ҚарДУ ХАБАРЛАРИ

1 / 2019

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚарДУ ХАБАРЛАРИ

Илмий-назарий, услубий журнал

Журнал 2009 йилда ташкил этилган

Йилига 4 марта чоп этилади

1(39).

Қарши – 2019

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ДВУХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Мейлиев Х.Ж., Хуррамов О. Ш. (КарГУ)

Ключевые слова: *эргодические свойства, пространство, мера, распределение, последовательность, множество, цилиндр, σ-алгебра, преобразования, сдвиг, стохастическая, случайные величины, квадратичный оператор, сюрьективный.*

Таянч сўз ва иборалар: *эргодик хоссалар, фазо, ўлчов, тақсимот, кетма-кетлик, тўплам, цилиндр, σ-алгебра, акслантириш, силжиш, стохастик, тасодифий миқдор, квадратик оператор, устига акслантириш.*

Key words: *ergodic properties, space, location, sequence, set, cylinder, σ-algebra, transform, shift, stochastic, random values, quadratic operator, surjective,*

Пусть (E,m) - произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [1] задать согласованное семейство конечномерных распределений, так как эта конструкция необходима нам для случая конечного множества E. [3].

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\})=P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $\mathrm{P_i}\geq 0$ и $\sum_{i=1}^{N}P_i=1$.

Пусть $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $w=(w_1,w_2,...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n - функция, ставящая в соответствие точке $w\in\Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n называют n-й координатой функции. Пусть $F-\sigma$ - алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{w:(\xi_n(w),\xi_{n+1}(w),...,\xi_{n+k-1}(w))\in A\}=\{w:(w_n,w_{n+1},...,w_{n+k-1})\in A\}$$

где A - подмножество прямого произведения $E^k=\prod_{i=1}^{k}E$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ - алгебра F порождается также совокупностью всех "тонких" цилиндров, т.е. множеств вида $\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\}$ гд i_j -элемент множества E, $n\leq j\leq n+k$.

В силу этого замечания, мера P на (Ω,F) однозначно определяется своими значениями

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=P\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\},\qquad(1)$$

на этих цилиндрах, где n- номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k- размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [1], если для множества функций $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} P_n(i_1,i_2,...,i_k) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i_1,i_2,...,i_k,i) = P_n(i_1,i_2,...,i_k) \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

при всех k,n и $i_j \in E$, $1 \leq j \leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k) = \sum_{i=1}^{N} P_n(i,i_1,i_2,...,i_k) \qquad (3)$$

при всех k,n и $i_j \in E$, $1 \leq j \leq k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций { $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$, n и k натуральные}, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функций $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$.

1. **Схема Бернулли**. Пусть $m(\{i\}) = P_i$ - распределения на $E = \{1,2,...,N\}$. Если положить

$$P(i_1,i_2,...,i_k) = P_{i_1} P_{i_2} ... P_{i_k} \qquad (4)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2), (3). Соответствующая (4) мера называется Бернуллиевской и в этом случае будет иметь место последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi = (P_{ij})_{i,j=1}^{N}$ - стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k) = P_{i_1} P_{i_1 i_2} ... P_{i_{k-1} i_k} \qquad (5)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера P называется марковской. Если вектор вероятностей $P = (P_1, P_2, ..., P_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi = P$, то будет иметь место соотношение (3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

Пусть $E = \{1,2,...,N\}$ - конечное множество. Для квадратичного оператора $V: S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $P_n(i)$ определим следующим образом:

$$P_n(i) = x_i^{(n-1)} \qquad (6)$$

для всех натуральных n и $i \in E$. Так как $x^{(n)} \in V^{(n)}(S^{N-1}) \subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}(S^{N-1}) = S^{N-1}$ Очевидно из (6) следует $\sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1$, так как $x^{(n-1)} \in (S^{N-1})$.

Таким образом, одно из условий (2) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ при $k > 1$ определим образом

$$P_n(i_0,i_1,...,i_k) = x_{i_0}^{n} \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} P_{i_0 m_1, i_1} P_{i_1 m_2, i_2} \cdot P_{i_2 m_3, i_3} \cdot ... \cdot P_{i_{k-1} m_k, i_k} x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} ... x_{m_k}^{(n+k-1)} \qquad (7)$$

По построению функции (6)-(7) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)} \in (S^{N-1})$ на E.

Первое условия (2), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{i=1}^{N} P_n(i_0, i_1, ..., i_k, i) = x_{i_o}^n \sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N} P_{i_0 m_1, i_1} \cdot P_{i_1 m_2, i_2} \cdot P_{i_2 m_3, i_3} \cdot ... \cdot P_{i_{k-1} m_k, i_k} P_{i_k m_{k+1}, i} x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} ... x_{m_{k+1}}^{(n+k-1)} =$$

$$x_{i_o}^n \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} P_{i_0 m_1, i_1} \cdot P_{i_1 m_2, i_2} .... P_{i_{k-1} m_k, i_k} x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} ... x_{m_k}^{(n+k-1)} = P_n(i_0, i_1, ..., i_k)$$

так как

$$\sum_{i=1}^{N} P_{i_k m_{k+1}, i} = 1 \text{ и } \sum_{m_{k+1}=1}^{N} x_m^{(n+k)} = 1.$$

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статье мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенные Элстоном и Стюартом. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, $A\alpha$ и $\alpha\alpha$. Квадратичные операторы, определяющие модель наследования, в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAA\alpha,AA}$, $P_{AA\alpha\alpha,AA}, P_{A\alpha A\alpha,AA}$ и.т.д.- всего 27 переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1, \quad P_{AAA\alpha,AA} = 1/2, \quad P_{AA\alpha\alpha,AA} = 1/4, \quad P_{A\alpha A\alpha,AA} = 0,...$$

для упрощения записи вместо $\{AA, A\alpha, \alpha\alpha\}$ будем рассматривать множество $E = \{1,2,3\}$. Тогда

$$\begin{array}{llllll}
P_{11,1}=1 & P_{12,1}=P_{21,1}=1/2 & P_{13,1}=P_{31,1}=0 & P_{22,1}=1/4 & P_{23,1}=P_{32,1}=0 & P_{33,1}=0 \\
P_{11,2}=0 & P_{12,2}=P_{21,2}=1/2 & P_{13,2}=P_{31,2}=1 & P_{22,2}=1/2 & P_{23,2}=P_{32,2}=1/2 & P_{33,2}=0 \\
P_{11,3}=0 & P_{12,3}=P_{21,3}=0 & P_{13,3}=P_{31,3}=0 & P_{22,3}=1/4 & P_{23,2}=P_{32,2}=1/2 & P_{33,3}=1
\end{array} \quad (8)$$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным (см. 6). В этом случае

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (x_1^0 + x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(1)} = 2(x_1^0 + x_2^0/2)(x_3^0 + x_2^0/2) \\ x_3^{(1)} = (x_3^0 + x_2^0/2)^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (x_1^1 + x_2^1/2)^2 \\ x_2^{(1)} = 2(x_1^1 + x_2^1/2)(x_3^1 + x_2^1/2) \\ x_3^{(1)} = (x_3^1 + x_2^1/2)^2 \end{cases} \quad (10)$$

или, подставляя в (10) выражения (9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = (x_1^0 + x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(2)} = 2(x_1^0 + x_2^0/2)(x_3^0 + x_2^0/2) \\ x_3^{(2)} = (x_3^0 + x_2^0/2)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

$$x^{(k)} = x^{(1)} \tag{11}$$

для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, $A\alpha$, $\alpha\alpha$, что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in S^2$ - начальное распределение на $E = \{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ - вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 1.1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)} \in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = i_0, \xi_{k+1} = i_1) = P_{x^{(0)}}(i_k = i_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = i_1) + \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = i_1)}{2^{l-1}} \alpha \tag{12}$$

где

$$\alpha \in M = \{1/2x_2^1,\ (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1),\ -1/2(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1),\ -x_3^{(1)},\ 1/2(x_3-x_1)^2,\ 1/2(x_1+1/2x_2)(x_3-x_1),\ -(x_1+1/2x_2)^2\}$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$$\{w : \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+1}(w) = i_1, \ldots, \xi_{k+1}(w) = i_i\}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+1}(w) = i_1, \ldots, \xi_{k+1}(w) = i_l\}) = \tag{12}$$
$$= x_{i_0}^{(k)} \sum_{m_1, \ldots, m_l = 1}^{N} P_{i_0 m_1, i_1} \cdot P_{i_1 m_2, i_2} \cdot \ldots \cdot P_{i_{l-1} m_l, i_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} \ldots x_{m_l}^{(k+l-1)}.$$

откуда

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+l}(w) = i_1\}) = x_i^{(k)} \sum_{m=1}^{N} P_{i_0 m, i_1} x_m^{(k)} \tag{13}$$

При $l = 1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = 1, \xi_{k+l}(w) = 1\}) = x_1^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{1m,1} x_m^{(k)} = x_1^{(1)}(x_1^{(1)} +$$
$$+ 1/2x_2^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2x_1^{(1)} x_2^{(1)} =$$
$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2 P_{x^{(0)}} x_2^{(1)};$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = 2, \xi_{k+l}(w) = 2\}) = x_2^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{2m,2} x_m^{(k)} = x_2^{(1)} 1/2(x_1^{(1)} +$$
$$+ x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2x_2^{(1)}(x_3 - x_1)^2 =$$
$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2 P_{x^{(0)}}(\xi_k)(x_3 - x_1)^2;$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=3,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_3^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{3m,3}x_m^{(k)}=x_3^{(1)}(x_3^{(1)}+$$
$$+1/2x_2^{(1)})=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)};$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=1,\xi_{k+l}(w)=2\})=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,2}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}(x_3^{(1)}+$$
$$+1/2x_2^{(1)})=x_1^{(1)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_3^{(1)}-1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}$$
$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=1,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,3}x_m^{(k)}$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)-P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=2,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,3}x_m^{(k)}=$$
$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)1/2(x_3+1/2x_2)(x_1-x_3).$$

• Предположим, что равенство (12) доказано для натурального $l>1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением.

$$P_{i_0i_1,k}^{[s,t+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}P_{i_0i_1,k}^{[s,t]}P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]}x_\beta^t$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{i_0m,k}^{[k,k+l+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{i_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]} \tag{14}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=i_0,\xi_{k+l+1}(w)=i_1\})=x_{i_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{i_0m,i_1}^{[k,k+l+1]}x_m^{(k)}=$$
$$x_{i_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{i_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}\right)x_m^{(k)}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}x_{i_0}^{(k)}\left(\sum_{m=1}^{3}P_{i_0m,\alpha}^{[k,k+l]}x_m^{(k)}\right)P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}=$$
$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+1}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{(k)}$$

В силу (2)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=i_0,\xi_{k+l+1}=i_1)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+l}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}x_\beta^{(1)} \tag{15}$$

Тепер, как и в случае $l=1$, надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i_0=i_1=1$ и $l=2$.

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+2}=1)=\sum_{\alpha=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=\alpha)\sum_{\beta=1}^{3}P_{\alpha\beta,1}x_\beta^1=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)})+$$
$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)})+$$
$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3)(P_{31,1}x_1^{(1)}+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)})=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$
$$(x_1^{(1)})^3+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_1^{(1)}/4+$$
$$(x_1^{(1)})^2x_1^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_2^{(1)}/4+(x_1^{(1)})^2(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)/2+$$
$$1/4x_1^{(1)}x_2^{(1)}(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/4P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=1)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=3,\ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(1/2x_2+x_3)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(-(x_2+2x_3)^2)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+i}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(1/2x_2+x_3)(x_1-x_3)$$

Легко доказывается также как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$, надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (15)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l+1}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=1)(P_{11.1}x_1^{(1)}+P_{12.1}x_2^{(1)}+P_{13.1}x_3^{(1)})+$$
$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=2)(P_{21.1}x_1^{(1)}+P_{22.1}x_2^{(1)}+P_{23.1}x_3^{(1)})+$$
$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=3)(P_{31.1}x_1^{(1)}+P_{32.1}x_2^{(1)}+P_{33.1}x_3^{(1)})=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$
$$=x_1^{(1)}x_1^{(k+l)}(x_1+1/2x_2+1/2x_2+x_3)+1/2^l x_1^{(1)}(x_1+1/2x_2)(x_3+1/2x_2)$$
$$(2x_1+x_2+x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ P_{x^{(0)}}\xi_{k+l+1}=1)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}/2$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. – 624 с.

2. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – М.: Просвещение, 1968. – 308 с.

3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Сборник задач по курсу функционального анализа. – М.: Наука. 1979.

4. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Дрофа. 2004. – 382 с.
5. Городецкий В.В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев. 1990. – 479\М.

РЕЗЮМЕ

Ушбу мақолада ўлчовли фазо қаралади. Фараз қилайлик, чекли ўлчовли тақсимотлар оиласи ёрдамидаги (E,m) ихтиёрий ўлчовли фазо бўлсин. $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, фазони қараймиз, бу ерда ҳамма натурал i сонлар учун $E_i=E$ дир. Мендель ўлчови P ва Бернулли ўлчови Q сингулярдлиги исботланган.

РЕЗЮМЕ

В данной статье изучаются пространство с мерой. Пусть (E,m) - произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$ с помошию согласованного семейства конечномерных распределений, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Дано доказательство сингулярности менделевской меры P и бернуллиевской меры Q.

SUMMARY

This article explores the space with the measure. Let be (E,m) - arbitrary space with a measure. Consider the space $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$ with the help of a consistent family of finite-dimensional distributions, where $E_i=E$ for all natural i. The proof of the singularity of the Mendelianmeasure P and the Bernoulli measure is given. Q.

Рекомендовано к печати проф. Ю.Эшкабиловым

О ПЕРВОЙ ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОРОУПРУГОСТИ

Махсумова Н.К., Янгибоев З.Ш. (КарГУ)

Ключевые слова: *задача Дарбу, гиперболические уравнения, уравнение с памятью, пористоупругость, интегродифференциальное уравнение, сильное обобщенное решение, интегральное уравнение.*

Таянч сўз ва иборалар: *Дарбу масаласи, гиперболик тенглама, хотирали тенглама, ғовваклик эластиклик, интегродифференциал тенглама, кучли умумлашган ечим, интеграл тенглама.*

Key words: *Darboux problem, hyperbolic equations, equation with memory, poristoelasticity, integrodifferential equation, strong generalized solution, integral equation.*

1. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных x и t рассмотрим линейное гиперболическое уравнение с памятью вида

$$Lu:=u_{tt}-u_{xx}+(\ln\sigma)'(x)u_x-b(x,t)\frac{\rho_l(x)}{\rho_s(x)}u-$$

$$-b^2(x,t)\frac{\rho_l(x)}{\rho_s(x)}\int_0^t e^{\int_s^t b(x,y)dy}b(x,s)u(x,s)ds=f(x,t). \qquad (1)$$

Здесь u- искомая компонента вектора скорости смешений частиц упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_s(x)$, $\sigma(x)=\sqrt{\mu(x)\rho_s(x)}$, $\mu(x)$, $b(x,t)$ -

МУНДАРИЖА

ФИЗИКА–МАТЕМАТИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ

ТАРИХ

ФАЛСАФА