарного объема газа как части потока; в этом процессе объем может деформироваться (изменять размеры и форму), нагреваться и т.п. Параметрами состояния системы могут быть только такие величины, которые зависят от начальной и конечной точек процесса, но не зависят от последовательности состояний системы между этими точками, т. е. от пути процесса между начальной и конечной точками.

3. Уравнение состояния совершенного газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1)$$

где T — абсолютная температура, R . Удельная газовая постоянная

$$R = \frac{1.987 \frac{\text{квл}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu} = \frac{8.3147 \frac{\text{дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\mu} \quad (2)$$

где μ — молекулярная масса газа. Для воздуха $\mu = 29$ г/моль — и следовательно, $R = 287.0$ дж/моль.

4. Удельный объем газа $V_{\text{уд}}$ (т. е. объем, имеющий единичную массу) обратно пропорционален плотности ρ :

$$V_{\text{уд}} = 1/\rho \quad (3)$$

5. Согласно *первому началу термодинамики*, внутренняя энергия выделенного удельного объема газа $V_{\text{уд}}$, по определению равная плотности распределения внутренней энергии e , увеличивается за счет подведения к этому объему количества теплоты dq и уменьшается за счет работы $p dV_{\text{уд}}$, связанной с изменением объема $V_{\text{уд}}$ в термодинамическом процессе (при расширении $dV_{\text{уд}} > 0$, а при сжатии $dV_{\text{уд}} < 0$). В результате имеем

$$de = dq - p dV_{\text{уд}} = dq - \left(\frac{1}{\rho}\right) d\rho = dq + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (4)$$

6. *Энтальпия*, или тепловая функция, определяется в виде

$$i = e + \frac{p}{\rho} \quad (5)$$

и представляет собой удельную (отнесенную к массе) энергию выделенного объема газа, связанную с термодинамическим состоянием этого объема. Она состоит из удельной внутренней энергии (e) и удельной потенциальной;

энергии $\left(\frac{p}{\rho}\right)$ удельная внутренняя энергия пропорциональна температуре рассматриваемого объема, а $\left(\frac{p}{\rho}\right)$ представляет собой работу, которую нужно затратить, чтобы поместить в окружающую среду с давлением p единицу массы газа. Изменение энтальпии di имеет вид

$$d_i = de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = de + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (6)$$

Из этого равенства получим

$$de - \frac{p}{\rho^2} d\rho = d_i - \frac{dp}{\rho} \quad (7)$$

7. Удельная теплоемкость газа при постоянном объеме c_v и удельная теплоемкость газа при постоянном давлении c_p (рис. 17.1) определяются следующим образом:

$$C_v = \frac{de}{dT} \quad (8)$$

при фиксированном объеме выделенной массы газа $V = \text{const}$; для воздуха $c_v = 717.5 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$

$$C_p = \frac{de}{dT}$$

при таком изменении объема \forall выделенной массы газа, которое обеспечивает постоянное давление $p = \text{const}$.; для воздуха

$$C_p = 1004 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К} \quad (10)$$

Из определения e следует, что при постоянном значении T удельная внутренняя энергия газа

$$e = C_v T \quad (11)$$

8. Основная термодинамическая формула (формула Майера) имеет вид

$$C_p - c_v = R \quad (12)$$

Умножим равенство (12) на T :

$$C_p T - c_v T = RT$$

и воспользуемся уравнением состояния (1) и равенством (11); получим

$$C_p T = e + \left(\frac{p}{\rho}\right) \text{ или } i = C_p T \quad (12)$$

9. При *изотермическом* течении ($T = \text{const}$) в выделенном элементарном объеме газа вдоль траектории его движения, согласно уравнению Клапейрона—Менделеева (1), выполняется условие

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (13)$$

10. При *адиабатическом* течении, когда приток тепла извне к выделенному элементарному объему газа исключается, и при отсутствии диссипации согласно первому началу термодинамики выполняется условие

$$\frac{p}{\rho^k}$$

где k — показатель адиабаты,

$$k = \frac{C_P}{C_V}$$

как правило, полагают для воздуха и других двухатомных газов $k = 1,4$.

Условие (12) можно представить в виде так называемой адиабаты Пуассона

$$\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{p}{\rho_0}\right)^k \quad (14)$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в какой-либо фиксированной точке траектории движущегося элементарного объема.

11. Согласно *второму началу термодинамики*, при теплообмене между двумя или несколькими телами теплота самопроизвольно переходит лишь от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой.

12. *Энтропия* s выделенного удельного объема газа $V_{уд}$ определяется следующим образом: изменение энтропии ds этого объема при подведении к нему количества теплоты dQ_0 составит

$$ds = \frac{dQ_0}{T} \quad (15)$$

где T — абсолютная температура газа в объеме $V_{уд}$.

В этом определении dQ_0 — это количество теплоты, подведенное в условиях обратимого термодинамического процесса, когда возможно одновременное возвращение рассматриваемой термодинамической системы и окружающей эту систему среды в исходное состояние без каких-либо остаточных изменений. При обратимом процессе значения энтропии в начале s_1 и в конце s_2 процесса вычисляют, согласно определению энтропии:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_0}{T} \quad (16)$$

Процесс, при котором энтропия тела остается постоянной ($ds = 0$), называется *изэнтропическим*. Примером такого процесса является адиабатический процесс ($dq = 0$) в термодинамической системе, в которой отсутствует диссипация механической энергии (невязкий газ), т. е. обратимый адиабатический процесс.

На основании второго начала термодинамики доказывается, что энтропия — однозначная функция состояния системы или, другими словами, является параметром состояния (как давление, температура, плотность, энтальпия), а также, что в случае необратимого процесса

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_0}{T} \quad (17)$$

Согласно этой зависимости, при необратимом процессе энтропия системы является неубывающей функцией времени. Если известны значения энтропии S_1 и S_2 в начале и в конце необратимого процесса, то обусловленное необратимым процессом изменение энтропии может быть представлено как результат некоторого воображаемого обратимого процесса. Этот прием оказывается полезным, в частности при описании движения вязкого газа, в этом случае диссипированная внутри объема газа теплота может интерпретироваться как подведенная извне. Установим связь энтропии с другими термодинамическими параметрами системы. Подставим в определяющее энтропию выражение (15) значение ds из (4), а затем воспользуемся равенствами (23), (28) и (17). В результате получим

$$ds = \frac{dq_0}{T} = \frac{1}{T} \left(de - \frac{p}{\rho^2} \right) = \frac{1}{T} \left(di \frac{dp}{\rho} \right) = \frac{1}{T} \left(c_p dT - \frac{p}{\rho} \frac{dp}{\rho} \right) = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{\rho}$$

Проинтегрируем полученное выражение по интервалу процесса между состояниями 1 и 2:

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (18)$$

Выражение (18) подтверждает, что энтропия является параметром системы. Полученные выше зависимости для термодинамических систем применительно к задачам механики газа справедливы для выделенного элементарного объема газа, и следовательно, равенства типа (13), (14), (16) выполняются вдоль *траектории*, по которой движется этот объем. При установившемся движении эти равенства выполняются вдоль *линий тока*.

Зависимость скорости звука от термодинамических параметров

Используем рассмотренные выше термодинамические зависимости для анализа свойств газовых потоков. Скорость звука в газе может быть вычислена при двух разных предположениях:

1) процесс распространения возмущения изотермический ($T=\text{const}$). Тогда, согласно уравнению Клапейрона - Менделеева,

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho} = RT \quad (22)$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{RT} \quad (23)$$

2) процесс распространения возмущений адиабатический. Тогда из уравнения (15) следует:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, p = \rho^k \cdot \text{const}$$

$$\frac{dp}{\rho} = k\rho^{k-1} \cdot \text{const} = k\rho^{k-1} \cdot \frac{p}{\rho^k} = k \frac{p}{\rho}$$

При этом

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = k \sqrt{\frac{p}{\rho}} \sqrt{RT} \quad (24)$$

Формула (23) была получена Ньютоном, а (24) - Лапласом. На основании экспериментов установлено, что опытные значения скорости звука хорошо соответствуют формуле (24), следовательно, процесс распространения возмущений в газах близок к адиабатическому. Отметим, что различие между значениями a , определяемыми по формулам (23) и (24), не превышает 20 %. Рассчитаем скорость звука в воздухе при температуре 20°C:

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 293} = 343,1 \text{ м/с}$$

Интересно отметить, что значение скорости звука в газе имеет тот же порядок, что и значение скорости свободного пробега молекул. Как известно из кинетической теории газа, среднеквадратическое значение этой скорости

$$V_M = \sqrt{3RT}, \text{ следовательно } a \approx 0.68V_M$$

Термодинамические формы уравнения Бернулли. Как уже отмечалось, низкие теплоемкость и теплопроводность газов обеспечивают условия протекания процессов в них, близкие к адиабатическим, поэтому в дальнейшем все результаты будут получены для условий адиабатического процесса. В соответствии с этим преобразуем уравнение Бернулли

$$e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const \text{ или } i + \frac{u^2}{2} = const \quad (25)$$

Во-первых, используя уравнение Клапейрона - Менделеева, выразим внутреннюю энергию e через давление p :

$$e = c_v T = c_v \frac{P}{R\rho} = c_v \frac{p}{(c_p - c_v)\rho} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}$$

Подставив это выражение в (25), получим вторую форму уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho(k-1)} = const \quad (26)$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{RT}{k-1} = const \quad (27)$$

Подставив в (25) вместо i выражение (13), получим третью форму уравнения Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + c_p T = const \quad (28)$$

Четвертую форму уравнения Бернулли можно записать, заменив в (27) kT на a^2 (согласно (24)):

$$\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const \quad (29)$$

Отметим, что в (29) скорость звука a местная, т.е. она относится к тому же сечению, что и скорость u .

Представленные формы уравнения Бернулли, содержащие термодинамические характеристики, выполняются для термоизолированных потоков совершенного газа, а также для коротких отрезков линий тока, в пределах которых можно пренебречь поперечной диффузией тепла и механической энергии.

14.2 Обтекание тел несжимаемой жидкостью. Обтекание крыловых профилей. Основы расчёта ветровой нагрузки конструкций и сооружений

Предварительные сведения

В круг решения внешних задач гидромеханики входит описание движения тел, погруженных в жидкость или газ (подводных лодок, рыб и других животных в воде; самолётов, автомобилей, птиц, спортивных снарядов в воздухе), и обтекание потоком жидкости или газа покоящихся тел (обтекание речным потоком трубопроводов и мостовых опор, обтекание воздушным потоком зданий, дымовых труб, антенн, опор и проводов линий электропередачи т.п.). Основная цель при решении подобных задач – определение сил, действующих на тело: силы сопротивления движению, подъёмной силы, нагрузки на сооружения; в отдельных случаях необходимо представить детальную картину течения (поля скорости и давления) в окрестности тела, например, для выявления потенциальных зон кавитационной эрозии.

Как правило, внешняя задача решается на основе сочетания аналитических, экспериментальных и вычислительных методов. В последние десятилетия (после 1970-х гг.) роль вычислительных методов резко возросла

благодаря как достижениям компьютерных технологий, так и интенсивному развитию численных методов решения уравнений гидромеханики.

Демонстрируются, главным образом, качественные результаты, относящиеся к внешним задачам. Более подробно рассмотрены вопросы, связанные с определением нагрузок на сооружения, так как они входят в круг профессиональных интересов инженеров – строителей.

В дальнейшем будем считать, что поля скорости и давления в потоке на достаточном удалении от тела (вне области, возмущаемой телом) *стационарны и однородны*, т.е. скорость жидкости и давление не зависят от времени и координат, причём, как правило, скорость горизонтальна. *Невозмущенные значения скорости и давления* обозначим V_∞ и p_∞ , соответственно.

Рассмотрим обтекание жидкостью со скоростью V_∞ неподвижного тела, полученные результаты в соответствии с принципом относительности Галилея будем распространять и на движение тела со скоростью V_∞ в неподвижной жидкости, если специально не оговорено, что их следует различать. Кроме того, для упрощения демонстрации особенностей внешней задачи действие силы тяжести (т.е. гидростатическое распределение давления, архимедову силу и т.п.) из рассмотрения исключим.

Обтекание крыловых профилей.

Современные летательные аппараты поддерживаются в воздухе за счет подъемной силы, создаваемой крыльями (винт вертолета можно рассматривать как вращающиеся крылья). Крылья должны иметь возможно меньшее сопротивление, чтобы при фиксированной (задаваемой мощностью двигателя) тяге обеспечивать возможно большую скорость аппарата. С учетом этого поперечному сечению крыла придают обтекаемый профиль, имеющий форму, близкую к представленному на рис. 1. Его называют *крыловым профилем*. Покажем, как возникает подъемная сила при безотрывном обтекании крылового профиля. Вначале положим, что поле скорости потенциально, а условие прилипания к твердой поверхности и

пограничный слой отсутствуют. Если профиль имеет плоскость симметрии, и эта плоскость расположена вдоль потока (рис. 1,а), то в таком случае на профиль не действуют ни сила сопротивления, ни подъемная сила. Сила сопротивления равна нулю в соответствии с парадоксом Даламбера, поясненным на примере безотрывного обтекания цилиндра. Чтобы появилась подъемная сила, согласно теореме Жуковского, необходимо, чтобы обтекание было циркуляционным, т.е. чтобы вокруг профиля потенциальное поле скорости имело ненулевую (равную Γ) циркуляцию по любому.

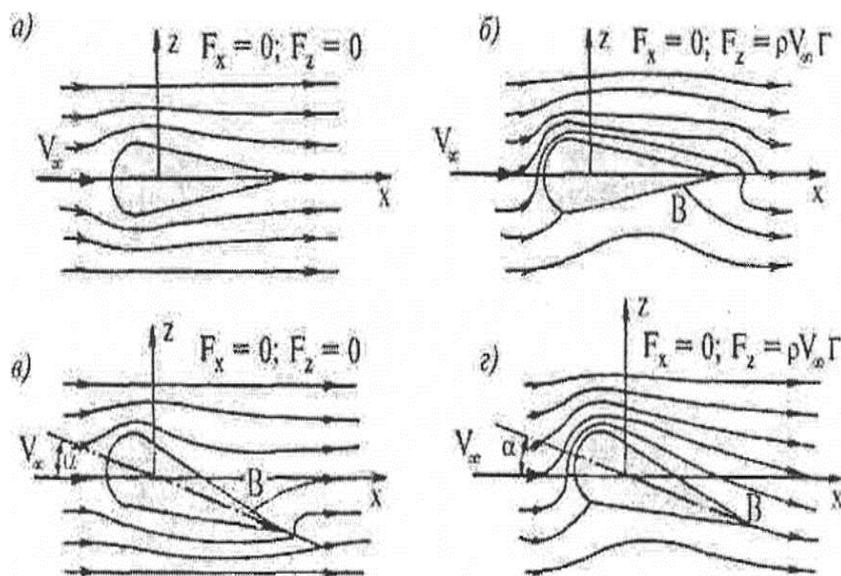


Рис. 1.

Силы, действующие на крыловой профиль при безотрывном обтекании: а - бесциркуляционное обтекание с углом атаки $\alpha = 0$; б - циркуляционное обтекание, $\alpha = 0$; в - бесциркуляционное обтекание, $\alpha > 0$; г - циркуляционное обтекание в соответствии с постулатом Жуковского - Чаплыгина

замкнутому контуру, охватывающему профиль. При этом система линий тока имеет вид, представленный на рис. 1,б; давление на нижнюю поверхность профиля больше, чем давление на верхнюю поверхность в каждой паре симметричных точек. Главный вектор сил давления представляет собой подъемную силу, которая на единицу длины (в направлении оси y) профиля составляет

$$(F_z)_{y,d} = \rho V_\infty \Gamma (1)$$

Но вследствие симметрии профиля и обтекающего его потока относительно горизонтальной плоскости (x, y) для образования циркуляционного обтекания нет оснований, и поэтому поле скорости,

представленное на рис. 1, б не реализуется. Если плоскость симметрии крылового профиля наклонена по отношению к скорости V_∞ на угол α (угол атаки), то при бесциркуляционном обтекании линии тока имеют вид, представленный на рис. 1, е. При таком поле скорости теоретически не возникают ни сила сопротивления, ни подъемная сила (хотя даже простейшие опыты, например, с воздушным змеем, показывают, что при $\alpha > 0$ подъемная сила не равна нулю). Кроме того, при безотрывном перетекании жидкости с нижней поверхности крыла на верхнюю теоретическая скорость жидкости на острой кромке бесконечно большая, а, согласно уравнению Бернулли, такой скорости соответствует бесконечно большое отрицательное давление, которое физически не может существовать.

Если на поле скорости жидкости, возникающее при обтекании крыла однородным потоком со скоростью V_∞ , наложить поле скорости, образующееся при обтекании крыла потенциальным (присоединенным) вихрем, то особая точка В сместится к задней кромке крыла. Для устранения бесконечно большой скорости вблизи острой кромки циркуляция скорости Γ присоединенного вихря должна иметь значение, при котором особая точка В совпадает с острой задней кромкой, а линии тока не имеют изломов с углом более 180° (рис. 1, г). Положение, согласно которому при реальном обтекании крыла формируется именно такое поле скорости, получило название *постулата Жуковского - Чаплыгина*. Как показывает теоретический анализ, соответствующее условиям постулата циркуляция скорости Γ возрастает с увеличением угла атаки α (при $\alpha < 13^\circ$). Поскольку, согласно теореме Жуковского, подъемная сила, действующая на крыло, пропорциональна Γ , с увеличением угла атаки увеличивается подъемная сила. Теоретическая зависимость $c_z = c_z(\alpha)$ хорошо подтверждается экспериментально (рис. 2). Отметим, что при безотрывном циркуляционном обтекании крылового профиля (см. рис. 1, г) горизонтальная сила сопротивления равна нулю (парадокс Даламбера).

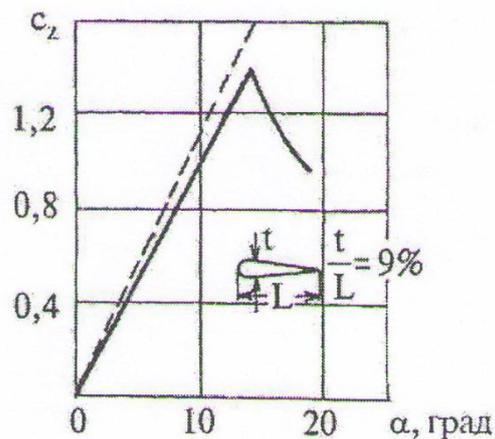


Рис. 2. Зависимость коэффициента c_z от угла атаки α : штриховая линия - теоретическое решение для плоской пластины, основанное на постулате Чаплыгина; сплошная линия - экспериментальная кривая для крылового профиля

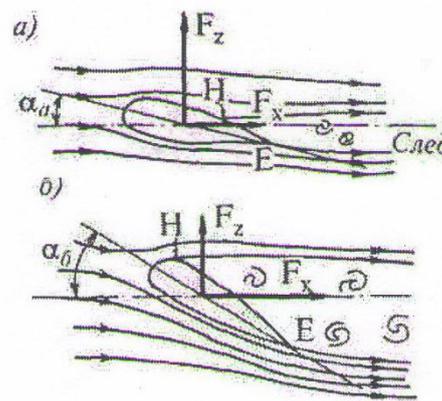


Рис. 3 Уменьшение подъемной силы F_z и увеличение силы сопротивления F_x при увеличении угла атаки: $\alpha_b > \alpha_a$

Если учитывать вязкость жидкости и условия прилипания, сила сопротивления F_x не равна нулю и при малых углах атаки. Она складывается, во-первых, из сопротивления трения за счет вязкости, а во-вторых, из сопротивления формы за счет отрыва пограничного слоя и образования следа (рис. 3, а). Пока точка отрыва H находится недалеко от задней кромки давление в следе, приблизительно равное p_∞ , на участке HE несущественно уменьшает подъемную силу. При увеличении угла атаки α точка отрыва H смещается вверх по течению и может достичь передней кромки (рис. 3, б), в этом случае на всю верхнюю поверхность профиля действует давление p_∞ , которое ненамного меньше, чем давление на нижнюю поверхность, и подъемная сила становится очень небольшой. Переход от картины течения, представленной на рис. 3, а, к картине на рис. 3, б происходит при небольшом изменении угла атаки после превышения $\alpha = 13^\circ$ и имеет вид кризиса (см. рис. 2). Большие размеры следа не только уменьшают подъемную силу, но и увеличивают силу сопротивления. Чтобы

уменьшить размеры следа, крыловому профилю придают кривизну (рис. 4), которая обеспечивает лучшие эксплуатационные характеристики крылового профиля. Крылья самолетов снабжены закрылками, изменяющими поперечное сечение профиля, для того, чтобы обеспечивать необходимую подъемную силу при различных скоростях полета (U_{00}) и на различной высоте h (плотность воздуха ρ уменьшается с высотой).

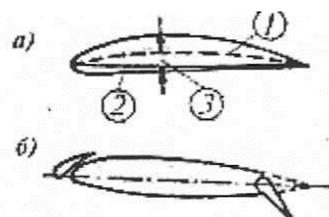


Рис.4. Несимметричный крыловой профиль (а): 1-средняя линия; 2-хорда; 3-стрелка прогиба; крыловой профиль с изменяемой геометрией (б)

14.2 Основы расчета ветровой нагрузки на конструкции и сооружения

В этом разделе приведены сведения из СНиП П-А-6-74. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. Поскольку они являются лишь основой расчета ветровой нагрузки, из рассмотрения исключаются: гибкие конструкции, для которых необходимо учитывать динамическое воздействие пульсаций скорости ветра; порывистость ветра; влияние рельефа местности.

Первый этап расчета ветровой нагрузки - установление (аппроксимация) *формы обтекаемого объекта*. Как правило, целесообразно привести задачу обтекания сооружения, конструкции или элемента конструкции к плоской задаче. Так, дымовые трубы, провода ЛЭП, кабели аппроксимируются цилиндрами большой длины; здания - призмами; стержни, составляющие фермы или опоры ЛЭП - удлиненными телами с соответствующим профилем поперечного сечения (швеллер, уголок, двутавр и т.п.). Значения расчетных коэффициентов s_x для наиболее часто встречающихся в строительной практике поперечных сечений представлены

в табл. 1. На каждом профиле указаны направление ветра и характерный размер, вводимый в расчет. Второй этап - установление расчетной скорости ветра и скоростного напора. По новой карте районирования территории России по скоростным напорам ветра принято семь ветровых районов: район VII - Земля Франца Иосифа, о-в Новая Земля, побережье залива Шелехова (Охотское море) и Берингова моря, восточный берег и юг Камчатки, юг и север о-ва Сахалин, северо-западное побережье Японского моря; район VI - п-ов Таймыр, устье Лены, побережье Карского моря; район V - северное побережье Кольского п-ва, побережье вблизи городов Новороссийск, Махачкала, Дербент, Прикавказье (г. Ставрополь), п-ов Ямал, район г. Кокчетав, побережье Охотского моря, Приморский край; район IV - побережье Балтийского моря, Северный Урал, район Обской Губы, побережье нижнего течения Лены; район III - побережье Финского залива, юг европейской части России, район г. Норильска, Биробиджан; районы I и II - центральная часть России, север и северо-восток европейской части, западная и центральная части Сибири.

Таблица 1

Значения коэффициентов s_x различных профилей поперечных сечений

Профиль								
Значение s_x	2,00	2,00	2,18	1,20	1,83	2,00	2,00	2,40
Профиль								
Значение s_x	1,50	0,70	1,75	1,10	1,20	1,90	2,00	1,60
Профиль								
Значение s_x	1,85	2,20	1,90	0,50	2,05	0,87	2,00	2,00

Значения нормативных скоростных напоров ветра q_n и соответствующих

скоростей ветра v_B для высоты над поверхностью земли 10 м представлены в табл. 2.

Таблица 2

Нормативные характеристики ветра

Характеристика	Географический район						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Скорость ветра v_B , м/с	21	24	27	30	34	37	40
Скоростной напор q , Па	270	350	450	550	700	850	1000

14.4 Определение скоростного напора ветра

Для определения скоростного напора ветра, действующего на здания и сооружения высотой более 10 м, вводятся поправочные коэффициенты, учитывающие вид местности (рис. 5). К виду местности А относятся степи, лесостепи, пустыни, открытые побережья морей, озер, водохранилищ; к виду местности Б - местности, застроенные невысокими зданиями и занятые лесными массивами. Распределение препятствий, мешающих распространению ветра на высоте более 10 м, на этой местности равномерное. Вид местности В - города со зданиями высотой до 100... 120 м.

Ветровая нагрузка на высокое сооружение определяется делением его на зоны не более 10 м по высоте; для каждой зоны принимается нормативный скоростной напор на высоте середины зоны. Сила сопротивления плоской фермы в поперечном потоке, направленном по нормали к плоскости фермы, рассчитывается следующим образом. Как правило, ферма содержит одну или несколько секций, состоящих из одной или нескольких повторяющихся вдоль фермы геометрических форм, которые называют отсеком фермы. Коэффициент силы сопротивления для каждого отсека вычисляют по формуле

$$c_{x0} = k \frac{\sum_i c_{xi} A_i}{A_{OT}} \quad (2)$$

где C_{xi} и A_i - коэффициент силы сопротивления и характерная площадь стержня или косынки, их значения берутся по участку, просматриваемому между поясами; A_{OT} - "теневая" площадь отсека, равная площади проекции на плоскости отсека всех его элементов, принимается за характерную площадь; k - коэффициент, учитывающий взаимное аэродинамическое влияние стержней, зависит от относительного заполнения A_{OT}/A , т.е. от отношения теневой площади A_{OT} к габаритной площади $A=bl$, вычисляемой по средней ширине b и высоте l отсека; при изменении A_{OT}/A от 0 до 0,3 значение k снижается от 1 до 0,74 и остается равным 0,74 до значения $A_{OT}/A = 0,9$; при увеличении значения A_{OT}/A от 0,9 до 1,0 значение k возрастает от 0,74 до 1,0.

Коэффициент силы сопротивления фермы, состоящей из нескольких отсеков со своими значениями C_{x0j} и A_{OTj} , вычисляется по формуле:

$$c_x = k \frac{\sum_j c_{x0j} A_{OTj}}{A_F}$$

Где $A_F = \sum_j A_{OTj}$

В СНиП указаны приемы расчетов сил сопротивления и аэродинамического м

Значение силы сопротивления во всех расчетах равно произведению коэффициента c_x на расчетную площадь тела и на расчетное значение скоростного напора ветра.

Пример расчета ветровой нагрузки

Рассчитаем нагрузку на цилиндрическую дымовую трубу диаметром $D = 3,0$ м и высотой 30 м, расположенную в гор одке строителей газопровода на полуострове Ямал (рис. 6).

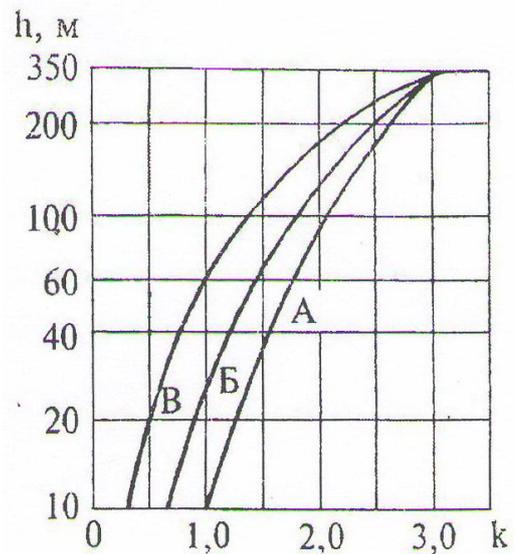
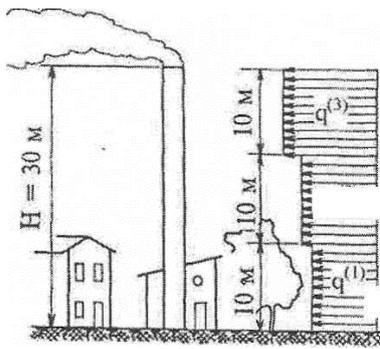


Рис. 5 Поправочные коэффициенты, учитывающие вид местности



$q_{н} = 700 \text{ Па} = 700 \text{ Н/м}^2$.
 Местность, застроенная невысокими зданиями, относится к виду Б. Разделим трубу по высоте на три

Рис. 6. Пример ветровой нагрузки на вертикальную трубу

секции по 10 м каждая. По графику рис. 37 для середины каждой секции найдем поправочный коэффициент к расчёта нормативному напору:

$$k_6^{(1)} = 0.65; k_6^{(2)} = 0.78; k_6^{(3)} = 0.97$$

Распределенную нагрузку на один погонный метр высоты трубы по секциям вычислим по зависимостям:

$$q^{(1)} = k_6^{(1)} q_{н} D = 0.65 \cdot 700 \cdot 3 = 1365, \frac{\text{Н}}{\text{м}}^{(2)}$$

$$q^{(2)} = k_6^{(2)} q_{н} D = 0.78 \cdot 700 \cdot 3 = 1638, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$q^{(3)} = k_6^{(3)} q_{н} D = 0.97 \cdot 700 \cdot 3 = 2037, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Расчетное распределение нагрузки на трубу представлено на рис. 6.

Глава XV

Основы гидравлического моделирования. Геометрическое, кинематическое и динамическое подобия. Критерии гидравлического подобия. Основные правила гидравлического моделирования.

15.1 Подобие гидравлических явлений

В предыдущих разделах курса было показано, что при решении большинства инженерных задач наряду с теоретическими зависимостями применяются и экспериментальные или же в уравнения, полученные теоретически, вводятся опытные коэффициенты. Так, в результате экспериментальных исследований получены значения и формулы гидравлического коэффициента трения λ , коэффициентов местных сопротивлений ζ , коэффициентов скорости φ , расхода μ (или m) и сжатия струи ε при протекании жидкости через отверстия и водосливы, коэффициентов шероховатости n стенок труб и каналов, формулы длины гидравлического прыжка, скоростной характеристики W , эпюры распределения скоростей в каналах при равномерном движении и при сопряжении бьефов, эпюры распределения давления в сечении над стенкой падения перепада и т.п. Экспериментальные коэффициенты и формулы получают на основании исследований сооружений в натуральных условиях или что чаще, на лабораторных моделях. Сложные гидротехнические, в частности водопроводные и водоотводящие сооружения, не поддаются точному расчёту и при их проектировании необходимо проводить исследования на моделях для качественной и количественной оценки явления. При проведении исследований в лабораторных условиях изучаются такие характеристики сооружения как пропускная способность, потери напора, работа гасителей энергии при сопряжении бьефов, распределения местных скоростей, направление линий токов и т.п. Так как геометрические размеры модели обычно меньше подобных размеров натуральных сооружений, то необходимо установить им соответствующие значения расходов,

скоростей и глубин потока на модели, значения шероховатости русла модели и, при необходимости, вязкости жидкости, используемой для исследования на модели. Следует также установить правила переноса полученных на модели результатов на условия работы сооружения в натуре. Всеми этими вопросами занимается теория моделирования гидравлических явлений.

Можно рассматривать моделирование математическое и физическое. *Математическое моделирование* предусматривает изучение иных, отличных от натуральных, физических явлений, но описываемых аналогичными математическими зависимостями. Примером того моделирования является метод электрогидродинамических аналогий, применяемый для изучения фильтрации. При *физическом исследовании на модели* воспроизводится то же явление, что и в натуре, но в другом масштабе. В настоящей главе в дальнейшем будут рассматриваться особенности именно физического моделирования.

15.2 Геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Закон подобия Ньютона

Для того чтобы модель физически (механически) подобна сооружению в натуре должно соблюдаться геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Геометрическое подобие предусматривает условие, что все линейные размеры сооружения в натуре l_N должны относиться к соответственным размерам модели l_M как

$$\boxed{l_N / l_M = a = \text{const}} \quad (1)$$

где a – линейный масштаб или масштаб длин.

Очевидно, что для геометрического подобия отношение площадей

$$\boxed{\omega_N / \omega_M = a^2 = \text{const}}, \quad (2)$$

отношение объёмов

$$\boxed{W_N / W_M = a^3 = \text{const.}} \quad (3)$$

Только геометрического подобия недостаточно для гидравлического подобия. Так, в натуре может существовать турбулентный режим, а на геометрически подобной модели – ламинарный, т.е. явления в натуре будут качественно и количественно (например, в отношении потерь напора) отличаться между собой. В открытых потоках при несоответствии определённых условий в натуре и на модели могут установиться различные состояния потока (бурное и спокойное), что противоречит требованию гидравлического подобия.

Кинематическое подобие предусматривает, что для установившегося движения линии токов в подобных точках природы и модели будут занимать одинаковое положение, а отношение скоростей в этих точках и соотношение средних скоростей в соответственных сечениях является постоянным:

$$\boxed{V_H / V_M = av = \text{const},} \quad (4)$$

где av – масштаб скоростей.

Отношение ускорений в натуре и на модели называется *масштабом ускорений*:

$$\boxed{\omega_H / \omega_M = a\omega = \text{const}.} \quad (5)$$

Ускорение может быть представлено как приращение скорости dV за единицу времени dt . С учётом этого:

$$\boxed{\omega_H = dV_H / dt_H = d^2s_H / dt_H^2} \quad (6)$$

и

$$\boxed{\omega_M = d^2s_M / dt_M^2,} \quad (7)$$

где ds_H и ds_M - пути, пройденные частицами на натуре и на модели за соответственные промежутки времени dt_H и dt_M .

Подставляя значения ω_H и ω_M в (5), получим

$$\boxed{a\omega = d^2s_H dt_M^2 / d^2s_M dt_H^2 = a / at^2 = \text{const},} \quad (8)$$

где at – масштаб времени, т.е. отношение времени какого-либо процесса (например, прохождение частицей некоторого пути) на натурном сооружении к времени подобного процесса на модели,

$$\boxed{at = t_n / t_m = \text{const.}} \quad (9)$$

Время прохождения частицей пути ds при скорости dV может быть представлено как

$$\boxed{t = ds / dV,} \quad (10)$$

тогда

$$\boxed{at = dsndV_M / dV_n dsm = a / a_n.} \quad (11)$$

Динамическое подобие предусматривает соблюдение следующих условий: в любой точке модели действует сила, аналогичная по своей природе и по направлению силе в соответственной точке природы; такое же условие соблюдается и для сил, действующих на элементы конструкции сооружений; отношение сил в природе F_n и на модели F_m для всех сходственных точек потока называется *масштабом сил* a_F , который является постоянным для всех точек:

$$\boxed{a_F = F_n / F_m = \text{const.}} \quad (12)$$

Если гидравлические явления удовлетворяют геометрическому, кинематическому и динамическому подобию, то можно говорить о гидравлическом и гидродинамическом подобии. Для этого необходимо установить связь между указанными выше видами подобия, т.е. между масштабами a , a_v , a_F , характеризующими геометрическое, кинематическое и динамическое подобие. Эта связь не может быть произвольной, а подчиняется определённой закономерности. Действительно, силу F можно выразить как произведение массы на ускорение:

$$\boxed{F = m\omega = \rho W\omega,} \quad (13)$$

где ρ – плотность жидкости.

С учётом выражения (13) зависимость (12) может быть представлена в виде

$$\boxed{a_F = \rho_n W_n \omega_n / \rho_m W_m \omega_m = a_p a^3 a_\omega,} \quad (14)$$

где a_p – масштаб плотностей,

$$\boxed{a_p = \rho_n / \rho_m.} \quad (15)$$

С учётом формул (8) и (11) зависимость (14) может быть преобразована следующим образом:

$$\boxed{aF = \rho a^2 \nu^2.} \quad (16)$$

Это выражение называется *законом подобия Ньютона в масштабных множителях*. При некоторых заданных или выбранных масштабах из зависимости (16) может быть найден неизвестный масштаб, а затем по приведённым выше зависимостям и другие масштабы.

Это условие можно также трактовать следующим образом. При движении жидкости в ней проявляются силы инерции I . Как и для всяких других сил их масштаб определится по формуле (16) тогда $aF = aI$. Это означает, что для выполнения условия динамического подобия необходимо, чтобы масштаб сил, определяющих гидравлическое явление, и масштаб сил инерции были бы одинаковы. Выражая масштабные множители в уравнении (16) как отношения соответствующих величин в натуре и на модели, получим

$$\boxed{F_H / F_M = \rho_H l_H^2 V_H^2 / \rho_M l_M^2 V_M^2}$$

или

$$\boxed{F_H / \rho_H l_H^2 V_H^2 = F_M / \rho_M l_M^2 V_M^2 = Ne.} \quad (17)$$

Критерий $Ne = F / \rho l^2 V^2$ носит название *критерия Ньютона*. И зависимость (17) следует, что для любых сходственных точек при подобных явлениях на натуре и модели критерии Ньютона должны быть одинаковы, т.е.

$$\boxed{Ne_H = Ne_M.} \quad (18)$$

Иногда критерий Ньютона записывается в ином виде. Умножим числитель и знаменатель выражения (17) на l , получим

$$\boxed{Ne = Fl / MV^2,} \quad (19)$$

где $M = \rho l^3$ - масса жидкости в рассматриваемом объёме.

Отсюда закон подобия Ньютона в физических величинах

$$\boxed{F_H l_H / M_H V_H^2 = F_M l_M / M_M V_M^2.} \quad (20)$$

15.3 Критерии гидравлического подобия

Условия моделирования гидравлических явлений для полного подобия требуют соблюдения равенств (20) или (17) для всех сил, под действием которых происходит данное явление (сил тяжести, давления, трения, поверхностного натяжения и т.п.) и сил инерции. Анализ зависимости величин, входящих в эти равенства, показывает, что для всех сил одновременно выполнение этих условий практически невозможно.

В то же время можно получить частные критерии для случаев когда некоторые из действующих сил имеют преобладающее значение по сравнению с остальными. Например, при исследовании движения жидкости в трубопроводах важнейшую роль играют силы трения.

В соответствии с зависимостью сила трения

$$F_{\text{тр}} = \tau_0 l^2, \quad (21)$$

где τ_0 – касательные напряжения на стенке трубы.

Подставляя это выражение в обе стороны равенства (17) получим

$$\tau_{0Н} / \rho_H V_H^2 = \tau_{0М} / \rho_M V_M^2, \quad (22)$$

λ или с учётом того, что касательные напряжения на стенке трубы согласно формуле $\tau_0 = \rho \cdot 8 V^2$

$$\lambda_H = \lambda_M, \quad (23)$$

т.е. потоки жидкости в трубопроводах будут гидравлически подобными, если гидравлические коэффициенты трения в натуре и на модели будут равны между собой. При ламинарном режиме движения или при турбулентном режиме в области гидравлически гладких труб гидравлический коэффициент трения в соответствии с определёнными формулами зависит только от числа Рейнольдса. Поэтому для этих частных случаев можно вместо равенства (23) записать

$$Re_H = Re_M \quad (24)$$

или

$$V_H / \nu_H = V_M / \nu_M, \quad (25)$$

где линейный размер l в данном случае может быть диаметром или радиусом трубы. Выражение

$$\boxed{Vl / \nu = Re} \quad (26)$$

называется *критерием Рейнольдса*.

Таким образом, при преобладающем влиянии сил трения и движении жидкости при ламинарном режиме или в области гидравлически гладких труб при турбулентном режиме потоки будут подобны, если для сходственных точек или сходственных сечений природы и модели числа (критерии) Рейнольдса будут одинаковыми.

Если на натуре и на модели используются одинаковые жидкости ($V_H = V_M$), то согласно зависимости (25)

$$\boxed{V_M = V_H l_H / l_M = V_H a.} \quad (27)$$

Из этого следует, что при моделировании по критерию Рейнольдса скорость на модели должна быть в a раз больше скорости на натуре.

Если в моделируемых гидравлических явлениях преобладают силы давления, которые можно представить как произведение давления на площадь его действия ($F_p = p\omega$), то выражение (17) в этом случае может быть приведено к виду

$$\boxed{\rho_H \omega_H / \rho_H l_H^2 V_H^2 = \rho_M \omega_M / \rho_M l_M^2 V_M^2} \quad (28)$$

или с учётом выражений (1) и (2)

$$\boxed{\rho_H / \rho_H V_H^2 = \rho_M / \rho_M V_M^2 = Eu,} \quad (29)$$

где Eu – критерий Эйлера, который должен быть одинаковым для природы и модели при преобладающем значении сил давления.

Движение жидкости в трубопроводе характеризуется не абсолютным движением, а разностью давлений Δp в расчётных сечениях. Поэтому критерий Эйлера Eu выражают также в виде

$$\boxed{Eu = \Delta p / \rho V^2.} \quad (30)$$

Следует отметить, что при соблюдении критерия Рейнольдса критерий Эйлера выполняется автоматически. Действительно, в соответствии с зависимостью потери давления по длине

$$\Delta p = \rho g h l = \rho g \lambda l / D \cdot V^2 / 2g = \rho \lambda l / D \cdot V^2 / 2 . \quad (31)$$

Тогда

$$Eu = \lambda l / 2D \quad (32)$$

$$\lambda_M / l_M / D_M = \lambda_N / l_N / D_N . \quad (33)$$

Так как при моделировании соблюдается геометрическое подобие, то $l_M / D_M = l_N / D_N$ и, следовательно, $\lambda_N = \lambda_M$, т.е. имеет место условие (23), которое при ламинарном режиме или движении в области гидравлически гладких труб при турбулентном движении соответствует равенству критериев Рейнольдса на натуре и модели (24).

При изучении вопросов протекания воды через водосливы, сопряжения бьефов, работы гасителей энергии преобладающей силой является сила тяжести ($FG = gM$). В этом случае уравнение (20) приводится к виду

$$V_N^2 / g_N l_N = V_M^2 / g_M l_M = Fr \quad (34)$$

Или

$$Fr_N = Fr_M . \quad (35)$$

Выражение (34) называется *критерием Фруда*. Если движение происходит при преобладающем влиянии силы тяжести, то критерии Фруда на натуре и на модели должны быть одинаковыми. Так как обычно $g_N = g_M$, то из уравнения (34) получим

$$V_M = V_N \quad l_N / l_M = V_N / a . \quad (36)$$

Сравнивая выражения (36) и (27), видим что эти выражения несовместимы друг с другом, а это означает, что невозможно одновременно моделировать явления по критериям Фруда и Рейнольдса, если на модели используется такая же жидкость, как и в натуре. Если же отойти от последнего условия, то из зависимости (25) получим

$$V_M = V_N \quad l_M \quad v_N = V_N \quad a \quad , \quad (37)$$

где $av = v_n / v_m$ – масштаб кинематических вязкостей.

Приравнивая выражения (36) и (37) друг другу, получим

$$3/2 \quad av = a \quad (38)$$

или $3/2 \quad v_m = v_n / a \quad (39)$

т.е. для одновременного выполнения критериев Рейнольдса и Фруда необходимо, чтобы кинематическая вязкость жидкости, применяемой на модели, была меньше кинематической вязкости, протекающей в натурном сооружении, в $a^{2/3}$ раз (где a – линейный масштаб модели).

На практике это условие в большинстве случаев выполнить почти невозможно, так как если в натуральных сооружениях протекает вода, то трудно найти жидкость с кинематической вязкостью значительно меньшей, чем вязкость воды. Правда, можно действовать наоборот, т.е. на уменьшенных моделях с помощью воды моделировать явления, связанные с движением жидкостей с большей вязкостью. Кроме рассмотренных выше критериев Рейнольдса, Фруда, Эйлера существуют также критерии Вебера (при преобладающем влиянии сил поверхностного натяжения), Маха (при моделировании движения сжимаемой жидкости – воздуха) и др.

15.4 Основные правила гидравлического моделирования

При выборе масштаба модели необходимо соблюдать ряд условий, вытекающих из общих законов подобия. В частности, если поток в натуре турбулентный, то он должен быть турбулентным и на модели. Поэтому минимальный размер модели выбирается так, чтобы было обеспечено соблюдение этого условия. Должно соблюдаться также условие, состоящее в том, что состояние потока (бурное или спокойное) на модели должно быть таким же, как и в натуре. При моделировании следует стремиться к геометрическому подобию шероховатости, однако в большинстве случаев это невыполнимо. Поэтому необходимо обеспечить подобие сопротивлений на модели и в натуре, чтобы выполнить условие (23).

При моделировании некоторых явлений возникают серьёзные трудности. Так, не может моделироваться аэрация на быстротоках консольных водосбросах и т.п. Большие трудности вызывает моделирование кавитации. При моделировании вакуума перенос полученных результатов на натурное сооружение возможен только при условии, что вакуум в натуре не превысит предельной величины. В некоторых случаях при моделировании приходится искажать масштаб модели. По условиям возможного размещения модели в лаборатории могут быть приняты разные горизонтальные и вертикальные масштабы. Также разные масштабы применяются тогда, когда невозможно на модели получить шероховатость, подобную натурной. В таком случае подобие гидравлических сопротивлений можно получить за счёт изменения величины гидравлического радиуса, т.е. за счёт искажения вертикального масштаба. Примеры моделирования с искажённым масштабом приводятся в специальной литературе.

ГЛОССАРИЙ

1	Абсолютное давление	напряжение сжатия, появляется в результате действия на жидкость сжимающих сил.
2	Архимедова сила	направленная вертикально вверх сила гидростатического давления, действующая на поверхность неподвижного тела, погруженного в покоящуюся жидкость (полностью или частично)
3	Атмосферное давление	гидростатическое давление, действующее в точках поверхности земли со стороны слоя атмосферы (воздуха) т.е. "жидкости в широком смысле слова"
4	Безнапорное движение	движение (течение) жидкости (в русле), при котором поток имеет свободную поверхность.
5	Безнапорный поток	поток, имеющий место при безнапорном движении
6	Бурное движение	безнапорное движение, при котором глубины потока меньше критических; при этом условии возмущения формы свободной поверхности потока распространяются только вниз по течению.
7	Бьеф верхний	область движущейся или покоящейся воды расположенная перед водоподпорным сооружением.
8	Бьеф нижний	область движущейся или покоящейся воды расположенная за водоподпорным сооружением.(с низовой его стороны)
9	Вакуум	состояние жидкости (или газообразной среды), когда абсолютное гидромеханическое давление в ней меньше атмосферного недостаток абсолютного давления (гидромеханического) до атмосферного
10	Водослив Измерительный	водослив измерительный (обычно с тонкой стенкой неподтопленный) служащий для измерения расхода воды, движущиеся в том или другом русле.
11	Гидравлика	наука, изучающая законы равновесия и механического движения жидкости и разрабатывающая методы применения этих законов для решения задач инженерной практики.
12	Гидравлика или техническая механика жидкости	самостоятельная, сложившаяся техническая(прикладная) наука, представляющая собой механику жидкости
14	Гидравлическое Сопротивление	силы трения появляющиеся в жидкости при ее движении и вызывающие потери напора
15	Гидравлический градиент	падение полного напора приходящиеся на единицу длины, отмеренную вдоль линии тока или вдоль потока
16	Гидравлический диаметр	условная величина, равная учетверенной величины гидравлического насоса

17	Гидродинамическое давление	скалярная величина, равная средней арифметической из величин трех нормальных напряжений действующих на три произвольные взаимно перпендикулярные площадки действия
18	Гидромеханика или механика жидкости	наука, в которой изучаются равновесие и движение жидкости, а также механическое взаимодействие между жидкостью и твердыми телами (или стенками), омываемыми (смачиваемыми) ею.
19	Гидростатика или статика жидкости	раздел механики жидкости (гидромеханики) в котором изучается только равновесия жидкости (в частности, относительный ее покой)
20	Гидростатическое давление	величина этого давления равна пределу отношения элементарной силы гидростатического давления к величине, соответствующий элементарной площадке действия при стремлении к нулю (при стягивании контура элементарной площадки в точку)
21	Гладкие русла	русла, стенки которых имеют столь малые на величину потерь напора по длине (при турбулентном движении)
22	Глубина критическая	глубина потока, при которой для заданного поперечного сечения русла и для заданного расхода жидкости получается минимум удельной энергии сечения
23	Глубина нормальная	глубина потока, при равномерном движении жидкости в русле;
24	Давление избыточное или манометрический	давление в точке (гидростатическое или гидродинамическое или гидромеханическое) уменьшенное на величину атмосферного давления
25	Динамический коэффициент вязкости или коэффициент вязкости	отношение продольного касательного напряжения внутреннего трения при прямолинейном движении жидкости к градиенту скорости по нормали
26	Жидкость	физическое тело, обладающий: в отличие от твердого тела текучестью и в отличие от газа весьма малой изменчивостью своего объема (при изменении давления или температуры)
27	Жидкость идеальная	воображаемая модель реальной жидкостью, представляющая собой не прерывной жидкой тело, которая характеризуется абсолютной неизменяемостью объема (при изменении давления или температуры) и полным отсутствием вязкости
28	Жидкость капельная	иногда жидкостью в широком смысле слова называют и газ; при этом жидкость в узком смысле слова, удовлетворяющую двум условиям
29	Напор на трубопроводе	превышение уровня в жидкости в сосуде (или водоеме)
30	Скоростной напор	удельная кинетическая энергия

31	Напор геометрический	удельная энергия положения, равная превышению точки, в которой намечена рассматриваемая единица веса жидкости над плоскостью сравнения
32	Напор полный	полная удельная энергия потока жидкости
33	Насадок	весьма короткая напорная (по всей своей длине) труба, при гидравлическом расчете которой можно пренебрегать потерями напора по длине
34	Неравномерное движение	движение жидкости, когда эпюры скорости являются разными (в данный момент времени) для различных живых сечений потока
35	Неустановившееся движение	движение (течение) жидкости при котором в каждой не подвижной точке пространства, занятого движущейся жидкостью, скорость движения её частиц изменяется с течением времени по величине и по направлению
36	Инверсия струи	изменение формы поперечного сечения струи (по ее длине) вблизи отверстия, из которых происходит истечение жидкости в атмосферу.
37	Линия напорная	линия проведенная по горизонтам жидкости в трубках Пито (открытого или закрытого типа), мысленно установлено вдоль оси потока или вдоль рассматриваемой элементарной струйки
38	Манометрическая давления	давление в точке (гидростатическое или гидродинамическое или гидромеханическое) уменьшенную на величину атмосферного давления
39	Средняя скорость	условная одинаковая для всех точек сечения скорость, при которой расход потока будет такой же, как и при различных местных скоростях
40	Объемные силы	массовые силы для жидкости, имеющий всюду одинаковую плотность
41	Объемный вес жидкости	отношение собственного веса некоторого объема жидкости к этому объему
42	Открытые русла	русла, контур поперечного сечения которых образован незамкнутым линиям
43	Отметка	повышение рассматриваемой точки над плоскостью сравнения
44	Относительная шероховатость	безразмерное величина, равная отношению средней высоты выступов шероховатости к характерному линейному размеру поперечного сечения потока
45	Пито трубка	вертикальная а трубка не большого диаметра с загнутом против течения нижним концом
46	Плоскость сравнения	горизонтальная координатная плоскость относительно которой определяется величина потенциального и полного напоров
47	Плотность жидкости	отношение массы однородной жидкости к объему этой массы
48	Поверхностное давление	напряжение для площадки действия в совпадающий с поверхностью жидкостью обусловленной давлением на нее газа (воздуха)

ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Д. Гиргидов «Механика жидкости и газа» (Гидравлика) Санкт-Петербург издательство СПбГПУ 2004 г.
2. Д.В.Штеренлихт «Гидравлика», Москва «Энергоиздат» 1991 г.
3. Р.Р.Чугаев «Гидравлика».Ленинград, «Энергоиздат» 1982 г.
4. Ю.М.Константинов, «Гидравлика». Киев. «Высшая школа» 1981 г
5. Н.М. Константинов и др. «Гидравлика, гидрология и гидрометрия» 1,2 часть, Киев. «Высшая школа» 1981 г.
6. П.Г.Киселев «Справочник по гидравлическим расчетам» Москва «Энергия» 1972 г.
7. В.А.Большаков «Справочник по гидравлике» Киев. «Высшая школа» 1984 г.
8. В.А.Большаков «Сборник задач по гидравлике» Киев. «Высшая школа» 1979 г.
9. А.В.Андреевская и др. «Задачник по гидравлике». Москва «Энергия» 1970 г.
10. «Механика жидкости и газа» методические указания к лабораторным работам. Ташкент. ТАСИ. 2005 г.
11. «Механика жидкости и газа» методические указания к лабораторным работам II-часть. Ташкент. ТАСИ. 2007
12. Латипов К.Ш. Гидравлика, гидромашиналар ва гидроюритмалар – Тошкент, «Укитувчи» наш., 1992 – 185 б.
13. Д.Р.Бозоров, Р.М.Каримов, Ж.С.Казбеков, С.Қ.Хидиров «Очик ўзанлар гидравликаси» Тошкент 2001й.
14. Д.Р.Бозоров, Р.М.Каримов, Ж.С.Казбеков, С.Қ.Хидиров «Гидравлика» Тошкент 2003й.
15. Кудинов В.А., Карташов Э.М. Гидравлика – М.: Высшая школа, учебное пособие, 2006 – 175 с.
16. Штеренлихт Д.В. «Гидравлика», Учебник Москва, Энергоатомиздат 1984, 1981 г.
17. Киселев Н.Г. Справочник по гидравлическим расчетам. Энергия 1974
18. Каримов Р.М. «Гидравлический расчет каналов». Учебное пособие, Ташкент, «Узгипрозем» 1976 г.
19. Сологаев В.И. Конспекты лекций по гидравлике / ОмПИ – Омск, 1991. – 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I.	7
Краткий исторический обзор. Связь курса с общетехническими и специальными дисциплинами. Основные физические свойства жидкостей	
1.1 Краткий исторический обзор	
1.2 Основные физические свойства жидкостей	15
1.3 Фазовые переходы в жидкости. Кипение и кавитация. Отличие механики жидкости от механики газа	23
1.4 Гидростатическое давление	27
1.5 Дифференциальные уравнения Эйлера. Основное уравнение гидростатики	32
15.1 Дифференциальные уравнения покоя жидкости. Интегрирование дифференциальных уравнений покоя жидкости	
1.5.2 Основное уравнение гидростатики	34
1.6 Давление жидкости на плоские поверхности. Центр давления. Эпюры давления	37
1.6.1 Сила давления жидкости на плоскую горизонтальную поверхность	
1.6.2 Определение центра давления на плоские стенки	40
1.6.3 Определение центра давления для типичных случаев	41
1.6.4 Зависимость давления от глубины погружения. Эпюры давления	43
1.7 Давление жидкости на криволинейные поверхности. Эпюры давления	44
1.7.1 Сила давления жидкости на криволинейные поверхности	
1.8 Основы гидродинамики. Основные понятия и определения. Уравнение неразрывности	49
1.8.1 Основы гидродинамики. Кинематика жидкости. Способы изучения движения жидкости	
1.8.2. Линии токов жидкости и вихревые линии. Элементарная струйка жидкости	56
1.8.3. Уравнение неразрывности жидкости. Уравнение неразрывности для элементарной струйки однородной жидкости. Поток жидкости	59
Глава II.	68
Уравнение Бернулли для элементарной струйки и потока идеальной и реальной жидкости.	
2.1 Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Бернулли	
2.2 Уравнение Бернулли для потока	70
2.3 Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Бернулли	71
2.3.1 Уравнение Бернулли	
2.3.2 Уравнение Бернулли для потока	72

2.3.3 Энергетический смысл уравнения Бернулли	75
2.3.4 Геометрический смысл уравнения Бернулли	75
2.4 Общие сведения о потерях напора. Основное уравнение равномерного движения. Физическая природа гидравлических сопротивлений	76
2.4.1 Основное уравнение равномерного движения	
2.4.2 Потери напора по длине в круглых трубах	80
Глава III.	
Режимы движения жидкости. Число и критерий Рейнольдса	
3.1 Режимы движения жидкости	
3.2 Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости	87
3.3 Число Рейнольдса и его критическое значение	
3.4 Распределение ламинарного движения в круглой трубе	90
3.5 Структура турбулентного потока в трубе	92
Глава IV.	93
Ламинарное движение в круглой трубе. Потери напора по длине и гидравлический коэффициент при ламинарном режиме.	
Турбулентное движение жидкости. Пульсация и осредненная скорость. Структура турбулентного потока в трубе	
4.1 Ламинарное движение жидкости в круглой трубе	
4.2 Потери напора по длине и гидравлический коэффициент при ламинарном режиме	95
4.3 Турбулентное движение жидкости. Пульсация и осредненная скорость	96
4.4 Структура турбулентного потока в трубе	98
Глава V.	99
Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Гидравлический коэффициент трения λ . График Никурадзе. График Кольбрука-Мурина	
5.1 Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Гидравлический коэффициент трения λ . График Никурадзе. График Кольбрука-Мурина	
5.2 Формулы скорости при равномерном движении. Формула Шези. Потеря энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)	102
5.2.1 Формулы скорости при равномерном движении. Формула Шези	
5.3 Местные сопротивления и потери напора. Потери напора при внезапном расширении потока. Формула Борда. Формула Вейсбаха для определения местных потерь напора	105
5.3.1 Местные сопротивления и потери напора	
5.3.2 Потери напора при внезапном расширении потока	108
Формула Борда	
5.3.3 Формула Вейсбаха для определения местных потерь напора	110
Глава VI	111
ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ	

Простой трубопровод. Короткие трубы: сифон, всасывающая труба насоса. Вытяжная дымовая труба.	
6.1 Простой трубопровод постоянного диаметра	
6.2 Короткие трубопроводы – сифон, всасывающая труба насоса	117
6.3 Вытяжная дымовая труба	
Глава VII	120
Длинные трубопроводы. Гидравлический расчет	
7.1 Длинные трубопроводы	
7.2 Расчет длинных трубопроводов	124
7.3 Основные типы задач по расчету трубопроводов	126
Последовательное и параллельное соединение труб	
Гидравлический удар в трубопроводах. Формула Н. Е. Жуковского. Меры борьбы с гидравлическим ударом	
7.3.1 Основные случаи расчета трубопроводов	
7.3.2 Экономический диаметр трубопровода	128
7.4 Параллельное соединение труб	136
7.5 Общая характеристика гидравлического удара	138
7.6 Прямой удар. Скорость ударной волны. Формула Н. Е. Жуковского	140
7.7 Непрямой удар	145
7.8 Меры борьбы с гидравлическим ударом	146
7.9 Гидравлический таран	147
Глава VIII	148
ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ	
Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре. Типы сжатия струи	
8.1 Истечение из малого отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре	
8.2 Типы сжатия струи	152
8.3 Траектория струи	153
Глава IX.	154
Коэффициенты сжатия, скорости, расхода Истечение из малого отверстия под уровень. Истечение жидкости из насадков при постоянном напоре. Типы насадков	
9.1 Коэффициенты сжатия, скорости, расхода	
9.2 Истечение из малого отверстия под уровень (случай затопленного отверстия)	157
9.3 Внутренний круглоцилиндрический насадок (насадок Борда)	163
9.4 Насадки прочих типов	
Глава X.	166
Равномерное движение жидкости в открытых руслах. Уравнение равномерного движения. Эмпирические формулы для коэффициента Шези и скоростной характеристики.	
Гидравлически наивыгоднейшее сечение канала. Основные типы	

задач по расчёту каналов. Допустимые минимальные и максимальные скорости	
10.1 Особенности равномерного движения жидкости в открытых руслах	
10.2 Уравнение равномерного движения	167
10.3 Эмпирические формулы для скоростного множителя (коэффициента Шези) и скоростной характеристики	168
10.4 Гидравлически наивыгоднейшее сечение и максимальный гидравлический радиус	173
10.5 Основные типы задач по расчёту каналов.	183
10.6 Допустимые максимальные скорости. Распределение скоростей по сечению	188
10.6.1 Минимальные допустимые средние в сечении скорости	
Глава XI.	192
Установившееся неравномерное движение жидкости в открытых руслах. Основные понятия и определения. Основные дифференциальные уравнения установившегося плавноизменяющегося движения жидкости в открытых руслах	
11.1 Основные понятия и определения	
11.2 Удельная энергия сечения и критическая глубина	194
11.3 Основные дифференциальные уравнения установившегося неравномерного плавноизменяющегося движения жидкости в открытых руслах	202
11.4 Неравномерное движение воды в призматических руслах с прямым уклоном дна. Неравномерное движение воды в призматических руслах с нулевым или обратным уклоном дна	204
Глава XII.	206
Исследование форм кривых свободной поверхности потока в открытых руслах. Построение кривых свободной поверхности в открытых руслах и безнапорных трубах	
12.1 Общие положения	
12.2 Построение кривых свободной поверхности в безнапорных трубах	226
Глава XIII	228
Движение грунтовых вод. Виды фильтрации. Основной закон фильтрации. Коэффициент фильтрации. Методы определения коэффициента фильтрации	
13.1 Основные понятия. Виды фильтрации	
13.2 Основной закон ламинарной фильтрации (формула Дарси). Скорость фильтрации	231
13.3 Методы определения коэффициента фильтрации	234
Глава XIV.	238
Одномерные потоки газа.	

Зависимость скорости звука от термодинамических параметров.	
Термодинамические формы уравнения Бернулли.	
14.1 Краткие сведения из термодинамики	
14.2 Обтекание тел несжимаемой жидкостью. Обтекание крыловых профилей. Основы расчёта ветровой нагрузки конструкций и сооружений	245
14.3 Основы расчета ветровой нагрузки на конструкции и сооружения	250
14.4 Определение скоростного напора ветра	252
Глава XV	254
Основы гидравлического моделирования. Геометрическое, кинематическое и динамическое подобия. Критерии гидравлического подобия. Основные правила гидравлического моделирования.	
15.1 Подобие гидравлических явлений	
15.2 Геометрическое, кинематическое и динамическое подобие. Закон подобия Ньютона	256
15.3 Критерии гидравлического подобия	260
15.4 Основные правила гидравлического моделирования.	263

МЕХАНИКА И ЖИДКОСТИ ГАЗА, УЧЕБНИК

Анотация

Учебник составлен в соответствии с программой курса «Механика жидкости и газа» и может быть рекомендован бакалаврам технических вузов, изучающим предметы «Механика жидкости и газа», «Гидравлика».

Учебник охватывает следующие вопросы: исторический обзор развития предмета, основные физические свойства жидкостей; отличие механики жидкости от механики газа; основы гидростатики и гидродинамики, режимы движения жидкостей и газов и причины возникновения гидравлических потерь напора в трубопроводах, гидравлический расчет простых и сложных трубопроводов, вопросы слияния и разделения потоков в трубах, а также истечение жидкости из отверстий и насадок; обтекание конструкций несжимаемой жидкостью; рассмотрены основы теории гидродинамического подобия и физического моделирования.