

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ



ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ
фанидан тайёрланган
ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Билим соҳаси:	100000-Гуманитар фанлар
Таълим соҳаси:	130000 – Аниқ фанлар
Таълим йўналиши:	5130100 - Математика

Абдуқаюм Каландаров -катта ўқитувчи, Ҳисоблаш усуллари фанидан тайёрланган ўқув-услубий мажмуа . - Гулистон, 2018. - 196 б.

Ушбу ўқув-услубий мажмуа 5130100- математика бакалавриат таълим йўналишида таълим олаётган талабаларга мўлжалланган. Ўқув-методик мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан 18.08. 2014 йил тасдиқланган математика фани намунавий дастури (№ БД – 5130100- 24.03) талаблари асосида тайёрланган. Ҳисоблаш усуллари ҳозирги кунда кўпгина амалиёт масалаларини ечишда тежамли ҳисоблаш усулларини танлай биладиган ва уларни компьютерда реализация қиладиган мутахассисларни тайёрлашда катта аҳамиятга эга. Ҳисоблаш экспериментидаги математик моделлаштириш билан ЭҲМда дастурлаш поғоналари орасида жойлашган ҳисоблаш усуллари (дискрет модел ва ҳисоблаш алгоритми) математик, амалий математика ва инфорацион технологиялар бўйича мутахассис тайрлашда муҳимдир. Ушбу фан алгебра математик анализ оддий дифференциал тенгламалар, математик физика тенгламалари фанлари билан чамбарчас боғлиқдир, унда мавзулар замонавий педтехнология тизимига суянган ҳолда баён қилинган. Ҳар бир мавзу охирида талабалар томонидан бажарилиши зарур бўлган топшириқлар ва назорат саволлари келтирилган. Ўқув-услубий мажмуа Гулистон давлат университети Илмий кенгаши томонидан (1- баённома 28.08.2017 йил) кўриб чиқилган ва ўқув жараёнида қўллашга тавсия этилган.

Такризчилар: Физ.-мат.фан.док., проф. Худайкулов С.И. (ТашИМИ)

Физ.-мат.фан.номзоди,доц. Жамуратов К. (ГудДУ)

МУНДАРИЖА

Кириш.....	4
Ҳисоблаш усуллари фани силлабуси.....	5
Назарий материаллар (маърузалар курси).....	6
Амалий ишларини бажариш буйича услубий кўрсатмалар.....	150
Мустақил таълим буйича материаллар.....	191
Глоссарий.....	196

КИРИШ

Амалдаги 5130100-математика бакалаврият таълим йўналиши давлат таълим стандарти (2014) ҳамда «Ҳисоблаш усуллари» фаннинг ўқув дастурига (2014) мувофиқ талабалар «Ҳисоблаш усуллари» курси бўйича Математика масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж моделлаштириш натижасида вужудга келганлиги туфайли у хар бир масалага аниқ ечим топишга қаратилганни, унинг мақсади масала ечимини сонлар шаклида топишдан иборатлигини билишлари талаб қилинади. Ҳисоблаш усуллари ҳозирги кунда кўпгина амалиёт масалаларини ечишда тежамли ҳисоблаш усуллари танлай биладиган ва уларни компьютерда реализация қиладиган мутахассисларни тайёрлашда катта аҳамиятга эга.

Ҳисоблаш экспериментидаги математик моделлаштириш билан ЭҲМда дастурлаш поғоналари орасида жойлашган ҳисоблаш усуллари (дискрет модел ва ҳисоблаш алгоритми) математика, амалий математика ва инфорацион технологиялар бўйича мутахассис тайрлашда муҳимдир. Ушбу фан алгебра, математик анализ, оддий дифференциал тенгламалар, математик физика тенгламалари фанлари билан чамбарчас боғлиқдир.

Ҳисоблаш усуллари курсининг мақсади талабаларга ушбу фан алгебра, математик анализ, оддий дифференциал тенгламалар, математик физика тенгламалари фанлари билан боғлиқлигини уқтиришдан иборатдир.

Ҳисоблаш усуллари курсининг вазибаларига талабаларга алгебра, математик анализ, дифференциал тенгламалар, функцияларни яқинлаштириш, математик физика тенгламалари ва бошқа фанларда учрайдиган қатор масалаларни сонли ечиш усуллари шакллантириш киради. “Ҳисоблаш усуллари” фанидан дарсни юқори илмий-педагогик даражада ташкил этилиши, муаммоли машғулотлар ўтказилиши, дарсларни савол-жавоб тарзида қизиқарли ташкил қилиниши, илғор педагогик технологиялардан ва мультимедиа қўлланмалардан самарали фойдаланиш, талабаларни мустақил фикрлашга ундайдиган, ўйлантирадиган муаммо саволларни улар олдида қўйиш, талабчанлик, тингловчилар билан индивидуал ишлаш, ижодкорликка йўналтириш, эркин мулоқотга киришишга, илмий изланишга жалб қилиш ва бошқа тадбирлар фан мавзуларини чуқур эгаллашни таъминлайди.

Ўқув-услугий мажмуа қуйидагиларни ўз ичига олади:

1. Ҳисоблаш усуллари фани силлабуси.
2. Назарий материаллар (маърузалар курси)
3. Амалий ишларини бажариш бўйича услубий кўрсатмалар.
4. Талаба мустақил ишлари бўйича материаллар (мустақил иш топшириқлари)
5. Назорат саволлари ва тестлар.
6. Глоссарий.
7. Информацион-услугий таъминот.

Иловалар:

1. Наъмунавий ва ишчи ўқув дастурлар.
2. Инглиз ва рус тилидаги хорижий ўқув материаллари (электрон шаклда).
3. Такдимотлар ва мултимедия воситалари (электрон шаклда)
4. Кўшимча дидактик материаллар

Мазкур ўқув-услугий мажмуа “Ҳисоблаш усуллари” курсидан Вазирликнинг 2017 йил 1 март 107-сонли буйруғи билан тасдиқланган “Олий таълим ўқув режалари фанларининг янги ўқув мажмуаларини тайёрлаш бўйича услубий кўрсатма” асосида яратилган дастлабки ўқув-услугий мажмуалардан бири бўлганлиги сабабли, унда баъзи жузъий камчиликлар, мунозарали қарашлар ва атамалар учраши мумкин. Шунга кўра мажмуа

хақидаги фикр-мулоҳазаларини билдирган ҳамкасбларга муаллиф олдиндан ўз миннатдорчилигини билдиради

Ўқув-услугий мажмуа замонавий педтехнология талабларига мос равишда ишланиб, унда ўқув мақсадлари, назорат саволлари ва мустақил иш топшириқлари келтирилган.

Манзилимиз: 120100. Гулистон шаҳри, IVмавзе, Университет,
«Математика» кафедраси

1. «ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ» ФАНИНИНГ СИЛЛАБУСИ (2017/2018 ўқув йили)

Кафедра номи:	Математика	
Ўқитувчи ҳақида маълумот:	Каландаров А.	abduqayumqalandarov@mail.ru
Семестр ва ўқув курсининг давомийлиги	Семестр ва жами соат	
Ўқув соатлари ҳажми:	жами:	116
	шунингдек:	
	маъруза	32
	семинар	-
	Амалий (лаборатория)	34
	мустақил таълим	50
Йўналиш номи ва шифри	математика	5130100
<p>Курснинг предмети ва мазмуни: Математика фани турмуш масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж туфайли вужудга келганлиги учун ҳам у ҳисоблаш математикаси бўлиб, унинг мақсади эса масала ечимини сон шаклида топишдан иборат.</p> <p>Фан ва техниканинг жадал ривожланиши, атом ядросидан фойдаланиш, учувчи аппаратларни лойиҳалаш, космик учуш динамикаси, бошқариладиган термоядро синтези муаммоси муносабати билан плазма физикасини ўрганиш ва шунга ўхшаш кўп масалаларни текшириш ва ечишни тақозо килмокда. Бундай масалалар ўз навбатида математиклар олдида янгидан-янги ҳисоблаш методларини яратиш вазифасини қўймоқда. Юқорида қайд этилган масалаларни ечиш учун юқори тезликка эга бўлган ҳисоблаш системаларини яратилиши эса мавжуд методларни қайтадан куриб чиқишга ва замонавий ҳисоблаш системаларини қўллашга молик янги методларни кашф этилишини тақозо этмокда.</p> <p>Хозирги замонда йирик табиий-илмий ва халқ хўжалигининг турли масалаларини эффектив ечишда ЭҲМларни кенг қўлламокда. Мураккаб муаммоларни тадқиқ этишда ЭҲМ ёрдамида ўрганилаётган объектни математик моделини тузиш ва таҳлил этиш технологияси кенг тарқалмокда. Бундай тадқиқ этишни одатда ҳисоблаш эксперименти дейилади.</p>		
<p>Курсни ўқитишнинг мақсади ва вазифалари:</p> <p>1.1 Математика масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж моделлаштириш натижасида вужудга келганлиги туфайли у хар бир масалага аниқ ечим топишга қаратилган, яъни ҳисоблаш математикаси бўлиб, унинг мақсади масала ечимини сонлар шаклида топишдан иборат.</p> <p>1.2 Ҳисоблаш математикаси курсининг вазифаларига талабаларга алгебра, математик анализ, дифференциал тенгламалар, функцияларни яқинлаштириш, математик физика тенгламалари ва бошқа фанларда учрайдиган қатор масалаларни сонли ечиш усулларини шакллантириш киради.</p>		

2. МАЪРУЗАЛАР КУРСИ

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИДАН МАЪРУЗА МАТНЛАРИ.

1-Мавзу: Ҳисоблаш математикаси фанининг предмети. Хатоликлар. Интерполяцион кўпхадлар. Бўлинган айирмалар. Чекли айирмалар

Ажратилган соат - 2 соат

Машгулот тури - маъруза

Дарс режаси (асосий саволлар)

1. Ҳисоблаш усулларини асосий вазифаси математик моделлаштириш
2. Хатолар манбаи

Мавзудаги асосий таянч тушунчалари (иборалари)

моделлаштириш, тақрибий ҳисоблаш, тақрибий қиймат, ҳисоблаш математикаси.

1-асосий савол:

Ҳисоблаш усулларини асосий вазифалари

Ўқитувчининг мақсади: Ҳисоблаш усуллари фанининг предмети ва таълимдаги урнини талабларига тушунтириб бериш. Хатолар ва моделлаштириш бўйича тушунча бериш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабалар учун ўқув мақсадлари)

- 1.1. Ҳисоблаш усуллари предметининг асосий масалаларини сузлаб бериш.
- 1.2. Аниқ ва таркибий ечимларни фарқлаш.

1-чи асосий савол баёни:

Математика фани турмуш масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж туфайли вужудга келганлиги учун ҳам у ҳисоблаш математикаси бўлиб, унинг мақсади эса масала ечимини сон шаклида топишдан иборат.

Фан ва техниканинг жадал ривожланиши, атом ядросидан фойдаланиш, учувчи аппаратларни лойихалаш, космик учуш динамикаси, бошқариладиган термоядросинтези муаммоси муносабати билан плазма физикасини ўрганиш ва шунга ухшаш кўп масалаларни текшириш ва ечишни тақозо қилмоқда. Бундай масалалар уз навбатида математиклар олдига янгидан-янги ҳисоблаш методларини яратиш вазифасини қўймоқда. Юқорида қайд этилган масалаларни ечиш учун юқори тезликка эга бўлган ҳисоблаш системаларини яратилиши эса мавжуд методларни қайтадан қуриб чиқишга ва замонавий ҳисоблаш системаларини қўллашга молик янги методларни кашф этилишини тоқозо этмоқда.

Хозирги замонда йирик табиий-илмий ва халқ хужалигининг турли масалаларини эффектив ечишда ЭХМларни кенг қўлламоқда. Мураккаб муаммоларни тадқиқ этишда ЭХМ ёрдамида ўрганилаётган объектни математик моделини тузиш ва таҳлил этиш технологияси кенг тарқалмоқда. Бундай тадқиқ этишни одатда ҳисоблаш эксперименти дейилади.

Математика масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж моделлаштириш натижасида вужудга келганлиги туфайли у хар бир масалага аниқ ечим топишга қаратилган, яъни ҳисоблаш математикаси бўлиб, унинг мақсади масала ечимини сонлар шаклида топишдан иборат эди.

М: Юзалар ва ҳажмларни улчаш, кема ҳаракатини бошқариш, юлдузлар ҳаракатини кузатиш ва х.к. Математика тарихига назар ташласак масалан; Вавилон олимларининг асосий фаолияти жадваллар тузишдан иборат бўлган, милoddан 2000 йил аввал тузилган 1 дан 60 гача сонларнинг квадратлар жадвали, милoddан олдинги 747-йилда тузилган Ой ва Куеш тутилиш жадвали. Қадимги Мисрликлар касрларни Миср касрлари шаклида ифодалаш жадвалини тузишган. Чизикли бўлмаган алгебраик тенгламаларни ечиш учун ватарлар усулини яратишган. Грек математикларидан Архимед π сони учун $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

тенгсизликни кўрсатди, милoddан аввал Герон $\sqrt{a} \approx \frac{1}{2}(Xn + (a/Xn))$ итерацион

методдан фойдаланган. Диофант III асрда аниқмас тенгламаларни ечишдан ташқари, квадрат тенгламаларни сонли ечиш усулларини яратган.

IX асрда буюк узбек математиги Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий ҳисоблаш методларини яратишга катта ҳисса қўшган, у π нинг тақрибий қийматини $\pi \approx 3,1416$ аниқлади, математик жадваллар тузишда фаол қатнашди. 960 йилда Абулвафо ал-Бужжоний синуслар жадвалини ҳисоблаш усулини ишлаб чиқди ва $\sin(1/2)^\circ$ нинг қийматини туккизта ишончли рақами билан берди, тангенс функцияни қийматлар жадвалини тузди.

XVII асрда Ж.Непр, Й.Бюрги, Бригс, А.Влакк ва бошқалар томонидан яратилган логарифмик жадваллар, Лаплас сузи билан айтганда "... ҳисоблашларни қисқартириб, астрономларнинг умрини узайтирди". Нихоят 1845 йилда Адамс ва 1946 йилда Леверьеларнинг ҳисоблашлари натижасида Нептун сайерасининг мавжудлиги ва унинг фазодаги урнини олдиндан айтишлари ҳисоблаш математикасининг буюк галабаси эди.

Ҳисоблаш жараенида маълум турдаги масаларни ечишда кул келадиган усулларни излашга тўғри келган, масалаларни моделлаштиришга ҳаракат қилинган. Бундай ҳисоблаш усулларнинг айримлари Ньютон, Эйлер, Лобачевский, Гаусс, Чебишев, Эрмит номлари билан боғлиқдир, яъни ҳисоблаш математикаси билан уз замонасининг буюк математиклари шуғулланишган.

Айрим замонларда математиклар эътиборини математик методларга катъий мантикий замин тайерлашга, қаратилганлиги боис, математик тадқиқотларни сунги сонли натижаларигача етказиш яъни ҳисоблаш методларини яратишга ҳам эътибор берган, бу соҳа эса математиканинг тадқиқотлари учун жуда зарурдир.

Фан ва техника ривожланган сари табикий математиканинг ҳам қўлами ошиб бормокда, унда шундай масалалар гуруҳига дуч келиш мумкинки уларни ечишда классик усуллардан фойдаланиб бўлмайди. Масалан: тартиби жуда катта бўлган алгебрани тенгламалар системасини ечиш, матрицаларнинг тескарисини топиш, матрицанинг хос сонларини топиш, алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ҳамда бундай тенгламалар системасини ечиш вах.к.

Фан ва техниканинг жуда ривожланиб бориши кўп масалаларни текшириш ва ечишни такозо қилади. Бундай масалалар уз навбатида математиклар олдига янги ҳисоблаш усулларини яратиш вазифасини қуяди. Иккинчи томондан техникани ривожланиши математиклар кулига кучли ҳисоблаш воситаларини бермокда. Яъни мавжуд методларни янги машиналарда қўллаш учун қайта кўриб чиқиш эҳтиёжи туғилмокда.

Математикада типик математик масалаларнинг ечимларининг етарлича аниқлашда ҳисоблаш имконини берувчи методларини яратишга ва шу мақсадда ҳозирги замон ҳисоблаш воситаларидан фойдаланиш йўлларини ишлаб чиқишга бағишланган соҳа ҳисоблаш математикаси дейилади.

Ҳозирги замон ҳисоблаш математикаси жадал ривожланиб бормокда. Ҳисоблаш математикасининг қамрови ҳам жуда кенг, табиийки масалалар хилма хил уларнинг ечимлари ҳам жуда кўп. Шунга қарамай бу ечиш усулларининг умумий ғояси ҳақида сз юритиш мумкин.

Ҳисоблаш математикасида учрайдиган кўп масалаларни

$$Y = AX \quad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда X ва A лар ҳақида маълумотлар берилган бўлиб, Уни топиш лозим бўлса, бундай масала тўғри масала дейилади. Аксинча A ва Y ҳақида маълумот берилган бўлиб X ни топиш керак бўлса тескари масала дейилади. Бундай масалалар ҳар доим ҳам аниқ ечилавермаслиги сабабли ҳисоблаш математикасига мурожат қилинади. Баъзи ҳолларда тежамкор усуллар ишлаб чиқиш зарурати туғилади. Масалан: чизикли алгебрик тенгламалар системасини ечишда Крамер формулаларига қараганда Гаусс усули анча тежамкор.

Ҳисоблаш математикасида юқоридаги масалаларнинг ҳал қилишнинг асосий моҳияти R_1, R_2 фазоларни ва A операторни ($X \in R_1, Y \in R_2$) ҳисоблаш учун қулай бўлган мос равишда бошқа $\overline{R_1}, \overline{R_2}$ фазолар ва \overline{A} оператор билан алмаштиришдан иборатдир. Баъзан уларни фақат бирини алмаштириш билан кифояланиш мумкин. Шундай алмаштиришлардан кейин ҳосил бўлган янги

$$\overline{Y} = \overline{AX}, (\overline{X} \in \overline{R_1}, \overline{Y} \in \overline{R_1})$$

масаланинг ечими бирор маънода (1) масаланинг ечимига яқин бўлсин ва бу ечимни кўп меҳнат сарфламасдан топиш мумкин бўлсин.

Демак ҳисоблаш математикаси олдида қўйилган асосий масала функционал фазода операторларни яқинлаштириш ҳамда ҳозирги замон ҳисоблаш машиналари қўлланадиган шароитда масалаларни ечиш учун оқилона ва тежамкор алгоритм ва усулларни ишлаб чиқишдан иборатдир.

Назорат топшириқлари:

- 1.1.1. Ҳисоблаш усули ривожланиш тарихини баен килинг
- 1.1.2. Ҳисоблаш усули кашфиетларини санаб утинг
- 1.1.3. Ҳисоблаш усуллари нима учун ўрганилади
- 1.1.4. Ҳисоблаш усулларида нимани ўрганиш зарур
- 1.2.1. Аниқ ечим нима?
- 1.2.2. Таркибий ечим нима?
- 1.2.3. Аниқ ечим билан таркибий ечим фарқини тушунтиринг
- 1.2.4. Математик моделлаштириш нима?

2-Асосий савол

Хатолар манбайи.

Ўқитувчининг мақсади: математик моделлаштиришда қўйиладиган хатоликларни талабаларга тушунтириш, аниқ ечим билан таркибий ечим орасидаги фарқларни талабаларга етказиш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабалар учун ўқув мақсади)

- 2.1. Математиканинг баъзи бобларидаги аниқ ечимларни эсга олиш ва

уларни таркибий ечимлардан фарқлаш.

2.2. хатолар манбаини билиш.

2-чи асосий савол баени

ХАТОЛАР МАНБАИ.

Кўпинча математик масалаларни сонли усулларда ечишда биз доимо аниқ ечим олаолмаймиз тақрибий ечим оламиз. Аниқ ечим билан олинган тақрибий ечим орасидаги хатолик қандай келиб келиб колди деган савол тугилиши табиий ҳол. Бунинг учун хатоликларнинг ҳосил бўлиш сабабларини ўрганиш лозим. Табиатдаги бирор харакатини микдорий нисбатларини у еки бу функцияларини, тенгламаларини ифодалаш мумкин, бу функцияларни бир қисми маълум бўлиб дастлабки маълумотлар, одатда бошқаларини топишга тўғри келади.

Дастлабки маълумотлар одатда тажрибадан олинади. Масалан: ёруглик тезлиги, Пленк доимийси, Авагадро сони ва бошқалар еки бошқа бирор масалани ечишдан ҳосил бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам биз дастлабки маълумотларни аниқ қийматига эга эмасмиз, балки балки тақрибий қийматига эга бўламиз. Аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги фарқ хато дейилади. Дастлабки маълумотларнинг ноаниқлиги натижасида ҳосил бўлган хато йўқотилмас хато дейилади. Бу хатолик математикка боглик бўлмасдан унга берилган маълумотларнинг аниқлигига богликдир. Лекин ҳисобловчи дастлабки хатоликни катталигини билиши ва шунга қараб йўқотилмас хатони баҳолаши керак. Агар дастлабки хатолик ката бўлса, қанчалик аниқ усул билан ҳисоблаш олиб борилишидан катъий назар кузланган мақсадга эришилмайди.

Масалани ечишда айрим идеаллаштиришлар қўлланилади, яъни табиий масалани математик модели ўрганилади. Ходисани аниқ ифодалайдиган модель бўлавермайди. Бунинг натижасида хатолик келиб чиқади, унга метод хатоси дейилади. Биз доимо π , e , $\ln 2$ ва шунга ухшаш иррационал сонларни тақрибий қийматларини оламиз, натижада ҳисоблаш хатолиги пайдо бўлади.

Юқоридаги хатоларни барчаси бирлқ тўлиқ хатоликни ташкил қилади.

Назорат топшириқлари:

22.1.3. Ҳозирги замон ҳисоблаш математикасида қандай усуллар қул-
лашларингиз лозим?

2.1.4. Қандай масалаларга тўғри ва тесқари масалалар дейилади

2.1.5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π сонларни тақрибий қийматлари нималарга тенг?

2.2.1. Ҳисоблашлардаги хатоликлар қандай келиб чиқади?

2.2.2. Хатоларнинг турларини санаб беринг

2.2.3. Ҳисоблашларда эришилган натижаларни хар доим ечим урнида
олиш мумкинми?

2.2.4. Метод хатоси нима?

2.2.5. Тўлиқ хатоликни тушунтириб беринг

Мустакил иш:

1. Мутахасисликка кириш фанини дастлабки мавзусини такрорланг.

2. Тақрибий ҳисоблашларни ўрганиш.

Фойдаланиладиган адабиётлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.

- 2.Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва.1990.
- 3.Берёзин И.С.,Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
- 4.Абдухамидов А.,Худойназаров С.,Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент.1995.
- 5.Музафаров Х.А. ва бошқалар. Сонли усуллар. маърузалар матини Тошкент 2000й

Хатоликлар турлари ва уларни ҳисоблаш.

Мавзудаги асосий тушунчалар. (иборалар)

Санок системалари,сонларни яхлитлаш,абсолют ва нисбий хатолар, лимит абсолют ва лимит нисбий хатолар,ишончли рақамлар,йўқотилмас хатолар.

Хатонинг турлари. Абсолют ва нисбий хатолар.

Ўқитувчининг мақсади: Хатолар турини талабаларга ургатиш.Тургуналик ҳақида талабаларга тушунча бериш. Абсолют ва нисбий хатоларни талабаларга тушунтириш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

- 1.1. Хатоларни турлари ва уларни ҳисоблашни билиш.
Хатоларни ҳосил бўлишини амалда кўрсатиш (яхлитлаш)
- 1.2. Абсолют ва нисбий хатоларни фарқлаш.

1-чи асосий савол баени.

Биз юқорида тўлиқ хатолик йўқотилмас хатолик, метод хатолиги, ва ҳисоблаш хатоликлари йигиндисидан иборат эканлигини кўрдик. Биз маълум сонларнинг дискрет туплами билан иш курамиз, бу бирор санок системаси сонлар тупламида этади. Бу туплам

$$\pm (\alpha 1q^n + \alpha 2q^{(n-1)} + \dots + \alpha m q^{(n-m+1)}) \quad (2.1)$$

кўринишдаги сонлардан иборат бўлиб, бунда q- санок системасининг асоси i-бутун сонлар, $0 \leq \alpha i \leq q-1$ шартни қаноатлантиради. $i=1,2,\dots, m$; m-сонлар хонасининг микдори, бутун n сони $n \leq p$ шартни қаноатлантиради. Одатда қўлда ҳисобланаётганда унли санок системасида (q=10) иш курилади. ЭХМларда асосан иккилик санок системасида (q=2) ишлайди. Уларнинг кўпчилиги шундай тузилганки, уларда q=2, m=35, no=63 еки

$$q^{-m} = 2^{-35} \approx 3 * 10^{-11}, \quad 2^{n_0} + 2^{63} \approx 3,5 * 10^{19} \quad \text{бўлади.}$$

Одатда арифметик амалларни бажараетганда кўп хонали сонлар ҳосил бўлади натижада ҳосил бўлган сон қаралаётган тупламдан чикиб кэтади, у чикиб кетмаслиги учун сон m - хонасигача яхлитланади, табиийки яхлитланадиган сон

унга энг якин сон билан алмаштирилиши, яъни яхлитлаш хатоси энг кичик бўлиши керак. Бу қўйидагича бажарилади.

Ҳисоблаш натижасида

$$\pm (\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \alpha_m q^{n-m+1} + \dots + \alpha_{m+1} q^{n-m}) \quad (2.2)$$

сон ҳосил бўлсин, агар $a_{m+1} + a_{m+2} q^{-1} + \dots < \frac{1}{2} q$

бўлса, (2.2) сонни (2.1) сон билан алмаштирамиз, агар

$$a_{m+1} + a_{m+2} q^{-1} + \dots < \frac{1}{2} q$$

бўлса (2.2) сонни

$$\pm [\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + (\alpha_m + 1) q^{n-m+1}] \quad (2.3)$$

га алмаштирамиз. $a_{m+1} + a_{m+2} q^{-1} + \dots < \frac{1}{2} q$

бўлган ҳолда кейинги амалларни бажаришга қулай килиб алмаштирилади.

Масалан: 5,780475 сонини кетма-кет яхлитлашни курайлик.

5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 сони келиб чиқади.

АБСОЛЮТ ВА НИСБИЙ ХАТОЛАР.

a - бирор микдорнинг аниқ қиймати бўлсин a^* эса унинг маълум тақрибий қиймати бўлсин, у ҳолда тақрибий a^* соннинг абсолют хатоси деб

▲ $a^* = |a - a^*|$ га айтилади. Биз кўпинча a нинг аниқ қийматини билмаймиз,

шунинг учун ▲ a^* ни ҳам билмаймиз, лекин абсолют хатони узгариш чегарасини кўрсатиш мумкин, бу чегаралар a^* тақрибий қийматни топиш усули билан аниқланади.

$|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$ - лимит абсолют хато.

Масалан: $\pi^* = 3,14$

$$3,14 < \pi < 3,15 \quad |\pi - \pi^*| < 0,01, \text{ демак } \Delta(\pi^*) = 0,01$$

деб олишимиз мумкин.

Агар $3,141 < \pi < 3,142$ деб $\Delta(\pi^*) = 0,02$ эга бўламиз.

$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}$ - нисбий хато дейилади.

$\delta(a^*) = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}$ - лимит нисбий хато дейилади.

$$\Delta(a^*) = |a^*| \delta(a)$$

$$a = a^*(1 + \delta(a^*))$$

Назорат топшириқлари:

- 1.1.1. Хатолик турларини ёзинг
- 1.1.2. Тўлиқ хато деб нимага айтилади?
- 1.1.3. Санок системасини тушунтиринг
- 1.1.4. Сонларни яхлитлаш деганда нимани тушунаси?
- 1.1.5. 6,871496 сонни кетма-кет яхлитланг

- 1.2.1. $\pi=3,14$ абсолют хатосини ҳисобланг.
- 1.2.2. Абсолют хато деб нимага айтилади?
- 1.2.3. Нисбий хато деб нимага айтилади?
- 1.2.4. $\sqrt{2}$ - мисолида абсолют ва нисбий хатоликларни ҳисобланг
- 1.2.5. Лимит абсолют ва нисбий хатоликларни тушунтиринг.

2-асосий савол.

Функциянинг йўқотилмас хатоси.
Ишончли рақамлар сонини ҳисоблаш.

Ўқитувчининг мақсади: Йўқотилмас хатоларни талабаларга тушунтириш. Функцияни йўқотилмас хатосини баҳолашни талабаларга ургатиш. Йигинди, кўпайтма ва бўлинма хатосини амалда кўрсатиш. Ишончли рақамлар сонини ҳисоблашни талабаларга ургатиш.

Идентив ўқув мақсади (талабаларнинг ўқув мақсади)

- 2.1. Йўқотилмас хатолар. Функциянинг йўқотилмас хатоларин ҳисоблай билиш.
- 2.2. Ишончли рақамлар сонини ҳисоблай билиш

2-чи асосий саволнинг баени:

Бундан кейин биз лимит абсолют хато ва лимит нисбий хатони қисқача абсолют ва нисбий хато деймиз. Абсолют хато исмли микдор бўлиб, нисбий хато исмсиз микдордир. Нисбий хато одатда фоизларда (%) ёзилади.

Соннинг ёзилишдаги, чап томондан биринчи нолдан фарқли рақамидан бошлаб ҳамма рақамлари маъноли рақамлари дейилади.

М: $a^* = 0,408$ маъноли рақами учта. Қаср қисмининг охирига ноллар ёзилиб еки ноллари ташланиб маъноли рақамлар сонини узгартириш мумкин.

Бирор w ($1/2 \leq w \leq 1$) сонни танлаймиз.

Агар $\Delta(a^*) \leq wq^{n-k+1}$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда тақрибий

$$a^* = \pm \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \alpha_m q^{n-m+1} + \dots \quad (3.1)$$

Сонда α рақам ишончли рақам дейилади, акс ҳолда α шубхали рақам дейилади. Агар α ишончли рақам бўлса олдинги рақамларнинг барчаси ишончли рақам бўлади.

Тақрибий сонни ёзиш коидаси шундан иборатки, унинг охириги маъноли рақами хар доим ишончли бўлсин. Бунинг учун шубхали рақамлар ташланади, керак бўлган ҳолда унинг томонига кўпайтувчи q' (t - бутун сон) ёзиб қўйилади.

Агар $c^* = 302448$ соннинг иккита ишончли рақами бўлса, уни $c^* = 30 \cdot 10^4$ кури-нишда ёзиш керак;

$d^* = 0,007143$ сонда ишончли рақамларнинг сони учта бўлса, уни $c^* = 7,14 \cdot 10^{-3}$ кўринишда ёзиш керак.

Функциянинг йўқотилмас хатоси.

Фараз қилайлик функциянинг аргументини аниқ қийматлари маълум бўлмасдан тақрибий қийматлари ва унга мос равишда абсолют хатолари маълум бўлсин,

яъни $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ва $\Delta(x_1^*), \Delta(x_2^*), \dots, \Delta(x_n^*)$

лар маълум уларга мос $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

функцияни қийматини ҳисоблаш масаласини курайлик. y^* ни йўқотилмас хатосини топиш

$$|x_i - x_i^*| \leq \Delta(a^*)$$

берилган ҳолда

$$y^* - \Delta(y^*) \leq y \leq y^* + \Delta(y^*)$$

ни топишдан иборатдир.

Масалани соддалаштириш учун қўйидаги шартларни куямиз

f функция узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи ва хусусий ҳосилалар секин узгарган ҳолда

$$\delta(x_1^*), \delta(x_2^*), \dots, \delta(x_n^*)$$

етарлича кичик бўлсин.

У ҳолда Лагранж формуласига кура

$$y - y^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}^1(\xi)(x_i - x_i^*)$$

бунда

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ва} \quad (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

нуқталарни бирлаштирувчи кесманинг бирор нуқтаси.

Шартга кура қўйидагича алмаштириш килиш мумкин

$$y - y^* = \sum_{i=1}^n f_{x_i}^1(x^*)(x_i - x_i^*) \quad \text{бунда} \quad y - y^* \leq \sum_{i=1}^n |f_{x_i}^1(x^*)| \cdot \Delta(x_i^*)$$

Демак функциянинг абсолют хатоси учун

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}^1(x^*)| \Delta(x_i^*) \quad (3.4)$$

формулага эга бўламиз.

Формула нисбий хато учун қўйидаги кури ишда бўлади

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f(x^*)|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{f'_{x_i}(x^*)}{f(x^*)} \right| \cdot \Delta(x_i^*)$$

ёки

$$\delta^1(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} \right| \cdot \Delta(x_i^*) \quad (3.5)$$

Функция нисбий хатосини аргумент нисбий хатоси билан қўйидагича ифода-
лаш мумкин:

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} \right| \cdot \frac{\Delta(x_i^*)}{|x_i^*|}$$

ёки

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n \left| x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} \right| \cdot \delta(x_i^*) \quad (3.6)$$

Мисол N:1

Қўйидаги йигиндининг $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

абсолют ва нисбий хатосини топинг.

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \Delta(x_i^*) \quad (3.7)$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{u^*} \delta(x_i^*) \quad (3.8)$$

№:2

Қўпайтма учун $u = x_1^* \cdot x_2^* \cdot \dots \cdot x_n^*$

абсолют хато

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{u^*}{x_i^*} \Delta(x_i^*) \quad (3.9)$$

нисбий хато

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*) \quad \delta(u^*) = \sum \delta(x^*) \quad (3.10)$$

N:3

$$u = \frac{x_1}{x_2}$$

($x, x > 0$)

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{x_2^{x_2^*}} [x_1^* \Delta(x_2^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)]$$

$$\delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*)$$

N:4

$$y = \ln x \quad \Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*)$$

унли логарифм учун $\lg x = M \ln x$

$M = \lg e = 0,334$ - утиш модули

$$\Delta(\ln x^*) = M \delta(x^*) = 0,334 \delta(x^*)$$

Ишончли рақамлар сонини ҳисоблаш.

Тақрибий сон ишончли рақамларнинг миқдори билан унинг нисбий хатоси . орасидаги муносабатга урнатиш мумкин. Фараз қилайлик,

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1} \quad (\alpha \neq 0) \quad (2.2)$$

тақрибий соннинг ҳамма рақамлари ишончли бўлсин.

Демак $\Delta(a^*) \leq Wq^{n-m+1}$ бу тенгсизлик

$$\delta(a^*) \leq \frac{wd^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1}} \leq \frac{wd^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n}$$

яъни $\delta(a^*) \leq \frac{W}{\alpha_1 q^{m-1}}$, бунда (3.11)

α_1 - биринчи маъноли рақам, m ишончли рақамлар сони

Агар m берилган бўлса, $\delta(a^*)$ ни топиш мумкин, аксинча $\delta(a^*)$ берилган бўлсин. m

$$\delta(a^*) \leq \frac{W}{(\alpha_1 + 1)q^{m-1}} \quad (3.12)$$

тенгсизликнинг бутун ечими бўлса, у ҳолда биринчи ишончли рақам α_1 га тенг бўлган a^* сон ҳеч бўлмаганда m га га ишончли рақамга эга бўлади ҳақиқатан ҳам

$$\Delta(a^*) = a^* \delta(a^*) \leq \delta(a^*) (\alpha_1 + 1) q^n \leq Wq^{n-n+1} \quad \text{бу эса } \alpha \text{ ишончли эканини кўрсатади.}$$

Назорат топшириқлари:

2.1.1. Йўқотилмас хато деб нимага айтилади?

2.1.2. Функциянинг йўқотилмас хатоси қандай ҳисобланади?

2.1.3. Лагранж формуласини ёзинг

2.1.4. Кўпайтманинг ва бўлинманинг нисбий ва абсолют хатоларини кўрсатинг

2.1.5. Йигинди ва айирманинг абсолют ва нисбий хатоларини ҳисобланг

2.2.1. Маъноли рақамлар деб нимага айтилади?

2.2.2. Ишончли рақамлар деб нимага айтилади?

2.2.3. $\delta(a^*) \leq \frac{W}{\alpha_1 q^{m-1}}$ да маъноли рақамларни ва ишончли ра-

камлар сонини кўрсатинг.

Мустакил иш.

1. Конкрет мисол келтириб хатоликларини тушунтириб беринг

Фойдаланиладиган адабиётлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўзбекистон: 2003 й.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.
3. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларидаги машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

Функцияларни интерполяциялаш. Лагранж интерполяция формуласи.

Дарс режаси (асосий саволлар)

1. Функцияларни интерполяциялаш
2. Интерполяция кўпхадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги. Лагранж интерполяция формуласи

Мавзудаги асосий таянч тушунчалар (иборалар)

функцияни интерполяциялаш, интерполяция тугунлари, интерполяцияловчи функция, интерполяциялаш алгебраси, Лагранж интерполяция формуласи, фундаментал кўпхадлар, Лагранж интерполяция кўпхади.

1-асосий савол.

1. Функцияни интерполяциялаш.

Ўқитувчининг мақсади: Функцияни интерполяциялашни зарурияти ҳамда кулайлигини талабаларга тушунтириш, интерполяция алгебрасини талабаларга кўрсатиш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

- 1.1. Функцияни интерполяциялаш нималигини ўрганиш ва унинг аҳамиятини билиш.
- 1.2. Функцияни интерполяциялаш алгебрасини ўрганиш.

1-чи асосий савол баени.

Функцияларни интерполяциялаш.

Масаланинг қўйилиши.

Баъзи масалаларда бирор функция урнига унга бирор маънода якин ва тузилишининг соддарок бўлган функция билан алмаштириш масаласи қўйилади. Функция-

нинг якинлаштиришнинг масаласи қўйилади. Функциянинг якинлаштирининг энг содда ва кенг қўлланиладиган кисми функциянинг итерполяциялаш масаласи қўйилади.

Дастлаб итерполяциялаш деганда функциянинг қийматларини жадвалда берилмаган аргумент қийматида тошиш тушунилар эди. Хозир итерполяциялаш кенг маънода тушунилади. Фараз қилайлик $y(x)$ функция $[a,b]$ ораликда берилган

еки ҳеч бўлмаганда $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$

қийматлари маълум бўлсин. Шу ораликда аниқланган ҳисоблаш учун қулай бўлсин

$\{p(x)\}$ функция синфини оламиз, масалан кўпхадлар синфи $f(x) \approx p(x)$

алмаштириш масаласи итерполяциялаш масалан; $p(x)$ берилган x_1, x_2, \dots, x_n нукталарда $f(x)$ функция қийматлари билан бир хил қийматларни

$$\text{Кабўл қилади: } p(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{1, n})$$

Бунда x_1, x_2, \dots, x_n нукталар интерполя-

ция тугунлари дейилади. $P(X)$ эса интерполяцияловчи функция дейилади.

Агар $\{p(x_i)\}$ синфни даражали кўпхадлардан иборат бўлса, итерполяциялаш алгебраик дейилади. Алгебра итерполяциялаш кенг қўлланилади. Агар $f(x)$ даврий бўлса $\{p(x)\}$ урнига тригонометрик функциялар синфини олиш мумкин, агар берилган $f(x)$ функция берилган нукталарда чексизга айланадиган бўлса, итерполяцияловчи функция урнага рационал функциялар синфини олиши мумкин.

Назорат топшириқлари.

1.1.1. Интерполяция тугунлари нима?

1.1.2. Интерполяция масаласининг қўйилишини тушунтиринг

1.1.3. Интерполяцияловчи кўпхад деб нимага айтилади?

1.2.1. Интерполяциялаш алгебраси деб нимага айтилади?

1.2.2. Интерполяциялашга мисол келтиринг

1.2.3. $f(x)$ даврий бўлганда $\{P(x)\}$ урнига қандай функцияларни олиш мумкин?

2-асосий савол.

Интерполяцион кўпхадларнинг мавжудлиги ва ягоналиги.

Лагранж интерполяцион формуласи.

Ўқитувчининг мақсади : Асосан алгебраик интерполяциялашни талабаларга ургатиш. Интерполяциялаш масаласи мавжудлиги ва ягоналигини талабаларга кўрсатиш. Фундаментал кўпхадларни тушунтириш. Лагранж интерполяцион кўпхадини ва унинг унинг хусусий ҳолларини талабаларга ургатиш

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) Q_{nj}(x) \quad (4.4)$$

изланаётган интерполяцион кўпхад бўлади.

Шундай қилиб бу кўпхад n та бўлувчиси маълум, бунда

$$Q_{nj}(x) = C \prod_{i \neq j} (x - x_i) \quad \text{келиб чиқди}$$

Номаълум кўпайтувчи C ни эса

$$Q_{nj}(x) = C \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) = 1$$

шартдан топамиз, натижада

$$Q_{nj}(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad \text{ҳосил бўлади.}$$

Демак интерполяцион кўпхад:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (2.5)$$

Бу кўпхадга Лагранж интерполяцион кўпхади дейилади. $n=1$ бўлганда бу формула икки нуктадан утувчи тўғри чизик формуласини беради.

$$L_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} f(x_1)$$

Агар $n=2$ бўлса, квадратик интерполяцион кўпхадга эга бўлади, бу кўпхад вертикал уққа эга бўлган, уч нуктадан утувчи параболани аниқлайди:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Мисол. 0,1,2, қийматларда мос равишда 1,2,5 қийматларни кабул қилувчи квадратик кўпхад қурилсин. Охириги формуладан

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} 5 = x^2 + 1$$

Бошқа кўринишдаги Лагранж интерполяцион кўпхад киритиш мумкин, бунинг учун

$$W_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \quad \text{кўпхадни киритамиз}$$

унинг ҳосиласи $W_{n+1}^1(x) = \sum_{k=0}^n \left[\prod_{i \neq j} (x - x_i) \right]$,демак бундан

$$W_{n+1}^1(x_j) = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \quad \text{бўлади.}$$

Шунинг учун ҳам, $\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ Лагранж коэффициентини

$$\frac{W_{n+1}(x)}{W_{n+1}^1(x_j)(x - x_j)} \quad \text{кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда}$$

Лагранж кўпхад

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)W_{n+1}(x)}{W_{n+1}^1(x_j)(x - x_j)} \quad (4.6)$$

кўринишда бўлади.

Тугунлари бир хил узокликда жойлашган хусусий ҳолда эса:

$X_1 - X_0 = X_2 - X_1 = \dots = X_n - X_{n-1} = h$ бу ҳолда соддалиқ учун

$X = X_0 + th$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$x - x_j = h(t - j), W_{n+1}(x) = h^{n+1}W_{n+1}^*(t)$$

бу ерда

$$W_{n+1}^*(t) = t(t-1)\dots(t-n), W_{n+1}^1(x_j) = (-1)^{n-j} j!(n-j)!h^n$$

бўлиб Лангранж интерполяцион кўпхади қўйидагича бўлади:

$$L_n(x_0 + th) = W_{n+1}^*(x) \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j} f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!} \quad (4.7)$$

Назорат топшириқлари.

2.1.1. Вандермонд детерминантини нолдан фарқлилигини кўрсатинг

2.1.2. Фундаментал кўпхадларга мисоллар келтиринг

2.1.3. Интерполяцион кўпхадларнинг мавжудлигини ва ягоналигини исботланг.

2.1.4. Тугун нуқталари берилган киймаги тенг бирор кўпхад ёзинг

2.2.1. Интерполяциялаш алгебраси нима?

2.2.2. Интерполяциялашга конкрет мисол келтиринг ва тушунтириб беринг

2.2.3. Интерполяциялашни аҳамиятини тушунтириб беринг

2.2.4. Интерполяцион формула аниқ формула бўлиши мумкинми?

Мустакил иш.

1. Тейлор формуласини такрорланг
2. Интерполяциялашни аҳамиятини ўрганиш.

Фойдаланиладиган адабиетлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.
3. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

1. Эйткен схемаси.

$L(0,1,2)(x)$ орқали X_0, X_1, \dots, X_n тугунлар Ёрдамида курилган n -даражали кўпхадни белгилаймиз. (4.5) формулага кура

$$L_{(0,1)}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0)x_0 - x \\ f(x_1)x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}$$

$$L_{(1,2)}(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_1)x_1 - x \\ f(x_2)x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}$$

$$L_{(0,2)}(x) = \frac{x-x_2}{x_0-x_2} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0)x_0 - x \\ f(x_2)x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

Энди $L(0,2)(x)$ ифода $f(X_0)$ ва $f(X_2)$ лардан қандай қонуният билан тузилган бўлса, худди шу қонуният билан $L(0,1)^{(x)}$ в $L(1,2)(x)$ Ёрдамида тузилган

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_{(0,1)}(x)x_0 - x \\ f_{(0,2)}(x)x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

ифодани куриб чикамиз. $P(x)$ иккинчи даражали кўпхад, ва $P(X_0) = f(X_0)$, $P(X_1) = f(X_1)$, $P(X_2) = f(X_2)$, тенглик урниди. Демак $P(X) = L(0,1,2)(x)$, шундай қилиб, $L_{(0,1)}(x)$ ва $L_{(1,2)}(x)$ га биринчи тартибли интерполяцияни қўллаб $L(0,1,2)(x)$ кўпхадга эга бўлдиқ. Шу жараенни чексиз давом эттириш мумкин.

Масалан:

$$L_{(01234)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_{(0123)}(x)x_3 - x \\ f_{(0124)}(x)x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_3} = \frac{\begin{vmatrix} f_{(0123)}(x)x_0 - x \\ f_{(1234)}(x)x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_0}$$

Юкорида келтирилган схема Эйткен схэмаси дейилади. Эйткен схэмаси $\text{Ln}(X)$ нинг умумий кўринишини топиши учун эмас, балки унинг бирор х нуктадаги қийматини ҳисоблашда фойдаланилади.

Ҳисоблашларни жадвал шаклида ёзиш кулайроқ.

x_i	y_i	$x_i - x$	$L(i-1, i)$	$L(i-2, \dots, i)$	$L(i-3, \dots, i)$	$L(i-4, \dots, i)$	$L(i-5, \dots, i)$
x_0	y_0	$x_0 - x$					
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{(01)}(x)$				
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{(12)}(x)$	$L_{(012)}(x)$			
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{(23)}(x)$	$L_{(123)}(x)$	$L_{(0123)}(x)$		
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{(34)}(x)$	$L_{(234)}(x)$	$L_{(1234)}(x)$	$L_{(01234)}(x)$	
x_5	y_5	$x_5 - x$	$L_{(45)}(x)$	$L_{(345)}(x)$	$L_{(2345)}(x)$	$L_{(12345)}(x)$	$L_{(012345)}(x)$

Назорат топшириқлари.

- 1.1.1. Биринчи даражали Лагранж интерполяцион кўпҳадини кўринг.
- 1.1.2. Иккинчи даражали Лагранж интерполяцион кўпҳадини кўринг.
- 1.1.3. n-даражали кўпҳаддан фойдаланиб (n+1)-даражали кўпҳадни куришни билиш
- 1.1.4. Учта ва туртта тугун нуктали интерполяцион кўпҳадни куриш схэмасини айтинг.
- 1.2.1. $L_{(0,1)}(x)$ ва $L_{(1,2)}(x)$ кўпҳадлар қандай тузилади.
- 1.2.2. $L_{(01234)}(x)$ ни кўринишини ёзинг.
- 1.2.3. Эйткен схэмаси нима учун қўлланилади?
- 1.2.4. Эйткен жадвалини тушунтириб беринг.

Лагранж интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳадини баҳолаш.

- 2.1. Қолдиқ ҳад қандай пайдо бўлишини тушуниш ва қолдиқ ҳадни куришиларини билиш.
- 2.2. Қолдиқ ҳадни ифодалай билиш ва баҳолашни ўрганиш.

Агар $f(x)$ функцияни бирор $[a,b]$ ораликда $\text{Ln}(x)$ интерполяцион кўпҳад билан алмаштирилса, интерполяция тугунларида устма уст тушади, колган нукталарда эса фарқ қилади қолдиқ ҳад $R(X) = f(x) - \text{Ln}(x)$ кўринишини топиш ва баҳолаш мақсадга мувофиқ. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a,b]$ ораликда (n+1) тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

Теорема:

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда $(n+1)$ тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда интерполяцияни қолдиқ ҳадини

$$R(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{W_{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (5.1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда $\xi \in [a, b]$

Исбот: Ёрдамчи функция тузамиз $\varphi(x) = R(x) - kW_{n+1}(x)$ бу ерда бунда K - номаълум узгармас коэффицент. Албатта бу функция $z = x_0, x_1, \dots, x_n$ ларда нолга тенг бўлади. K ни шундай танлаймизки $\varphi(x)$ функция $z \in X \subset [a, b]$

$x = x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ нукталарда 0 қийматини қабул қилсин, демак

$$K = \frac{R(x)}{W_{n+1}(x)} \quad (5.2)$$

у ҳолда $\varphi(z)$ функция $[a, b]$ ораликнинг $n+2$ нукталарида 0 га айланади. Роль теорэмасига кура бу ораликда камида $n+1$ та нуктада 0 га айланади,

$\varphi^1(z)$ эса n та нуктада 0 га айланади ва хоказо.

$$\varphi^{n+1}(z)$$

камида битта нуктада нолга айланади, бу нукта ξ бўлсин, $\varphi^{n+1}(\xi) = 0$
Бунда $L_n(x)$ нинг n даражали кўпхад эканлигини эътиборга олсак

$$\varphi^{n+1}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - KW_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{ва бундан (5.2) дан (5.1) формула}$$

ўринли экани келиб чиқади.

Назорат топшириқлари.

2.1.1. Қолдиқ ҳад қандай пайдо бўлади?

2.1.2. Тейлор формуласи ва унинг қолдиқ ҳадлари формуласини эсланг.

2.1.3. Лагранж формуласидаги қолдиқ ҳадни умумий кўринишини ёзинг.

2.1.4. Роль теорэмасини айтинг.

2.1.5. Теоремани маъносини тушунтиринг.

2.2.1. Теоремани исботлаб беринг.

2.2.2. Нима учун $\varphi^{n+1}(\xi) = 0$ бўлишини тушунтиринг.

2.2.3. Ёрдамчи функцияни кўринишини ёзинг.

2.2.4. Ёрдамчи функцияни нима учун ҳосилалари мавжудлигини тушунтиринг.

2.2.5. Бирорта мисолда қолдиқ ҳадни баҳосини кўрсатиб беринг.

Мустақил топшириқ:

1. Интерполяцион формулани тузишни ва унинг қолдиқ ҳадини баҳолашни ўрганиш.
2. Лагранж интерполяцион кўпҳадини камчилигини билиш.

Фойдаланиладиган адабиётлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.
3. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

БЎЛИНГАН АЙИРМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион формуласи

таянч тушунчалар (иборалар)

Бўлинган айирма, i -тартибли бўлинган айирма, бўлинган айирмалар жадвали ва уни кўриниши. Бўлинган айирмали интерполяцион формула

1. Бўлинган айирмалар ва уларнинг хоссалари.

- 1.1. Бўлинган айирмаларни фарқлаш ва улар асосида формулалар куришни ўрганиш.
- 1.2. Бўлинган айирмалар жадвалини куришни ўрганиш

1-асосий саволни баени

Бирор синфдан олинган $f(x)$ функция ва бир биридан фарқли $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ тугунлар берилган бўлсин. $f(x)$ функциянинг $X=X_i$ тугундаги нолинчи тартибли бўлинган айирмаси деб $f(x_i)$ га айтилади; биринчи тартибли бўлинган айирмада эса. (x_i, x_j тугунларда)

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (1)$$

тенглик билан аниқланади, тугунларга мос келган 2 тартиблиси эса

$$f(x_i, x_j, x_m) = \frac{f(x_j, x_m) - f(x_i, x_j)}{x_m - x_i}$$

тенглик билан ва K - тартибли бўлган айирма ($k-1$) тартиблиси орқали

$$f(x_i, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

формула билан аниқланади. Бўлинган айирмаларни қўйидаги жадвал кўринишда ёзиш мумкин:

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_5)$
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		

Лемма Бўлинган айирмалар учун

$$f(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\alpha \neq i} (x_i - x_\alpha)} \quad (2) \text{ тенглик ўринли}$$

Исбот Леммани индукция методи билан исбот қиламиз : $k=0$ бўлганда

$$\begin{array}{ccc} f(x_k) = f(x_k) & \text{тенглик} & f(x_0) = f(x_0) \text{ тенгликка айланади. } \\ (2) & \text{тенглик} & (1) \text{ тенглик} \end{array}$$

билан устма уст тушади. Фараз қилайлик (2) тенглик $k \leq n$ учун ўринли бўлсин. У ўринлида

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_{n+1}) &= \frac{f(x_1, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, \dots, x_n)}{x_{n+1} - x_0} = \\ &= \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ 1 \leq j \leq n+1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod (x_i - x_j)} - \sum_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j \leq n \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod (x_i - x_j)} \right] \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг унг томонида $i \neq 0$, $i \neq n+1$ лар учун

олдидаги коэффициент қўйидагига тенг:

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} - \frac{1}{\prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq j \leq n}} (x_i - x_j)} \right] = \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0) \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq j \leq n+1}} (x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq j \leq n+1}} (x_i - x_j)}$$

$i=0$ ва $i=n+1$ лар учун $f(x_i)$ фақат 1 марта қатнашади, ва у олдидаги коэффициент керакли кўринишга эга бўлади. Лемма исбот бўлди.

Назорат топшириқлари:

1.1.1. Лагранж интерполяцион кўпҳадини нокулай томонини фарқлай билиш

1.1.2. Бўлинган айирма деб нимага айтилади?

1.1.3. i -тартибли бўлинган айирма нима?

1.1.4.

$$f(x_i, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

формулани тушунтириб беринг

1.1.5. Бўлинган айирмалар жадвалини тушунтириб беринг

1.2.1. Бўлинган айирмалар жадвалини тузишдан мақсад нима?

1.2.2. Конкрет мисолда бўлинган айирма тузинг

1.2.3. Леммани маъносини айтинг. Леммани исботлаш схемасини айтинг.

1.2.4. Натижани айтинг.

1.2.5. Функциянинг тугунларида қийматларини бўлинган айирмаларда қатнашишини тушунтиринг.

НЬЮТОННИНГ БЎЛИНГАН АЙИРМАЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ.

1.1. Лагранж интерполяцион формуласини нокулай тамонларини билиш

1.2. Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион формуласини кура билиш ва Лагранж интерполяцион формуласидан фарқлаш.

Лагранж интерполяцион кўпҳадининг хар бир ҳади интерполяция тугунларининг ҳаммасига боғлиқдир. Агар янги тугунлар киритиладиган бўлса интерполяцион кўпҳадни қайтадан куришга тўғри келади. Бу Лагранж интерполяцион кўпҳадининг камчилигидир. Лагранж интерполяцион кўпҳадини шундай тартибда ёзиш мумкинки ҳосил бўлган кўпҳадининг ихтиерий i - ҳади интерполяция тугунларининг фақат аввалги i тасига ва функциянинг шу тугунларидаги қийматларига боғлиқ бўлади.

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - W_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = W_{n+1}(x) \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} + \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \right]$$

Бу ифодани олдинги мавзудаги лемма билан солиштирсак қавс ичидаги ифода нинг узи эканлиги кўринади. Демак

$$f(x) - L_n(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) W_{n+1}(x) \quad (1)$$

энди $L_n(x)$ тугунлари X_0, X_1, \dots, X_n дан иборат Лагранж интерполяцион кўпхадди бўлсин. У ҳолда Лагранжнинг $L_n(x)$ интерполяцион кўпхаддини

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)] \quad (2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Бу ерда $L_m(x) - L_{m-1}(x)$ x_0, x_1, \dots, x_{m-1} нуқталарда нолга айланадиган m - даражали кўпхад чунки.

$$L_m(x_j) - L_{m-1}(x_j) = f(x_j), (j = \overline{0, m-1}) \quad \text{Шунинг учун ҳам}$$

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_m W_m(x), W_m(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{m-1})$$

Бунда $X = X_m$ деб олсак

$$f(x_m) - L_{m-1}(x) = A_m W_m(x_m) \quad \text{га эга}$$

бўламиз. Иккинчи томондан (1) тенгликдан $n=m-1$ ва $X=X_m$ деб олсак

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m, x_0, \dots, x_{m-1}) W_m(x_m)$$

Шундай қилиб $A = f(x_0, \dots, x_m)$ ва демак

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0, \dots, x_m) W_m(x)$$

Бу микдорларни (2) га қўйиб қўйидагига эга бўламиз.

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n) \times (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (3)$$

Бунга Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион кўпхадди дейилади. (олдинга интерполяциялаш формуласи)

$$(1) \text{ тенгликни } f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{(n+1)}(x)$$

тенглик билан солиштирсак

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, x_0 \leq \xi \leq x_n \quad (4)$$

келиб чиқади.

Агар $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > x_0$ тартибда интерполяция

тугунларини жалб этсак

$$L_n(x) = f(x_n) + (x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$$

(5)

оркага интерполяциялаш формула хосил бўлади

Назорат топшириқлари.

2.1.1. Лагранж интерполяцион формуласини хар бир тугун нуктасида боғланишини билиш.

2.1.2. Лагранж интерполяцион формуласини нокулай тамонларини фарклар.

2.1.3. Лагранж интерполяцион формуласини тугунларига боғлаб ёзиш тартибига боғликлигини билиш.

2.1.4. $L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f(x_j), (j = \overline{0, m-1})$

маъносини тушунтириб беринг.

2.1.5. $W_m(x)$ ни кўринишини эсланг

2.2.1. Бўлинган айирмаларни интерполяцион кўпхадда кўллай билиш

2.2.2. $f(x_j, x_i)$ ни ифодасини ёзинг

2.2.3. $f(x_j, x_i, x_k)$ ни ифодасини ёзинг

2.2.4. Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион кўпхаддини ёзинг

2.2.5. Олдинга ва оркага интерполяциялаш формуласини фарклар

Мустакил топшириқ: $f(x)$ ни m даражали кўпхад

$$P_m = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{бўлган ҳолда Ньютоннинг бу-}$$

линган айирмали интерполяцион формуласини билиш.

Фойдаланиладиган адабиетлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.

2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.

3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.

4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

1. Чекли айирмалар ва уларнинг хоссалари

Фараз қилайлик аргументнинг узаро тенг узокликда жойлашган $x_i = x_0 + ih$

(h -жадвал қадами) қийматларида $f(x)$ функциянинг мос равишдаги қийматлари

$f_i = f(x_i)$ берилган бўлсин. Ушбу $f_{i+1} - f_i$ айирмага биринчи тартибли

чекли айирма дейилади. Шароитга кура бу миқдорни унч чекли айирма:

; чап чекли айирма : ∇f_{i+1} ; еки марказий айирма

$$\delta f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}$$

лар каби белгиланади.

Шундай килиб, қўйидагича ёзамиз:

$$f_1 + f_i = f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Юқори тартибли айирмалар рекуррент муносабатлар ёрдамида тузилади.

$$\begin{aligned} \Delta^k f_i &= \Delta(\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \\ \nabla^k f_i &= \nabla(\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1}(\nabla f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1} \\ \delta^k f_i &= \delta(\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1}(\delta f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Айирмалар жадвали одатда қўйидагича тасвирланади.

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f_{\frac{1}{2}}^1$	f_1^2		
x_2	f_2	$f_{\frac{3}{2}}^1$	f_2^2	$f_{\frac{3}{2}}^3$	f_2^4
x_3	f_3	$f_{\frac{5}{2}}^1$	f_3^2	$f_{\frac{5}{2}}^3$	
x_4	f_4	$f_{\frac{7}{2}}^1$			

Ҳисоблаш практикасида ишнинг ҳамма боскичларида назорат килувчи амалларнинг мавжудлигини талаб қилинади. Бундай назорат килувчи амаллар айирмалар жадвалини тузаетганда бевосита ҳосил бўлади.

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}}^1 + f_{\frac{3}{2}}^1 + \dots + f_{\frac{n-1}{2}}^1 &= f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + \dots + f_n - f_{n-1} = f_n - f_0, \\ f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{n-1}^2 &= f_{\frac{3}{2}}^1 - f_{\frac{1}{2}}^1 + f_{\frac{5}{2}}^1 - f_{\frac{3}{2}}^1 + \dots + f_{\frac{n-1}{2}}^1 - f_{\frac{n-3}{2}}^1 = f_{\frac{n-1}{2}}^1 - f_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

яъни жадвалнинг ҳар бир устинидаги сонларнинг йигиндиси аввалги устун четки элементларининг айирмасига тенг. Айрим интерполяцион формулаларда ва уларнинг чекли айирмалар билан бир каторда айирмаларнинг қўйидаги ўрта арифметици ишлатилади.

$$Mf_i^{2k-1} = \frac{f_{i-\frac{1}{2}}^{2k-1} + f_{i+\frac{1}{2}}^{2k-1}}{2}, Mf_{i+\frac{1}{2}}^{2k} = \frac{f_i^{2k} + f_{i+1}^{2k}}{2}$$

1. Лемма К- тартибли чекли айирма функциянинг қийматлари орқали қўйидаги формула билан ифодаланади.

$$f_i^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot c_k^j \cdot f_i + \frac{k}{2} - j \quad (2)$$

Бу ерда к жуфт бўлиб і бутун бўлиб, к ток бўлганда і ярим бутундир.

1-Натижа 2 та ф ва д функциялар йигиндиси еки айирмасининг чекли айирмалари мос равишда шу функциялар чекли айирмаларининг йигиндиси еки айирмасиги тенг.

$$f_j^k = \varphi_j^k \pm g_j^k$$

2-Натижа Функция билан узгармас сон кўпайтмасининг чекли айирмалари билан узгармас соннинг кўпайтмасига тенг.

$$(af)_j^k = af_j^k$$

2.Лемма Жадвалнинг кадами $K=X_i-X_{i-1}$ узгармас бўлса у ҳолда бўлинган айирма билан чекли айирма билан чекли айирма орасида қўйидаги муносабат ўринли:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f_j^k + \frac{k}{2}}{h^k \cdot k!} \quad (3)$$

3-Натижа n- даражали кўпхаднинг n-тартибли чекли айирмаси узгармас сонга тенг бўлиб, ундан юқориси тартиблиси эса нолга тенг.

$$\Delta^k P_n(x) = \begin{cases} 0, & k > n \\ C, & k = 0 \\ P_{n-1}(x), & k < n \end{cases}$$

$P_n(x)$ -даражали кўпхад, с-узгармас сон

Назорат топшириқлари

1.1.1. Чекли айирмани таърифланг

1.1.2. Бўлинган айирма билан чекли айирмани фарқланг

1.1.3. Чап, унг ва марказий чекли айирмаларни фарқланг

1.1.4. Юқори тартибли айирмаларни тузишни тушунтириб беринг

1.1.5. Айирмалар жадвалини тушунтиринг

1.2.1. k-тартибли чекли айирма функциянинг қиймати орқали қандай ифодаланади?

1.2.2. Йигиндини чекли айирмаси нимага тенг?

1.2.3. Функцияни узгармас сонга кўпайтмасини чекли айирмаси нимага тенг?

1.2.4. $h=x-x$ узгармас бўлган ҳолда бўлинган айирма билан чекли айирмалар орасидаги муносабатни ёзинг ва исботлай билинг

1.2.5. n-даражали кўпхаднинг n-тартибли чекли айирмаси узгармас бўлса, ундан юқорилари нимага тенг

Интерполяция тугунлари тенг узокликда жойлашган ҳолни, яъни

$$x_i = x_0 + ih, (i = 0, 1, 2, \dots)$$

бўлган ҳолни қараймиз. Бунда интерполяцион формуланинг кўринишлари анча соддалашади.

Фараз қилайлик $L_n(x)$ x_0, x_1, \dots, x_n тугунлар бўйича тузилган

Ньютон интерполяцион кўпхади бўлсин.

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1)$$

Бундаги бўлинган айирмаларни чекли айирмалар билан алмаштирамиз.

Ушбу $X=X_0 + th$ алмаштиришни бажаргандан кейин (1) кўпхад кўйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf_1^1 + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_1^3 + \dots + \frac{t(t-1)\dots[t-(n-1)]}{n!} f_1^n \quad (2)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади кўйидаги кўринишда бўлади:

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_0-h)\dots(x-x_0-nh) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n) \quad (3)$$

(2) формула Ньютоннинг жадвал бошидаги интерполяцион формуласи дейилади.

(1) формулада интерполяциялаш тугунлари сифатида тугунларни оламиз.

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x-x_0) + f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x-x_0)^* \quad (4)$$

$$*(x-x_1) + \dots + f(x_0, \dots, x_{-n})(x-x_0)\dots(x-x-(n-1))$$

Бўлинган айирмалар уз аргументининг симметрик функцияси бўлганлиги учун

$$f(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}) = f(x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0)$$

(4) формулада яна бўлинган айирмаларни чекли айирмалар билан алмаштириб ва $X=X_0 + th$ деб олиб, кўйидагини ҳосил киламиз.

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf_{-1}^1 + f_{-1} \frac{t(t-1)}{2} + \dots + f_{-n}^n \frac{t(t+1)\dots[t+(n-1)]}{n!} \quad (5)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳад

$$\frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)\dots(t+n) \quad \text{кўринишда бўлади.}$$

(3) формула билан қолдиқ ҳади катнашувчи ҳосилани (4) формула Ёрдамида айирма билан алмаштирамиз.

$$R_n \approx \frac{t(t-1)\dots(t-1)}{(n+1)!} f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} \quad (6)$$

Шунингдек (5) формула уринда кўйидаги тақрибий лекин қулай формулага эга бўламиз.

$$R_n \approx \frac{t(t+1)\dots(t+1)}{(n+1)!} f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} \quad (7)$$

Назорат топшириқлари.

2.1.1. Тенг узокликдаги тугунлар деганда нимани тушунаси?

2.1.2. (1) формулани тушунтириб беринг

2.1.3. $x=x + ih$ алмаштиришдан кейинги кўринишни ёзиб беринг

2.1.4. (2) формуланинг қолдиқ ҳадини ёзинг

Мустакил топшириқ: Жадвал тузишда йул кўйилган хато юқори тартибли айирмаларга қандай таъсир этишини ўрганинг

Фойдаланиладиган адабиетлар:

1.Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.

2.Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование.

Москва.1990.

3.Березин И.С.,Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.

4.Абдухамидов А.,Худойназаров С.,Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент.1995.

2-Мавзу: Сонли дифференциаллаш. Сплайнлар билан яқинлашиш (чизикли ва кубик).

Асосий тушунчалар: Тақрибий дифференциаллаш формуллари ёки чекли айирмалар ҳосилалар ва уларнинг хатоликлари.

Асосий натижалар:

1.Тақрибий дифференциаллаш масаласи:

$$D_x f(x) \approx \Lambda_x f(x), D_{xx} f(x) \approx \Lambda_{xx} f(x).$$

2.Чекли айирмалар ҳосилалар: $\Lambda_x^+ f(x), \Lambda_x^- f(x), \Lambda_x^0 f(x), \Lambda_x^r f(x), \Lambda_x^l f(x), \Lambda_{xx} f(x)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{12} f''(\xi)h = \Lambda_x^+ f(x) + O(h),$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{12} f''(\xi)h = \Lambda_x^- f(x) + O(h)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) = \Lambda_x^0 f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)] + O(h^2) = \Lambda_x^l f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)] + O(h^2) = \Lambda_x^r f(x) + O(h^2),$$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{f''(\xi)}{12} h^2 = \Lambda_{xx} f(x) + O(h^2)$$

1. Тақрибий дифференциаллаш масаласи.

Бирор $[a, b]$ кесмада жадвали

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

нуқталар тўплами берилган ва бу нуқталарда қандайдир $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ қийматлари берилган.

Тақрибий дифференциаллаш масаласида $D^{(r)} f(x) = f^{(r)}(x)$ ҳосилани, интеграллаш масаласида

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n p_i f(\xi_i) \quad (2)$$

интегрални топиш талаб қилинади. Бу ерда $p_i, \xi_i, i = 0, 1, \dots, n$ – коэффициентлар ва тугун нуқталар, йиғинди тақрибий интеграллаш ёки квадратура формуласи деб айтилади.

Бу иккала масалада ҳам $y = f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши бирор чексиз йиғинди ёки интеграл кўринишида берилган бўлганда ҳам вужудга келади. Гап шундаки, йиғинди ва интеграл билан берилган функциянинг қийматларини ҳисоблаш қийин бўлганлиги учун унинг қиймати чекли сондаги, масалан, $\{x_i\}$ нуқталарда ҳисоблангач қолган нуқталарда ҳисоблаш учун янги лекин соддарок функция қурилади.

Бу икки масала ҳам бир хил усулда ечилади. Масалан, интерполяция формуллари

$$N_n(f; x), L_n(f; x), S_n(f; x)$$

кўрилиб, ($N_n(f; x)$ Ньютон, $L_n(f; x)$ - Лагранж интерполяция кўпхадлари)

$$f'(x) \approx I_n'(f; x), J(f) = J(I_n(f; x))$$

деб олинади. Бунда куйидаги хатоликларга йўл қўйилади:

$$r_n(f; x) = f'(x) - I_n'(f; x) \quad (3)$$

$$r_n(f) = \int_a^b [f(x) - I_n(f; x)] dx = \int_a^b R_n(f; x) dx \quad (4)$$

К бирор функциялар тўплами бўлсин. Агар

$$r_n(f) = 0, \quad f \in K \quad (5)$$

бўлса тақрибий интеграллаш формуласи K тўпланда аниқ дейилади. (4) формуладан кўринадики, тақрибий интеграллаш формуласи $K = P_n - n$ - даражали кўпхадлар тўпламида аниқ экан.

Тақрибий интеграллаш формуласига бошқача ҳам тус бериш мумкин. $N_n(f; x)$ ўрнида $L_n(f; x)$ олсак

$$I(f) \approx I(L_n(f; x)) = \sum_{i=0}^n p_i f(x_i) \quad (6)$$

ни ҳосил қилишингиз мумкин, бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x) dx; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

Демак, тақрибий интеграллаш формуласининг жумладан тақрибий дифференциаллаш формуласини (6) кўринишида олиш мумкин, масалан,

$$D(f) = f'(x) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i), \quad c_i = c_i(x) = l_i'(x), \quad (8)$$

Тақрибий дифференциаллаш формулалари. Чекли айирмали ҳосилалар $f'(x_i), f''(x_i)$ ларнинг тақрибий қийматларини топамиз. Нуқталар тенг узокликда жойлашган деб фараз қилайлик.

Ньютон интерполяция формуласидан фойдаланиш

$$N_2(f; x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0; x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0; x_1; x_2]$$

Формуладан

$$f'(x_0) \approx N_2'(f; x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,0}^r = \Lambda_x^r f(x_0) \quad (9)$$

$$f(x_1) \approx N_2(f; x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,1}^0 = \Lambda_x^0 f(x_0) \quad (10)$$

$$f(x_2) \approx N_2'(f; x_2) = \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} \stackrel{def}{=} f_{x,2}^l = \Lambda_x^l f(x_0) \quad (11)$$

$$f(x_1) \approx N_2''(f; x_0) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} \stackrel{def}{=} f_{xx,0} = \Lambda_{xx} f(x_0) \quad (12)$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларда ўнг томондаги учинчи устун ҳосилаларнинг тақрибий қийматлари, тўртинчи ва бешинчи устун эса бу тақрибий қийматларнинг шартли белгиларини ифодалайди. Бундан кейин def ифода таъриф бўйича деган маънони англатади.

$r_2^1(f; x) = R_2^1(f; x)$ эканлигидан

$$r_2(f; x_i) = f^{(3)}(\xi) / 3! [(x_i - x_1)(x_i - x_2) + (x_i - x_0)(x_i - x_2) + (x_i - x_0)(x_i - x_1)]$$

шунинг учун

$$f^i(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,0} + O(h^2) \quad (13)$$

$$f^1(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,0} + O(h^2) \quad (14)$$

$$f^1(x_2) = \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} h^2 = f_{x,2} + O(h^2) \quad (15)$$

Куйида кўрамизки,

$$f^{(2)}(x_1) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi)h^2}{12} = f_{xx,1} + O(h^2) = \Lambda_{xx} f(x_1) + O(h^2) \quad (16)$$

(9) - (12) формулалар тақрибий дифференциаллаш формуласи ёки чекли айирмали ҳосилалар дейилади. (13) - (16) бу формулаларнинг хатоликларини кўрсатади. (14) биринчи тартибли марказий ҳосила, (16) иккинчи тартибли марказий ҳосила дейилади. Учинчи ҳосила чекланган функциялар синфида бу ҳосилаларнинг хатоликлари бошқаларникидан икки марта кичиклиги кўриниб турибди.

Sonli differensiyalashda Nyuton interpolatsiyalash formulasi

Berilgan jadval bo'yicha hosila topish amalini bajarish uchun Bu Nyutoning 2- interpolatsiya ko'phaddan foydalanamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2) + \dots + [t - (n-1)],$$

bunda $t=(x-x_0)/h$. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga asosan:

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{dP_n}{dx} \frac{dx}{dt} \quad \text{b} \quad \text{y} \quad \text{n} \quad \text{d} \quad \frac{dP_n}{dt} = f'(x), \quad \frac{dx}{dt} = h \quad \text{b} \quad \text{y} \quad \text{n} \quad \text{d} \quad a$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \frac{dP_n}{dt}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \frac{d^2 P_n}{dt^2}$$

umuman

$$f^{(k)}(x) \approx \frac{1}{h^k} \frac{d^k P_n}{dt^k}$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} (2t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} (3t^2 - 6t + 2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} (2t^3 - 9t^2 + 11 - 3) + \dots$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} (6t^2 - 18t + 11) + \dots$$

2. Тейлор формуласидан фойдаланиш.

Фараз қилайлик, функция формулаларда мавжуд узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Бунинг учун $f(x) \in C^p[a; b]$, $p \leq 4$, бўлиши биз учун етарли.

Аввало, $f(x) \in C^2[a; b]$ дейлик. Тейлор формуласига асосан,

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm hf'(x_i) + h^2/12 f''(\xi_i)$$

Бу ердан

$$\pm f'(x_i) = \frac{f(x_i \pm h) - f(x_i)}{h} - \frac{1}{12} f''(\xi_i)h.$$

Энди $f(x) \in C^n[a; b]$ бўлсин, у ҳолда

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm hf'(x_i) + h^2/2 f''(x_i) \pm h^3/3! f'''(x_i) \pm h^4/4! f^{IV}(\xi_i)$$

бу тенгликларни қўшиб

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left[\frac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{2} \right]$$

формулага келамиз. $f^{IV}(x) \in C^4[a; b]$ лигидан

$$f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2) = 2f^{IV}(\xi)$$

тенгликни қаноатлантирувчи ξ нуқта мавжуд. Шу боис

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi)}{12} h^2 = \Lambda_{xx} f(x_i) + O(h^2) \quad (19)$$

(16) формула исбот бўлди.(13),(15) формулалар ҳам қуйидагича умумлаштирилиши мумкин

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x-2h) - 4(x-h) + 3f(x)] + O(h^2) = f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x) + O(h^2),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [-3f(x) + 4(x+h) - f(x+2h)] + O(h^2) = \Lambda_x^l f(x) + O(h^2)$$

Бу формулаларни исботлаймиз:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm f'(x)2h + f''(x)2h^2 + O(h^3) \quad (*)$$

$$4f(x \pm h) = 4f(x) \pm 4f'(x)h + f''(x)2h^2 + O(h^3) \quad (**)$$

(**) дан (*) ни айириб, $f'(x)$ ни топсак исботлашимиз керак бўлган формулалар келиб чиқади.

Яратилган барча формулаларни битта жадвалга ёзамиз:

N÷	ҳосила	Чекли айирмали ҳосила	Шартли белгиси	Қолдиғи
1	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^+ f(x_i)$	$-hf''(\xi)/2$
2	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^- f(x_i)$	$hf''(\xi)/2$
3	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^0 f(x_i)$	$h^2 f'''(\xi)/6$
4	$f'(x_0)$	$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$	$f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x_0)$	$h^2 f'''(\xi)/3$
5	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n)}{2h}$	$f_{x,n} = \Lambda_x^l f(x_n)$	$-h^2 f'''(\xi)/3$
6	$f'(x_i)$	$\frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2}$	$f_{x,i} = \Lambda_{xx} f(x_i)$	$-h^2 f^{IV}(\xi)/12$

Бу тақрибий дифференциалаш формулалари тенгламаларни чекли айирмали схемалар ёрдамида тақрибий ечишда муҳим роль уйнайди.

Мисол 1. $y' = f(x, y), y(a) = y_0, a \leq x \leq b$, Коши масаласини қарайлик. $[a, b]$ кесмада $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, нуқталар тўпламини киритамиз.

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), y(x_0) = y_0, a \leq x \leq b, y'(x_i) = (y(x_{i+1}) - y(x_i)) / (h) + r_h = f(x_i, y(x_i))$$

деб оламиз. Чексиз кичик ҳадларни ташлаб юбориб $y_i \approx y(x_i)$ қийматларни топиш учун Эйлер формуласига келамиз: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n - 1$, берилган. Кўрсатилдики, $y(x_i) - y_i = 0(h)$.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Биринчи тартибли марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
2. Биринчи тартибли чап чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
3. Биринчи тартибли ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
4. Иккинчи тартибли биринчи чап ва ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
5. Иккинчи тартибли марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.

[Мундарижага](#)

СПЛАЙНЛАР БИЛАН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ.

Асосий тушунчалар: Сплайнларнинг таърифлари, чизикли интерполяция сплайни ва унинг қолдиғи, кубик интерполяция сплайни ва унинг аниқловчи тенгламалар системаси.

Асосий натижалар:

1. Сплайнларнинг таърифи:

$$s(x) \in C^{p-k}[a, b], \quad 1 \leq k \leq p; \quad s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}; \quad s(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n.$$

2. Кубик интерполяция сплайни:

$$S(f; x) = \frac{M_i(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right) \frac{x - x_i}{h_i},$$

$$2M_0 + \beta_0 M_1 = d_0, \quad \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha_n M_0 + 2M_1 = d_n$$

3. Кубик сплайн қуриш дастури.

1. Сплайнларнинг таърифи

$[a, b]$ кесма $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ нуқталар

билан бўлақларга бўлинган бўлсин. $p \geq 1$ натурал сон бўлсин.

Таъриф 1. $[a, b]$ да аниқланган даражали k - дефактли сплайн деб ушбу шартларни қаноатлантирувчи функцияга айтилади:

$$1) s(x) \in C^{p-k}[a, b], \quad 1 \leq k \leq p;$$

$$2) \quad s(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + \dots + a_{ki}(x - x_i)^k, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

k - даражали кўпҳад, яъни $s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}$,

Таъриф 2. Агар $s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ бўлса $s(x)$ сплайн $f(x)$ ни интерполяциялайди дейлади ва қуйидагича ёзилади: $s(f, x)$

Агар $p = 2m - 1, m \geq 1, k = 1, \dots$ бўлса сплайн тоқ даражали оддий сплайн дейлади. Бунда сплайннинг эркинлик даражасини (коэффициентлар сонини) аниқлайлик.

Ҳар бир кесма $[x_i, x_{i+1}]$ да $s(f; x)$ $2m-1$ - даражали кўпхад, яъни $A = 2mn$ та коэффициентга эга. Бу коэффициентларга қуйидаги боғланишлар қўйилган:

а) ички $n-1$ та (x_1, \dots, x_{n-1}) нуқталарда $S, S', \dots, S^{(2m-2)}$ ҳосилалар узлуксиз, яъни $(n-1)(2m-1)$ та шарт бор;

б) $(n+1)$ та интерполяция $S(f; x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ шартлар бор, яъни $B = n+1 + (n-1)(2m-1)$ та шартлар бор. Фарқ $A - B = 2m - 2$ га тенг. Бу етишмаган шартлар чегара шартлар сифатида берилади.

1-тур чегара шарти: $f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(x_n), 1 \leq j \leq m-1$ лар берилган, яъни (уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), t=a \text{ ёки } t=b, j=1, \dots, m-1.$$

2-тур чегара шарт: $f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(x_n), m \leq j \leq 2m-2$, лар берилган, яъни (уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), t=a \text{ ёки } t=b, j=m, \dots, 2m-2$$

2'-тур чегара шарт: $f^{(j)}(a), f^{(j)}(b)$ ҳосилалар берилмаган. Шунинг учун $S^{(j)}(f; t) = 0, t=a$ ёки $t=b, j=m, \dots, 2m-2$, (уларнинг сони $A - B = 2m - 2$ га тенг.) деб қабул қилинади. 2'-тур чегара шарт табиий дейилади.

Даврий чегара шарт. Агар интерполяция қилинувчи функция даврий бўлса сплайн ҳам даврий бўлиши керак. Шунинг учун $S^{(j)}(f; t) = f^{(j)}(t), j = 1, \dots, 2m-2$, деб талаб қилинади.

Мисол 1. Чизиқли интерполяция сплайни. ($m=1$). Равшанки, ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ ораликда $S(f; x) = a_i + b_i(x - x_i)$ бўлиб, a_i, b_i коэффициентлар интерполя шартлардан топилади: $S(f; x_i) = f(x_i), S(f; x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ шунинг учун $a_i = f(x_i), b_i = f[x_i, x_{i+1}]$. $h_i = x_{i+1} - x_i$ дэсак,

$$S(f; x) = f(x_i) + (x - x_i)f[x_i, x_{i+1}], x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

бўлади. Равшанки, чизиқли сплайн қолдиғи

$$R(f; x) = f(x) - S(f; x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad (1)$$

ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ учун алоҳида олинади.

(1) формула (11.16) дан келиб чиқади.

Мисол 2. Параболик сплайн. $[a, b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$ нуқталар билан $2n$ бўлакка бўламиз. $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ кесмаларда 2-даражали интерполяция кўпхадни қуриб ушбу функцияни аниқлаймиз:

$$S(f; x) = \{ f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad (2)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 2, \dots, 2n - 2.$$

Уни параболик сплайн деб атаймиз. Қолдиқ ҳад қуйидагича бўлади:

$$R(f; x) = f(x) - S(f; x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})$$

2. Кубик интерполяция сплайни .

$m=2, k=1$ дэсак,

$$S(f; x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

формулага эгамиз.

Равшанки, $S''(x)$ - чизикли функция, шунинг учун $S''(x_i) = M_i$ дэсак

$$S''(x) = S''_{3,i}(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, x \in [x_i; x_{i+1}],$$

формулага келамиз. Бу ердан, равшанки,

$$S(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \alpha_i(x_{i+1} - x) + \beta_i(x - x_i), \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

Аввало,

$$S(x_i) = f(x_i), \quad S(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \quad \text{эканлигидан}$$

$$\alpha_i = \frac{f_i}{h_i} - \frac{M_i h_i^2}{6}, \quad \beta_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}$$

Шунинг учун,

$$S(f; x) = \frac{M_i(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^3}{6h_i} + (f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + (f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (3)$$

Бу ердан 1-ҳосилани топамиз: (3) дан $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ учун

$$S'(f; x) = -\frac{M_i(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + \frac{M_{i+1}(x - x_i)^2}{2h_i} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{(M_{i+1} - M_i)h_i}{6}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad (4)$$

(4) дан бир томонлама ҳосилаларни x_1, \dots, x_{n-1} нуқталарда топамиз:

$$S'(f; x_i - 0) = \frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad S'(f; x_i + 0) = -\frac{h_i}{6} M_i - \frac{h_i}{3} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$$

Шарт бўйича S', S'' лар узлуксиз. $S'(f; x)$ нинг x_1, \dots, x_{n-1} нуқталардаги ҳосилаларни тенглаштириб ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

ёки

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

бу ерда

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$

$$d_i = 6 \frac{f[x_i; x_{i+1}] - f[x_{i-1}; x_i]}{h_{i-1} + h_i} = 6f[x_{i-1}; x_i; x_{i+1}].$$

Кубик интерполяция сплайнини тўла топиш учун (5) системага яна 2 та чегара шарт қўйиш керак.

$$1\text{-тур чегара шарт: } S'(f; a) = f'_0, \quad S'(f; b) = f'_n$$

(4) дан қуйидагиларни топамиз:

$$S'(f; x_0 + 0) = -\frac{h_0 M_0}{3} + \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{M_1 h_0}{6} = f'_0$$

$$S'(f; x_n - 0) = \frac{h_{n-1} M_{n-1}}{6} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} = f'_n$$

Шунинг учун чегара шартларнинг кўринишлари

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0' \right), M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_0} \left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

шаклда бўлади, шундай қилиб биз

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= \frac{6}{h_0} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0' \right), \\ \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \alpha_i M_{i+1} &= d_i, i = 1, \dots, n-1, \\ M_{n-1} + 2M_n &= \frac{6}{h_0} \left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

системага келамиз. Бу системадан M_i лар топилгач кубик сплайн қиймати (3) формула асосида ҳисобланади.

2-тур чегара шарт.

$$S''(f, a) = M_0, S''(f, b) = M_n,$$

У ҳолда фақат (4) ечилади, ёки

$$\begin{aligned} 2M_1 + \beta_1 M_2 &= d_1 - \alpha_1 M_0 \\ \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} &= d_i, i = 2, \dots, n-2, \\ \alpha_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} &= d_{n-1} - \beta_{n-1} M_n \end{aligned} \quad (7)$$

Яна, M_0, \dots, M_n лардан фойдаланиб $S(f; x)$ нинг қиймати (3) формула билан ҳисобланиши мумкин.

2'- тур чегара шарт. $M_0 = M_n = 0$. Бу (7) нинг хусусий ҳоли.

3-Мавзу: Яқинлашиш масаласи. Ўртача квадратик яқинлашиш.

Ажратилган соат - 2 соат

Машгулот тури - маъруза

Дарс режаси (асосий саволлар)

1. Интерполяцион жараеннинг яқинлашиши
2. Интерполяцион жараеннинг текис яқинлашиши

Мавзудаги асосий таянч тушунчалар: Қолдиқ ҳадни баҳолаш, интерполяцион жараеннинг яқинлашиши, интерполяцион жараеннинг текис яқинлашиши, бутун функция.

1-асосий савол

1. Интерполяцион жараеннинг яқинлашиши.

Ўқитувчининг мақсади: Интерполяцион жараенлари қандай натижаларга олиб келиши тўғрисида талабаларда тушунча ҳосил қилиш ҳамда интерполяцион жараенларда талабалар нималарга эътибор бериш кераклигини уларга сингдириш

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

- 1.1. Интерполяцион жараенларни фарқлаш.
- 1.2. Интерполяцион жараенларни сузлаб бериш ва қўллай билиш

1-чи асосий савол баени.

Интерполяция амалда қўлланилганда хар доим ҳам қолдик ҳад-ни баҳолаш мумкин бўлавермайди. Шунинг учун ҳам етарлича тугунлар олинганда интерполяцион кўпҳаднинг интерполяцияланувчи функцияга етарлича яхши якинлашишига ишонч ҳосил килиш амалий интерполяциялашда катта аҳамиятга эга.

Шу сабабли ҳам интерполяцион жареннинг якинлашиши масаласи тугилади. Фараз қилайлик бизга элементлари $[a,b]$ да этувчи чексиз учбурчакли матрица берилган бўлсин.

$$\begin{bmatrix} x_0^{(0)} \\ x_0^{(1)} x_1^{(1)} \\ x_0^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} \\ \dots \\ x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} \dots x_n^{(n)} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (1)$$

$[a,b]$ ораликда аниқланган бирор $f(x)$ функция учун Лагранж интерполяцион кўпҳадининг кетма-кетлиги $\{L_n(x)\}$ берилган бўлиб, $L_n(x)$ ни куришда

(1) - матрицанинг n - сатридаги барча элементлар қатнашсин. Агар ихтиерий
(2) $X [a,b]$ учун $\lim L_n(x) = f(x)$ (2) тенглик бажарилса интерполяцион

жараен якинлашади дейилади. Агар (2) тенглик X га нисбатан текис бажарилса, жараен текс якинлашади дейилади.

$[a,b]$ ораликда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун информатсион жараен якинлашадими деган савол тугилади .

Бу саволга ижобий жавоб бериб бўлмайди.

Кўйидаги теорема исбот килинган: Хар қандай (1) кўринишдаги тугунлар матрицаси учун шундай $f(x)$ узлуксиз функция топиладики, унинг учун бу тугунлар бўйича курилган Лагранж интерполяцион кўпҳади $[a,b]$ ораликда бу функцияга якинлашмайди. Бундан ҳам кучлирок натижани $[-1,1]$ ораликда тенг узокликда жойлашган тугунлар $x_0^{(n)} = -1, x_n^{(n)} = 1$ бўйича $f(x) = |x|$ функция учун

курилган Лагранж интерполяцион кўпҳадлари $-1, 0, 1$ нуқталардан ташкари бирорта нуқта ҳам $f(x)$ га якинлашмаслиги кўрсатилган.

Назорат топшириқлари.

- 1.1.1. Қолдик ҳад нима?
- 1.1.2. Қолдик ҳад қандай баҳоланади?
- 1.1.3. Учбурчакли матрица кўринишини айтинг
- 1.1.4. Интерполяцион жараеннинг якинлашиши масаласини тушунтириб беринг
- 1.1.5. Интерполяцион жараеннинг якинлашмаслигига мисол келтиринг
- 1.2.1. Интерполяцион жараеннинг якинлашиши таърифини айтиб беринг
- 1.2.2. Текис якинлашишни оддий якинлашишдан фарқлаб беринг
- 1.2.3. Интерполяцион жараенларнинг якинлашиши хар доим ижобий жа-

воб бериши мумкинми?

1.2.4. $[-1;1]$ ораликда узлуксиз функциялар учун курилган Лагранж интерполяцион кўпҳади хар доим якинлашувчи бўладими?

2-асосий савол.

Интерполяцион жараеннинг текис якинлашиши.

Ўқитувчининг мақсади:Интерполяцион жараёнда якилашиш тушунчасини талабаларга чуқуррок тушунтириш,оддий якинлашиш билан текис якинлашишни тушунтириш ва зарур ҳолларда уларни жараенларни ўрганишга тадбиқ эта билишни ўргатиш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

2.1. Интерполяцион жараенни оддий ва текис якинлашишларини фарқлаш

2.2. Қандай шартлар бажарилганда интерполяцион жараеннинг якинлашишини билиш.

2-чи асосий савол баени.

Таъриф:

$f(x)$ функцияни X нинг барча чекли қийматларида $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

якинлашувчи даражали катор шаклида ифодалаш мумкин бўлса у ҳолда $f(x)$ бутун функция дейилади.

Теорема: Фараз қилайлик, $f(x)$ функция бутун функция бўлсин. У ҳолда элементлари $[a,b]$ ораликда этувчи (1) кўринишдаги ихтиерий учбурчак матрица бўйича $f(x)$ учун тузилган Лагранж интерполяцион кўпҳади $L_n(x)$ $[a,b]$ ораликда $f(x)$ функцияга текис якинлашади.

Исбот. Бутун функция ихтиерий тартибли ҳосилага эга бўлганлиги туфайли, интерполицион формуланинг қолдиқ ҳади учун қўйидаги баҳога эга бўламиз.

$$|R_k(x)| = \left| f(x) - L_n(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |W_{n+1}(x)|$$

Бу ерда

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|, W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Бундан

$$|W_{n+1}(x)| < (b-a)^{n+1} \quad \text{ни ёзишимиз мумкин. Демак} \quad |R_k(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Агар бу тенгсизликнинг унг томонининг нолга интилишини кўрсатсак, теорема исбот бўлади. $f(x)$ нинг $(n+1)$ тартибли ҳосиласини топиб, баҳолаймиз

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n) a_k (x-x_0)^{n-k-1}$$

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n) |a_k| \left\| x-x_0 \right\|^{n-k-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (n+1)^{n+1} |a_{n+k}| \left\| x-x_0 \right\|^{k-1}$$

$x > 0$ бунда $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x$ бўлади,

бундан

$$\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}$$

Демак
$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| (l|x-x_0|)^{k-1}$$

Энди L ихтиерий мусбат, лекин муайян сон бўлсин. Охирги тенгсизликнинг хар иккала томонини L^{n+1} га кўпайтирамиз:

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| L^{n+1} (l|x-x_0|)^{n-1}$$

Агар R орқали L ва ток $(e|X-X_0|)$ сонларнинг энг каттасини белгиласак, у ҳолда

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

Бу тенгсизлик барча $x \in C[a,b]$ учун ўринлидир.

Демак

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \quad (3)$$

$f(x)$ бўлганлиги учун $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ катор яқинлашади ва унинг

қолдиқ хади $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$ билан биргаликда

$$M_{n+1} L^{n+1} (n+1)^{-n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

e^x нинг ейилмаси

$$e^{n+1} = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2!} + \frac{(n+1)^3}{3!} + \dots + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \quad \text{дан} \quad e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{келиб}$$

чиқади. Демак

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} (b-a)^{n+1} < \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} [e \cdot (b-a)]^{n+1} \quad \text{энди } L = E(b-a) \text{ деб}$$

олиб,

$$(2) \text{ ва } (4) \text{ дан} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = 0 \quad \text{Т.ис.б.}$$

Назорат топшириқлари .

2.1.1. Интерполяцион жараеннинг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремани айтинг

2.1.2. Функционал кетма-кетликларнинг $[a,b]$ ораликда оддий ва текис яқинлашишини эсланг

2.1.3.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{кетма-кетлик лимитини эсланг}$$

2.1.4. Даражали каторларни яқинлашишини такрорланг

2.2.1. Баҳолашларни тушунтириб беринг

2.2.2. e^x ейилмасини айтиб беринг

2.2.3. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ каторни яқинлашишини тушунтиринг

Фойдаланиладиган адабиетлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.
3. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

Функцияларнинг яқинлашиши

1. Ўрта квадратик яқинлашиш
2. Функционал фазоларда яқинлашишлар

Мавзудаги асосий таянч тушунчалар: Чизикли эрки функциялар системаси, умумлашган кўпхад, ўртача квадратик оғиш, энг кичик квадратлар усули, вазн функцияси, функцияларни максималлаштириш, Гилберт фазосида яқинлашиш.

1-асосий савол
Ўртача квадратик яқинлашиш

Ўқитувчининг мақсади: Чизикли эрки функциялар системасини талабаларга эслатиш, умумлашган кўпхадларни ургатиш, ўртача квадратик яқинлашишни талабаларга ургатиш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

1. Ўртача квадратик яқинлашишни ўрганиш ва қўллай билиш
2. Умумлашган кўпхадлар системасини ўрганиш ва бошқа функционал фазоларга яқинлашишини билиш

1-чи асосий савол баени

Масаланинг қўйилиши.

Фараз қилайлик, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$

етарлича силлик ва ҳисоблаш учун қулай бўлган чизикли эрки функциялар системаси бўлсин. Бу функциялардан тузилган

$$P_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) \quad (1)$$

чизикли комбинация умумлашган кўпхад дейилади.

Функциялар учун ўрта квадратик маънода яқинлашиш масаласини қўйяйлик. [a, b] ораликда аниқланган f(x) функция учун (1) кўринишдаги яқинлашувчи шундай Pm(X) кўпхад топилсинки,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (2)$$

ифода мумкин қадар энг кичик қийматни кабул килсин.

Агар (2) интеграл кичик қиймат кабул килса, шуни билдирадики, $[a, b]$ оралик кўп қисмида $f(x)$ ва $P_m(x)$ бир-бирига якин. Шунга қарамасдан айрим нуқталар атрофида еки бу ораликнинг баъзи кичик қисимларида $f(x) - P_m(x)$ айирма нисбатан етарлича катта бўлиши ҳам мумкин.

Қўйидаги

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx} \quad (3)$$

микдор $P_m(x)$ нинг

$f(x)$ дан ўртача квадратик оғиши дейилади, ва $f(x)$ ни $P_m(x)$ билан яқинлашишда қўй квадратик маънодаги хатони билдиради.

Агар $f(x)$ ни ўрта квадратик маънода $P_m(x)$ билан яқинлаштиришда бирор сабабга кура қаралаётган ораликнинг бирор қисмида унинг бошқа қисмига нисбатан аниқроқ яқинлаштириш керак бўлса, у ҳолда вазн деб аталувчи махсус равишда танлаб олинган манфий бўлмаган $\rho(x)$ функцияни олиб

(2) урнига ушбу

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

интегралнинг энг кичик қиймат кабул килиши талаб килинади. Бу ерда шундай танланган бўлиши керакки, агар ораликнинг бирор X нуқтаси атрофига яқинлашиш аниқлиги бошқа нуқталарга нисбатан яхшироқ бўлиши талаб килинса,

$\rho(x)$ шу нуқталар атрофида каттарок қийматга эга бўлиши керак.

Агар $f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши урнига, унинг факат $(n+1)$ та X_0, X_1, \dots, X_n нуқталардаги қийматларигина маълум бўлса, у ҳолда (2) интеграл урнига

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (4)$$

йигиндисининг мумкин қадар кичик қиймат кабул килишлиги талаб килинади. Бу ҳолда

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2}$$

микдор ўрта квадратик оғиш дейилади. Ўрта квадратик яқинлаштириш усули энг кичик квадратлар усули ҳам дейилади.

Агар $f(x_i)$ ларнинг аниқлиги бир хил бўлмаса, у ҳолда биз аниқлиги катта бўлган қийматларга каттарок "вазн" беришимиз керак. Бунинг учун X_i нуқталардаги вазн деб аталувчи махсус танланган $\rho_i > 0$

сонларни олиб (4) урнига

$$\sum_{i=0}^n \rho_i [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (5)$$

вазний йигиндисини минималлаштиришимиз керак.

Бу вазнлар шундай танланадики, унинг йигиндиси 1 га тенг бўлиши керак.

$$\sum_{i=0}^n \rho_i = 1$$

Агар (3) билан аниқланган ўрта кв.огиш кичик бўлса, $[a,b]$ ораликнинг аксарият нуқталарида $|f(x)-P(x)|$ айирма қиймати кичик бўлади. Лекин шунга қарамадан айрим кичик ораликчаларда бу миқдор катта бўлиши ҳам мумкин.

$[a,b]$ ораликнинг барча нуқталарида $f(x)$ нинг $P(x)$ дан огиши берилган миқдордан кичик бўлиши талаб қилинади. Биз $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз ва $P(x)$ алгебраик кўпхад ҳолни курамиз.

Фараз қилайлик $H_n(P)$ даражаси n дан ортмайдиган

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

алгебраик кўпхадларнинг

туплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ ораликда узлуксиз ва $P_n(x) \in H_n(p)$

бўлса, у ҳолда $f(x) = P(x)$ дан $[a,b]$ ораликка огишини

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad \text{ни} \quad E_n(f, p_n)$$

орқали белгилаймиз. Бу миқдор $P_n(x)$ кўпхад коэффицентлари a_0, a_1, \dots, a_n нинг функцияси бўлиб, у манфий эмас ҳамда бу миқдор манфий бўлмаган аниқ кўйи чегарага эга бўлади:

$$E_n(f) = \inf P_n, E_n(f, p_n)$$

$$P_n \in H_n(P)$$

Агар шундай $P_n^*(x)$ кўпхад мавжуд бўлиб, $E_n(f, P_n^*) = E_n(f)$

тенглик бажарилса, у ҳолда $P_n^*(x)$ кўпхад энг яхши текис яқинлашувчи кўпхад ва $E_n(x)$ энг кичик огиш еки f нинг n - даражали кўпхад билан энг яхши яқинлашиши дейилади.

Назорат топшириқлари.

- 1.1.1. Эркли функция системасини тушунтириб беринг
- 1.1.2. Умумлашган кўпхад деб нимага айтилади?
- 1.1.3. Ўрта квадратик яқинлашишни тушунтиринг
- 1.1.4. (3) формулани тушунтириб беринг
- 1.1.5. Вазн функцияси нима?
- 1.2.1. Функционал фазони таърифни эсланг
- 1.2.2. Функционал фазода яқинлашиш деганда нимани тушунасиз
- 1.2.3. Ўртача квадратик огиш деб нимага айтилади.
- 1.2.4. Энг кичик квадратлар усули нима?
- 1.2.5. Вазний йигиндини минималлаштириш деганда нимани тушунасиз

Функционал фазоларда якинлашиш

Ўқитувчининг мақсади: Талабаларга функционал фазоларда якинлашишни эслатиш, Гилберт фазосида якинлашишни такрорлаш ва қўллай билишни талабаларга ургатиш. Функцияларни минималлаштиришни такрорлаш ва қўллаш.

Идентив ўқув мақсадлари (талабаларнинг ўқув мақсадлари)

1. Функционал фазоларда якинлашишни билиш ва чуқурлаштириш
2. Гилберт фазосида якинлашишни билиш ва конкрет мисолларда урганиш

2-чи асосий савол баени

Назорат топшириқлари

- 2.1.1. Функционал фазоларда якинлашишни эсланг
- 2.1.2. Норма таърифни айтинг
- 2.1.3. Функцияни бирор система орқали ейилмасини ёзинг
- 2.1.4. Функцияни минималлаштириш деганда нимани тушунасиз
- 2.2.1. Гилберт фазосини таърифни айтинг
- 2.2.2. Гилберт фазосида якинлашишни тушунтиринг
- 2.2.3. Мусбат аниқланган матрица деб қандай матрицага айтилади?
- 2.2.4. Скаляр кўпайтма деб нимага айтилади?

Фойдаланиладиган адабиётлар:

1. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. Тошкент. Ўқитувчи: 1988 й.
2. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Москва. 1990.
3. Берёзин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. 1962.
4. Абдухамидов А., Худойназаров С., Ҳисоблаш усулларида машқлар ва лаборатория ишлари. Тошкент. 1995.

4-МАВЗУ. Тақрибий интеграллаш. Алгебраик аниқлиги энг юқори квадратур формула. Каррали интегралларни тақрибий ҳисоблаш усуллари.

Режа:

1. Масаланинг қўйилиши.
2. Аниқ интегралнинг геометрик маъноси.
3. Тўғри тўртбурчак ва трапеция усуллари.

4. Усулларнинг ишчи алгоритмлари, уларнинг хатоликлари миқдорини баҳолаш ва уни камайтириш йўллари.

Таянч иборалар:

Бошлангич функция, элементар функция, интеграл, аниқ интеграл, аниқмас интеграл, квадратур, квадратур формула, тўғри туртбурчак формуласи, трапеция формуласи, егри чизикли трапеция, егри чизикли трапеция юзи, аниқ ечим, бўлиниш нуқталари.

1. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Кундалик ҳаётимизда учрайдиган кўп муҳандислик масалаларини ечишда аниқ интегралларни ҳисоблашга тўғри келади. Фараз қилайлик, $\int_a^b f(x)dx$ ҳисоблаш талаб этилсин. Бу ерда $f(x)$ - $[a; b]$ кесмада берилган узлуксиз функция. Бу интегрални ҳисоблашда қуйидаги формула (Ньютон—Лейбниц формуласи) қўллаилади:

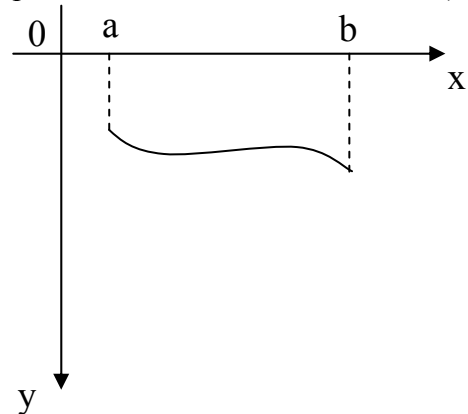
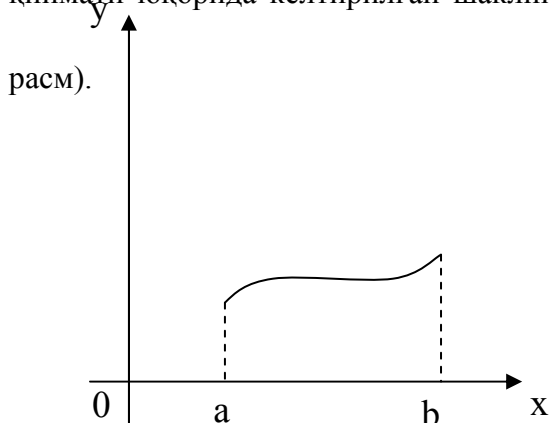
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

бу ерда $F(x)$ – бошлангич функция. Агар бошлангич функция $F(x)$ ни элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмаса ёки интеграл остидаги функция $f(x)$ жадвал кўринишида берилса, у ҳолда (5.1) формуладан фойдаланиш мумкин эмас. Бу ҳолда аниқ интегрални тақрибий формулалар орқали ҳисоблашга тўғри келади. Бундай формулаларга *квадратур формулалар* дейилади.

2. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Бундай формулаларни келтириб чиқариш учун аниқ интегралнинг геометрик маъносини билмоклик лозим.

Агар $[a; b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ нинг қиймати сон жихатидан $y = f(x)$ функцияни графиги ҳамда $x=a$, $x=b$, тўғри чизиклар билан чегараланган шакл (фигура) нинг юзига тенг (11-расм). Агар $[a; b]$ кесмада $f(x) < 0$ бўлса, интегралнинг қиймати юқорида келтирилган шаклнинг тескари ишора билан олинган юзига тенг (12-расм).



Шундай килиб аниқ интегрални ҳисоблаш деганда бирор шаклнинг юзини ҳисоблаш тушунилади. Қуйида аниқ интегрални ҳисоблаш учун баъзи тақрибий формулалар билан танишиб чиқамиз.

3. ТЎҒРИ ТУРТБУРЧАКЛАР ВА ТРАПЕТСИЯЛАР ФОРМУЛАСИ

Фараз қилайлик, биздан $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини топиш талаб этилсин. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталар ёрдамида $[a; b]$ кесмани n та тенг бўлакчаларга бўламиз. Ҳар бир бўлакчанинг узунлиги $h = \frac{b-a}{n}$. Бўлиниш нуқталари эса:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = a + 2h; \quad x_3 = a + 3h \dots x_{n-1} = a + (n-1)h; \quad x_n = b$$

Бу нуқталарни тугун нуқталар деб атаймиз. $f(x)$ функциянинг тугун нуқталаридаги қийматлари $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ бўлсин. Бўлар $y_0 = f(a); y_1 = f(x_1) \dots y_n = f(b)$ ларга тенг бўлади.

Егри чизиқли трапециянинг юзини топиш учун $[a, b]$ кесмани бўлиш натижасида ҳосил бўлган барча туртбурчакларнинг юзини ҳисоблаб, уларни жамлаш керак бўлади. Албатта бу юзачаларни ҳисоблашларда маълум даражада хатоликларга йўл қўйилади (штрихланган юзачалар). Бўларни ва 5.1-да айtilган аниқ интегралнинг геометрик маъносини ҳисобга олсак, қуйидагини ёзишимиз мумкин бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0 + hy_1 + hy_2 + \dots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} y_k \quad (5.2)$$

Бу ерда тўғри туртбурчак юзини ҳисоблашда унинг чап томон ординатаси олинди. Агар уннг томон ординатами олсак ҳам шундай формулага эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) = h \sum_{k=1}^n y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{k=1}^n y_k \quad (5.3)$$

(5.2) ва (5.3) ларни мое равишда *чап* ва *унг формулалар* дейилади. Агар 13- расмга эътибор берсак, (5.2) формула билан интегралнинг қиймати ҳисобланганда интегралнинг тақрибий қиймати аниқ қийматидан маълум даражада камроқ чиқади, (5.3) ёрдамида ҳисобланганда эса тақрибий қиймат аниқ қийматдан маълум даражада каттарок чиқади. Яъни (5.2) ва (5.3) формулалар ёрдамида аниқ интегралнинг тақрибий қиймати ҳисобланганда бу формулалардан бири интегралнинг аниқ қийматини ками билан ифодаласа, иккинчиси эса кўпи билан ифодалайди. 13- расмдан кўринадики, (5.2) ва (5.3) формулаларни қўллаганда йўл қўйиладиган хатоликни камайтириш учун бўлиниш нукталарини иложи борича кўпроқ олиш, яъни кадам h ни тобора кичрайтириш лозим бўлади. Албатта, h ни кичрайтириш ҳисоблаш жараёнининг кескин ўсишига олиб келади. Бу нарсадан хавотирга тушмаслигимиз керак, чунки бутун ҳисоблаш жараёни ЭҶМ га юкланади.

Мисол. Тўғри туртбурчаклар формулалари (5.2) ва (5.3) ёрдамида $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ интегралнинг

тақрибий қийматлари топилсин.

Е ч и ш . Бу ерда $a=0$; $b=1$; $n=10$; $h=(b-a)/n=0,1$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$x_0=a=0; \quad x_1=a+h=0,1; \quad x_2=a+2h=0,2; \quad x_3=a+3h=0,3$$

$$x_4=a+4h=0,4 \dots x_9=a+9h=0,9; \quad x_{10}=b=1$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1; \quad y_1 = f(x_1) = \frac{1}{1+0,1} = 0,909;$$

$$y_2 = f(x_2) = 0,833; \quad y_3 = f(x_3) = 0,769; \dots y_9 = f(x_9) = 0,53; \quad y_{10} = f(x_{10}) = 0,5.$$

$$(5.2) \text{ дан } \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(1 + 0,909 + \dots + 0,526) = 0,718$$

$$(5.3) \text{ дан } \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(0,909 + 0,833 + \dots + 0,5) = 0,6688$$

Маълумки, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$, $\ln 2 \approx 0,693$. Бўлардан кўринадики, аниқ ечим чап ва унғ

формулалар орқали топилган ечимлар орасида ётади.

Топилган ечимлар 0,718 ва 0,668 нинг ўрта арифметигини олсак, бу 0,693 га тенг бўлади, бу эса аниқ ечим билан устма-уст тушади.

Бу хулосаларни назарга олган ҳолда (5.2) ва (5.3) формулалар ҳад-ларини мос равишда кушиб ўрта арифметигини олсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) = h \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2} \right) \quad (5.4)$$

(5.4) формула *трапециялар формуласи* деб аталади. Бу формула ёрдамида топилган интегралнинг тақрибии қийматининг аниқлигини ошириш учун бўлиниш нукталари сони

н» ни икки, уч ва х.к. марта ошириш керак бўлади. Албатта бунда ҳам ҳисоблаш хажми бир неча мартаба ошади.

4. УСУЛЛАРНИНГ ИШЧИ АЛГОРИТМЛАРИ, УЛАРНИНГ ХАТОЛИКЛАРИ МИҚДОРINI БАҲОЛАШ ВА УНИ КАМАЙТИРИШ ЙЎЛЛАРИ

Фараз қилайлик, $\int_a^b f(x)dx$ интегралнинг аниқ қиймати I бўлсин. У ҳолда

$$I = I_m + P, \quad (5.12)$$

бу ерда I_m – трапециялар формуласи ёки Симпсон формуласи ёрдамида интегрални ҳисоблаганда чиққан натижа; P – шу формулаларни қўллаганда йўл қўйилга хатолик. Агар интеграл остидаги $f(x)$ функция аналитик (формула) кўринишда бўлса, интегралларни тақрибий ҳисоблаш хатолигини ифодаловчи формулаларни математик анализ усуллари билан келтириб чиқариш мумкир. Агар интеграл остидаги функция жадвал ёки график кўринишда бўлса, бундай формулаларни келтириб чиқаришнинг иложи бўлмайди. Шунинг учун бу ҳолда бошқа усуллар қўллашга тўғри келади. Шулардан баъзи бирларини куриб чиқамиз.

Ўқувчига ортикча кийинчиликлар тугдирмаслик ҳамда кискалик учун формулаларни келтириб чиқаришни (исботлашни) лозим кур-мадик. Юқорида айтилганидек, бўлар ҳаммаси математик анализ усуллари ёрдамида исботланади.

Фараз қилайлик $\int_a^b f(x)dx$ интегрални $n=2m$ та ва $n=4m$ та бўлакчаларга бўлиб,

Симпсон формуласини қўллаб олинган натижалар I_{2m} ва I_{4m} бўлсин. I_{2m} нинг қийматини I_{4m} билан солиштириб Симпсон формуласининг аниқлиги ҳақида мулоҳаза юритиш мумкин. Бунда I_{2m} нинг хатолиги қуйидаги сондан катта бўлмайди:

$$R_{4m} \leq \frac{|I_{4m} - I_{2m}|}{15} \quad (5.13)$$

$[a, b]$ кесмада $M_k = \max f^{(k)}(x)$. (5.12) дан $P-I-I_m$. Бу ҳолда хатолик-лар қуйидагича баҳоланади:

Трапециялар формуласи учун

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \quad (5.14)$$

Симпсон формуласи учун

$$|R| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180(2m)^4}; \quad (M_4 = f^{(IV)}(x)) \quad (5.15)$$

Мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ интегрални трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида

ҳисоблаганда йўл қўйиладиган хатоликлар топилсин.

Е ч и ш .

$$f(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}; \quad f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(x+1)^5} \quad [0,1] \quad \text{кесмада} \quad |f''(x)| \leq 2;$$

$$|\phi^{(IV)}(x)| \leq 24.$$

$n=8$ да (5.14) дан трапециялар формуласи учун:

$$|R| \leq \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0,003;$$

(5.15) дан Симпсон формуласи учун:

$$|R| \leq \frac{24}{180 \cdot 8^2} = \frac{1}{30720} < 0,000034;$$

Такрорлаш учун саволлар:

1. Ньютон-Лейбниц формуласини ифодаланг.
2. Ньютон-Лейбниц формуласи канаканги интегралларни ҳисоблашда қўлланилади?
3. Квадратур формулалар деб нимага айтилади?
4. Аниқ интегралнинг геометрик маъносини тушунтиринг.
5. Тугун нуқталар нима?
6. Ихтиёрий егри чизиқли трапецияни чизинг.
7. Егри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
8. Чап формулани ёзинг.
9. Унғ формулани ёзинг.
10. Трапециялар формуласини ёзинг.

СИМПСОН (ПАРАБОЛА) УСУЛИ

Режа:

1. Симпсон (парабола) усули.
2. Усулнинг ишчи алгоритми, унинг хатолиги миқдорини баҳолаш.

Таянч иборалар:

Элементар функция, интеграл, аниқ интеграл, аниқмас интеграл, квадратур, егри чизиқли трапеция, егри чизиқли трапеция юзи, аниқ ечим, бўлиниш нуқталари, Симпсон формуласи.

1. СИМПСОН (ПАРАБОЛА) УСУЛИ

Симпсон формуласи юқорида келтириб чиқарилган формулаларга караганда аниқлиги юқори бўлган формула ҳисобланади. Бу формулада интегралнинг қийматини

юкори аниқликда олиш учун бўлиниш кадамларини тобора ошириш талаб этилмайди. $[a, b]$ кесмани $a=x_0 < x_1 < x_2 \dots x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар билан $n=2$ та жуфт тенг бўлакчаларга ажратамиз. $y = \phi(x)$ егри чизиққа тегишли бўлган (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) нуқталар орқали парабола ўтказамиз. Бизга маълумки, бу параболанинг тенгламаси

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (5.5)$$

бўлади, бу ерда A, B, C — ҳозирча номаълум бўлган коэффициентлар. $[x_0, x_2]$ кесмадаги егри чизиқли трапециянинг юзини шу кесмадаги парабола билан чегараланган егри чизиқли трапециянинг юзи билан алмаштирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[A \frac{x^3}{3} + Cx + B \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^{x_2} = A \frac{x_2^3 - x_0^3}{3} + B \frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + C(x_2 - x_0)$$

$(x_2 - x_0)$ ни қавсдан ташқарига чиқариб, умумий махраж-га келтирсак:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6} \left[2A(x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2) + 3B(x_0 + x_2) + 6C \right] \quad (5.6)$$

(5.5) даги номаълум A, B, C коэффициентлар қуйидагича топилади: x нинг x_0, x_1, x_2 қийматларида $\phi(x)$ нинг қийматлари y_0, y_1, y_2 эканини ва $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ ж а м и н и ҳисобга олсак, (5.5) дан:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C, \\ y_1 &= A \left(\frac{x_0 + x_2}{3} \right)^2 + B \frac{x_0 + x_2}{2} + C, \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

(5.7) нинг иккинчи ифодасини туртга кўпайтириб, учала тенгликни бир-бирига қўшсак:

$$\begin{aligned} y_0 + 4y_1 + y_2 &= A \left[x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2 \right] + B \left[x_0 + 2(x_0 + x_2) + x_2 \right] + 6C = \\ &= 2A \left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2 \right] + 3B(x_0 + x_2) + 6C \end{aligned} \quad (5.8)$$

Бу ифодани (5.6) билан солиштирсак, бўларнинг унғ тарафлари бир хил эканлигини кўрамиз. (5.8) ни (5.6) нинг унғ тарафига қўйсак ва $x_2 - x_0 = 2h$ $[x = (b - a)/n]$ эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тақрибий тенгликни топамиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (5.9)$$

Худди шундай формулани $[x_2, x_4]$ кесма учун ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) \quad (5.10)$$

Бу формулаларни бутун кесма $[a, b]$ учун келтириб чиқариб, бир-бирига қўшсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (5.11)$$

Бу топилган формула *Симпсон формуласидир*. Баъзи ҳолларда уни *параболалар формуласи* деб ҳам атайдилар.

(5.11) ни еслаб қолиш унчалик кийин эмас; ток рақамли ординаталар туртга, жуфт рақамли ординаталар (икки чеккадаги ординатадан ташқари) иккита кўпайтирилади. Чеккадаги ординаталар y_0, y_{2m} эса бирга кўпайтирилади.

2. УСУЛНИНГ ИШЧИ АЛГОРИТМИ, УНИНГ ХАТОЛИГИ МИҚДОРINI БАҲОЛАШ

Мисол. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегралнинг қийматини трапециялар формуласи ҳамда

Симпсон формуласи ёрдамида топинг.

Е ч и ш : Бу ерда $0 \leq x \leq 1$; $n=10$; $a=0$; $b=1$; $h=(b-a)/n=0,1$; $f(x) = y = \frac{1}{1+x^2}$. Қуйидаги

5.1-жадвални тўзамиз

5.1-жадвал

x	x ²	1+x ²	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	x	x ²	1+x ²	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Трапециялар формуласига асосан

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_9 \right) = 0,1 \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,9900990 + \dots + 0,5524862 \right) = 0,7849815$$

Симпсон формуласига асосан

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}) = \frac{0,1}{3} [1 + 0,5 + 4(0,9900990 + 0,9174312 + \dots + 0,5524862) + 2(0,9615385 + \dots + 0,6097561)] = 0,7853981$$

Бизга маълумки, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,78539816$

Бўлардан кўринадики, бу мисол учун трапециялар формуласи қўлланганда нисбий хатолик 0,06 % да ошмайди. Симпсон формуласи қўлланганда эса нисбий хатолик деярли йўқ.

Такрорлаш учун саволлар:

1. Симпсон формуласини ифодаланг.
2. Симпсон формуласи яна қандай номланади?
3. Интегралларни ҳисоблашда йўл қўйилган хатоликлар қандай топилади?
4. Трапеция ва Симпсон усулларининг асосий фарқи нимада?
5. Симпсон усули моҳиятини тушунтиринг.

ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ (квадратура) ФОРМУЛАЛАРИ

Асосий тушунчалар: Тақрибий интеграллаш формулалари, Ньютон - Котес формулалари ва уларнинг қолдиқлари, Трапеция формуласи, Симпсон формуласи
Асосий натижалар:

1. Ньютон - Котес формулалари $J_h^{NK}(f) = J(L_n(f; x)) = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i$.

1. Ньютон-Котес формулалари $J_h^{NK}(f)$.

$J(f) = \text{int}(f, a, b)$ интегрални ҳисоблаш учун Ланграз интерполяция формуласидан фойдаланамиз:

$$J_h^{NK}(f) = J(L_n(f; x)) = \int_a^b L_n(f; x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) p_i \quad (1)$$

бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x) dx = \int_a^b \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (2)$$

(1) формула $x_{i+1} - x_i = h$, ҳол учун Ньютон - Котес формуласи дейилади, (2) Ньютон -Котес коэффицентлари дейилади. (2) да $x = x + th$ алмаштириш бажарсак $dx = hdt$, $x \rightarrow t$, $a \rightarrow 0, b \rightarrow n$, $h = (b - a)/n$ ва

$$p_i = \frac{b-a}{n} \int_0^n (-1)^{n-i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad (3)$$

кўринишни ҳосил қиламиз. (3)ни ҳосил қилишда

$$x - x_j = (t - j)h, \quad x_i - x_j = (i - j)h$$

тенгликлардан фойдаландик.

КВАДРАТУРА ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚОЛДИҚЛАРИ.

Асосий тушунчалар: Трапеция формуласининг қолдиғи, Симпсон формуласининг қолдиғи, хатоликни амалий баҳолашнинг Рунге қоидаси, тақрибий усулнинг яхшилашнинг Ричардсон экстраполяция формуласи.

Асосий натижалар:

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари:

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, \quad r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24, \quad f(x) \in C^2[a, b],$$

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180, \quad f(x) \in C^4[a, b].$$

2. Рунге қоидаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), \quad h \rightarrow 0.$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h) / (2^k - 1), \quad r_h^* = Z - Z_h^* = O(h^{k+m}).$$

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари.

Ушбу ифодалар $r_h^T(f) = J(f) - J_h^T(f)$, $r_h^C(f) = J(f) - J_h^C(f)$, $r_h^{TT}(f) = J(f) - J_h^{TT}(f)$ трапеция, Симпсон ва т.т. квадратура формулаларининг қолдиқларидир.

Теорема 1. Агар $f(x) \in C^2[a, b]$ бўлса ушбу тенгликлар ўринли

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, \quad r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24. \quad (1)$$

Теорема 2. Агар $f(x) \in C^4[a, b]$ бўлса ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180. \quad (2)$$

Исбот. Равшанки, $L_{1,i}(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ дэсак

$$r_h^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - L_{1,i}(x)] dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f^{(2)}(c_i))(x - x_i)(x - x_{i+1})] / 2 dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(x - x_i)(x - x_{i+1})] / 2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) h^3 \frac{1}{12} = -h^2 \frac{b-a}{12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(t_i)}{n} = -h^2 \frac{b-a}{12} f^{(2)}(c)$$

Бу ерда интеграл учун ўртача қиймат ҳақида теоремадан фойдаландик, чунки $f''(x)$ - узлуксиз ва $(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq 0$. Охирида йиғинди учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема ишлатилди, чунки $f''(x)$ - узлуксиз ва

$$f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_n) = n f''(\xi), \quad \eta_i, \xi \in [a, b].$$

(1) нинг иккинчи формуласи қуйидагича исботланади. Равшанки,

$$f(x) = f(x_i + h/2) + f'(x_i + h/2)(x - x_{i+1/2}) + f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h f_{i+1/2} + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2 dx = J_h^{TT}(f) + \frac{h^3(b-a)}{24} f''(\eta)$$

(2) формула ҳам шу каби исботланади.

Лемма 3. Ихтиёрий $f(x) \in C^4[x_0, x_2]$ учун ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f, x_0, x_2) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad x_0 < \eta < x_2.$$

Исбот. Олдинги леммага асосан $r_h^C(P_3(x)) = 0$, $P_3(x) = N_2(x) + dx^3$, $d \in R$.

$P_3(x)$ кўпхадни интерполяция кўпхадни шаклида оламыз:

$$P_3(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad P_3'(x_1) = f'(x_1). \quad \text{Равшанки,}$$

$$R_3(x) = f(x) - P_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2),$$

$$r_h^C(f) = \int_{x_0}^{x_2} R_3(x) dx = \int_a^b \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) dx =$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2) dx = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{-h}^h (t+h)t^2(t-h) dt = -\frac{h^5(b-a)}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Энди равшанки,

$$r_h^C(f) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i) = -\frac{h^4}{2 \cdot 90} (b-a) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{m} = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\eta)$$

2. Рунге қондаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи

Z_h миқдор Z нинг h параметрга боғлиқ бирор тақрибий қиймати бўлсин ва қуйидаги асимптотик боғланиш мавжуд бўлсин:

$$Z = Z_h + ch^k + O(h^{k+m}), \quad c = const, \quad h \rightarrow 0 \quad k, m - \text{бутун сонлар.} \quad (3)$$

Теорема 1. Агар (3) ўринли бўлса,

$$Z = Z_h + \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), \quad h \rightarrow 0 \quad (4)$$

муносабат ўринли бўлади, яъни ушбу формулалар ўринли:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1} + O(h^{k+m}) \approx \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1}, \quad r_h^* = Z - Z_h^* = O(h^{k+m})$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h) / (2^k - 1) = c_1 Z_{h/2} + c_2 Z_h, \quad c_1 = 2^k / (2^k - 1), \quad c_2 = -1 / (2^k - 1).$$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Ньютон-Котес квадратура формуласини қолдиғини ёзинг.
2. Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиғини ёзинг.
3. Трапеция ва Симпсон формуласини қолдиғини исботланг.

5 - МАВЗУ. Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари. Итерация усули. Ньютон усули

Режа:

1. Масаланинг қўйилиши.
2. Илдизларни ажратиш.
3. Оралиқни иккига бўлиш усули, унинг ишчи алгоритми.

Таянч иборалар:

Алгебраик тенглама, трансцендент, оралиқ, илдиз, ҳосила, узлуксиз, учувчи, камаювчи, келтирилган тенглама, Декарт координатаси.

1. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ.

Бир номаълумли исталган тенглани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\phi(x)=0, \quad (4.1)$$

бу ерда $\phi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз.

Та`риф. (4.1) тенгланинг *илдизи (ечими)* деб шундай ξ ($a \leq \xi \leq b$) сонга айтиладики, ξ ни (4.1) га қўйганда

$$\phi(\xi) = 0$$

айният ҳосил бўлади.

Агар (4.1) да $\phi(x)$ функция алгебраик, яъни

$$\phi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (4.2)$$

бўлса, у ҳолда (2.1) *алгебраик тенглама* деб аталади. (4.2) да a_0, a_1, \dots, a_n — исталган сонлар, n — натурал сон.)

Алгебраик тенгламага мисолар:

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-4} = 14; \quad \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x-1}{4} \quad \text{ва х.к.}$$

Алгебраик тенглама деганда (4.2) кўринишдаги тенглама кўзда тутилади.

Келтирилган мисоллардаги иккинчи ва учинчи тенгламаларни содда амаллар бажариб (4.2) кўринишга келтириш мумкин.

Агар (4.1) тенгламада $\phi(x)$ функция алгебраик бўлмаса, яъни уни (4.2) кўринишда ифодалаб бўлмаса, у ҳолда (4.1) га *трансцендент тенглама* дейилади. Трансцендент тенгламага мисоллар:

$$x - 10 \sin x = 0; \quad 2x - 2 \cos x = 0; \quad \lg(x+1) = \tan x \quad \text{ва х.к.}$$

Кўрсаткичли (a^x), логарифмик ($\log x$), тригонометрик ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ва х.к.) функциялар алгебраик бўлмаган (трансцендент) функциялардир.

(4.1) тенглама ҳақиқий ёки комплекс илдизга эга бўлиши мумкин. Биз фақат ҳақиқий илдизлар топиш билан шуғулланамиз ва қуйидаги масалаларни ечамиз:

- 1) (4.1) тенглама ҳақиқий илдизга эгами ёки йўқми; агар эга бўлса илдизлар сони нечта?
- 2) ҳақиқий илдизларни аниқ усуллар билан ёки берилган аниқликда тақрибий усуллар билан топиш;

Олий алгебрадаги алгебраик тенгламаларнинг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз:

- 1) Ҳар қандай алгебраик тенглама жуда бўлмаганда битта илдизга эга (ҳақиқий ёки комплекс).
- 2) Кар қандай n тартибли алгебраик тенгланинг илдизлари сони n дан катта бўлмайди.
- 3) Ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли алгебраик тенглама фақат жуфт сонли комплекс илдизларга эга бўлиши мумкин.

- 4) Ҳар қандай ток даражали алгебраик тенглама жуда бўлмаганда битта ҳақиқий илдиизга эга.

Алгебраик тенглама илдиизларини қандай топамиз?

1-, 2-тартибли тенгламалар учун тайёр ҳисоблаш формулалари мавжуд бўлиб, улар бизга ўрта мактаб математикасидан маълум. Бу формулаларда илдиизлар тенгламанинг коэффициентлари орқали ифодаланади (масалан квадрат тенгламанинг илдиизларини ҳошлашда). 3- ва 4- тартибли тенгламалар учун ҳам формулалар мавжуд. Бироқ бу формулалар мураккаб кўринишда. 5- ва ундан юқори даражали алгебраик тенгламалар учун бундай формулаларнинг бўлиши мумкин эмас. Буни Норвегиялик математик Абель исботлаган. Бундай тенгламаларни фақат хусусий ҳоллардагина ечиш мумкин (масалан $ax^n=b$ ни).

Шу муносабат билан ҳисоблаш математикасида катор тақрибий усуллар ишлаб чиқилган. Бу усуллар билан исталган даражали алгебраик ёки трансцендент тенгламаларни берилган аниқликда ечиш мумкин. Шунинг учун тақрибий усуллар юқори даражали тенгламаларни ечиш учун асос бўлади.

«Берилган аниқликдаги тақрибий ечим» деганда нимани тушунаимиз?

Фараз қилайлик, ξ (4.1) нинг аниқ ечими, x эса унинг ε аниқликдаги тақрибий ечими ($0 < \varepsilon < 1$) бўлсин. У ҳолда юқоридаги саволимизнинг жавоби $|\xi - x| \leq \varepsilon$ бўлади. Ушбу бобда биз бир номаълумли алгебраик ва трансцендент тенгламаларни баъзи тақрибий ечиш усуллари билан танишиб чиқамиз.

2. ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ. ОРАЛИҚНИ ИККИГА БЎЛИШ УСУЛИ

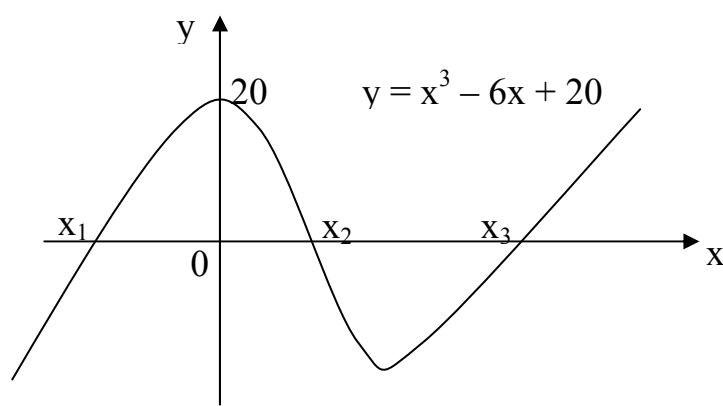
Тенгламаларни тақрибий ечиш жараёни иккита босқичга ажратилади:

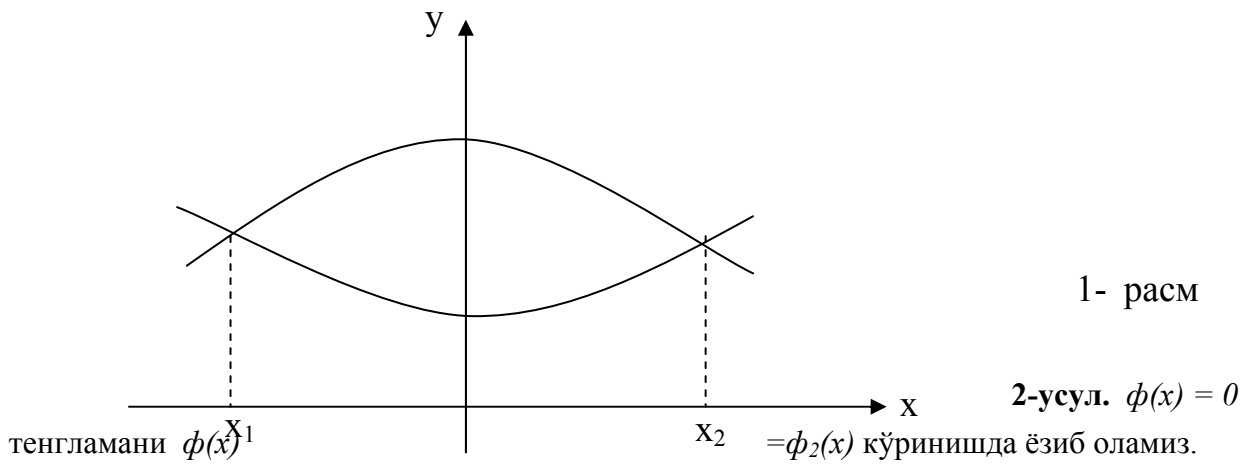
- 1) илдиизларни ажратиш;
- 2) илдиизларни берилган аниқликда топиш.

$[a, b]$ кесмада $\phi(x) = 0$ тенгламанинг ξ дан бошқа илдиизи йўқ бўлса, илдииз ξ ажратилган ҳисобланади. Илдиизларни ажратиш учун $[a, b]$ кесмани шундай кесмачаларга бўлиш керакки, бу кесмачаларда тенгламанинг фақат битта илдиизи бўлсин. Илдиизларни г р а ф и к ва а н а л и т и к усуллар билан ажратиш мумкин.

Илдиизларни график усулда ажратиш. 1-усул. Бу усул жуда содда бўлиб қуйидагича бажарилади. Декарт координат тизимида $y = \phi(x)$ функциянинг графигини чизамиз (бу бизга ўрта мактаб дастуридан маълум). Шу графикнинг Ox уки билан кесишган нуқталари изланаётган илдиизлар (тақрибий) бўлади.

Мисол. $x^3 - 6x^2 + 20 = 0$ тенгламанинг тақрибий ечимлари x_1, x_2, x_3 1-расмда кўрсатилган.





Декарт координат тизимида $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Агар бу егри чизиклар ўзаро кесишса, кесишган нуқталаридан Ox укига тик чизик (перпендикуляр) ўтказамиз. Ҳосил бўлган нуқталар (еки нуқта) тақрибий ечимлар бўлади. 2- расмдаги x_1 ва x_2 лар (2.1) тенгламанинг тақрибий ечимларидир.

2- расм

Бу усуллар билан тенгламалар ечганда аниқроқ ечимлар олиш учун графикларни иложи борида аниқ чизиш ва катта масштаб олиш лозим бўлади. Шунга қарамай график усуллар билан илдизларни юқори аниқликда ҳисоблаб бўлмайди. График усул билан тенгламанинг илдизларини бирор чегараланган кесмада аниқлаймиз, яъни чизмани исталганча катта ўлчовда ололмаймиз ва тенглама нечта илдизга эга эканлигига жавоб бера олмаимиз. Илдизларни юқори аниқликда топиш лозим бўлса, бошқа тақрибий усуллардан фойдаланиш керак.

Илдизларни аналитик усулда ажратиш. $f(x)=0$ тенгламанинг илдизларини аналитик усулда ажратиш учун олий математика курсидан баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, кесманинг чекка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг жуда бўлмаганда битта илдизи ётади.

2-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва монотон бўлиб, кесманинг чекка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг фақат битта илдизи ётади.

3-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб ва кесманинг чекка нуқталарида турли ишорали қийматлар қабул қилиб, $[a, b]$ кесманинг ичида $f'(x)$ ҳосиласининг ишораси ўзгармаса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада $f(x)=0$ тенгламанинг фақат битта илдизи ётади.

Еслатма. 1) $y = \phi(x)$ функция берилган интервалда монотон дейилади, агар шу интервалга тегишли исталган $x_2 > x_1$ учун $\phi(x_1) \geq \phi(x_2)$ ($\phi'(x) \geq 0$) (монотон усувчи) ёки $\phi(x_2) \leq \phi(x_1)$ ($\phi'(x) \leq 0$) (монотон камаювчи) бўлса.

2) Агар $y = \phi(x)$ функция берилган интервалда узлуксиз бўлиб, интервалнинг ҳамма нуқталарида ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда функциянинг бу интервалда монотон бўлиши учун $\phi'(x) \geq 0$ ёки $\phi'(x) \leq 0$ тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

3. ОРАЛИҚНИ ИККИГА БЎЛИШ УСУЛИ

Фараз қилайлик, $\phi(x) = 0$ тенгламанинг бирор ξ илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган бўлсин. Кесманинг узунлиги $\delta = b - a$ деб белгилайлик. Тенгламанинг ξ ечими $\varepsilon = 0,001$ аниқликда топилсин. ξ илдиз $[a, b]$ нинг ичида бўлганлиги $\{a < \xi < b\}$ учун a ни ками билан олинган тақрибий илдиз, b ни ортиги билан олинган тақрибий илдиз деб олишимиз мумкин. Агар $\delta < 0,001$ бўлса масала ечилган ҳисобланади ва a ҳамда b лар $\phi(x) = 0$ тенгламанинг берилган $\varepsilon = 0,001$ аниқликдаги ечимлари бўлади. Бу ҳолда тақрибий ечим сифатида a ва b лардан ташқари бўлар орасида ётган исталган x_0 ($a < x_0 < b$) ни олиш мумкин. Тақрибий ечим сифатида $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ни олиш мақсадга мувофиқ.

Энди фараз қилайлик $\delta > 0,001$ ва $[a, b]$ кесманинг ўртасида $c = (a+b)/2$ нуқта олинган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ кесма узунликлари $(b-a)/2$ га тенг бўлган $[a, c]$ ва $[c, b]$ кесмаларга ажрайди. Шу икки кесмадан қайси бирининг чекка нуқталарида $\phi(x)$ функция ишорасини ўзгартирса, шу кесмани олиб қолиб кейингисини ташлаб юборамиз. Қолган кесманинг узунлиги $\delta_1 \leq \varepsilon$ бўлса, шу ерда тухтаймиз. Агар шарт бажарилмаса, олиб қолинган кесмада юқоридаги мулохазаларни такрорлаймиз. Иккига бўлиш жараёнини кесманинг узунлиги $\delta_n \leq \varepsilon$ (n -иккига бўлишлар сони) бўлганига қадар давом еттирамиз.

Мисол. $x^3 - 4x - 1 = 0$ тенглама $\varepsilon = 0,001$ аниқликда ечилсин.

Қуйидаги жадвални тўзамиз

X	-1	0	1	2	2,1	2,2
$\phi(x)$ нинг ишораси	+	-	-	-	-	+

Жадвалдан кўриняптики $[-1; 0]$; $[2,1; 2,2]$ кесмаларда тақрибий ечим (1-теоремага асосан) бор. Биз учун қулай кесма $[2,1; 2,2]$. Бунда $\phi(2,1) = -1,39 < 0$; $\phi(2,2) = 0,850 > 0$. Бизда $a = 2,1$; $b = 2,2$. Бундан $\delta = b - a = 0,1 > \varepsilon$. Демак ҳисоблашни давом еттириш керак.

$$\phi(2,11) = -0,046 < 0; \quad \phi(2,12) = 0,046 > 0$$

Бу ердан $a = 2,11$; $b = 2,12$; $\delta = b - a = 0,01 > \varepsilon$

Ҳисоблашни яна давом еттирамиз:

$$\phi(2,114) = -0,0085 < 0; \quad \phi(2,115) = 0,0009 > 0$$

$$a = 2,114; \quad b = 2,115; \quad \delta = b - a = 2,115 - 2,114 = 0,001 = \varepsilon$$

Қўйилган мақсадга эришдик, яъни кесманинг узунлиги δ аввалдан берилган аниқлик $\varepsilon=0,001$ дан катта эмас. Бу мисолда изланаётган тақрибий ечим ξ қуйидаги ораликда бўлади $2,114<\xi<2,115$, яъни 2,114 ва 2,115 ларни тақрибий ечим тарзида олиш мумкин (ξ аниқлик билан). Амалда бўларнинг ўрта арифметици олинса ечим аниқлиги янада ошади

Такрорлаш учун саволлар:

1. Тенгламанинг илдизи нима?
2. Алгебраик тенглама деганда нимани тушунасиз?
3. Трансцендент тенглама нима?
4. Илдизларни ажратиш деганда нимани тушунасиз?
5. Илдизларни берилган аниқликда топиш нима?
6. Кесмани узунлиги нима?
7. График усул деганда нимани тушунасиз?
8. Функциянинг интервалда монотонлиги нима?
9. Илдизларни аналитик усулда ажратиш қандай бажарилади?
10. Ораликни иккига бўлиш усули қандай шарт асосида амалга оширилади?

ВАТАРЛАР УСУЛИ. УРИНМАЛАР УСУЛИ. КЕТМА – КЕТ ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ

Режа:

1. Ватарлар усули.
2. Уринмалар (Ньютон) усули.
3. Кетма - кет яқинлашиш усули.
4. Усулларнинг ишчи алгоритмлари.

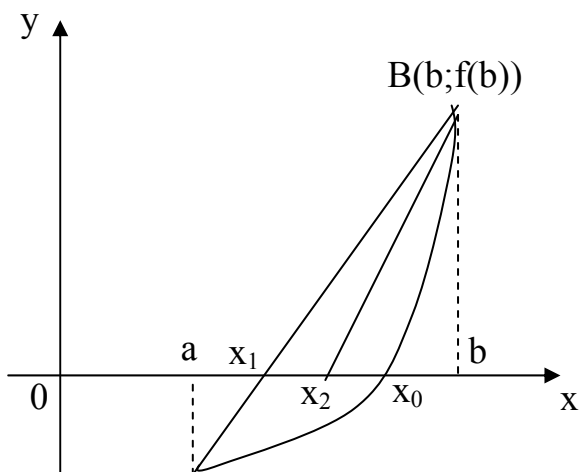
Таянч иборалар:

Ватар, ҳосила, н-ҳосила, тақрибий ечим, уринма, егри чизиқ, бошлангич яқинлашиш, комбинация, узлуксиз, усувчи, итерация, тенг кучли.

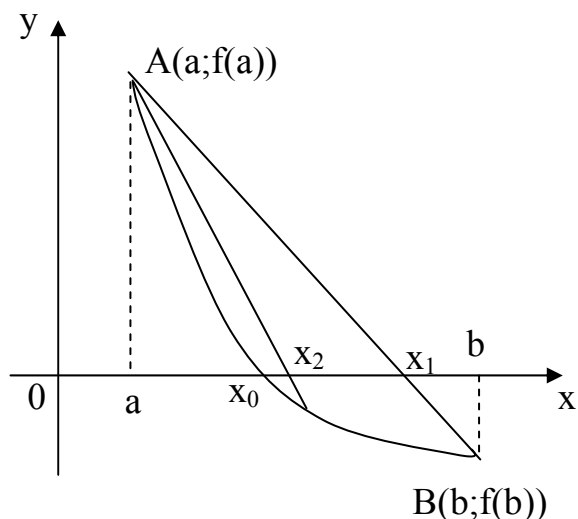
1. ВАТАРЛАР УСУЛИ

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишда ватарлар усули кенг қўлланадиган усуллардан биридир. Бу усулни икки ҳолат учун куриб чиқамиз.

1-ҳ о л а т . Фараз қилайлик $f(x) = 0$ тенгламанинг илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган ва кесманинг чекка нуқталарида $f(a) \cdot f(b) < 0$ бўлсин. Бундан ташқари биринчи ва иккинчи ҳосилалари бир хил ишорали қийматларга эга бўлсин, яъни $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ ёки $f(a) < 0; f(b) > 0; f'(x) > 0; f''(x) > 0$ (5-расм).



5- расм



6- расм

$\phi(x) = 0$ —тенгламанинг аниқ ечими, $\phi(x)$ функция графигининг Ox уки билан кесишган нуқтаси x_0 . A ва B нуқталарни турри чизик (ватар) билан туташтираимиз.

Олий математикадан маълумки, A ва B нуқталарда (5- расм) утган тўғри чизикнинг тенгласи қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (2.3)$$

Утказилган ватарнинг Ox уки билан кесишган нуқтаси x_1 ни тақрибий ечим деб қабул қиламиз ва унинг координатасини аниқлаймиз. (2.3) тенгликда $x = x_1$, $y = 0$ деб ҳисоблаб уни x_1 га нисбатан ечамиз:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.4)$$

Изланаётган ечим x_0 энди $[x_1; b]$ кесманинг ичида. Агар топилган x_1 ечим бизни қаноатлантирмаса юқорида айтилган мулоҳазаларни $[x_1; b]$ кесма учун такрорлаймиз ва x_2 нуқтанинг координатини аниқлаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \quad (2.5)$$

Агар x_2 илдиз ҳам бизни қаноатлантирмаса, яъни аввалдан берилган ε аниқлик учун $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ шарт бажарилмаса, x_3 ни ҳисоблаймиз:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} \quad (2.6)$$

ёки умумий ҳолда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (2.7)$$

яъни ҳисоблашни $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ шарт бажарилгунга қадар давом еттирамиз.

Юқорида келтирилган формулаларни $\phi(a) > 0; \phi(b) < 0; \phi'(x) < 0; \phi''(x) < 0$ учун ҳам қўллаш мумкин.

2-х о л а т . $\phi(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи ҳосилалари турли ишорали кийматларга эга деб фараз қилайлик, яъни $\phi'(x) \cdot \phi''(x) < 0$ ёки $\phi(a) > 0, \phi(b) < 0, \phi'(x) < 0, \phi''(x) > 0$ (6-расм).

A ва B нуқталарни турри чизик (ватар) билан туташтириб унинг тенгламасини ёзамиз

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a} \quad (2.8)$$

Бу тенгламада $y = 0$ ва $x = x_1$ деб қабул қилиб, уни x_1 га нисбатан ечсак,

$$x_1 = b - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.9)$$

Топилган x_1 ни тақрибий ечим деб олиш мумкин. Агар топилган x_1 нинг аниқлиги бизни қаноатлантирмаса, юқоридаги мулоҳазани $[a, x_1]$ кесма учун такрорлаймиз, яъни x_2 ни ҳисоблаймиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)} \quad (2.10)$$

Агар $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ шарт бажарилса, тақрибий ечим сифатида x_2 олинади, бажарилмаса x_3, x_4, \dots лар ҳисобланади, яъни

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \quad (2.11)$$

Ҳисоблаш жараёни $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ бўлгунга қадар давом еттирилади.

$\phi(a) < 0, \phi(b) > 0, \phi'(x) > 0, \phi''(x) < 0$ бўлган ҳол учун ҳам тақрибий илдиш (2.9) – (2.11) формулалар билан ҳисобланади. Демак, агар $\phi'(x) \cdot \phi''(x) > 0$ бўлса тақрибий ечим (2.4-2.7) формулалар билан, $\phi'(x) \cdot \phi''(x) < 0$ бўлса (2.9) - (2.11) формулалар билан ҳисобланади.

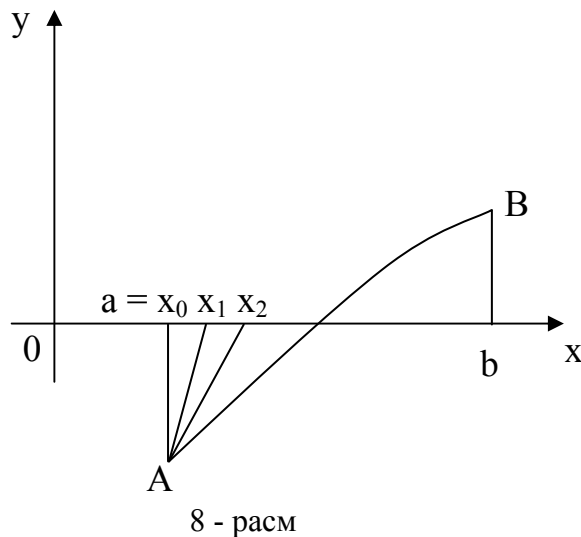
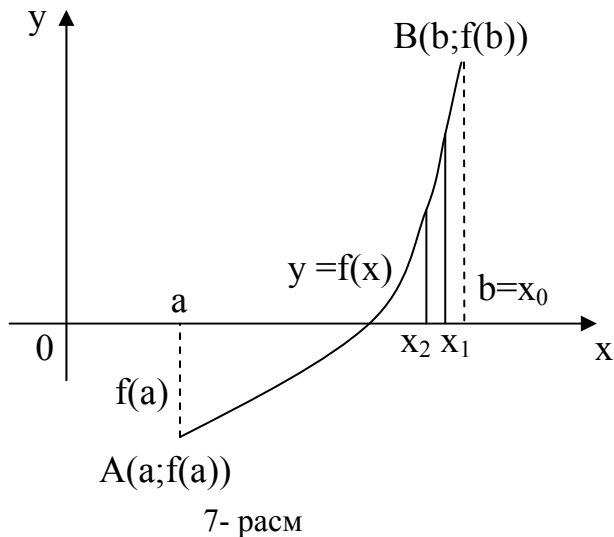
Мисол. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ тенглама $\varepsilon = 0,005$ аниқликда ватарлар усули билан ҳисоблансин.

Е ч и ш . Илдишларни ажрацак, $0,5 < x < 1,5$ га эга бўламиз; бу ерда $\phi(0,5) = -2,625 < 0; \phi(1,5) = 2,600 > 0; \phi'(x) = 3x^2 + 2x; \phi''(x) = 6x + 2$. Кидирилаётган тақрибий илдиш $[0,5; 1,5]$ кесмада экан. Бу кесмада эса $\phi'(x) > 0; \phi''(x) > 0$. Демак биз тақрибий илдишни (2.4) - (2.7) формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз (1- ҳолат). (2.4) дан $x_1 = 1,012$ ни, (2.5) дан $x_2 = 1,130$ ни; (2.6) дан $x_3 = 1,169$ ни, (2.7) дан ($n=3$) $x_3 = 1,173$ ни топамиз. Бу ерда $|x_4 - x_3| = 1,173 - 1,169 = 0,004 < \varepsilon$. Демак шарт 4-кадамда бажарилди. Шунинг учун $x_4 = 1,173$ юқоридаги тенгламанинг $\varepsilon = 0,005$ аниқликдаги илдиши бўлади.

2. УРИНМАЛАР (НЬЮТОН) УСУЛИ

Уринмалар усулини Ньютон усули деб ҳам атайдилар. Бу усулни ҳам икки ҳолат учун куриб чиқамиз.

1- ҳ о л а т . Фараз қилайлик, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ёки $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (7-расм).



$\ddot{y} = f'(x)$ егри чизикка В нуқтада уринма ўтказамиз ва уринманинг Ох уки билан кесишган нуқтаси x_1 ни аниқлаймиз.

Уринманинг тенгламаси куйидагича:

$$\ddot{y} - f(b) = f'(b)(x-b), \quad (2.12)$$

бу ерда $\ddot{y}=0$, $x=x_1$ деб, (2.12) ни x_1 нисбатан ечсак,

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (2.13)$$

Шу мулоҳазани $[a; x_1]$ кесма учун такрорлаб, x_2 ни топамиз:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.14)$$

Умуман олганда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.15)$$

Ҳисоблашни $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ шарт бажарилганда тухтатамиз.

2- ҳ о л а т . Фараз қилайлик $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ ёки $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (8- расм). $\ddot{y} = f'(x)$ егри чизикка А нуқтада уринма ўтказамиз, унинг тенгламаси:

$$\ddot{y} - f(a) = f'(a)(x-a), \quad (2.16)$$

Бу ерда $\ddot{y}=0$, $x=x_1$ десак,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (2.17)$$

$[x_1; b]$ кесмадан

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.18)$$

Умуман

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.19)$$

(2.13) ва (2.17) формулаларни бир-бири билан солиштирсак, улар бир-бирларидан бошлангич яқинлашиши (a ёки b) ни танлаб олиш билан фарқланадилар. Бошлангич яқинлашишни танлаб олишда қуйидаги коидадан фондаланилади; бошлангич яқинлашиш тарзида $[a; b]$ кесманинг шундай чекка (a ёки b) қийматини олиш керакки, бу нуқтада функциянинг ишораси унинг иккинчи ҳосиласининг ишораси билан бир хил бўлсин.

Мисол. $x - \sin x = 0,25$ тенгламанинг илдизи $\varepsilon = 0,0001$ аниқликда уринмалар усули билан аниқлансин.

Е ч и ш . Тенгламанинг илдизи $[0,982; 1,178]$ кесмада ажратилган (буни текширишни китобхонга хавола қиламиз); бу ерда $a = 0,982; b = 1,178;$
 $\phi(x) = 1 - \cos x; \phi'(x) = \sin x > 0.$

$[0,982; 1,178]$ кесмада $\phi(1,178) \cdot \phi'(x) > 0$, яъни бошлангич яқинлашишда $x_0 = 1,178$. Ҳисоблашни (2.13)-(2.15) формулалар воситасида бажарамиз. Ҳисоблаш натижалари қуйидаги 2.1-жадвалда берилган.

2.1-жадвал

n	x_n	$-\sin x_n$	$\phi(x_n) = x_n - \sin x_n - 0,25$	$\phi'(x_n) = 1 - \cos x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	- 0,92384	0,00416	0,61723	- 0,0065
1	1,1715	- 0,92133	0,00017	0,61123	- 0,0002
2	1,1713	- 0,92127	0,00003	0,61110	- 0,0005
3	1,17125				

Жадвалдан кўринадикки, $x_3 - x_2 = |1,17125 - 1,1713| = 0,00005 < \varepsilon$. Демак ечим деб $x = 1,17125$ ни ($\varepsilon = 0,0001$ аниқликда) олиш мумкин.

5-8 – расмларга диққат билан эътибор қилсак шуни кўрамизки, $\phi(x) = 0$ тенгламанинг тақрибий ечимларини ватарлар ва уринмалар усули билан топганда аниқ ечимга икки чеккадан яқинлашиб келинади. Шунинг учун иккала усулни бир вақтнинг ўзида қўллаш натижасида мақсадга тёзрок эришиш мумкин. Бу усулни комбинацияланган усул деб атайдилар. Комбинацияланган усул юқорида келтирилган усулларнинг умумлашмаси бўлгани туфайли бу тўғрида кўп тухталмаймиз.

3. ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Биздан $\phi(x)=0$ тенгламанинг илдизини аниқлаш талаб этилсин. Бу тенгламани қуйидаги (тенг кучли) кўринишда ёзамиз

$$x = \varphi(x) \tag{2.20}$$

$\phi(x) = 0$ тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга келтиришни жуда энгил амаллар билан исталган вақтда амалга ошириш мумкин. (2.20) нинг илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган бўлсин. $[a, b]$ нинг ичида ихтиёрий x нуқтани оламиз ($a \leq x_0 \leq b$) ва бу нуқтани бошлангич (нолинчи) яқинлашиш деб қабул қиламиз. x ни (2.20) нинг унғ тарафидаги x нинг ўрнига қўйиб, ҳосил бўлган натижани x дэсак,

$$x_1 = \varphi(x_0) \tag{2.21}$$

x_1 ни биринчи яқинлашиш бўйича (2.20) нинг илдизи дейилади. Кейинги яқинлашишлар куидагича топилади:

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Бунинг натижасида қуйидаги кетма-кетликни тўзамиз

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \tag{2.22}$$

Агар (2.22) кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлса ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$), ў ҳолда x (2.20) нинг

илдизи бўлади. Бунинг исботи жуда содда. Агар $\varphi(x)$ ни узлуксиз функция дэсак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = \varphi(\bar{x})$$

яъни $x = \varphi(x)$ бўлиб, x (2.20) нинг илдизи бўлади. —

Агар (2.20) кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлмаса, u ҳолда кетма-кет яқинлашиш усулининг маъноси бўлмайди.

Юқорида айтилганлардан хулоса шуки, биз бу усул билан $\phi(x) = 0$, $[x = \varphi(x)]$ тенгламанинг ечимини топмокчи бўлсак, қуйидаги кетма-кет бажарилиши лозим бўлган жараённи ҳисоблашимиз керак бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \tag{2.23}$$

бу ерда $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ кетма-кет яқинлашишлар; x_0 - бошлангич яқинлашиш; x_1 - биринчи яқинлашиш; x_2 - иккинчи яқинлашиш ва х.к.

(2.23) жараён яқинлашувчи бўлишининг етарлилик шартларини қуйидаги теорема ифодалайди (теоремани исботсиз келтирамиз).

Теорема. $x = \varphi(x)$ тенгламанинг илдизи $[a, b]$ кесмада ажратилган бўлиб, бу кесмада қуйидаги шартлар бажарилса:

- 1) $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва дифференциалланувчи;
- 2) барча $x \in [a; b]$ учун $\varphi(x) \in [a; b]$;
- 3) барча $x \in [a; b]$ да $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ бўлса, у ҳолда (2.23) жараён **яқинлашувчи** бўлади

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, теореманинг шартлари фақат етарли бўлиб, зарурий эмасдир, яъни (2.23) жараён бу шартлар бажарилмаганда ҳам яқинлашувчи бўлиши мумкин. (2.23) ни ҳисоблаганимизда, ҳисоблашни аввалдан берилган аниқлик учун қуйидаги тенгсизлик бажарилгунга қадар давом еттираемиз:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, 4, \dots)$$

Мисол. $4x - 5 \ln x = 5$ тенглама $\varepsilon = 0,0001$ аниқликда кетма-кет яқинлашиш усули билан ечилсин.

Е ч и ш . Тенгламани $\ln x = \frac{4x - 5}{5}$ кўринишда ёзамиз ва $y_1 = \ln x$; $y_2 = \frac{4x - 5}{5}$

чизиклар кесишган нуқтани аниқлаймиз. Бўлар $x_0 = 2,28$; $x_0 = 0,57$. Бўларни бошлангич яқинлашиш нуқталари деб оламиз. Берилган тенгламани $x = 1,25(1 + \ln x)$ кўринишда ёзсак, $\varphi(x) = 1,25(1 + \ln x)$ бўлади, бундан, $\varphi'(x) = \frac{1,25}{x}$. Бу ҳолда $x_0 = 2,28$ учун кетма-кет яқинлашиш жараёни яқинлашувчи бўлади:

$$\varphi'(x) = \frac{1,25}{x} < 1$$

Ҳисоблаш натижалари қуйидаги 2.2- жадвалда келтирилган:

2.2-жадвал

(1)	(2)	(3)
x	ln(1) + 1	1,25(2)
2,28	1,82418	2,28022
2.28022	1.82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2.28044
2,28044	1,82437	2,28046

Бошлангич яқинлашиш $x_0 = 0,57$ атрофида жараён яқинлашувчи бўлмайди, чунки

$$\varphi'(x) = \frac{1,25}{x_0} = \frac{1,25}{0,57} > 1$$

Бу ҳолда берилган тенгламани $x = e^{0,8 x - 1}$ кўринишда ёзиб, ҳисоблашни давом еттириш керак.

Такрорлаш учун саволлар:

1. Тенгламанинг аниқ ечими нима?
2. Тўғри чизикнинг тенгласини ёзинг.
3. Изланаётган ечим нима?
4. Тақрибий ечим нима?
5. Ватарлар усули қандай шарт асосида амалга оширилади?
6. Уринмалар усули қандай шарт асосида амалга оширилади?
7. Уринманинг тенгласини ёзинг.
8. Бошлангич яқинлашиш нима?
9. Уринмалар усулининг 1-ҳолати қандай?
10. Уринмалар усулининг 2-ҳолати қандай?
11. Тенг кучли тенгламалар нима?
12. Кетма-кет яқинлашиш усули қандай шарт асосида амалга оширилади?

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ. ГАУСС УСУЛИ. БОШ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

Режа:

1. Векторлар ва матрицалар ҳақида баъзи маълумотлар.
2. Масаланинг қўйилиши.
3. Гаусс усули.
4. Бош элементлар усули.
5. Усулларнинг ишчи алгоритмлари.

Таянч иборалар:

Вектор, матрица, скаляр кўпайтма, векторнинг модули, бирлик матрица, аниқ усул, итерацион тизим, биринчи босқич, иккинчи босқич.

МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Назарий ва амалий математиканинг кўпгина масалалари чизикли алгебраик тенгламалар тизимини ечишга олиб келади.

Чизикли алгебраик тенгламаларни ечиш асосан икки усулга - аниқ ва итерацион усулларга бўлинади.

Аниқ усул деганда шундай усул тушуниладики, унинг ёрдамида чекли миқдордаги арифметик амалларни аниқ бажариш натижасида масаланинг аниқ ечимини топиш мумкин бўлади. Ҳаммага маълум бўлган Крамер коидаси аниқ усулга мисол бўла олади. Лекин, Крамер коидаси амалда жуда кам қўлланилади, чунки бу усул билан n - тартибли

чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечганда нихоятда кўп арифметик амалларни бажаришга тўғри келади.

Биз ҳисоблаш учун тежамли бўлган Гаусс ва бош элементлар аниқ усулларини куриб чиқамиз. Бўлар номаълумларни кетма-кет юко-тиш гоёсига асосланган.

Итерацион (кетма-кет яқинлашиш) усул шу билан характерлана-дики, бу усулда чизиқли алгебраик тенгламалар тизимининг ечими кетма-кет яқинлашишларнинг лимитидек топилади.

Итерацион усулларни қўллаётганда фақат уларнинг яқинлашишларигина эмас, балки яқинлашишларнинг тўзлиги ҳам катта аҳамиятга эга.

Бу усуллар айрим тизимлар учун жуда тўз яқинлашиб, бошқа ти-зимлар учун секин яқинлашиши ёки умуман яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун ҳам итерацион усулларни қўллаётганда тизимни аввал тайёрлаб олиш керак. Яъни, берилган тизимни унга тенг кучли бўлган шундай тизимга алмаштириш керакки, ҳосил бўлган тизим учун танланган усул тўз яқинлашсин.

Тизимдаги тенгламалардан номаълумларни кетма-кет йўқотишни икки йўл билан амалга ошириш мумкин:

а) тенгламаларнинг керакли комбинацияларини тузиш;

б) алмаштиришнинг ҳар бир кадамида тизим матрицасининг бирор элементини ёки бирор устундаги диагонал элементнинг остидаги барча элементларини нолга айлантириш мақсадида бу мат-рицани махсус равишда танлаб олинган матрицага кўпайтириш.

Ҳар иккала ҳолда ҳам эътибор шунга қаратилиши керакки, алмаштиришлар натижасида берилган тизим унга тенг кучли бўлган тизимга алмашиши ҳамда содда кўринишга эга бўлиши лозим.

ГАУСС УСУЛИ

Гаусснинг номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечиш усуллари ичида энг универсал ва энг самаралисидир. Соддалик учун туртта номаълумли туртта чизиқли тизимни ечишнинг Гаусс усулини куриб чиқамиз.

Ушбу тизим берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4; \end{cases} \quad (3.7)$$

бу ерда x_u ($u=1,4$) - номаълум сонлар, $a_{иж}$ ($ж = 1,4$) ва b_u ($u=1,4$) - маълум коэффициентлар. Қулайлик учун $a_{15} = b_1$, $a_{25} = b_2$, $a_{35} = b_3$, $a_{45} = b_4$ деб оламиз.

Гаусс усулининг тўлиқ тавсифига утамыз. Биринчи кадамнинг етакчи элементи деб аталадиган a_{11} коэффициентни нолдан фарқли деб ҳисоблаимиз. (3.7) даги биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \quad (3.8)$$

Бу ерда

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, 4, 5)$$

(3.8) тенгликдан фойдаланиб (3.7) тизимнинг иккинчи, учинчи ва туртинчи тенгламаларидан x_1 номаълумни июкотаимиз. Бунинг учун (3.8) тенгламани a_{21} , a_{31} ва a_{41} га кўпайтириб натижани мос равишда тизимнинг иккинчи, учинчи ва туртинчи тенгламаларидан аириш керак. У ҳолда уч номаълумли қуйидаги тизимга эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \quad (3.9)$$

бу ерда

$$a_{uj} = a_{uj} - a_{u1}b_{1j} \quad (u = 2, 3, 4, \quad j = 2, 3, 4, 5) \quad (3.10)$$

Энди шу тизимни ўзгартиришга киришамиз.

Иккинчи кадамни бажаришга утишдан олдин иккинчи кадамнинг етакчи элементи деб аталадиган $a_{22}^{(1)}$ элементни нолдан фарқли деб фараз киламиз (акс ҳолда тенглама-ларнинг урнини тегишли равишда алмаштириш лозим). (3.9) тизимнинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)}$ га бўламиз, у ҳолда

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \quad (3.11)$$

бу ерда

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, 5)$$

Юқоридагига ўхшаш x_2 ни йўқоцак,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \quad (3.12)$$

тизимга эга бўламиз, бу ерда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \quad (i = 3, 4; \quad j = 3, 4, 5) \quad (3.13)$$

(3.12) нинг биринчи тенгламасини $a_{33}^{(2)}$ га бўламиз, у ҳолда

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}$$

бўлади, бу ерда

$$b_{34}^{(2)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad b_{35}^{(2)} = \frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

Бу тенглама ёрдамида (3.12) тизимнинг иккинчи тенгламасиданни йўқотиб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(2)}$$

бу ерда

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \quad (j=4,5) \quad (3.14).$$

Шундай қилиб, (3.7) тизимни учбурчак матрицали ўзига тенг кучли бўлган қуйидаги тизимга келтирдик:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}; \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}; \\ x_3 + b_{34}^{(1)}x_4 = b_{35}^{(1)}; \\ a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}; \end{cases} \quad (3.15)$$

Бу ердан кетма-кет қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}; \\ x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4; \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3; \\ x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Шундай қилиб, (3.7) тизимни ечиш икки боскичдан иборат:

б и р и н ч и б о с к и ч - тўғри йўл - (3.7) тизимни (3.15) учбурчак кўринишига келтириш;

и к к и н ч и б о с к и ч - тесқари йўл - номаълумларни (3.16) формулалар ёрдамида аниқлаш.

Қўлда ҳисоблаётганда хатога йўл қўймаслик учун ҳисоблаш жараёнини текшириш маъқулдир. Бунинг учун биз ушбу

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^n a_{ij} + f, \quad (i = \overline{1,n})$$

йиғиндидан фойдаланамиз.

Агар сатр элементлари устида бажарилган амалларни қар бир сатрдаги текширувчи йиғинди устида ҳам бажарсак ва ҳисоблашлар хатосиз бажарилган бўлса, у ҳолда текширувчи йиғиндилардан тузилган устуннинг ҳар бир элементи мое равишда алмаштирилган сатрлар элементларининг йиғиндисига тенг бўлади. Бу ҳол эса биринчи боскич (турри юриш) ни текшириш учун хизмат қилади. Иккинчи боскич (тесқари юриш) да эса, текширув $\overline{x_{jс}} = x_{jс} + I$ ($с=1,4$) ларни топиш билан бажарилади.

Тенгламалар тизимини қўлда ечилганда ҳисоблашларни қуйидаги 3.1- жадвалда кўрсатилган Гаусснинг ихчам тархи бўйича бажариш маъқулдир. (Жадвалда соддалик учун туртта тенгламалар тизимини ечиш тархи келтирилган.)

3.1.-жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	озод ҳадлар	Σ	тарх қисмлари
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	a_{12}	A
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	a_{26}	
a_{31}	a_{33}	a_{33}	a_{34}	b_3	a_{36}	
a_{41}	a_{44}	a_{44}	a_{44}	b_4	a_{46}	
...	
1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$\frac{b_2}{b_{11}}$	$\frac{a_{16}}{a_{11}}$	
...	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	A ₁
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$b_4^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	
	
	1	$\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}}$	$\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}}$	$\frac{b_2^{(1)}}{b_{22}}$	$\frac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}}$	
...	...	$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	A ₂
		$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(2)}$	$b_4^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	
		
		1	$\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}}$	$\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}}$	$\frac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}}$	
...	$a_{44}^{(3)}$	$b_4^{(2)}$	$a_{46}^{(3)}$	A ₃
			
			1	$\frac{b_4^{(2)}}{a_{44}}$	$\frac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}}$	
1	1	1	1	x_4	\bar{x}_4	B
				x_3	\bar{x}_3	
				x_2	\bar{x}_2	
				x_1	\bar{x}_1	

Мисол. Қуйидаги тизим Гаусс усули билан ечилсин

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_2 - x_4 = 3; \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8; \\ x_1 + 2x_2 - x_2 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

Тизимни ечиш жараёни қуйидаги 3.2- жадвалда келтирилган.

x_1	x_2	x_3	x_4	Озод ҳадлар	Σ	Тарх қисмлари
1	1	-2	1	6	7	A
2	1	1	-1	3	6	
-1	-3	-1	1	-8	-12	
1	2	-3	2	11	13	
...	
1	1	-2	1	6	7	
	-1	5	-3	-9	-8	A ₁
	-2	-3	2	-2	-5	
	1	1	1	5	8	
...	
	1	-5	3	9	8	
		-13	8	16	11	A ₂
		6	-2	-4	0	
		
		1	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{16}{13}$	$-\frac{11}{13}$	
			$-\frac{22}{13}$	$-\frac{44}{13}$	$-\frac{66}{13}$	A ₃
			1	2	3	B
		1		0	1	
	1			3	4	
1				1	2	

Шундай килиб,

$$x_1=1; x_2=3; x_3=0; x_4=2$$

ечимига эга бўлдик.

БОШ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

Гаусс усулида етакчи элементлар доим ҳам нолдан фарқли бўлавермайди. Ба`зан эса улар нолга яқин сонлар бўлиши мумкин; бундай сонларга бўлганда катта абсолют хатога эга бўлган сонлар ҳосил бўлади. Бунинг натижасида тақрибий ечим аниқ ечимдан сёзиларли даражада четлашиб кэтади.

Ҳисоблашда бундай четлашишдан кўтилиш учун Гаусс усули бош элементни танлаш юли билан қўлланилади. Бу усулнинг Гаусс усулининг ихчам тархидан фарқи куйидагидан иборат. Фараз қилайлик, номаълумларни йўқотиш жараёнида ушбу тизимга эгамиз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \dots \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \dots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{n,n}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \quad \text{бу ерда}$$

$$b_{m,j}^{(m)} = \frac{a_{m,j}^{(m)}}{a_{mn}^{(m)}}; \quad a_{ij}^{(m)} = a_{i,j}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \quad (i, j \geq m+1)$$

Энди $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max |a_{m+1,j}^{(m)}|$ тенгликни қаноатлантирадиган к-рақамни топиб, ўзгарувчиларни қайта белгилаймиз: $x_{m+1}=x_k$ ва $x_k=x_{m+1}$. Сунгра (m+2) тенгламадан бошлаб, барчасидан x_{m+1} номаълумни йўқотамиз. Бундай канта белгилашлар йўқотиш тартибини ўзгартиришга олиб келади ва кўп ҳолларда ҳисоблаш хатолигини камайтиришга хизмат қилади.

Мисол. Бош элементлар усулидан фойдаланиб қуйидаги тизим ечилсин.

$$\begin{cases} 1,1161x_1 + 0,1254x_2 + 0,1397x_3 + 0,1490x_4 = 1,5471 \\ 0,182x_1 + 1,1675x_2 + 0,1768x_3 + 0,1871x_4 = 1,6471 \\ 0,1968x_1 + 0,2071x_2 + 1,2168x_3 + 0,2271x_4 = 1,7471 \\ 0,2368x_1 + 0,2471x_2 + 0,2568x_3 + 1,2671x_4 = 1,8471 \end{cases}$$

Тизимни ечиш жараёни қуйидаги 3.3- жадвалда келтирилсин.

3.3-жадвал

	u	m_u	a_{u1}	a_{u2}	a_{u3}	a_{u4}	a_{u5}	$\Sigma = a_{u6}$
И	1	0,11759	1,11610	0,1254	0,1397	0,1490	1,5471	3,07730
	2	0,14766	0,1582	1,1675	0,1768	0,1871	1,6471	3,33760
	3	0,17923	0,1968	0,2071	0,2168	0,2271	1,7471	3,59490
	4		0,2368	0,2471	0,2568	1,2671	1,8471	3,85490
ИИ	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10960		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
ИИИ	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	0,11170			1,20639	2,42301
ИВ	1		1,06616				1,10944	2,17560
В	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,93505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

бу ерда $m_u = a_{uk}/a_{nk}$; барча $u \neq n$ лар учун a_{nk} — бош элемент. Жадвалдан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 1,04059; x_2 = 0,98697;$$
$$x_3 = 0,93505; x_4 = 0,88130.$$

Такрорлаш учун саволлар:

1. Вектор нима?
2. Матрица нима?
3. Скаляр кўпайтма нима?
4. Векторнинг узунлиги деганда нимани тушунаси?
5. Квадрат матрица нима?
6. Матрицани векторга кўпайтмаси нима?
7. Матрицаларни бир-бирига кўпайтмаси қандай бажарилади?
8. Тескари матрица нима?
9. Бирлик матрица нима?
10. Гаусс усули нима?
11. Бош элементар усули нима?

6-МАВЗУ. Чизиқли алгебранинг тақрибий усуллари. Зейдел ва оддий итерация усуллари

Режа:

1. Итерацион усуллар.
2. Итерацион усулларнинг умумий характеристикаси.
3. Оддий итерацион усул.
4. Зейдел усули.
5. Усулларнинг ишчи алгоритмлари.

Таянч иборалар:

Итерация, стационар, рекуррент, ностационар, хатолик, параметр, эмпирик, бошлангич яқинлашиш, диагонал элементлар, ошкор усул.

1. ИТЕРАЦИОН УСУЛЛАР

Бугунда турли тамойил (принцип)ларга асосланган жуда кўплаб итерацион усуллар мавжуд. Умуман, бу усулларнинг, ўзига хос томонларидан бири шундан иборатки, пул куниланган хатоликлари ҳар кадамда тўғриланиб боради. Аниқ усуллар билан ишлаётганда, агар бирор кадамда хатога пул кунилса, бу хато охириги натижага ҳам таъсир қилади. Яқинлашувчи итерацион жараённинг бирор қадамида йўл қўйилган хатолик эса фақат бир неча итерация қадамини ортикча бажаришгагина олиб келади ҳолос. Бирор кадамда йўл қўйилган хатолик кейинги қадамларда тўзатилиб борилади. Боз устига бу усулларнинг ҳисоблаш тартиби содда бўлиб, уларни ЭҲМ ларда ҳисоблаш қулайдир. Лекин ҳар бир итерацион усулнинг қўлланиш соҳаси чегаралангандир. Чунки итерация жараёни берилган тизим учун ўзоклаши-ши ёки шунингдек, секин яқинлашиши мумкинки, бунинг оқибатида амалда ечимни коникарли аниқликда топиб бўлмайди.

Шунинг учун ҳам итерацион усулларда фақат яқинлашиш масаласигина эмас, балки яқинлашиш тўзлиги масаласи ҳам катта аҳамиятга эгадир. Яқинлашиш тўзлиги дастлабки яқинлашиш векторининг қулай танланишига ҳам борлиқдир.

Бу параграфда аввал итерацион усулларнинг умумий характеристикасини куриб чиқамиз, сўнгра эса ҳисоблаш амалиётида кенг қўлланиладиган итерацион усулларни келтирамиз.

2. ИТЕРАЦИОН УСУЛЛАРНИНГ УМУМИЙ ХАРАКТЕРИСТИКАСИ

Юқорида қайд этилганидек, итерацион усуллар тизимнинг изланган x ечимига яқинлашадиган y_0, y_1, y_2, \dots итерацион кетма-кетликларни куришга асосланган. Ҳар бир шундай усул навбатдаги y_{k+1} яқинлашишни аввалгилари ёрдамида ҳисоблашга имкон берадиган итерацион формулалар билан характерланади. энг содда ҳолда y_{k+1} ни

ҳисоблашда фақат битта аввалги y_k итерациядан фойдаланилади. Бундай усуллар бир кадамли дейилади. Бир кадамли усуллар учун итерацион формулани қуйидаги

$$B_{k+1} \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f \quad (3.17)$$

стандарт каноник кўринишда ёзиш қабул килинган; бунда τ_{k+1} - итерацион параметрлар ($\tau_{k+1} > 0$), B_{k+1} – ёрдамчи махсусмас матрицалар. Агар τ ва B лар $k+1$ индексга боғлиқ бўлмаса, яъни (3.17) формула ихтиёрий к лар учун бир хил кўринишга эга бўлса, у ҳолда бу итерацион усул **с т а ц и о н а р** у с у л дейилади. Стационар усуллар ҳисоб-лаш жараёнини ташкил етиш нуқтаи назаридан соддадир. Аммо ностационар усуллар бошқа устунликларга эга: улар $\{\tau_{k+1}\}$, $\{B_{k+1}\}$ кетма-кетликларни танлаш билан боғланган қушимча «еркинлик даражасига» эга. Бундан y_k итерациялар тизимнинг x ечимига яқинлашиш тезлигини оширишда фойдаланиш мумкин.

(3.17) итерацион формула ёрдамида навбатдаги y_{k+1} яқинлашишни топиш ушбу

$$B_{k+1} \check{y}_{k+1} = \Phi_{k+1} \quad (3.18)$$

тенгламалар тизимини ечишни талаб этади. Бунда

$$\Phi_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1} A) \check{y}_k + \tau_{k+1} \phi$$

Шундай ҳисоблашни қар бир кадамда бажаришга турри келади. B_{k+1} матрица сифатида бирлик $B_{k+1} = E$ матрица олсак, итерацион кетма-кетлик ҳадларини ҳисоблаш учун энг содда тархга эга бўла-миз. Бу ҳолда (3.17) формула кетма-кетликнинг навбатдаги y_{k+1} ҳадини унинг аввалги y_k ҳади орқали ошқор ифодалаш имконини беради:

$$\check{y}_{k+1} = \check{y}_k - \tau_{k+1} A \check{y}_{k+1} + \tau_{k+1} \phi \quad (3.19)$$

Ана шундай рекуррент формулага асосланган итерацион усуллар ошқор усуллар дейилади.

Ошқормас усуллар ($B_{k+1} \neq E$ орасида B_{k+1} матрицани учбурчакли килиб танланадиган усуллар энг кўп тарқалган. Бу колда навбатдаги y_{k+1} итерацияни топиш учун y_{k+1} нинг компонентларини (3.18) учбурчакли тизимдан бирин-кетин Гаусс усулининг тескари юришига килинганидек топишга келтирилади.

Қандайдир итерацион усулнинг қўлланиши $\{y_k\}$ кетма-кетлик тизимнинг x ечимига яқинлашишни билдиради:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x \quad (3.20)$$

(3.20) тенглик қуйидагини аңглатади:

$$\sqrt{(y_1^{(k)} - x_1)^2 + (y_2^{(k)} - x_2)^2 + \dots + (y_n^{(k)} - x_n)^2} \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

(3.21) дан кўринадики, y векторлар кетма-кетлигининг x векторга яқинлашишининг зарурий ва етарли шарти қар бир компонентнинг яқинлашувчилигидан иборат:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ушбу айирма $z_k = y_k - x$ хатолик дейилади. y_k ни $y_k = x + z_k$ кўринишда ёзиб ва (3.17) га қўйиб, хатолик учун,

$$B_{k+1} \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0 \quad (3.22)$$

итерацион формулами ҳосил киламиз. (3.17) дан фарқли уларок, у тизимнинг унғ томони (ϕ) ни ўз ичига олмайди, яъни бир жинслидир. (3.20) яқинлашишни талаб етиш z_k нинг нолга интилиши лозимлигини англатади:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0 \quad (3.23)$$

Ҳар бир итерацион усул яқинлашувчилигининг етарлилик шартлари A , B_{k+1} матрицалар ва τ_{k+1} итерацион параметрлар қаноатлантириши лозим бўлган кўринишда ифодаланади. Улардан баъзиларини, айниқса, итерацион параметрларни оптимал танлашга оид шартларни текшириш кийин. Натижада ҳисоблашларни бажараётганда итерацион параметрларни кўпинча тажриба юли билан (емпирик) танлашга турри келади.

3. ОДДИЙ ИТЕРАЦИОН УСУЛ

Фараз қилайлик,

$$Ax = \bar{b} \quad (3.24)$$

тизим бирор усул билан

$$x = Cx + \phi \quad (3.25)$$

кўринишга келтирилган бўлсин, бу ерда C — қандайдир матрица, ϕ - вектор устун. Дастлабки яқинлашиш вектори $x^{(0)}$ бирор усул билан (масалан, $x^{(0)} = 0$) топилган бўлсин. Агар кейинги яқинлашишлар

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + \phi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

рекуррент формула ёрдамида топилса, бундай усул оддий итерация усули дейилади.

Агарда C матрица элементлари

$$\sum_{i=1}^n |C_{ij}| \leq \alpha \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.26)$$

ва

$$\sum_{i=1}^n |C_{ij}| \leq \beta \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.27)$$

шартлардан бирортасини қаноатлантирса, у ҳолда итерацион жараён берилган тенгламанинг x ечимига ихтиёрий бошланғич $x^{(0)}$ векторда яқинлашиши исботланган, яъни

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

Шундай қилиб, тизимнинг аниқ ечими чексиз кадамлар натижасида -ҳосил қилинади ва ҳосил қилинган кетма-кетликнинг ихтиёрий вектори тақрибий ечимни беради. Бу тақрибий ечимнинг хатолигини қуйидаги формулалардан бири орқали ифодалаш мумкин:

$$\left(|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \right) \quad (3.28)$$

агарда (3.26) шарт бажарилса, ёки

$$\left(|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \right) \quad (3.29)$$

агарда (3.27) шарт бажарилса. Бу баҳоларни мос равишда қуйидагича кучайтириш мумкин:

$$m(x_i - x_i^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

ёки

$$\sum_{j=1}^n |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|$$

Итерацион жараёнларни юқоридаги баҳолар олдиндан берилган аниқликни қаноатлантирганда тугаллайдилар.

Бошлангич $x^{(0)}$ вектор, умуман олганда, ихтиёрий танланиши мумкин. Ба`зан $x^{(0)} = \phi$ деб олишади. Аммо $x^{(0)}$ векторнинг компонентлари сифатида номаълумларнинг қўпол тахминларда аниқла-нган қийматлари олинади.

(3.24) тизимни (3.25) кўринишга келтиришни бир неча хил усулларда амалга ошириш мумкин. Фақат (3.26) ёки (3.27) шартлардан бирортасининг бажарилиши лозим. Шундай усуллардан иккитасига тухталамиз.

"Биринчи усул. Агарда A матрицанинг диагонал элементлари нолдан фарқли бўлса, яъни

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

у ҳолда берилган тизимни

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases} \quad (3.30)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда C матрица элементлари қуйида-гича аниқланади:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \quad C_{ii} = 0$$

хамда (3.26) ва (3.27) шартлар мос равишда куйидаги кўринишни қабул килади:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq a < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.32)$$

(3.31) ва (3.32) тенгсизликлар A матрицанинг диагонал элементлари

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.33)$$

шартларни қаноатлантирганда ўринли бўлади.

Иккинчи усул. Бу усулни куйидаги мисол орқали намоиш киламиз.

Умуман олганда, ҳар қандай келтирилмаган матрицали тизим учун яқинлашувчи итерацион усуллар мавжуд, аммо уларнинг барчаси кисоблаш учун қулай эмас.

Агарда итерация усули яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу усул юко-рида курилган усуллардан куйидаги афзалликларга эга бўлади:

1. Итерацион жараён тезроқ яқинлашса, яъни тизимнинг ечимини аниқлаш учун n дан камроқ итерация талаб килинса, у ҳолда вақтдан ютилади, чунки арифметик емаллар сони n^2 га мутаносиб (пропорционал) (Гаусс усули учун эса бу сон n^3 га мутаносиб).

2. Яхлитлаш хатоликлари итерация усулида натижага камроқ таъсир этади. Бундан ташқари итерация усули ўз хатолигини тўғрилаб борувчи усулдир.

3. Итерация усули тизимнинг муайян коэффициентлари нолга тенг бўлган колда жуда ҳам қулайлашади. Бундай тизимлар хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламаларни ечганда кўпроқ учрайди.

4. Итерация жараёнида бир хил турдаги амаллар бажарилади, бу эса $EX.M$ учун программалаштиришни осонлаштиради.

1- мисол. Куйидаги тизим оддий итерация усули билан ечилсин:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 25x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19 \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases}$$

Е ч и ш . Биринчи усулда айтилганидек, бу тизимнинг тенгламаларини мос равишда 10, 25, - 20, 10, 20 ларга бўлиб, куйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_1 = 0,6 - 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,1x_5 \\ x_2 = 0,44 + 0,04x_1 - 0,04x_3 + 0,2x_4 + 0,08x_5 \\ x_3 = 0,95 + 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_4 - 0,15x_5 \\ x_4 = 1 - 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_5 \\ x_5 = 1,6 + 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,1x_4 \end{cases}$$

бу ерда (3.31) шарт бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 |C_{1j}| &= 0,3 < 1; & \sum_{j=1}^5 |C_{2j}| &= 0,28 < 1; \\ \sum_{j=1}^5 |C_{3j}| &= 0,41 < 1; & \sum_{j=1}^5 |C_{4j}| &= 0,5 < 1; \\ \sum_{j=1}^5 |C_{5j}| &= 0,3 < 1; \end{aligned}$$

Дастлабки яқинлашиш $x^{(0)}$ сифатида озод ҳадлар устуни (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ни олиб кейинги яқинлашишларни топамиз:

$$x_1^{(1)} = 0,6 - 0,1x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} =$$

$$0,6 - 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1,6 = 0,881$$

$$x_2^{(1)} = 0,44 + 0,04 \cdot 0,6 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1,6 = 0,754$$

Шунга ўхшаш $x_3^{(1)} = 0,892$; $x_4^{(1)} = 1,851$; $x_5^{(1)} = 1,72$. Ҳисоблашларнинг давомини 3.4-жадвалда келтирамиз:

3.4-жадвал

к	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,754	0,892	1,851	1,72
2	0,9884	0,9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0,99753	0,99789	1,99364	1,99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0,99986	0,99989	0,99977	1,99976	1,99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0,999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Юқоридаги 3.4-жадвалдан кўрамизки, 8-итерация $x_1 = 0,999974$; $x_2 = 0,999951$; $x_3 = 0,999998$; $x_4 = 2,00004$; $x_5 = 1,99998$ ечимдан иборат. Бу топилган тақрибий ечим аниқ ечим

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1; \quad x_4^* = x_5^* = 2$$

дан бешинчи хонанинг бирликлари бўйичагина фарқланади.

2- мисол.

$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795 \\ -0,11x_1 - 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849 \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398 \end{cases}$$

тизимни 3 та итерация бажариб ечинг ва хатолигини баҳоланг.

Е ч и ш . Берилган тизим-матрицанинг диаганал элементлари бирга яқин, колганлари эса бирдан анча кичик.

Шу сабабли итерация усулини қўллаш учун берилган тизимни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,795 - 0,02x_1 + 0,05x_2 + 0,10x_3; \\ x_2 &= 0,849 + 0,11x_1 - 0,03x_2 + 0,05x_3; \\ x_3 &= 1,398 + 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,04x_3. \end{aligned}$$

(3.31) яқинлашиш шarti бу тизим учун бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |C_{1j}| &= 0,02 + 0,05 + 0,10 = 0,17 < 1 \\ \sum_{j=1}^3 |C_{2j}| &= 0,11 + 0,03 + 0,05 = 0,19 < 1 \\ \sum_{j=1}^3 |C_{3j}| &= 0,11 + 0,12 + 0,04 = 0,27 < 1 \end{aligned}$$

Бошлангич яқинлашиш $x^{(0)}$ сифатида озод ҳадлар устуни элементларини икки хона аниқликда оламиз

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,85 \\ 1,40 \end{pmatrix}$$

Энди кетма-кет қуйидагиларни аниқлаймиз:

$k = 1$ да

$$x_1^{(1)} = 0,795 - 0,016 + 0,0425 + 0,140 = 0,9615 \approx 0,962$$

$$x_2^{(1)} = 0,849 + 0,088 - 0,255 + 0,070 = 0,9815 \approx 0,982$$

$$x_3^{(1)} = 1,398 + 0,088 + 0,1020 - 0,056 = 1,532$$

$k = 2$ да

$$x_1^{(2)} = 0,980, \quad x_2^{(2)} = 1,004, \quad x_3^{(2)} = 1,563$$

$k = 3$ да

$$x_1^{(3)} = 0,980, \quad x_2^{(3)} = 1,004, \quad x_3^{(3)} = 1,563$$

Номаълумларнинг $k=2$ ва $k=3$ даги қийматлари $3 \cdot 10^{-3}$ дан камроқ фарқ қилапти, шунинг учун номаълумларнинг тақрибий қийматлари сифатида

$$x_1 \approx 0,980, \quad x_2 \approx 1,004, \quad x_3 \approx 1,563$$

ларни оламиз.

4. ЗЕЙДЕЛ УСУЛИ

Зейдел усули чизикли бир кадамли биринчи тартибли итерацион усулдир. Бу усул оддий итерацион усулдан шу билан фарқ киладики, дастлабки яқинлашиш $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ га кўра $x_1^{(1)}$ топилади. Сўнгга $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ кўра $x_2^{(1)}$ топилади ва х.к. Барча $x_1^{(1)}$ лар аниқлангандан сўнг $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots$ лар топилади. Аниқроқ айтганда, ҳисоблашлар қуйидаги тарх (схема) бўйича олиб борилади:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(k+1)}$$

3.3.2. даги яқинлашиш шартлари Зейдел усули учун ҳам ўринлидир. Кўпинча Зейдел усули оддий итерация усулига нисбатан яхшироқ яқинлашади, аммо ҳар доим ҳам бундай бўлавермайди. Бундан таш-қари Зейдел усули программалаштириш учун қулайдир, чунки $x_i^{(k+1)}$ нинг қиймати ҳисобланаётганда $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ ларнинг қийматини саклаб қолишнинг ҳожати йўқ.

Мисол. Зейдел усули билан 3.3.2. даги 1- мисолнинг ечими 5 хона аниқликда топилсин.

Е ч и ш . Тизимни

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,6 - 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,1x_5, \\ x_2 &= 0,44 + 0,04x_1 - 0,04x_3 + 0,2x_4 + 0,08x_5, \\ x_3 &= 0,95 + 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_4 - 0,15x_5, \\ x_4 &= 1 - 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_5, \\ x_5 &= 1,6 + 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,1x_4 \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз ва дастлабки яқинлашиш x сифатида оддий итерация усулидагидек $x = (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6)$ деб оламиз.

Итерациянинг биринчи кадамини бажарамиз:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0,6 - 0,1 x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} = \\ &= 0,6 - 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1,6 = 0,881 \\ x_2^{(1)} &= 0,44 + 0,04 x_1^{(1)} - 0,04x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} + 0,08x_5^{(0)} = \end{aligned}$$

$$= 0,44 + 0,04 \cdot 0,881 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 - 0,08 \cdot 1,6 = 0,771$$

$$x_3^{(1)} = 0,95 + 0,1 x_1^{(1)} + 0,05x_2^{(1)} + 0,1x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} =$$

$$= 0,95 + 0,1 \cdot 0,881 + 0,05 \cdot 0,771 + 0,1 \cdot 1 - 0,15 \cdot 1,6 = 0,937$$

$$x_4^{(1)} = 1 - 0,1 x_2^{(1)} + 0,1x_3^{(1)} + 0,5x_5^{(0)} = 1,817$$

$$x_5^{(1)} = 1,6 + 0,05x_1^{(1)} + 0,1x_2^{(1)} + 0,05x_3^{(1)} + 0,1x_4^{(1)} = 1,948$$

Кейинги яқинлашишларни 3.5- жадвалда келтирамиз:

3.5-жадвал

к	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1,974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1,99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2,00000

Кўриниб турибдики, Зейдел усули оддий итерация усулига нисбатан тезроқ яқинлашмоқда.

Такрорлаш учун саволлар:

1. Итерацион усул нима?
2. Стационар усул нима?
3. Ошкор усуллар нима?
4. ошкормас усуллар нима?
5. Биринчи усул нима?
6. Иккинчи усул нима?
7. Бошланғич яқинлашиш нима?
8. Зейдел усули нима?
9. Зейдел усулининг оддий итерация усулидан фарқи?

ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ

Режа:

1. Чизиқли бўлмаган тенгламалар тизимининг моҳияти ва аҳамияти.
2. Кетма – кет (бошланғич) яқинлашиш усули.
3. Усулнинг ишчи алгоритми.

Таянч иборалар:

Хусусий ҳосила, чизиқли тенглама, оддий итерация, чизиқли бўлмаган тенглама, узлуксиз тизим, бошлангич яқинлашиш, квадрат тўғри туртбурчак, биринчи яқинлашиш, иккинчи яқинлашиш.

1. ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ МОХИЯТИ ВА АҲАМИЯТИ

Шу пайтгача биз фақат чизиқли тенгламалар тизимини ечиш усуллари билан танишдик. энди тенгламалар тизими чизиқли бўлмаган ҳол устида тухталамиз. Соддалик учун икки номаълумли иккита чизими бўлмаган тизимни оддий итерация усули билан ечишга тухталамиз. Бундай тизим қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Фараз қилайлик бошлангич x , y яқинлашишлар берилган бўлсин. Берилган тизимни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \quad (3.35)$$

ҳамда бу тизимнинг унғ томонидаги x ва y лар ўрнига бошлангич яқинлашиш x_0 , y_0 ларни қўйиб, биринчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0, y_0) \\ y_1 = \Phi(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.36)$$

Худди шунингдек иккинчи яқинлашишни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_2 = F(x_1, y_1) \\ y_2 = \Phi(x_1, y_1) \end{cases} \quad (3.37)$$

ва умуман

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{cases} \quad (3.38)$$

Агарда (x, y) ва $\Phi(x, y)$ функциялар узлуксиз, ҳамда $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ва $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, x ҳолда уларнинг лимитлари берилган тенгламанинг ечими бўлади.

2. КЕТМА – КЕТ (БОШЛАНГИЧ) ЯҚИНЛАШИШ УСУЛИ

Юқорида келтирилган итерацион жараённинг яқинлашувчи бўлиш шартларига тухталамиз.

Теорема, x ва \bar{y} (3.34) тизимнинг аниқ ечимлари, $a < \bar{x} < b$, $c < \bar{y} < d$ бўлиб, $x=a, x=b$, $y=c$ ва $y=d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри туртбурчак ичида бошқа ечимлар йўқ бўлса, u холда кўрсатилган турри туртбурчакда қуйидаги

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \leq P_1, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq q_1, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq P_2, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \leq q_2$$

($P_1 + P_2 \leq M < 1$ ва $q_1 + q_2 \leq M < 1$) тенгсизликлар бажарилса, итерацион жараён яқинлашувчи бўлади ва бошлангич яқинлашиш x, y сифатида турри туртбурчакнинг ихтиёрий нуқтасини олиш мумкин.

Теореманинг исботини келтириб утирмаймиз.

Мисол

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ \varphi(x, y) = x^3 - y^3 - 6x + K = 0 \end{cases}$$

тизимнинг мусбат ечимини итерацион усул билан уч хона аниқликда топим.

Берилган тизимни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} = F(x, y)$$

$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} = \Phi(x, y)$$

$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ квадратни қараймиз. Агарда x_0, y_0 нуқта шу квадратга тегишли бўлса, u холда $0 < \Phi(x_0, y_0) < 1$ ва $0 < F(x_0, y_0) < 1$ бўлади. (x_0, y_0) бошлангич яқинлашиш қандай танланишидан катъи назар (x_k, y_k) яқинлашишлар квадратга тегишли бўлади, чунки

$$0 < (x_0^3 + y_0^3) / 6 < \frac{1}{3}$$

$$-1/6 < (x_0^3 - y_0^3) / 6 < \frac{1}{6}$$

Бундан ташқари (x_k, y_k) нуқталар $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ квадратга тегишли. Бу квадрат

нуқталари учун:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25}{36} + \frac{1}{4} = \frac{34}{72} < 1$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \frac{x^2}{2} + \left| \frac{y^2}{2} \right| < \frac{34}{72} < 1$$

бажарилади.

Демак, кўрсатилган квадратда тизим ягона ечимга эга ва уни итерацион усулда аниқлаш мумкин.

$x_0 = \frac{1}{2}$ ва $y_0 = \frac{1}{2}$ деб оламиз, у холда

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0,542, \quad y_1 = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0,333$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0,542^3 + 0,333^3}{6} = 0,533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0,542^3 - 0,333^3}{6} = 0,354$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{0,533^3 + 0,354^3}{6} = 0,533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0,533^3 - 0,354^3}{6} = 0,351$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{0,533^3 + 0,351^3}{6} = 0,532$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0,533^3 - 0,351^3}{6} = 0,351$$

Бу ерда $\kappa_1 = \kappa_2 = 34/72 < 0,5$ бўлгани сабабли биринчи учта унлик рақамларнинг мос тушганлиги керакли аниқликдаги ечимни топиш имкониятини беради. Шундай қилиб қўйндаги ечимга эга бўлдик.

$$x = 0,532; \quad y = 0,351$$

Такрорлаш учун саволлар:

1. Биринчи яқинлашиш қандай аниқланади?
2. Иккинчи яқинлашиш қандай аниқланади?
3. Бошлангич яқинлашиш ҳақидаги теорема?
4. Бошлангич яқинлашиш қандай шартга асосан топилади?
5. Тўғри туртбурчакнинг ифодаловчи тенгламани ёзинг.
6. Итерацион жараён яқинлашуви шартини ёзинг.
7. Ошкор функция нима?
8. Ошкормас функция нима?
9. Нуқтани квадратга тегишлилик шартини ёзинг.
10. Узлуксизлик функция нима?

7-Мавзу: Хос қийматларни тўлиқ муаммоси. Крилов ва Данилевский методлари. Хос қийматларнинг қисмий муаммолари.

Асосий тушунчалар: Матрицанинг хос сонлари, хос векторлари, Гамильтон-Келли теоремаси, симметрик матрицалар учун хос сонларнинг хоссалари, энг катта хос сони топиш учун итерация усули.

Асосий натижалар:

1. Хос сонлар ва хос векторлар: $Ax = \lambda x, x \neq 0,$

2. Симметрик матрицанинг хос сонлари: $\lambda \in R, \lambda \neq \mu \triangleright (x, y) = 0.$

3. Энг катта хос сон учун итерация усули:

$$x^k = \lambda_k Ax^{k-1}, x^0 \in R^n, \|x^k\| = 1, \lambda_k \rightarrow \lambda_{\max}, k \rightarrow \infty.$$

4. Характеристик тенглама қуришининг Леверье-Фадеев усули.

5. Алгоритм ва дастурлар.

1. $A[a_{ij}], i, j = 1, \dots, n$ квадрат, ҳақиқий элементли матрица берилган бўлсин, $A: R^n \rightarrow R^n$, E - бирлик матрица бўлсин.

Ушбу

$$Ax = \lambda x, x \neq 0, \quad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи λ сон A матрицанинг хос сони, $x \neq 0$ вектор эса хос вектори дейилади.

A матрицанинг барча хос сонлари топиш хос сонлар проблемаси дейилади. Кўрайликчи, бу масала нимага олиб келар экан. (1) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Ax - \lambda Ex = (A - \lambda E)x = 0. \quad (2)$$

(2) бир жинсли система, у ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун, унинг детерминанти 0 га тенг бўлиши керак: $\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0.$

Лекин,

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун,

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n + \rho_1 \lambda^{n-1} + \rho_2 \lambda^{n-2} + \dots + \rho_n) = 0. \quad (3)$$

(3) тенглама A матрицанинг характеристик (асрий) тенгламаси дейилади. У n -даражали алгебраик тенглама. Шундай қилиб, хос сонларни топиш учун алгебраик n -даражали характеристик тенгламани барча ечимларини топиш керак экан.

Алгебранинг асосий теоремасига асосан, характеристик тенглама алгебраик n -даражали тенглама бўлганлиги учун, ҳар қандай A -матрица карралари, комплекс илдизларини ҳисобга олганда n -та хос сонларга эга.

Гамильтон-Келли теоремаси. Ҳар қандай матрица ўз характеристик тенгламасини қаноатлантиради: $\det(A - \lambda E) = \det(A - AE) = 0.$

Амалиётда, кўпинча матрицанинг бир неча хос сонларини топиш талаб этилади, масалан, энг кичик ва энг катта хос сонларни. Уларни топиш, хос сонларнинг хусусий проблемаси дейилади. Барча хос сонларни топиш хос сонларнинг тўлиқ проблемаси дейилади. Энг кичик хос сони топиш бошқа матрицанинг энг катта хос сони топиш масаласига келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, $Ax = \lambda x \leftrightarrow A^{-1}x = x/\lambda$ эканлигидан. A -матрица учун энг катта хос сон, $B = A^{-1}$ матрица учун энг кичик хос сон экан.

Хос сонларни топишнинг бир қанча усуллари мавжуд:

1) Энг катта (энг кичик) хос сонни топишнинг итерация усули.

- 2) Аввал характеристик тенгламани, сўнг уни ечиш усуллари (Крылов, Леверье, Фадеев, интерполяция, ноъмалум коэффицентлар ва хоказо);
 3) Хос сонларни характеристик тенглама тузмасдан топувчи, матрицаларни алмаштиришга асосланган итерация усуллари (Якоби, ...).

2. Матрица ўзининг транспортирланганига (комплекс қўшмасига) тенг бўлса, ёки R^n да скаляр кўпайтма маъносида

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, Ay), \quad x, y \in R^n \quad (4)$$

тенгликни қаноатлантирса симметрик дейилади.

Симметрик матрица учун хос сонлар ҳақида қуйидаги фикрлар ўринли:

Теорема 1. Симметрик матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ҳар хил хос сонларга мос векторлар ўзаро ортогонал.

Исбот. $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$ бўлсин. Таърифга асосан,

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

Шунинг учун, $(\lambda - \bar{\lambda})(x, x) = 0$. $x \neq 0$ эканлигидан $\lambda = \bar{\lambda} = \lambda_1 \in R$. Иккинчидан,

$$(Ax, y) = \lambda(x, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Шунинг учун, $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$. $\lambda \neq \mu$ десак $(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$

$T^* T = E$ шартни қаноатлантирувчи матрицалар ортогонал матрицалар дейилади, равшанки, улар учун $T^* T^{-1} = A + T^* B T$ шarti қаноатлантирувчи матрицалар ўхшаш дейилади.

Теорема 2. Ўхшаш матрицалар бир хил сон сонларга эга, хос векторлар ўзаро чизиқли боғланган.

Исбот. $Ax = \lambda x$, бўлсин, y ҳолда $Ax = T^* B T x = \lambda x$, $m T x = y$ десак

$$T^* B y = \lambda x = \lambda T^{-1} y \Rightarrow B y = (T^*)^{-1} \lambda T^{-1} y = \lambda (T^* T)^{-1} y = \lambda E y = \lambda y$$

Яъни, $B y = \lambda y$ ва $y = T x$ экан.

3. $Ax = \lambda x$ масалада энг катта хос сони топишга киришамиз, Бирор $x^{(0)} \in R^n$ вектор олиб $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$, $k=1,2,\dots$, векторлар кетма-кетлиги қурамиз.

Теорема 3. $x^{(0)} \in R^n$ ихтиёрий бошланғич вектор учун $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = Ax^{(k)}$ кетма-кетлик қурилган бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \lambda_{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Исбот. $A e_i = \lambda_i e_i$ бўлсин, $i = 1, \dots, n$. Фараз қилайлик,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Равшанки, $x^{(0)} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ десак,

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \lambda_1 a_1 e_1 + \dots + \lambda_n a_n e_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} = \lambda_1^k a_1 e_1 + \dots + \lambda_n^k a_n e_n$$

$$e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in}) \quad \text{десак} \quad x_1^{(k)} = \lambda_1^k a_1 e_{1i} + \dots + \lambda_n^k a_n e_{ni}, \quad \text{ва}$$

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \frac{\lambda_1^k a_1 e_{1i} + \dots + \lambda_n^k a_n e_{ni}}{\lambda_1^{k-1} a_1 e_{1i} + \dots + \lambda_n^{k-1} a_n e_{ni}} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \mu_2^k (a_2 e_{2i} / a_1 e_{1i}) + \dots + \mu_n^k (a_n e_{ni} / a_1 e_{1i})}{1 + \mu_2^{k-1} (a_2 e_{2i} / a_1 e_{1i}) + \dots + \mu_n^{k-1} (a_n e_{ni} / a_1 e_{1i})} = \lambda_1 + O(|\mu_2|^{k-1}),$$

бу ерда $\mu_i = \lambda_i / \lambda_1$, $i > 1$. Яъни,

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \lambda_1 + O(|\mu_2|^{k-1}). \quad (6)$$

Бу ердан (5) келиб чиқади.

4. Характеристик кўпхадни топишнинг ноъмалум коэффициентлар усули.

$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = p_0 + p_1 \lambda + \dots + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ дейлик. p_i коэффициентларни топиш учун

$$D(i) = d_i, i=0, \dots, n-1, \quad (7)$$

Детерминантларни ҳисоблайлик. Равшанки, p

$$p_0 = d_0,$$

$$p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} + 1^n = d_1,$$

$$p_0 + 2p_1 + \dots + 2^{n-1} p_{n-1} + 2^n = d_2, \quad (8)$$

.....,

$$p_0 + (n-1)p_1 + \dots + (n-1)^{n-1} p_{n-1} + (n-1)^n = d_{n-1}.$$

Бу ердан дарров келиб чиқадики, $p_0 = d_0$ ва

$$p_1 + \dots + p_{n-1} = d_1 - d_0 - 1^n,$$

$$p_0 + 2p_1 + \dots + 2^{n-1} p_{n-1} = d_2 - d_0 - 2^n,$$

....., (9)

$$(n-1)p_1 + \dots + (n-1)^{n-1} p_{n-1} = d_{n-1} - d_0 - (n-1)^n.$$

Энди ушбу матрица ва векторларни киритамиз:

$$M = [m_{ij}] = [i^j], i, j = 1, \dots, n-1, p = [p_1, p_2, \dots, p_{n-1}], b = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}], b_i = d_i - d_0 - i^n.$$

Натижада (7.9) системани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$Mp = b \quad (10)$$

M матрицанинг детерминанти нолдан фаркли, у Вандермонд детерминантининг миноридир. Уни ечиб $p = M^{-1}b$ формуладан характеристик тенгламанинг коэффициентларини топамиз. Характеристик тенгламани бирор усул билан ечиб хос сонларни топамиз. Тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топишда Рыбаков усули жуда қулай.

iusul;

8-Mavzu: ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR (ODT) UCHUN QO'YILGAN KOSHI MASALASINI YECHNI BIR QADAMLI USSULLARI.

Ishdan maqsad: Birinchi tartibli differensial tenglamani Runge -Kutta usulida yechishni talabalarga o'rgatish quyidagilarni o'z ichiga oladi:

- differensial tenglamani integrallashga sonli usulni qo'llash;
- hisoblash ishini tashkil qilish va bajarish;
- masalani yechish dasturini tuzish va sonli natijalar olish.

Masalaning qo'yilishi.

Биринчи tartibli differensial tenglama

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$[x_0, b]$ kesmada

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (2)$$

boshlang'ich shart bilan berilgan bo'lsin. $x=b$ nuqtada noma'lum $y=y(x)$ funksiyaning qiymatini taqribiy hisoblash talab qilinsin.

Agar berilgan masalaning $y=\varphi(x)$ yechimini topish mumkin bo'lganda, $x=b$ nuqtada, ravshanki, $y|_{x=b}=\varphi(b)$ ni topishimiz mumkin bo'ladi. Lekin aksariyat hollarda masalaning umumiy yechimini topib bo'lmaydi. Bunday hollarda taqribiy (sonli) usullar qo'llaniladi.

Differensial tenglamani integrallashning eng keng tarqalgan sonli usullaridan biri Runge -Kutta usulidir.

Bu usul har xil tartibli aniqlikdagi sxemalarni qurishdan iborat bo'ladi. Bu sxemalar EHMda hisoblash uchun juda qulay hisoblanadi. Ko'pgina qo'llaniladigan sxemalar to'rtinchi tartibli aniqlikda bo'ladi. Hozirda ulardan amaliy hisoblashlarda foydalanilmoqda.

Usul tavsifi $[x_0, b]$ kesmada hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

berilgan bo'lsin va $x = x_0$ nuqtada $y = y_0$ boshlang'ich shart o'rinli bo'lsin.

$H = \frac{b - x_0}{n}$ qadamni tanlaymiz va quyidagi belgilashni kiritamiz: $x_i = x_0 + ih$ va

$y_i = y(x_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Quyidagi sonlarni qaraymiz:

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \quad K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{H}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{H}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \quad K_4^{(i)} = hf\left(x_i + H, y_i + K_3^{(i)}\right) \quad (3)$$

Runge – Kutta usuli bo'yicha $x_{i+1} = x_i + H$ nuqtada taqribiy yechimning y_{i+1} qiymati quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (4)$$

bu yerda $\Delta y_i = \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)})$ ($i = 0, 1, 2, \dots$)

Bu usul bo'yicha bajariladigan hisoblashlar quyidagi jadvalga sxema bo'yicha joylashtiriladi:

1 –jadval

i	x	y	$K = H \cdot f(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{H}{2}$	$y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$K_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{H}{2}$	$y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$K_3^{(0)}$
	$x_0 + H$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0

1	x_1	y_1		
---	-------	-------	--	--

I —jadvalni to'ldirish tartibi.

- 1) Jadvalning birinchi satriga x_0, y_0 berilgan qiymatlarni yozamiz.
- 2) $f(x_0, y_0)$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_1^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.
- 3) Jadvalning ikkinchi satriga $x_0 + \frac{H}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}$ larni yozamiz.
- 4) $f(x_0 + \frac{H}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2})$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_2^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.
- 5) Jadvalning uchinchi satriga $x_0 + \frac{H}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}$ larni yozamiz.
- 6) $f(x_0 + \frac{H}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2})$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_3^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.
- 7) Jadvalning to'rtinchi satriga $x_0 + H, y_0 + K_3^{(0)}$ larni yozamiz.
- 8) $f(x_0 + H, y_0 + K_3^{(0)})$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_4^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.
- 9) Δy ustuniga $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ larni yozamiz.
- 10) Δy ustundagi sonlarning yig'indisi 6 gabo'lib, Δy_0 sifatida jadvalga yozamiz.
- 11) $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ ni hisoblaymiz.

Keyingi navbatda (x_1, y_1) ni boshlang'ich nuqta sifatida qarab hisoblashlarni shu singari davom qildiramiz.

Runge-Kutta usuli yordamida EHMLarida qadamni avtomatik tanlab hisoblashlar bajarilganda hasoblashlar ikki marta bajariladi. Birinchisida H qadam bilan, ikkinchisida esa $h = \frac{H}{2}$ qadam bilan. Agar bu holda olingan y_i ning qiymatlari berilgan aniqlikdan oshsa, u holda keyingi x_{i+1} nuqtagacha qadam ikkilanadi, aks holda yarim qadam qo'llaniladi.

**ODDIY DIFFERENTIAL TENGLAMALAR (ODT) UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI
TAQIRIBIY YECHISH USULLARI. KOLLOKATSIYA, ENG KICHIK KVADRATLAR, SOHACHALAR,
GALYORKIN USULLARI**

Ma`ruza rejasi:

1. ODT uchun chegaraviy masalalarni (ChM) echish usullari tasnifi;
2. 2-tartibli ODT uchun ChMning umumiy qo`yilishi;
3. Tafovut funktsiyani tuzish;
4. Kollokatsiya usuli;
5. Integral va diskret shakldagi eng kichik kvadratlar usullari;
6. Sohachalar usuli;
7. Galyorkin usuli;
8. Vaznli tafovutlar usuli haqida umumiy ma`lumotlar.

Kalit so`zlar: ODT uchun chegaraviy masalalar, tafovut, bazis funktsiyalar sistemasi, tafovutni minimallashtirish.

1. Chegaraviy masalalarni echish usullari

ODT uchun ChMni echishda samarali taqribiy va sonli usullar ishlab chiqilgan. Taqribiy usullarga kollokatsiya, eng kichik kvadratlar, sohachalar usullari, bundan tashqari samarali va universal bo`lgan Galyorkin usuli kiradi.

ODT uchun chegaraviy masalalarni sonli echish usullari ayirmali echimni tuzishga asoslangan. Ayirmali usullar o`zining qulayligi va o`ta universalligi sababli keng qo`llaniladi.

2. Tafovutni minimallashtirish usullari

ChM quyidagidan iborat. Quyidagi differentsial tenglamaning

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

ikkita chegaraviy shartlarni

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = \gamma_0, \\ l_1 u &\equiv \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1, \end{aligned} \quad (2)$$

qanoatlantiruvchi echimini topish talab etiladi, bu erda $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$ – berilgan funktsiyalar, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ - berilgan sonlar, ya`ni

$$\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, \quad j = 0, 1.$$

Agar (2) shartlarda $\alpha_j = 1, \beta_j = 0$ bo`lsa, u holda bu chegaraviy shartlar birinchi tur bo`ladi. Agar $\alpha_j = 0, \beta_j = 1$ bo`lsa, ikkinchi tur chegaraviy shart deyiladi. Umumiy holda $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0$ bo`lganda, (2) shartga uchinchi tur chegaraviy shart deb ataladi.

(1), (2) masalani echishga quyidagicha kirishamiz. Berilgan $[a, b]$ kesmada ikki marta uzluksiz diffeentsiallanuvchi (ya`ni, $S^{(2)}[a, b]$ fazodagi funktsiyalar) chiziqli bo`liq bo`lmagan $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$, funktsiyalar sistemasini tanlaymiz. Bunda, φ_0 funktsiya (2) chegaraviy shartlarni

bu erda a_m ($m=1,2,\dots,M$) – qandaydir parametrlar. Bazis funktsiyalar ba`zan forma funktsiyalari yoki namuna funktsiyalari deyiladi.

$\{N_m\}$ sistema shunday xossaga ega bo`lishi kerakki, $\psi|_r = \varphi|_r$ shartni qanoatlantiruvchi $M \rightarrow \infty$ da $\psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m$ kombinatsiya ixtiyoriy φ funktsiyani etarlicha aniqlikda ifodalashi lozim. Bu to`lalik sharti deb ataladi.

Approksimatsiyada $R_\Omega = \varphi - \hat{\varphi}$ qoida bo`yicha aniqlanadigan R_Ω xatolik yoki tafovut tushunchasini kiritamiz.

R_Ω - Ω ning nuqtalari koordinatalaridan bo`liq funktsiya. Ω sohada bu tafovutni kamaytirish uchun, turli vaznlar bilan olingan xatolik integrallarini nolga tenglashishini talab qilamiz, ya`ni

$$\int_{\Omega} W_l (\varphi - \hat{\varphi}) d\Omega = \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0, \quad l = \overline{1, M}, \quad (10)$$

bunda $\{W_l, l = 1, 2, 3, \dots\}$ - chiziqli erkli vaznli funktsiyalar to`plami.

(9) ni (10) ga qo`ysak vaznli tafovutlar usuli tenglamalari sistemasi a_m ga nisbatan ChATSGa keladi. Uni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin

$$Ka = f,$$

bu erda

$$\begin{aligned} a^T &= (a_1, a_2, \dots, a_m), \\ k_{lm} &= \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M, \\ f_l &= \int_{\Omega} W_l (\varphi - \psi) d\Omega, \quad l = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Amaliyotda turli $\{W_l\}$ vaznli funktsiyalar sistemasi ishlatilishi mumkin. Bunda turli vaznli tafovutlar vositasida olinadigan approksimatsiya usullariga ega bo`lamiz.

1. Nuqtali kollokatsiya

Bu erda $W_l = \delta(x - x_l)$, bunda δ - del'ta - Dirak funktsiyasi. U holda

$$k_{lm} = N_m|_{x=x_l}, \quad f_l = [\varphi - \psi]_{x=x_l}.$$

2. Sohachalar bo`yicha kollokatsiya

Bunda

$$W_l = \begin{cases} 1, & x_l < x < x_{l+1}, \\ 0, & x < x_l, \quad x > x_{l+1}. \end{cases}$$

U holda

$$k_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_m dx, \quad f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\varphi - \psi) dx.$$

3. Galyorkin usuli

Bu erda vaznli funktsiyalar sifatida bazis funktsiyalarning o'zi tanlanadi, ya'ni

$$W_l = N_l.$$

Ushbu holda

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m dx, \quad f_l = \int_{\Omega} N_l (\varphi - \psi) dx.$$

Bu erda K matritsaning simmetrikligi hisoblash usullarining yuturini ta'minlashini ta'kidlab o'tish lozim.

Quyida

$$\Gamma \text{ da } B(\varphi) = Z\varphi + r = 0$$

chegaraviy shartli

$$\Omega \text{ da } A(\varphi) = L\varphi + p = 0,$$

differentzial tenglamani qaraymiz. Bunda L, Z - chiziqli differentzial operatorlar, p, r lar φ dan bo'riq emas.

(9) ifodani Γ da $Z\psi = -r, \quad ZN_m = 0$ shartlar bilan aniqlaymiz. Shuning uchun φ avtomatik ravishda chegaraviy shartni qanoatlantiradi.

Tafovut quyidagicha aniqlanadi

$$R_{\Omega} = A(\hat{\varphi}) = L\hat{\varphi} + p = L\psi + \sum_{m=1}^M a_m LN_m + p.$$

Vaznli tafovutlar usuliga muvofiq

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l \left\{ L\psi + \sum_{m=1}^M a_m LN_m + p \right\} d\Omega = 0. \quad (11)$$

Har bir $l = 1, 2, \dots, M$ lar uchun (11) ni qo'llab ChATSni olamiz

$$Ka = f, \quad (12)$$

bunda

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad l, m = \overline{1, M},$$

$$f_l = -\int_{\Omega} W_l L\psi d\Omega - \int_{\Omega} W_l p d\Omega, \quad l = \overline{1, M}.$$

(12) ni echib a_m larni aniqlaymiz.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. ODT uchun chegaraviy masalalarni echishning qanday usullari mavjud?
2. 2-tartibli ODT uchun umumiy ChM qanday qo'yiladi?
3. Bazis funktsiyalar va ularning sistemasi qanday xossalarga ega?
4. Tafovut funktsiyasi qanday tuziladi?
5. Kollokatsiya, eng kichik kvadratlar, vaznli tafovutlar usullarining asosida qanday asosiy g'oyalari yotadi?

**CHEKLI AYIRMALI SXEMALAR (CHAS) TO`G`RISIDA TUSHUNCHALAR.
DIFFERENTIAL OPERATORNING CHEKLI AYIRMALI (CHA)
APPROKSIMATSIYASI. CHA MASALANING QO`YILISHI. APPROKSIMATSIYA,
KORREKTLIK, TURG`UNLIK, YAQINLASHISH VA ULAR O`RTASIDA
BOG`LANISH**

Ma`ruza rejasi

1. Sohani diskretlash, tekis va notekis to`rlar;
2. H_0 va H_h funktsional fazolar, ularning elementlarini taqqoslash;
3. Oddiy differensial operatorlar (ODO)ning ayirmali approksimatsiyasi;
4. To`rda approksimatsiya xatoligi;
5. Sxemalar yaqinlashishi va aniqliligi;
6. Chekli ayirmalarning turg`unligi;
7. Ayirmali masalalarning korrektiligi;
8. Turg`unlik, approksimatsiya va yaqinlashishi orasidagi bog`liklik.

Kalit so`zlar: to`r, to`r qadami, to`r funktsiyalar fazosi, ayirmali xosilalar, approksimatsiya, turg`unlik, yaqinlashish

1. To`rlar va to`r funktsiyalar

Berilgan differensial tenglamani taqribiy ifodalovchi ayirmali sxemalarni yozish uchun quyidagi ikkita amal bajarilishi kerak.

1. Argumentning uzluksiz o`zgarish sohasini uning diskret o`zgarish sohasiga almashtirish kerak;
2. Differensial operatorni qandaydir chekli ayirmali operatorga almashtirish, bundan tashqari chegaraviy shartlar va boshlang`ich ma`lumotlar uchun ayirmali almashtirishlar tuzish kerak.

Bu jarayon amalga oshirilgandan keyin algebraik tenglamalar sistemasiga o`tamiz.

Uzluksiz argumentning barcha qiymatlari uchun ayirmali masalani echib bo`lmaydi. SHuning uchun bu sohada qandaydir chekli sondagi nuqtalar to`plami olinadi va faqat shu nuqtalarda taqribiy echim izlanadi. Bunday nuqtalar to`plamiga to`r deyiladi. Nuqtalarning o`zi esa to`r tugunlari deb ataladi.

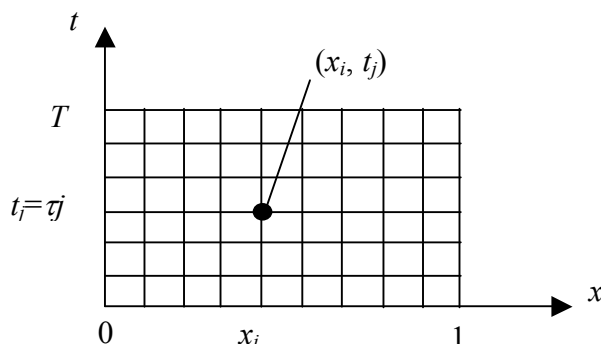
To`r tugunlarida aniqlangan funktsiyaga to`rli funktsiya deyiladi.

SHunday qilib differensial tenglama echimlari fazosini to`r funktsiyalar fazosi bilan almashtirdik.

1 misol. Kesmada tekis to`r. $[0,1]$ kesmani N ta teng bo`lakga bo`lamiz. $h = x_i - x_{i-1} = 1/N$ to`r qadami deb ataladi. Bo`linish nuqtalari $x_i = ih$ - to`r tugunlari deyiladi. Barcha tugunlar to`plami $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{1, N-1}\}$ to`rni tashkil qiladi. Bu to`plamga $x_0 = 0, x_n = 1$ chegaraviy nuqtalarni qo`shish mumkin, ya`ni $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}\}$ deb belgilaymiz.

2 misol. Tekislikda tekis to`r. $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ sohada aniqlangan ikki o`zgaruvchili $u(x,t)$ funktsiyalar to`plamini qaraymiz.

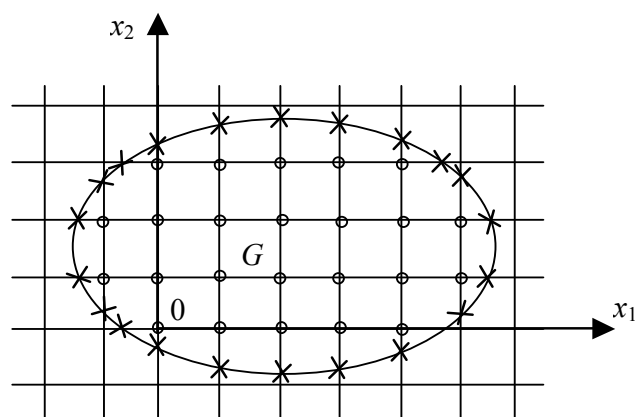
x o`qining $[0,1]$ va t o`qining $[0,T]$ kesmalarini mos ravishda N_1 va N_2 ta bo`laklarga bo`lamiz. $h = 1/N_1$, $\tau = T/N_2$ bo`lsin. Bo`linish nuqtalaridan o`qlarga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. Natijada bu to`g`ri chiziqlar kesishishidan (x_i, t_j) tugunlarni hosil qilamiz, ular $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$ to`rni tashkil qiladi.



Bu to`r x va t yo`nalishlar bo`yicha h va τ qadamlarga ega.

SHunga o`xshash kesmada yoki tekislikda notekis to`rni qurish mumkin.

$x = (x_1, x_2)$ tekislikda Γ chegarali murakkab ko`rinishli G soha berilgan bo`lsin.



$x_{1i} = ih_1$, $x_{2j} = jh_2$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h_1, h_2 > 0$ to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. U holda (ih_1, jh_2) to`rni hosil qilamiz. «o» bilan ichki, «x» bilan esa tashqi nuqtalar belgilangan. Ichki nuqtalar to`plamini ω_h bilan, chegaraviy nuqtalar to`plamini γ_h bilan belgilaymiz. Shunday qilib ω_h to`r ox_1, ox_2 yo`nalishlar bo`yicha tekis, ammo \bar{G} soha uchun $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ to`r esa chegara yaqinida notekis.

Uzluksiz $x \in \bar{G}$ argumentli $u(x)$ funktsiyalar o`rniga $y(x_i)$ to`r funktsiya olinadi. $y(x_i)$ to`r funktsiyani vektor ko`rinishda berish mumkin.

Odatda $\{\omega_h\}$ to`r to`plami h qadamga bog`liq bo`ladi. Mos ravishda $y_h(x)$ to`r funktsiyalar ham h parametrdan bog`liq bo`ladi. Agar to`r notekis bo`lsa h sifatida $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ vektor qaraladi.

Uzluksiz argumentli $u(x)$, $x \in G$ funktsiyalar qandaydir H_0 funktsional fazo elementlaridan iborat. $y_h(x)$ to`r funktsiyalar esa H_h fazoning elementlari. SHunday qili chekli ayirmalar usuli H_0 fazoni $y_h(x)$ to`r funktsiyalarning H_h fazosiga o`tkazadi.

H_0 fazodagi $\|\cdot\|_0$ norma kabi H_h chiziqli fazoda $\|\cdot\|_h$ norma kiritiladi.

Bir qator normalarni keltiramiz

1) C da normaning to'rt ko'rinishi:

$$\|y\|_c = \max_{x \in \omega_h} |y(x)| \text{ yoki } \|y\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|.$$

2) L_2 da normaning to'rt ko'rinishi:

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} \text{ yoki } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{1/2}.$$

Taqribiy usullar nazariyasining asosiy e'tibori y_h ning $u(x)$ ga yaqinligini baholashga qaratiladi. Biroq y_h va $u(x)$ lar turli fazolarning vektorlaridir.

Baholashning ikkita imkoniyati mavjud:

1. $\omega_h(G)$ da berilgan y_h funktsiya G sohaning barcha nuqtalarida aniqlanadi (masalan, chiziqli interpolatsiya yordamida). Natijada $x \in G$ uzluksiz argumentli $\tilde{y}(x, h)$ funktsiyani olamiz. $\tilde{y}(x, h) - u(x)$ ayirma H_0 ga tegishli bo'ladi. y_h ning u ga yaqinligi $\|\tilde{y}(x, h) - u(x)\|_0$ bilan xarakterlanadi, bunda $\|\cdot\|_0$ - H_0 dagi norma.

2. H_0 fazo H_h ga akslantiriladi. Har bir $u(x) \in H_0$ funktsiyaga mos $u_h(x), x \in \omega_h$ to'rt funktsiyaga o'tkaziladi, ya'ni $u_h = \mathfrak{R}_h u \in H_h$. Bunda \mathfrak{R}_h - H_0 dan H_h ga o'tkazuvchi chiziqli operator. Bu moslikni turli yo'llar bilan amalga oshirish mumkin (\mathfrak{R}_h turli operatorlarni tanlash bilan). Agar $u(x)$ uzluksiz funktsiya bo'lsa, $u_h(x) = u(x)$ deyish mumkin, bu erda $x \in \omega_h$. Ba'zan $x_i \in \omega_h$ tugunda $u_h(x_i)$ berilgan $x_i \in \omega_h$ tugunning qandaydir atrofi bo'yicha $u(x)$ ning o'rta integral qiymati bilan aniqlanadi. Bundan keyin $u(x)$ - uzluksiz funktsiya va barcha $x_i \in \omega_h$ lar uchun $u_h(x_i) = u(x_i)$ bo'ladi deb faraz qilamiz.

u_h to'rt funktsiyaga ega bo'lib, H_h fazoning vektori bo'lgan $y_h - u_h$ ayirmani hosil qilamiz. y_h ning u ga yaqinligi $\|y_h - u_h\|_h$ bilan xarakterlanadi, bunda $\|\cdot\|_h$ - H_h dagi norma.

Bunda H_h fazodagi norma $\|\cdot\|_0$ normani barcha $u \in H_0$ vektor uchun approksimatsiyalaydi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

deb faraz qilish tabiiydir. Bu shartni H_h va H_0 fazodagi normalarning o'zaro kelishganlik sharti deb ataymiz.

Biz bundan keyin ikkinchi yo'ldan foydalanamiz.

Oddiy differentsial operatorlarning ayirmali approksimatsiyasi

L_v chiziqli differentsial operator bo'lsin. L_v ga kiruvchi hosilalarni ayirmali munosabatlar bilan almashtiramiz, L_v o'rniga shablon deb ataluvchi biror to'rt tugunlari to'plamida v_h to'rt funktsiya qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat $L_h v_h$ ni hosil qilamiz:

$$L_h v_h(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}(x)} A_h(x, \xi) v_h(\xi)$$

yoki

$$(L_h v_h)_i = \sum_{x_j \in III(x_i)} A_h(x_i, x_j) v_h(x_j),$$

bu erda $A_h(x, \xi)$ - koeffitsientlar, h - to'rt qadami, $III(x)$ - x nuqtadagi shablon. Lv ni $L_h v_h$ ga bunday taqribiy almashtirish differentsial operatorni ayirmali operator bilan approksimatsiyalash deyiladi (yoki L operatorning ayirmali approksimatsiyasi deyiladi).

L operatorni ayirmali approksimatsiyaga keltirishda shablon tanlash zarur, ya'ni L operatorni approksimatsiyalash uchun qo'llash mumkin bo'lgan $v(x)$ to'rt funktsiyaning qiymatlaridan bog'liq bo'lgan x tugun bilan qo'shni tugunlar to'plamini ko'rsatish kerak.

Quyidagi misollarni qaraymiz.

1. $Lv = dv/dx$.

x nuqtani fiksirlaymiz va $x-h$, $x+h$ nuqtalarni olamiz, bu erda $h > 0$. Lv approksimatsiya qilish uchun quyidagi ifodalardan biridan foydalanish mumkin

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x, \quad (1)$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_x^-. \quad (2)$$

(1) ifoda o'ng ayirmali hosila, (2) esa chap ayirmali hosilani tasvirlaydi. Ayirmali ifodalar ikki nuqtada aniqlangan.

Yana quyidagi ifodani olish mumkin

$$L_h^\sigma v \equiv \sigma v_x + (1-\sigma)v_x^-,$$

bunda σ - ixtiyoriy haqiqiy son. Xususiyl holda $\sigma = 0,5$ bo'lganda markaziy ayirmali hosilani olamiz

$$v_x^\circ \equiv \frac{1}{2}(v_x + v_x^-) = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (3)$$

(1), (2), (3) approksimatsiyalarda qanday xatolikga yo'l qo'yildi va x nuqtada $h \rightarrow 0$ da $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$ ayirma qay holda o'zini tutadi kabi savollarga javob berish muhimdir. $\psi(x)$ miqdor x nuqtada Lv ayirmali approksimatsiya xatoligi deyiladi.

$v(x)$ ni Teylor qatoriga yoyamiz

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) + O(h^3).$$

Bu ifodani (1), (2), (3) larga qo'yamiz

$$v_x = v'(x) + \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2), \quad v_x^- = v'(x) - \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2), \quad v_x^\circ = v'(x) + O(h^2).$$

Bundan ko'rinib turibdiki

$$\psi = v_x - v'(x) = O(h), \quad \psi = v_x^- - v'(x) = O(h), \quad \psi = v_x^\circ - v'(x) = O(h).$$

V - L_h ayirmali operatorning $h < h_0$ o'lganda $III(x, h)$ shablondan iborat x nuqtaning $III(x, h_0)$ atrofida berilgan etarlicha silliq funktsiyalar $v \in V$ sinfi bo'lsin.

Agar

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m)$$

bo'lsa L_h operator L differentsial operatorni x nuqtada $m > 0$ tartib bilan approksimatsiyalaydi deymiz.

2 misol. $Lv = v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$.

Uch nuqtali shablonda

$$L_h v = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}.$$

$$v_x(x) = v_x^-(x+h), \quad L_h v = \frac{v_x(x) - v_x^-(x)}{h} = \frac{1}{h} [v_x^-(x+h) - v_x^-(x)] = v_{xx}^-(x).$$

Ushbu holda approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo'ladi, ya'ni $v_{xx}^-(x) - v''(x) = O(h^2)$.

Besh nuqtali shablonda

$$(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h) \tag{4}$$

$Lv = v^{(4)}$ hosila uchun

$$\begin{aligned} L_h v &= v_{xxxx}^- = \frac{1}{h^2} [v_{xx}^-(x+h) - 2v_{xx}^-(x) + v_{xx}^-(x-h)] = \\ &= \frac{1}{h^4} [v(x+2h) - 4v(x+h) + 6v(x) - 4v(x-h) + v(x-2h)] \end{aligned}$$

olinadi.

Approksimatsiya tartibi ikkiga teng, ya'ni

$$\psi = v_{xxxx}^- - v^{(4)} = \frac{h^2}{6} v^{(6)} + O(h^4).$$

h daraja bo'yicha $\psi = L_h v - Lv$ approksimatsiya xatoligi yoyilmasidan approksimatsiya tartibini oshirish uchun foydalanish mumkin. SHunga binoan

$$v_{xx}^- - v'' = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4) \leq \frac{h^2}{12} v_{xxxx}^- + O(h^4)$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan (4) shablonda aniqlangan

$$L_h v = v_{xx}^- - \frac{h^2}{12} v_{xxxx}^-$$

operator $Lv = v''$ ni to'rtinchi tartib bilan approksimatsiya qilishi kelib chiqadi.

Lemma. Agar $v \in C^{(2)}[x-h, x+h]$ bo'lsa

$$v_{xx}^- = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = v''(\xi), \quad \xi = x + \theta h, \quad |\theta| \leq 1,$$

va agar $v \in C^{(4)}[x-h, x+h]$ bo'lsa

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi), \quad \xi = x + \theta_1 h, \quad |\theta_1| \leq 1,$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Integral shakldagi qoldiq hadi bilan olingan Teylor formulasidan foydalanamiz

$$v(x) = v(a) + (x-a)v'(a) + \dots + \frac{(x-a)^r}{r!} v^{(r)}(a) + R_{r+1}(x), \tag{5}$$

bunda

$$R_{r+1}(x) = \frac{1}{r!} \int_a^x (x-\xi)^r v^{(r+1)}(\xi) d\xi = \frac{(x-a)^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-s)^r v^{(r+1)}(a+s(x-a)) ds.$$

Integral uchun o`rta qiymat haqidagi teoremani qo`llaymiz

$$R_{r+1}(x) = \frac{(x-a)^{r+1}}{(r+1)!} v^{(r+1)}(\xi),$$

bunda $\xi - [a, x]$ kesmada x ning o`rta qiymati,

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \int_0^1 (1-s)^r ds = \frac{1}{r+1}.$$

(5) da x ni $x+h$ va a ni x bilan almashtirib, $r=1$ va $r=3$ uchun mos ravishda quyidagilarni olamiz

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + h^2 \int_0^1 (1-s)v''(x+sh)ds, \quad (6)$$

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) + \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(x+sh)ds. \quad (7)$$

Bu erda h ni $-h$ ga, s ni $-s$ almashtirib

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + h^2 \int_{-1}^0 (1+s)v''(x+sh)ds, \quad (8)$$

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) - \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_{-1}^0 (1+s)^3 v^{(4)}(x+sh)ds \quad (9)$$

formulalarni olamiz.

(6), (8) dan quyidagini olamiz

$$v_{xx} = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = \int_{-1}^1 g_2(s)v''(x+sh)ds,$$

bunda

$$g_2(s) = \begin{cases} 1+s & \text{agar } -1 \leq s \leq 0 \text{ da,} \\ 1-s & \text{agar } 0 \leq s \leq 1 \text{ da.} \end{cases}$$

$g_2(s) \geq 0$ bo`lganligidan o`rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanish mumkin, natijada

$$v_{xx} = v''(x+\theta h) \int_{-1}^1 g_2(s)ds = v''(x+\theta h) = v''(\xi), \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

bu erda $\xi - [x-h, x+h]$ kesmada o`rta nuqta.

(7) va (9) dan

$$v_{xx} = v''(x) + \frac{h^2}{6} \int_{-1}^1 g_4(s)v^{(4)}(x+sh)ds$$

hosil qilamiz, bu erda

$$g_4(s) = \begin{cases} (1+s)^3 & \text{agar } -1 \leq s \leq 0 \text{ da,} \\ (1-s)^3 & \text{agar } 0 \leq s \leq 1 \text{ da,} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 g_4(s)ds = \frac{1}{2}.$$

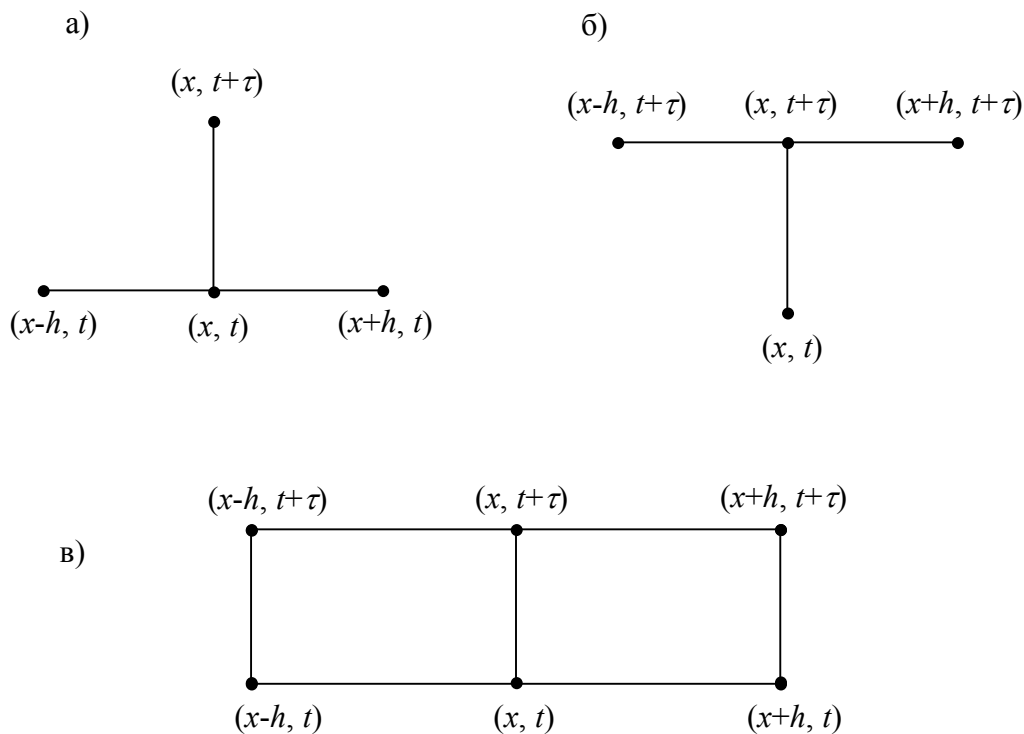
$g_4(s) \geq 0$ va $v^{(4)}(x)$ uzluksizligidan, o`rta qiymat haqidagi teoremani qo`llab

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^{(4)}}{12}(x + \theta h), |\theta| \leq 1$$

ni olamiz va shu bilan lemma isbotlanadi.

4 misol. $Lv = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v = v(x, t)$.

(x, t) - tekislikda nuqta bo'lsin. SHablanni aniqlaymiz. U to'rtta nuqtadan tashkil topgan bo'lsin (a rasm).



$L_{h\tau}$ ni quyidagicha aniqlaymiz

$$L_{h\tau}^{(0)}v = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x + h, t) - 2v(x, t) + v(x - h, t)}{h^2}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$v = v(x, t), \quad \hat{v} = v(x, t + \tau), \quad \check{v} = v(x, t - \tau).$$

Unda

$$v_t = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{v} - v}{\tau}$$

va

$$L_{h\tau}^{(0)} = v_t - v_{xx}^- . \tag{10}$$

b rasmdagi shablondan foydalanilganda, $t + \tau$ momentda v_{xx}^- olinsa, u holda

$$L_{h\tau}^{(1)} = v_t - \hat{v}_{xx}^- . \tag{11}$$

(10) va (11) larning chiziqli kombinatsiyasini olib, $\sigma \neq 0$ va $\sigma \neq 1$ bo'lganda oltinuqtali shablonda (v rasm) aniqlangan chekli operatorlarning bir parametrlil oilasini hosil qilamiz

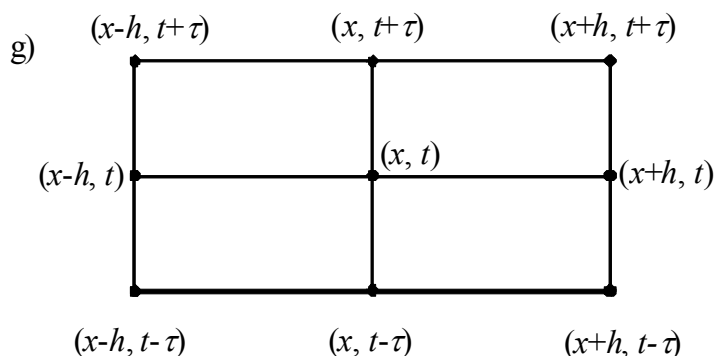
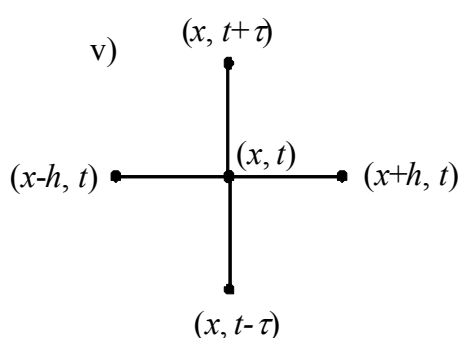
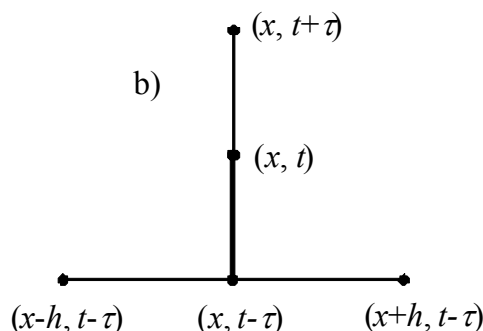
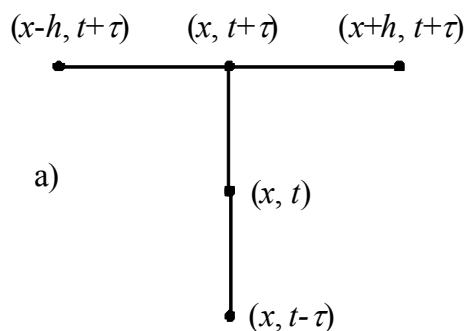
$$L_{h\tau}^{(\sigma)}v = v_t - (\sigma \hat{v}_{xx}^- + (1 - \sigma)v_{xx}^-) . \tag{12}$$

$L_{h\tau}^{(0)}$ operatorlar $L_{h\tau}^{(1)}$ ning approksimatsiya tartibiga ega, (12) esa $\sigma < 0,5$ bo'lganda $O(h^2 + \tau)$, $\sigma = 0,5$ bo'lganda $O(h^2 + \tau^2)$ approksimatsiya tartibiga ega.

5 misol.

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Quyidagi shablonlardan foydalanilamiz



Approksimatsiyalardan biri (v rasm)

$$L_{h\tau} = v_{tt}^- - v_{xx}^-, \quad (13)$$

bunda

$$v_{tt}^- = (v(x, t + \tau) - 2v(x, t) + v(x, t - \tau)) / \tau^2.$$

a) shablonda:

$$L_{h\tau} v = v_{tt}^- - \hat{v}_{xx}^-. \quad (14)$$

To'qqiznuqtali shablonda (g rasm) ayirmali operatorlarning ikkiparametrlil oilasini yozish mumkin

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)} v = v_{tt}^- - \left(\sigma_1 \hat{v}_{xx}^- + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{xx}^- + \sigma_2 \check{v}_{xx}^- \right). \quad (15)$$

(15) dan $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ bo'lganda (13), $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = 1$ bo'lganda esa (14) kelib chiqadi.

(13), (14), (15) ayirmali operatorlar $O(h^2 + \tau^2)$ approksimatsiya tartibiga ega.

To'rd a approksimatsiya xatoligi

Biz xozirgacha lokal ayirmali approksimatsiyani qaradik. Odatda to`rda ayirmali approksimatsiya tartibini baholash talab qilinadi.

$\omega_h - \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p)\}$ to`r funktsiyalarning biror G Evklid fazosidagi to`r, $H_h - \omega_h$ da berilgan to`r funktsiyalarning chiziqli fazosi, $H_0 - v(x)$ silliq funktsiyalar fazosi bo`lsin. Faraz qilaylik, 1) ixtiyoriy $u \in H_0$ uchun $\mathfrak{R}_h u = u_h \in H_h$ bo`ladigan \mathfrak{R}_h operator mavjud, 2) $\|\cdot\|_h$ va $\|\cdot\|_0$ normalar quyidagicha bo`lsin, ya`ni

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathfrak{R}_h u\|_h = \|u\|_0,$$

bunda $|h|$ - h vektorning normasi.

H_0 da berilgan qandaydir L operatorni va ω_h da berilgan v_h to`r funktsiyani $L_h v_h$ to`r funktsiyaga akslantiruvchi L_h operatorni qaraymiz (ya`ni H_h dan H_h ga ta`sir qiluvchi).

L operatorni L_h ayirmali operator bilan approksimatsiyalash xatoligi deb

$$\psi_h = L_h v_h - (Lv)_h,$$

to`r funktsiyaga aytiladi, bunda $v_h = \mathfrak{R}_h v$, $(Lv)_h = \mathfrak{R}_h(Lv)$, $v - H_0$ dagi ixtiyoriy funktsiya (vektor, element).

$|h| \rightarrow 0$ da $\|\psi_h\|_h \rightarrow 0$ intilsa L differentsial operatorni L_h ayirmali operator approksimatsiyalaydi deymiz.

$$\|\psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m), \quad (16)$$

yoki

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M \cdot |h|^m$$

bo`lsa $m > 0$ tartib bilan L differentsial operatorni L_h ayirmali operatori approksimatsiyalaydi deb ataymiz, bunda $M - |h|$ dan bog`liq bo`lmagan musbat o`zgarmas son.

\mathfrak{R}_h opeartorni tanlashga misollar:

1) agar $v(x)$ - uzluksiz funktsiya bo`lsa, u holda

$$v_h = \mathfrak{R}_h v(x) = v(x), \quad x \in \omega_h;$$

2) $v_h = \mathfrak{R}_h v(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} v(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(x+sh) ds$,

bunda $v(x)$ - integral funktsiya va h.k.

1 eslatma. Agar $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ - vektor bo`lsa, $|h|$ ni $|h| = (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2)^{1/2}$ uzunlik deb tushunish mumkin. $\alpha = 1, 2, \dots, p$ tartib bilan turli h_α bo`yicha approksimatsiya qilish mumkin. U holda (16) o`rniga

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^{m_\alpha}, \quad \text{bunda } m_\alpha > 0.$$

m_1, m_2, \dots, m_p lar orasida eng kichik sonni olamiz va uni m bilan belgilab (16) baholashni olamiz.

1. Agar ω_h notekis to`r, ya`ni $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ bo`lsa, misol uchun $|h| = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ yoki o`rta kvadratik qiymat $|h|$ ni olish mumkin, bunda n - tugunlar soni.

Misol. Notekis to`rda ayirmali approksimatsiya. $0 \leq x \leq 1$ kesmada berilgan $H_0 = C^{(4)}[0,1]$ funktsiyalar fazosida $Lv = d^2v/dx^2$ ni qaraymiz. Quyidagi to`rni olamiz

$$\widehat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, n, x_0 = 0, x_n = 1\}.$$

Lv operator (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) noregulyar shablonda x_i tugunda aniqlangan

$$(L_h v)_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right], \quad v_i = v(x_i), \quad \bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}),$$

ayirmali operatorga mos keladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$v_{x,i}^- = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x,i} = v_{x,i+1}^- = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\bar{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_i}.$$

$L_h v$ operatorni quyidagi ko`rinishda yozish mumkin

$$(L_h v)_i = v_{xx,i}^- = v_{xx}^-.$$

Approksimatsiyaning lokal xatoligi

$$\psi_i = (L_h v)_i - (Lv)_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_i^2)$$

ga teng.

Demak $L_h v$ operator to`r normada

$$\|\psi\|_C = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\psi_i| = O(h), \quad h = \max_{1 \leq i \leq n-1} h_i$$

birinchi tartibli approksimatsiyaga ega.

L_2 to`r normada quyidagicha

$$\|\psi\| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i \psi_i^2 \right)^{1/2} = O(h)$$

birinchi tartibli approksimatsiyani ham olishimiz mumkin.

Biroq

$$\|\psi\|_{(-1)} = \left[\sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(\sum_{k=1}^i h_k \psi_k \right)^2 \right]^{1/2}$$

normada ψ ikkinchi tartibga ega, ya`ni

$$\|\psi\|_{(-1)} = O(h^2), \quad \text{bunda } h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Bu tasdiqni isbotlaymiz. ψ ni

$$\psi_i = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6h_i} v_i''' + O(h_i^{-2})$$

ko`rinishda yozamiz.

$v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$ ni inobatga olib

$$\psi_i = \frac{h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i'''}{6h_i} + \psi_i^* = \overset{\circ}{\psi}_i + \psi_i^*,$$

topamiz, bu erda $\psi_i^* = O(h^2)$ ixtiyoriy normada.

$\overset{\circ}{\psi}_i$ bosh had divergent ko`rinishga ega. SHuning uchun

$$S_i = \sum_{k=1}^i h_k \overset{\circ}{\psi}_k = \sum_{k=1}^i (h_{k+1}^2 v_{k+1}''' - h_k^2 v_k''')/6 = (h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_1^2 v_1''')/6.$$

Bundan $|S_i| \leq Mh^2$ ekanligi ko`rinib turibdi va haqiqatdan

$$\left\| \overset{\circ}{\psi} \right\|_{(-1)} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i S_i^2 \right)^{1/2} = O(h^2).$$

Bundan

$$\|\psi\|_{(-1)} \leq \left\| \overset{\circ}{\psi} \right\|_{(-1)} + \|\psi^*\|_{(-1)} \leq Mh^2,$$

ya`ni $\|\cdot\|_{(-1)}$ normada approksimatsiya xatoligi ikkinchi tartibga ega.

$y(x, t) = y_{h\tau}(x, t)$ to`r funksiyani

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x, t), x \in \omega_h, t \in \omega_\tau\}$$

to`rda aniqlaymiz.

U $x \in \omega_h$ argumentning funksiyasi bo`lib $\|\cdot\|_h$ norma bilan H_h fazoning vektori hisoblanadi. $\omega_{h\tau}$ to`rda $y(x, t)$ ni baholash uchun odatda

$$\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \omega_\tau} \|y(t)\|_h$$

normadan yoki quyidagilarning biridan foydalaniladi

$$\|y\|_{h\tau} = \sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|y(t)\|_h, \quad \|y\|_{h\tau} = \left[\sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|y(t)\|_h^2 \right]^{1/2}.$$

$L_{h\tau} v_{h\tau} - Lu$ ($u = u(x, t)$) opeatorning ayirmali approksimatsiyasi bo`lsin. $L_{h\tau}$ operator $\omega_{h\tau}$ to`rda berilgan $v_{h\tau}(x, t)$ to`r funksiyalarda aniqlangan. $v(x, t) \in H_0$ bo`lsin. Agar $v(x, t)$ t bo`yicha uzluksiz bo`lsa, barcha $t \in \omega_\tau$ lar uchun $v_{h\tau}(x, t) = v_h(x, t)$ bo`lishi mumkin. SHunday qilib, $\omega_{h\tau}$ to`rda berilgan $v_{h\tau}(x, t)$ va approksimatsiya xatoligini aniqlash uchun

$$\psi_{h\tau}(x, t) = L_{h\tau} v_{h\tau}(x, t) - (Lv)_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}.$$

Bu erda $v_h(x, t) = \mathfrak{R}_h v(x, t)$.

L ni $L_{h\tau}$ x bo`yicha $m > 0$ va t bo`yicha $l > 0$ tartib bilan approksimatsiya qiladi deyimiz, agar $v(x, t)$ etarli silliq funksiyalar sinfida

$$\|\psi_{h\tau}(x, t)\|_{h\tau} = O(|h|^m + \tau^l) \text{ yoki } \|\psi_{h\tau}\|_{h\tau} \leq M(|h|^m + \tau^l)$$

baholash bajarilsa, bunda M - $|h|$ va l dan bog`liq bo`lmagan musbat o`zgarmas.

Sxemalar yaqinlashishi va aniqligi

CHekli to`rda biror masalani taqribiy echishda dastlab quyidagicha muloxazaga ega bo`lish kerak, ya`ni bu usul yordamida masala echilganda masalaning aniq echimiga qanday aniqlikda yaqinlashishi mumkin. SHuning uchun ayirmali sxemalarning yaqinlashishi va aniqligi to`g`risidagi savolni qarab o`tish kerak.

Γ chegarali G sohada quyidagi chizikli differentsial tenglama echimini topish talab qilingan bo`lsin

$$Lu = f(x), \quad x \in G. \quad (1)$$

Echim quyidagi qo`shimcha (chegaraviy va boshlang`ich) shartni qanoatlantirsin

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

bunda $f(x), \mu(x)$ - berilgan funktsiyalar, l - chiziqli differentsial operator.

\bar{G} soha to`r bilan almashtiriladi.

h - to`r tugunlarining joylashish zichligini xarakterlaydigan vektor parametr bo`lsin, γ_h - chegaraviy tugunlar to`plami.

(1), (2) masalaga quyidagi ayirmali masalani mos qo`yamiz

$$\begin{aligned} L_h y_h &= \varphi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h y_h &= \chi_h, & x \in \gamma_h, \end{aligned} \quad (3)$$

bunda $\varphi_h(x), \chi_h(x)$ - ma`lum to`r funktsiyalar, L_h, l_h - $x \in \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ uchun berilgan to`r funktsiyalarga ta`sir qiluvchi operatorlar.

h ni o`zgartirib $\{y_h\}$ echimlar oilasini olamiz. SHunday qilib turli h lar uchun (3) ayirmali masalalar oilasi qaralishi kelib chiqadi. Bu (3) ayirmali masalalar oilasini ayirmali sxemalar deb ataymiz.

(1), (2) masalaning echimiga, $h(\varepsilon)$ qadamni tanlashdan bog`liq ixtiyoriy berilgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda (3) masalaning y_h echimi yaqinlashishini tushuntirish uchun y_h va $u(x)$ larni taqqoslash zarur.

Bu taqqoslashni H_h to`r funktsiyalar fazosida o`tkazamiz. u_h - ω_h to`rda $u(x)$ ning qiymati bo`lsin, bundan $u_h \in H_h$. Ayirmali sxema xatoligi

$$z_h = y_h - u_h$$

ni qaraymiz.

z_h uchun shartni yozamiz. $y_h = z_h + u_h$ ni (3) ga qo`yib z_h uchun (3) ga o`xshash quyidagi masalani olamiz

$$\begin{aligned} L_h z_h &= \psi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h z_h &= \nu_h, & x \in \gamma_h, \end{aligned} \quad (4)$$

bunda ψ_h va ν_h - tafovutlar, ular $\psi_h = \varphi_h - L_h u_h$, $\nu_h = \chi_h - l_h u_h$ teng.

(4) ning o`ng tomonlari (1) tenglamani (3) ayirmali tenglama bilan va (2) qo`shimcha shartlarni $L_h y_h = \chi_h$ ayirmali shart bilan approksimatsiyalashdagi xatolik deyiladi. Qisqasi ψ_h - (1) tenglamaning $u(x)$ echimida $L_h y_h = \varphi_h$ tenglama uchun approksimatsiya xatoligi, ν_h - (1), (2) masalani echishda $l_h y_h = \chi_h$ approksimatsiya xatoligi deymiz.

Sxemaning z_h xatoligi va ψ_h, ν_h approksimatsiya xatoliklarini baholash uchun, mos ravishda $\|\cdot\|_{(1h)}, \|\cdot\|_{(2h)}, \|\cdot\|_{(3h)}$ to`r funktsiyalar normalarini kiritamiz.

(3) ayirmali masala echimi (1), (2) masala echimiga yaqinlashadi ((3) sxema yaqinlashadi) deymiz, agar

$$|h| \rightarrow 0 \text{ da } \|z_h\|_{(1h)} = \|y_h - u_h\|_{(1h)} \rightarrow 0,$$

yoki

$$\|z_h\|_{(1h)} = \|\rho(|h|)\|,$$

bunda

$$h \rightarrow 0 \text{ da } \rho(|h|) \rightarrow 0.$$

(3) ayirmali sxema $O(|h|^m)$ tezlik bilan yaqinlashadi yoki m -nchi tartibli aniqlikga ega deyiladi, agar etarlicha $|h| \leq h_0$ da

$$\|z_h\|_{(1h)} = \|y_h - u_h\|_{(1h)} \leq M|h|^m,$$

tengsizlik bajarilsa, bunda $M > 0 - |h|$ dan bog'liq bo'lgan o'zgarmas, $m > 0$.

Quyidagicha savol tug'iladi, ya'ni sxema aniqligining tartibi approksimatsiya tartibidan bog'liqmiq $z_h = y_h - u_h$ xatolik ψ_h (va v_h) o'ng qismli (4) masalaning echimi. Approksimatsiya tartibi bilan aniqlik tartibi o'rtasidagi aloqa ayirmali masala echimining o'ng tomondan bog'liqligi bilan xarakterlanadi. Agar z_h , ψ_h va v_h lardan uzluksiz bog'liq bo'lsa, aniqlik tartibi approksimatsiya tartibi bilan mos tushadi.

Ayirmali sxemalar turg'unligi

Misollar. Tenglamalarning o'ng tomonlarini, chegaraviy va boshlang'ich ma'lumotlarni chekli approksimatsiya qilishda biz bundan keyin bir atama bilan – muayyan xatolik bilan berilgan boshlang'ich qiymatlar deb ataymiz. Algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish jarayonida ham xatolik ro'y beradi. Boshlang'ich ma'lumotlardan bog'liq kichik xatoliklar hisoblash jarayonida oshmasligi va izlanayotgan echimni olishni buzmasligi sxemadan talab qilinadi.

Agarda boshlang'ich xatoliklar hisoblash jarayonida oshib ketsa sxemalarga turg'unmas sxemalar deyiladi va amalda ulardan foydalanib bo'lmaydi.

Misollar keltiramiz.

1 misol. Turg'un sxema.

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

bo'lsin.

Masalaning aniq echimi quyidagicha

$$u(x) = u_0 e^{-\alpha x}.$$

Bu echim uchun $\alpha > 0$ da $|u(x)| < |u_0|$ va haqiqatdan, $u(x)$ u_0 dan uzuluksiz bog'liq.

(5) masalani $\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots\}$ tekis to'rdan ayirmali masala approksimatsiyalaydi

$$(y_i - y_{i-1})/h + \alpha y_i = 0, \quad y_0 = u_0, \quad i = 1, 2, \dots$$

yoki

$$y_i = s y_{i-1}, \quad s = \frac{1}{1 + \alpha h}, \quad y_0 = u_0.$$

Bundan

$$y_i = s^i y_0$$

kelib chiqadi.

\bar{x} fiksirlangan nuqtani qaraymiz va h qadamlar ketma-ketligini shunday tanlaymizki, \bar{x} hamma vaqt $\bar{x} = i_0 h$ tugun nuqta bo'lsin. U holda $h \rightarrow 0$ da to'rnini kichiklashtirganda tanlangan nuqta \bar{x} ga mos keluvchi i_0 nomer cheksiz o'sadi. SHu nuqtada y ning qiymatini hisoblaymiz

$$y(\bar{x}) = y_{i_0} = s^{i_0} y_0.$$

$\alpha > 0$ va ixtiyoriy h da $|s| < 1$ bo'lganidan, ixtiyoriy h da $|y(\bar{x})| \leq s^i |y_0| < |y(0)|$ bo'ladi.

Oxirgi tengsizlikdan ko'rinib turibdiki, (5) ayirmali masala echimi boshlang'ich qiymatlardan uzluksiz bog'liq.

2 misol. Turg'unmas sxema. (5) masala uchun quyidagi sxemani qaraymiz

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad (6)$$

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

bu erda $\sigma > 1$ - sonli parametr.

Sxema uch nuqtali bo'lganligi uchun, y_0 dan tashqari y_1 ning ham berilishi talab qilinadi. Agar $\bar{u}_0 = (1 - \alpha h)u_0$ deb olinsa, u holda $\bar{u}_0 - u(h) = O(h^2)$ bo'ladi. (5) masalaning ayirmali echimini $y_i = s^i$ ko'rinishda izlaymiz. U holda (6) dan

$$(\sigma - 1)s^2 - (2\sigma - 1 + \alpha h)s + \sigma = 0,$$

kelib chiqadi. Bu tenglamaning 2 ta turli echimlari mavjud

$$s_{1,2} = \frac{2\sigma - 1 + \alpha h \pm \sqrt{(2\sigma - 1 + \alpha h)^2 - 4\sigma(\sigma - 1)}}{2(\sigma - 1)} =$$

$$= \frac{2\sigma - 1 + \alpha h \pm \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2}}{2(\sigma - 1)}.$$

(5) ning umumiy echimi quyidagi ko'rinishda

$$y_i = As_1^i + Bs_2^i. \quad (7)$$

$i = 0, i = 1$ larni qo'yib va $y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0$ larni hisobga olib A va B o'zgarmlarni topamiz

$$A = \frac{\bar{u}_0 - s_2 u_0}{s_1 - s_2}, \quad B = \frac{s_1 u_0 - \bar{u}_0}{s_1 - s_2}.$$

$\sigma > \sigma - 1 > 0$ dan, $s_1 s_2 > 1$ bo'ladi. Ixtiyoriy αh da $s_2 < 1$ bo'lishini ko'rsatamiz. O'z navbatida $\sigma > 1$ da

$$2(\sigma - 1) - \left(2\sigma - 1 + \alpha h - \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2}\right) =$$

$$= \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2} - (1 + \alpha h) > 0.$$

Ixtiyoriy αh ning qiymatida $s_1 > 1$ bo'lishidan, $s_1 s_2 > 1$ kelib chiqadi.

Agar $A \neq 0$ bo'lganda $y_i = As_1^i + Bs_2^i$ formuladan $i \rightarrow \infty$ da $y_i \rightarrow \infty$ bo'ladi. $y_1 = \bar{u}_0$ ni shunday tanlash kerakki, $A = 0$ bo'lsin. Buning uchun $\bar{u}_0 = s_2 u_0$ deb olish kifoya. s_1^i echim atrofidagi xatolikdan hisoblash jarayonida qochib bo'lmaydi hamda turg'unmas sxemaga keladi.

h fiksirlangan nuqtada bu sxemada $x_i = ih$ oshishi bilan echimning oshishi kelib chiqadi. h ning kamayishi $\bar{x}_i = i_0 h$ fiksirlangan nuqtada xatolikning oshishga olib keladi, ya'ni h ning kamayishi bilan $i_0 = \bar{x}/h$ oshadi. $h \rightarrow 0$ da boshlang'ich qiymatlarning kam o'zgarishi ixtiyoriy \bar{x} fiksirlangan nuqtada masala echimining cheksiz o'sshiga olib keladi.

Ayirmali masala korrektiligi

y_h biror ayirmali masalaning echimi, φ_h esa boshlang'ich qiymatlari bo'lsin. Ular h parametrdan bog'liq. h ni o'zgartirib $\{\varphi_h\}$ boshlang'ich qiymatlarga mos $\{y_h\}$ echimlar ketma-ketligini olamiz. SHunday qilib, nafaqat bir ayirmali masalani, balki h parametrdan bog'liq masalalar oilasini qaraymiz. $|h| \rightarrow 0$ da ayirmali masalalar oilasi uchun korrektilik tushunchasi kiritiladi.

Barcha etarlicha kichik $|h| \leq h_0$ larda masala korrekt deyiladi, agar:

- 1) Qandaydir mumkin bo'lgan oiladan barcha φ_h boshlang'ich qiymatlar uchun ayirmali masala echimi y_h mavjud va yagona bo'lsa;
- 2) y_h echim φ_h dan uzluksiz bog'liq hamda bu bog'liqlik h ga nisbatan tekis bo'lsa.

2-nci shart yanada aniqroq shuni bildiradiki, etarlicha kichik $|h| \leq h_0$ da h dan bog'liq bo'lmagan $M > 0$ o'zgarmas mavjud bo'lib

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(1h)} \leq M \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{(2h)} \quad (8)$$

tengsizlik bajariladi, bunda $\tilde{y}_h - \tilde{\varphi}_h$ boshlang'ich qiymatli masala echimi, $\|\cdot\|_{(1h)}$ va $\|\cdot\|_{(2h)}$ lar esa ω_h to'rdada berilgan to'r funktsiya to'plamidagi normalar.

(8) tengsizlik bilan ifodalangan ayirmali masala echimining boshlang'ich qiymatlardan uzluksiz bog'liqlik xossasiga boshlang'ich qiymat bo'yicha sxema turg'unligi deyiladi.

Turg'unlik, approksimatsiya, yaqinlashish

$$x \in G \text{ da } Lu = f(x), \quad x \in \Gamma \text{ da } lu = \mu(x) \quad (9)$$

uzluksiz masala berilgan bo'lsin va $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ to'rdada uni quyidagi ayirmali masala approksimatsiya qilsin

$$x \in \omega_h \text{ da } L_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \gamma_h \text{ da } l_h y_h = \tilde{\mu}_h. \quad (10)$$

$z_h = y_h - u_h$ xatolik uchun masala (bunda u_h - ω_h to'rdada (9) masala echimining qiymatlari) quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h, \quad l_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (11)$$

bu erda ψ_h, ν_h - tenglama va qo'shimcha shartlarning approksimatsiya xatoligi. (11) ning o'ringa

$$\tilde{L}_h z_h = \tilde{\psi}_h$$

ni yozamiz.

Agar \tilde{L}_h operator chiziqli va ayirmali sxema korrekt bo'lsa, (8) o'rniga quyidagiga ega bo'lamiz

$$\|z_h\|_{(1h)} \leq M \|\tilde{\psi}_h\|_{(2h)} \text{ yoki } \|z_h\|_{(1h)} \leq M (\|\psi_h\|_{(2h)} + \|\nu_h\|_{(3h)}). \quad (12)$$

Bu erdan ko'rinib turibdiki, agar sxema turg'un va masalani approksimatsiya qilsa, u holda yaqinlashuvchi bo'ladi (odatda "approksimatsiya va turg'unlikdan yaqinlashish kelib chiqadi" deyiladi), sxemaning aniqlik tartibi uning approksimatsiya tartibi bilan aniqlanadi.

YUqorida aytib o'tilganlardan shunday xulosa chiqadiki sxema yaqinlashishi va aniqlik tartibini o'rganish approksimatsiya xatoligi va turg'unligini o'rganishga olib keladi, ya'ni aprior baholash deb ataluvchi (12) ko'rinishdagi baholash olinadi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Tekis va notekis to`rlar to`g`ri chiziqda, tekislikda va fazoda qanday quriladi?
2. H_h da norma qanday aniqlanadi?
3. H_0 va H_h fazolar elementlarini solishtirishning qanday usullarini bilasiz?
4. Birinchi tartibli hosilani approksimatsiya qilishning qanday usullarini bilasiz?
5. Ikkinchi tartibli hosila qanday approksimatsiyalanadi?
6. To`rda approksimatsiya xatoligi qanday aniqlanadi?
7. Ayirmali masalaning approksimatsiya aniqligi, yaqinlashishi, turg`unligi hamda korrektili tushunchalari qanday aniqlanadi?
8. Approksimatsiya, yaqinlashish va turg`unlik o`rtasida qanday bog`liqlik mavjud?

IKKINCHI TARTIBLI ODT UCHUN CHEGARAVIY MASALALARNI O`Q OTISH VA CHEKLI AYIRMALAR USULI BILAN YECHISH. PROGONKA USULINING TURG`UNLIGI

Ma`ruza rejasi

1. O`q otish usuli;
2. Chekli ayirmalar usulini (ChAU) ikkinchi tartibli ODT uchun ChMni yechishga qo`llash;
3. Ayirmali tenglamalar sistemasini yechish uchun progonka usuli;
4. Progonka usuli yaqinlashining yetarli shartlari.

Kalit so`zlar: o`q otish usuli, ayirmali sxemalar, koeffitsientlari uchburchak matritsali ayirmali tenglamalar sistemasi, progonki usuli, progonka usuli turg`unligining yetarli shartlari

Chegaraviy masalalarni echishning sonli usullarini qaraymiz. Ularni ikkita guruiga ajratish mumkin:

- 1) Chegaraviy masala echimini ketma-ket Koshi masalalarini echishga keltirish;
- 2) Chekli ayirmalar usullarini qo`llash.

Birinchi gurui usullariga, xususan, o`q otish usuli kiradi.

O`q otish usuli

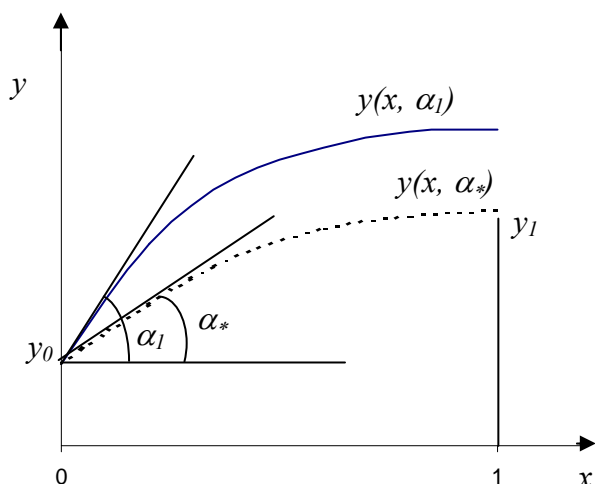
$[0,1]$ kesmada ikkinchi iosilaga nisbatan echilgan ikkinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalani qaraymiz:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

Iar qanday kesmani

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$

almashtirish yordamidamojno $[0,1]$ kesmaga keltirish mumkin.



Chegaraviy shartni quyidagi oddiy ko`rinishda olamiz

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1. \quad (2)$$

O`q otish usulining moiyyati (1), (2) chegaraviy masalani echishni (1) tenglama uchun

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = k = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

boshlang`ich shartli masala echimiga keltirishdan iborat, bunda α - parametr $x = 0$ nuqtada integral chiziqqa o`tkazilgan

urinmaning $0x$ o`qi bilan hosil qilgan burchagidir.

(1), (3) Koshi masalasini α dan bo`liq deb hisoblaylik, ya`ni $y=y(x,\alpha)$, shunday $y=y(x,\alpha^*)$ integral chiziqni izlaymizki, u $(0,y_0)$ nuqtadan chiqib $(1, y_1)$ nuqtaga tushsin.

SHunday qilib, agar $\alpha=\alpha^*$ bo`lsa, u holda $y(x,\alpha)$ Koshi masalasi echimi $y(x)$ chegaraviy masala echimi bilan ustma-ust tushadi. $x=1$ da (2) ni hisobga olib $y(1,\alpha)=y_1$ ni hosil qilamiz

$$y(1,\alpha)-y_1=0. \quad (4)$$

Demak $F(\alpha)=0$ ko`rinishdagi tenglamani hosil qildik, bunda $F(\alpha)=y(1,\alpha)-y_1$.

(4) tenglamani echish uchun chiziqlimas tenglamlarni yechishning birorta usulini qo`llash mumkin.

Chekli ayirmalar usuli

Quyidagi

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad (5)$$

tenglamaning

$$\begin{aligned} l_0 y &= c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c, \\ l_1 y &= d_1 y(b) + d_2 y'(b) = d. \end{aligned} \quad (6)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimini topish talab etilgan bo`lsin.

Masalani sonli yechish izlanayotgan $u(x)$ haqiqiy echimning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardagi y_0, y_1, \dots, y_n taqribiy qiymatlarini topishdan iborat. x_i nuqtalar to`r tugunlari deb ataladi. Bir-biridan bir xil uzoqlikda joylashgan tugunlar sistemasidan hosil bo`lgan quyidagi tekis to`rni qo`llaymiz

$$x_i = x_0 + ih, \quad i=0, 1, 2, \dots, n.$$

Bundan

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = (b-a)/n.$$

h – kattalik to`r qadami.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\begin{aligned} p(x_i) &= p_i, & q(x_i) &= q_i, & f(x_i) &= f_i, \\ y(x_i) &= y_i, & y'(x_i) &= y'_i, & y''(x_i) &= y''_i. \end{aligned}$$

$y'(x_i)$ va $y''(x_i)$ larni har bir ichki tugunda ayirmali markaziy hosilalar yordamida approksimatsiyalaymiz

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Kesma oxirilarida bir tomonlama ayirmali hosilalarni qo`llaymiz

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h), \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h).$$

Bu formulalarni qo`llab (5), (6) berilgan masala ayirmali approksimatsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_1 y_0 + c_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = c, \\ d_1 y_n + d_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = d. \end{cases} \quad (7)$$

Izlanayotgan echimning y_0, y_1, \dots, y_n taqribiy qiymatlarini topish uchun (7) $n+1$ noma'lumli $n+1$ ta chiziqli tenglamalar sistemasini echish zarur. Bu sistemani CHATS ni echishning biron bir standart usullari yordamida echish mumkin. Ammo (7) tenglamalar koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa uch dioganallidir, shuning uchun uni echishda *progonka usuli* deb ataluvchi maxsus usulni qo'llaymiz.

(7) sistemani quyidagi tarzda yozamiz

$$\begin{cases} \beta_0 y_0 + \gamma_0 y_1 = \varphi_0 \\ \alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} = \varphi_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_n y_{n-1} + \beta_n y_n = \varphi_n, \end{cases} \quad (8)$$

bunda $\beta_0 = c_1 h - c_2$, $\gamma_0 = c_2$, $\gamma_0 = s_2$, $\varphi_0 = h s$, $\varphi_1 = f_1 h^2$,

$$\alpha_i = 1 - \frac{1}{2} p_i h, \quad \beta_i = -2 + q_i h^2, \quad \gamma_i = 1 + \frac{p_i h}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\alpha_n = -d_2, \quad \beta_n = h d_1 + d_2, \quad \varphi_n = h d.$$

(8) sistema echimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz

$$y_i = u_i + v_i y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (9)$$

bu erada $u_i, v_i, i = 0, 1, \dots, (n-1)$ lar *progonka koeffitsientlari* deb ataladi.

(9) ni (8) ga qo'yib u_i, v_i lar uchun quyidagi rekkurent formulani hosil qilamiz:

$$v_i = -\frac{\gamma_i}{\beta_i + \alpha_i v_{i-1}}, \quad u_i = \frac{\varphi_i - \alpha_i u_{i-1}}{\beta_i + \alpha_i v_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Hisoblash sxemasini bir jinsli qilish uchun

$$\alpha_0 = 0, \quad \gamma_n = 0,$$

deb olamiz.

Progonka usuli ikki bosqichdan iborat.

1) *Progonkaning to'g'ri yo'li*. (10) bo'yicha i indes o'zgarishining o'sib borish tartibida ketma-ket u_i, v_i koeffitsientlar

$$v_0 = -\frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad u_0 = \frac{\varphi_0}{\beta_0},$$

qiymatlar yordamida hisoblanadi.

2) *Progonkaning teskari yo'li*. (9) formula bo'yicha i indeksning kamayish tartibida ketma-ket y_n, y_{n-1}, \dots, y_0 kattaliklar aniqlanadi.

SHunday qilib $\gamma_n = 0$, u holda $v_n = 0$ va $y_n = u_n$, ya'ni progonkaning to'g'ri yo'lida v_i, u_i kattaliklar yordami bilan y_n echim hisoblanadi.

SHunday qilib, progonka usuli bilan (9) sistemaning aniq echimini topa olamiz, bu esa (5), (6) chegaraviy masala echimi xatoligi faqat berilgan masala ayirmali approksimatsiya xatoligi bilan aniqlanishini va xatolik $O(h)$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

(9) sistemani

$$\begin{aligned} \alpha_i y_{i-1} - \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} &= \varphi_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ y_0 &= \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2, \end{aligned} \quad (11)$$

ko'rinishda yozamiz, bu erda

$$\chi_1 = -\frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \mu_1 = \frac{\varphi_0}{\beta_0}, \quad \chi_2 = -\frac{\alpha_n}{\beta_n}, \quad \mu_2 = \frac{\varphi_n}{\beta_n}, \quad \beta_i = 2 - q_i h^2,$$

$$\alpha_i \neq 0, \quad \beta_i \neq 0.$$

U holda (10) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$v_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i v_{i-1}}, \quad u_i = \frac{\alpha_i u_{i-1} - \varphi_i}{\beta_i - \alpha_i v_{i-1}}. \quad (12)$$

$x = b$ nuqtada (ya'ni $i = n$ da) y_n

$$\begin{cases} y_n = \chi_2 y_{n-1} + \mu_2 \\ y_{n-1} = u_{n-1} + v_{n-1} y_n, \end{cases}$$

sistemadan y_n

$$\begin{aligned} y_n &= \chi_2 (u_{n-1} + v_{n-1} y_n) + \mu_2, \quad (1 - \chi_2 v_{n-1}) y_n = \chi_2 u_{n-1} + \mu_2 \\ y_n &= \frac{\chi_2 u_{n-1} + \mu_2}{1 - \chi_2 v_{n-1}} \end{aligned} \quad (13)$$

kabi aniqlanadi.

(12), (13) formulalar ma'noga ega bo'ladigan etarlilik shartlarini isbotlaymiz:

$$|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i|, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad |\chi_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad |\chi_1| + |\chi_2| < 2. \quad (14)$$

Bu shartlarda $i = \overline{0, n-1}$ uchun $|v_i| \leq 1$ bo'lishini ko'rsatamiz.

$$|v_{i-1}| \leq 1 \text{ bo'lsin. Bundan } |v_i| \leq 1 \text{ bo'lishini ko'rsatamiz. SHunday qilib } |v_0| = |\chi_1| \leq 1,$$

u holda bundan barcha $i = 1, 2, \dots, n-1$ lar uchun $|v_i| \leq 1$ bo'lishligi kelib chiqadi.

(14) qo'llab quyidagi ayirmani baholaymiz

$$\begin{aligned} |\beta_i - \alpha_i v_{i-1}| - |\gamma_i| &\geq |\beta_i| - |\alpha_i| \cdot |v_{i-1}| - |\gamma_i| \geq \\ &\geq |\alpha_i| + |\gamma_i| - |\alpha_i| \cdot |v_{i-1}| - |\gamma_i| = |\alpha_i| - |\alpha_i| \cdot |v_{i-1}| = |\alpha_i| \cdot (1 - |v_{i-1}|) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Bundan } |\beta_i - \alpha_i v_{i-1}| \geq |\gamma_i|.$$

$$\text{SHunday qilib } \gamma_i \neq 0, \text{ u holda } |\beta_i - \alpha_i v_{i-1}| > 0, \text{ ya'ni } |v_i| = \frac{|\gamma_i|}{|\beta_i - \alpha_i v_{i-1}|} \leq 1.$$

Bundan ko`rinadiki agar $|v_{i-1}| < 1$ bo`lsa, u holda $|v_i| < 1$ bo`ladi. $|v_0| = |\chi_1| < 1$ da barcha $|v_i| < 1$ bo`ladi.

(10) ning maxrajini baholaymiz:

$$|1 - \chi_2 v_{n-1}| \geq 1 - |\chi_2| \cdot |v_{n-1}| \geq 1 - |\chi_2| > 0,$$

bundan $|\chi_2| < 1$ yoki $|v_{n-1}| < 1$ ($|\chi_1| < 1$ da), ya`ni $|1 - \chi_2 v_{n-1}| > 0$.

Agar $|\beta_{i_0}| > |\alpha_{i_0}| + |\gamma_{i_0}|$ hech bo`lmaganda bitta $i = i_0$ nuqtada bajarilsa, u holda barcha $i > i_0$ uchun $|v_i| < 1$ bajariladi va jumladan $i = n - 1$ da $|v_{n-1}| < 1$ ga ega bo`lamiz. Bu holda $|\chi_1| + |\chi_1| < 2$ shart ortiqcha hisoblanadi, chunki $|\chi_1| = 1$ va $|\chi_2| = 1$ da

$$|1 - \chi_2 v_{n-1}| \geq 1 - |\chi_2| \cdot |v_{n-1}| > 0$$

bo`ladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. ODT uchun CHM o`q otish usuli yordamida qanday masalaga keltiriladiq
2. 2-tartibli ODT va umumiy chegaraviy shartlar qanday approksimatsiyalanadiq
3. Ayirmali tenglamalar sistemasini echish uchun qaysi usullarni qo`llash mumkinq
4. Qanday shart bajarilganda progonka usulini qo`llash mumkinq
5. Progonka usuli nechta bosqichdan iboratq
6. Progonka usuli turfunligi etarlilik shartlari qandayq

BIR O`LCHAMLI ISSIQLIK O`TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINI SONLI YECHISH

Ma`ruza rejasi

1. Masalaning berilishi;
2. Olti nuqtali sxemalar oilasi;
3. Olti nuqtali sxemalarning xususiy hollari;
4. Approksimatsiya aniqligi;
5. Uch qatlamli sxemalar.

Tayanch so`zlar: *berilgan masala, olti nuqtali shablon, oshkor AS, oshkormas AS, approksimatsiya tartibi, uch qatlamli sxemalar, Richardson sxemasi, Dyuffort-Frenkel sxemasi*

1. Masalaning berilishi

Bir o`lchamli nostatsionar issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi quyidagicha bo`ladi

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{f}, \quad (1)$$

bunda $u = u(x, t)$ - temperatura, s – birlik massa issiqlik sig`imi, ρ - zichlik, k – issiqlik o`tkazuvchanlik koeffitsienti, \bar{f} - issiqlik manbalari zichligi, ya`ni birlik vaqtda birlik uzunlikdan ajralib chiquvchi issiqlik. Agar $c = c(x, t, u)$, $k = k(x, t, u)$ bo`lsa tenglama kvazichiziqli deb ataladi. Agar $s = \text{const}$, $k = \text{const}$ bo`lsa tenglama quyidagicha bo`ladi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}, \quad a^2 = \frac{k}{\rho c}, \quad \tilde{f} = \frac{\bar{f}}{\rho c}, \quad (2)$$

bu erda a^2 - temperatura o`tkazuvchanlik koeffitsienti.

Umumiylikdan ajralmagan holda $a = 1$ deb hisoblash mumkin, u holda (2) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (3)$$

Birinchi chegaraviy masala (I): $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ da uzluksiz bo`lgan quyidagi masalaning $u(x, t)$ yechimini topamiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

2. Olti nuqtali sxemalar oilasi

Quyidagi to`rni kiritamiz

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, I\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J\}$$

va \bar{D} to'ri

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad j = 0, 1, \dots, J\}$$

ko'rinishda $h = 1/I$, $\tau = T/J$ qadamlar bilan kiritamiz, bunda y_i^j – $\bar{\omega}_{h\tau}$ da aniqlangan bo'lib, y funktsiyaning (x_i, t_j) tugundagi qiymati.

Bir parametrlil ayirmali sxemalar oilasini qaraymiz

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j, \quad 0 < i < I, \quad 0 \leq j < J, \quad (4)$$

bunda $\Lambda y_i^j = y_{xx}^- = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}$, σ – haqiqiy parametr.

(4) sxema ba'zan *vaznli sxema* deb ataladi.

CHegaraviy va boshlang'ich shartlar quyidagicha aniq approksimatsiyalanadi:

$$y_0^j = u_1^j, \quad y_I^j = u_2^j, \quad (5)$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \quad (6)$$

Bunda φ_i^j – (3) tenglama o'ng tarafi f ni approksimatsiyalovchi funktsiya, masalan

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+0.5}), \quad t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau.$$

(4)-(6) ni (II) ayirmali masala deb ataymiz.

(4) AS quyidagi olti nuqtali shablonda yozilgan

$$(x_{i\pm 1}, t_{j+1}), \quad (x_i, t_{j+1}), \quad (x_{i\pm 1}, t_j), \quad (x_i, t_j).$$

(4) tenglama *ichki tugunlar* deb ataluvchi (x_i, t_{j+1}) $i = 0, 1, \dots, I - 1$, $j + 1 = 1, \dots, J$

tugunlarda echiladi. $\bar{\omega}_{h\tau}$ dagi barcha ichki tugunlar to'plamini $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), \quad 1 \leq i \leq I - 1, \quad 1 \leq j \leq J\}$ ko'rinishida belgilaymiz.

(5), (6) boshlang'ich va chegaraviy shartlar $\bar{\omega}_{h\tau}$ ning chegaraviy nuqtalarida yoziladi.

$t=t_j$ to'g'ri chiziqda yotuvchi $\bar{\omega}_{h\tau}$ to'r tugunlari odatda *qatlamlar* deb ataladi. (4) da y_i^j qiymatlar ikkita qatlamda yotadi va shuning uchun bunday sxemalar *ikki qatlamli* sxemalar deb ataladi.

$\sigma=0$ da $(x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i\pm 1}, t_j)$ shablonda aniqlanuvchi to'rt nuqtali $\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j$ sxemani hosil qilamiz yoki uni quyidagicha yoza olamiz

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}. \quad (7)$$

$t=t_{j+1}$ qatlamning har bir nuqtasidagi y_i^{j+1} qiymat (7) formula yordamida $t=t_j$ qatlamdagi y_i^j qiymatlar orqali oshkor ko'rinishda ifodalanadi. SHunday qilib $t=0$ da $y_i^0 = u_0(x_i)$ berilsa, u

holda (7) formula bo'yicha ketma-ket ixtiyoriy qatlamdagi y ning qiymatlarini aniqlay olamiz. (7) sxema *oshkor* sxema deb ataladi.

Agar $\sigma \neq 0$ bo'lsa, u holda (7) sxema *oshkormas ikki qatlamli sxema* deb ataladi. $\sigma \neq 0$ da y_i^{j+1} larni aniqlash uchun quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y_0^{j+1} = u_i^{j+1}, \quad y_I^{j+1} = u_2^{j+1},$$

algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad (8)$$

$$F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} + (1 - \sigma) \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j,$$

$$i=1, \dots, I-1.$$

(8) ayirmali tenglama echimi progonka usuli bilan topiladi.

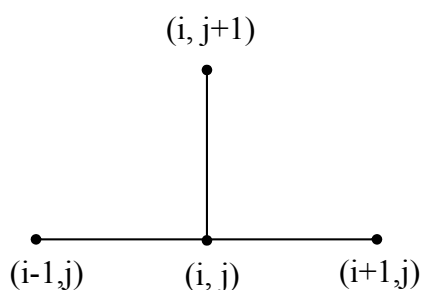
$\sigma = 1$ da *sof oshkormas sxemaga* ega bo'lamiz

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j. \quad (9)$$

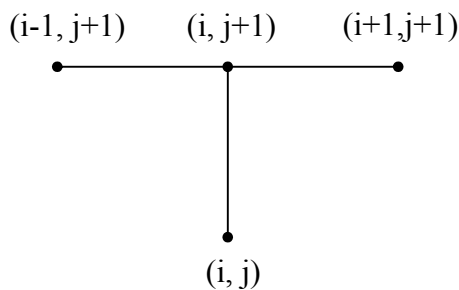
$\sigma = 0,5$ da *olti nuqtali simmetrik sxemani* hosil qilamiz

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j, \quad (10)$$

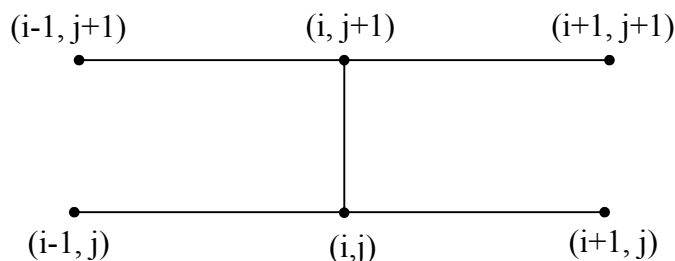
ba'zan bu sxema *Krank-Nikol'son sxemasi* deb ataladi.



(7) oshkor sxema shabloni



(9) sof oshkormas sxema shabloni



(8) ikki qatlamli oshkormas va (10) Krank-Nikol'son sxemalari shabloni

3. Approksimatsiya aniqligi

(4)-(6) sxemalar aniqligi haqidagi savolga javob berish uchun (4)-(6) masala echimi $y = y_i^j$ ni (I) masala echimi $u = u(x, t)$ bilan taqqoslash kerak. Shunday qilib $u(x, t)$ (I) masalaning

uzluksiz yechimi bo'lsin, u holda $u_i^j = u(x_i, t_j)$ qo'yamiz va $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ ayirmani qaraymiz.

z_i^j ni baholash uchun quyidagi normalardan birini tanlaymiz

$$\|z\| = \|z\|_C = \max_{0 \leq i \leq l} |z_i|, \quad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{l-1} z_i^2 h \right)^{1/2}.$$

$y_i^j = y$, $y_i^{j+1} = \hat{y}$, $y_t = (\hat{y} - y) / \tau$ indekssiz belgilashlar yordamida (4)-(6) masalani quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\begin{aligned} y_t &= \mathcal{A}(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) &= u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \mathcal{A}y = y_{\bar{x}\bar{x}}. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$y = z + u$ ni (II) ga qo'yib va u ni berilgan funktsiya deb z uchun quyidagi masalani hosil qilamiz

$$\begin{aligned} y_z &= \mathcal{A}(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_\tau, \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ z(x, 0) &= 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned}$$

bunda $\psi = \mathcal{A}(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) - u_t + \varphi$ - (I) tenglama $u(x, t)$ yechimida (II) sxemaning *approximatsiya xatoligi*.

Ta'rif. (II) sxema (I) tenglamani (m, n) tartib bilan *approximatsiyalaydi* yoki (I) tenglama $u = u(x, t)$ yechimda $O(h^m + \tau^n)$ *approximatsiyaga* ega deyiladi, agar $\|\psi(x, t)\|_2 = O(h^m + \tau^n)$ yoki $\|\psi\|_2 \leq M(h^m + \tau^n)$ tengsizliklar barcha $t \in \omega_\tau$ lar uchun bajarilsa, M esa h va τ dan bog'liq bo'lmagan musbat o'zgarmas, $\|\cdot\|_2 - \omega_h$ to'rdagi qandaydir norma.

$u = u(x, t)$ dan x va t bo'yicha kerakli hosilalarni qo'yib, (II) ning *approximatsiya* tartibini baholaymiz. Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz

$$\dot{u} = \partial u / \partial t, \quad u' = \partial u / \partial x, \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+0,5}), \quad \bar{t} = t_{j+0,5} = t_j + 0,5\tau.$$

$u(x, t)$ ni $(x_i, t_{j+0,5})$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz.

Ushbu formulalarni qo'llab

$$\begin{aligned} \hat{u} &= 0,5(\hat{u} + u) + 0,5(\hat{u} - u) = 0,5(\hat{u} + u) + 0,5\tau u_t, \\ u &= 0,5(\hat{u} + u) - 0,5\tau u_t, \\ \sigma \hat{u} + (1 + \sigma)u &= 0,5(\hat{u} + u) + (\sigma - 0,5)\tau u_t \end{aligned}$$

ψ ni quyidagicha yozamiz

$$\psi = 0,5\mathcal{A}(\hat{u} + u) + (\sigma - 0,5)\tau \mathcal{A}u_t - u_t + \varphi.$$

Yuqoridagi ifodalarni bu erga qo'yib hamda

$$\mathcal{A}u = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2u + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\hat{u} = \bar{u} + 0,5\tau \bar{u}' + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3),$$

$$u = \bar{u} - 0,5\tau \bar{u} + \frac{\tau^2}{8} \bar{u} + O(\tau^3),$$

$$0,5(\hat{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8} \bar{u} + O(\tau^3),$$

$$u_t = \bar{u} + O(\tau^2)$$

ifodalardan foydalanib

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{u} + \varphi) + (\sigma - 0,5)\tau L\bar{u} + \frac{h^2}{12} L^2 \bar{u} + O(\tau^2 + h^4) \quad (12)$$

ni hosil qilamiz.

Bundan ko`rinadiki $\varphi = \bar{f} = f(x_i, t_{j+0,5})$ da

$$\psi = (\sigma - 0,5)\tau L\bar{u} + O(\tau^2 + h^2)$$

bunda faqat $\dot{u} = Lu + f$. $L\dot{u} = L^2u + Lf = u^{(IV)} + f''$ va $L^2u = L\dot{u} - Lf$ ekanini hisobga olib (12) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[(\sigma - 0,5)\tau + \frac{h^2}{12} \right] L\bar{u} - \frac{h^2}{12} L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2). \quad (13)$$

(13) da o`rta qavs ichidagi ifodani nolga tenglab ushbu tenglikka kelamiz

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \quad (14)$$

$\sigma = \sigma_*$ qiymatda va φ esa $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f}$ bo`lganda sxema (II) $O(\tau^2 + h^4)$

approksimatsiyaga ega. Agar biz f'' ni $f_{\bar{x}\bar{x}} = \Lambda f$ ifodaga almashtirsak sxema approksimatsiya

tartibi buzilmaydi, ya`ni $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda \bar{f}$ yoki quyidagiga kelamiz

$$\varphi_i^j = f_i^{j+1/2} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{j+1/2} - 2f_i^{j+1/2} + f_{i+1}^{j+1/2}) = \frac{5}{6} f_i^{j+1/2} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{j+1/2} + f_{i+1}^{j+1/2}).$$

(15)

$C_n^m(\bar{D})$ – shunday funktsiyalar sinfi bo`lsinki, ularning x bo`yicha m va t bo`yicha n tartibli hosilalari \bar{D} da uzluksiz bo`lsin. (13) va (14) formulalardan ko`rinadiki (II) sxema quyidagi approksimatsiyalarga ega:

1. $\sigma = 0,5$, $\varphi = \bar{f}$ yoki $\bar{\varphi} = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$ da $O(h^2 + \tau^2)$ bo`ladi, agar $u \in C_3^4$ bo`lsa;
2. $\sigma \neq 0,5$, $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$ da $O(h^2 + \tau)$ bo`ladi, masalan, $\varphi = \hat{f}$ yoki $\varphi = f$ bo`lganda, agar $u \in C_2^4$ bo`lsa;
3. $\sigma = \sigma_*$ da va φ esa (15) formula bilan berilsa, $O(h^4 + \tau^2)$ bo`ladi, agar $u \in C_3^6$ bo`lsa.

(II) sxema $\sigma = \sigma_*$ va $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda \bar{f}$ da odatda yuqori tartibli aniqlikdagi sxema deb ataladi. φ o'ng tarafni tanlash berilgan σ da approksimatsiya tartibiga qo'yilgan talablarga bo'ysungan bo'lishi kerak.

SHunday qilib $\sigma = 0,5$ da φ ni $\varphi = 0,5(\hat{f} + f)$, $\varphi = \bar{f}$ deb olish mumkin va i.k.

(13) dan ko'rinadiki $O(h^2 + \tau^2)$ xatolikka $\sigma \neq 0,5$ da ham erishishi mumkin. Masalan $\sigma = 0,5 + h^2 \alpha / \tau$ deb olish mumkin, bunda $\alpha - h$ va τ dan bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy o'zgaras. α ni tanlash sxema turg'unligi sharti bilan chegaralangan.

4. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun uch qatlamli sxemalar

Ba'zan uch qatlamli sxemalar qo'llaniladi. Bunday sxemalardan bittasi Richardson sxemasidir:

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda y^j \quad \text{yoki} \quad y_0 = \Lambda y^j, \quad (16)$$

bunda $y_0 = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}$, $\hat{y} = y^{j+1}$, $\check{y} = y^{j-1}$, $y = y^j$, $\Lambda y = y_{\bar{x}\bar{x}}$. Bu sxema τ va h bo'yicha

ikkinchi tartibli approksimatsiga ega $\psi = \Lambda u - u_0 = O(\tau^2 + h^2)$. Ammo u absolyut turg'unmas sxemadir.

(16) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}. \quad (17)$$

Agar (17) ning o'ng tarafidagi $2y_i^j$ ni $y_i^{j+1} + y_i^{j-1}$ ga almashtirsak, u holda uch qatlamli «romb» sxemaga (Dyuffort-Frenkel sxemaga) kelamiz:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i+1}^j}{h^2}, \quad (18)$$

bu sxema y_i^{j+1} ga nisbatan oshkor qoladi va absolyut turg'un hisoblanadi. «Romb» sxemani ushbu ko'rinishda yozish mumkin

$$y_0 + \frac{\tau^2}{h^2} y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y y \quad (19)$$

bunda $y_{\bar{t}\bar{t}} = (y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}) / \tau^2$.

Haqiqatdan

$$\frac{y_{i-1} - \hat{y}_i - \check{y}_i + y_{i+1}}{h^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{\hat{y}_i - 2y_i + \check{y}_i}{h^2} = y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{\tau^2}{h^2} y_{\bar{t}\bar{t}}.$$

Bu ifodani (18) ga qo'yib (19) ni hosil qilamiz. Demak Richardson sxemasi «romb»

sxemaning xususiy holi hisoblanadi. $\frac{\tau^2}{h^2} y_{\bar{t}t}$ had turg'unlikni ta'minlaydi.

(19) ning approksimatsiya xatoligi quyidagicha

$$\psi = \Lambda u - u_0 - \frac{\tau^2}{h^2} u_{\bar{t}t} = u'' - \dot{u} - \frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2) = -\frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2).$$

Bundan ko'rinadiki «romb» sxema shartli approksimatsiyaga ega bo'ladi

$$\psi = O\left(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\right) = O(h^2), \quad \tau = O(h^2) \text{ da.}$$

Agar $\tau = \alpha h(1 + O(h))$ deb olsak, u holda (19) sxema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ko'rinishdagi tenglamani approksimatsiyalaydi, bunda $\alpha = const$.

Odatda (3) uchun vazni oshkormas uch qatlamli sxemalar qo'llaniladi

a) simmetrik sxemalar

$$y_0 = \Lambda \left(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} \right) + \varphi, \quad (20)$$

b) simmetrik bo'lmagan sxemalar

$$y_t + \sigma \tau y_{\bar{t}t} = \Lambda \overset{\vee}{y} + \varphi. \quad (21)$$

(20), (21) tenglamalar uchta (t_{j-1}, t_j, t_{j+1}) qatlamga ega. SHuning uchun ular $t_j \geq \tau$, $j \geq I$ qatlamlarda yoziladi. $y(x, \tau)$ qiymatini qo'shimcha ravishda berish kerak, masalan $y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x)$ yoki $y(x, \tau) = y(x, 0) + \tau \bar{u}_0(x)$, bunda $\bar{u}_0(x) = u_0''(x) + f(x, 0)$ ifoda $y(x, \tau) - u(x, \tau) = O(\tau^2)$ shartdan tanlanadi.

Ba'zan $y(x, \tau)$ ni aniqlash uchun ikki qatlamli sxemalar qo'llaniladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Bir o'lchamli nostatsionar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy boshlang'ich-chegaraviy masala qanday qo'yiladi?
2. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir parametrlil ayirmali sxema qanday tuziladi?
3. Qanday sxemalarga oshkor sxemalar deyiladi?
4. Qanday sxemalarga oshkormas sxemalar deyiladi?
5. Krank-Nikol'son sxemasi qanday shablonda aniqlangan?
6. Qanday shartlarda quyidagi approksimatsiya xatoliklari $O(h^2 + \tau)$, $O(h^2 + \tau^2)$, $O(h^4 + \tau^2)$ aniqlanadi?
7. Richardson sxemasi qanday aniqlanadi?

8. Dyuffort-Frenkel sxemasi qanday aniqlanadi?

TO`LQIN TENGLAMASI UCHUN CHEKLI AYIRMALI SXEMALAR TUZISH

Ma`ruza rejasi

1. Tor tebranish tenglamasi uchun umumiy boshlang`ich-chegaraviy masalaning qo`yilishi;
2. Bir parametrlil ayirmali approksimatsiya;
3. $O(\tau^2 + h^2)$ approksimatsiyali masala;
4. Approksimatsiya xatoligi;
5. Uzilishga ega koeffitsientlar bilan umumiy masala;
6. Birjinsli ayirmali sxemalar.

Tayanch so`zlar: *Tor tebranish tenglamasi, bir parametrlil ayirmali sxemalar oilasi, approksimatsiya xatoligi, birjinsli sxemalar.*

1. Ayirmali masalaning qo`yilishi va approksimatsiya xatoligini hisoblash

Birjinsli tor tebranish tenglamasini qaraymiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t_1), \quad 0 < x_1 < l, \quad t_1 > 0.$$

$x = x_1 / l, \quad t = at_1 / l$ o`lchovsiz kattaliklarni kiritib bu tenglamani quyidagicha yozamiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Boshlang`ich momentda

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \quad (2)$$

shartlar berilgan, bu erda $u_0(x)$ – boshlang`ich chetlashish va $\bar{u}_0(x)$ - boshlang`ich tezlik.

Tor oxirlari quyidagi berilgan qonun bo`yicha harakatlansin

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

$\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T)$ sohada issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini approksimatsiyalashda qo`llangan to`rga o`xshash $\bar{\omega}_{h\tau}$ to`g`ri to`rtburchakli to`r kiritamiz

$$y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{2\tau},$$

$$\Delta y = y_{\bar{x}\bar{x}}, \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \quad y_0 = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}.$$

(1) da hosilalarni quyidagi formulalarga almashtiramiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim u_{\bar{t}t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim u_{\bar{x}x} = \Lambda u, \quad f \sim \varphi.$$

Quyidagi vaznli sxemalar oilasini qaraymiz

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \overset{\vee}{y}) + \varphi, \quad \varphi = f(x, t_j), \quad (4)$$

$$y_0 = \mu_1(t), \quad y_I = \mu_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x),$$

bu yerda $\tilde{u}(x)$ ni keyinroq aniqlaymiz.

Chegaraviy shartlar va birinchi $u(x, 0) = u_0(x)$ boshlang'ich shart $\bar{\omega}_{h\tau}$ to'rdada aniq bajariladi. $\tilde{u}(x)$ ni shunday tanlaymizki. $\tilde{u}_0(x) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \tilde{u}_0(x) - \bar{u}_0(x)$ approksimatsiya

xatoligi $O(\tau^2)$ kattalik bo'lsin. Quyidagi

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \dot{u}(x, 0) + 0,5\tau \ddot{u}(x, 0) + O(\tau^2) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) = \\ &= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(u_0''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

formuladan ko'rinadiki $\tilde{u}(x) - u_t(x, 0) = O(\tau^2)$ belgilashni qo'ysak quyidagini hosil qilamiz

$$\tilde{u}(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(\bar{u}_0''(x) + f(x, 0)). \quad (5)$$

Shunday qilib, (4), (5) masala qo'yildi. (4) dan $\hat{y} = y^{j+1}$ ni aniqlash uchun progonka usuli bilan yechiladigan chegaraviy masalani hosil qilamiz

$$\sigma\gamma^2(y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (1 + 2\sigma\gamma^2)y_i^{j+1} = -F_i, \quad 0 < i < I, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_I = \mu_2,$$

$$\gamma = \tau/h, \quad F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2(1 - 2\sigma)\Lambda y^j + \sigma\tau^2\Lambda y^{j-1} + \tau^2\varphi.$$

Bunda $\sigma > 0$ bo'lganda progonka usuli turg'un bo'ladi.

$\varphi = f(x, t_j)$ da (4) sxema approksimatsiya xatoligini hisoblaymiz. y - (4), (5) masalaning, $u = u(x, t)$ - esa (1)-(3) masalaning yechimlari bo'lsin. (4) ga $y = z + u$ qo'yib quyidagini hosil qilamiz

$$z_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - 2\sigma)z + \sigma \overset{\vee}{z}) + \psi, \quad (6)$$

$$z_0 = z_I = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = v(x),$$

bu erda $\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \overset{\vee}{u}) + \varphi - u_{\bar{t}t}$ - (4) sxemaning $u = u(x, t)$ yechimdagi approksimatsiya xatoligi, $v = \tilde{u}_0(x) - u_t(x, 0)$ - esa $y_t = \tilde{u}_0(x)$ ikkinchi boshlang'ich shart uchun approksimatsiya xatoligi. Yuqoridagilardan ayonki, $v = O(\tau^2)$.

$$\hat{u} = u + \tau u_t, \quad \overset{\vee}{u} = u - \tau u_{\bar{t}} \quad \text{lardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz}$$

$$\sigma \hat{u} + (1 + 2\sigma)u + \sigma \overset{\vee}{u} = \sigma(u + \tau u_t) + (1 - 2\sigma)u + \sigma(u - \tau u_{\bar{t}}) = u + \sigma\tau^2 u_{\bar{t}t}, \quad (7)$$

ya'ni har qanday σ (σ , τ va h dan bog'liq emas) $\psi = \Lambda u + \sigma\tau^2 \Lambda u_{\bar{t}t} + \varphi - u_{\bar{t}t} = Lu + \sigma\tau^2 L\ddot{u} + f - \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2)$, $\psi = O(\tau^2 + h^2)$.

3-tur chegaraviy shartlar

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_1 u(0,t) - \mu_1(t), \quad -\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_2 u(1,t) - \mu_2(t)$$

quyidagi yoyilmalarni qo'llab approksimatsiya qilinadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x - \frac{h}{2} u'' - \frac{h^2}{6} u''' - \frac{h^3}{24} u^{(IV)} + O(h^4)$$

va

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x + \frac{h}{2} u'' - \frac{h^2}{6} u''' + \frac{h^3}{24} u^{(IV)} + O(h^4).$$

$O(\tau^2 + h^2)$ approksimatsiya tartibini hosil qilish uchun

$$i=0 \text{ da } u_x - \frac{h}{2} u'' = \beta_1 u - \mu_1(t) + O(h^2)$$

yoki

$$\frac{u_x - \beta_1 u}{0,5h} + \frac{\mu_1(t)}{0,5h} = u'' + O(h^2)$$

ifodalarni qo'llaymiz.

Tenglamaning o'zidan quyidagiga ega bo'lamiz

$$u''_{xx} = u''_{tt} - f.$$

y ayirmali funktsiya uchun quyidagiga egamiz

$$u_{\bar{t}t} = A^- \left(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \overset{\vee}{y} \right) y + \varphi^-, \quad i = 0,$$

bu erda

$$A^- y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \varphi^- = \varphi + \frac{\mu_1(t)}{0,5h}, \quad \varphi = f.$$

Shunga o'xshash

$$u_{\bar{t}t} = A^+ \left(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \overset{\vee}{y} \right) y + \varphi^+, \quad i = I,$$

bu yerda

$$A^+ = -\frac{y_{\bar{x}} - \beta_2 y}{0,5h}, \quad \varphi^+ = \varphi + \frac{\mu_2(t)}{0,5h}, \quad \varphi = f.$$

Bundan tashqari $\frac{\partial u}{\partial x}$ yoyilmada yanada yuqori tartibli hosilalarni qo'llab $O(\tau^2 + h^4)$

aniqlik bilan sxemalar hosil qilish mumkin.

2. Masalaning umumiyroq qo'yilishi

Endi masalani umumiyroq qo'yilishini qaraymiz. $\bar{D}_T = [0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$ to'g'ri to'rtburchakda giperbolik tipli tenglama uchun 1-chegaraviy masalani qaraymiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in D_T, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad (9)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad (10)$$

$$0 < \bar{c}_1 \leq k(x, t) \leq \bar{c}_2,$$

bu erda $D_T = (0 \leq x \leq 1) \times (0 < t \leq T]$.

Faraz qilaylik masala \bar{D}_T da yagona uzluksiz va etarlicha hosilalarga ega bo'lgan echimga ega bo'lsin. $k(x, t)$ (va $f(x, t)$ o'ng taraf ot o'qqa parallel chekli sondagi to'g'ri chiziqlarda 1- tur uzilishga ega bo'lishi mumkin (qo'zg'almaydigan uzilishlar). Har bir chiziqda $x = \xi_s$, $s = 1, 2, \dots, s_0$ uzilishlarda qo'shimlik sharti bajariladi:

$$\left. \begin{aligned} [u] &= u(\xi_s + 0, t) - u(\xi_s - 0, t) = 0 \\ [k \frac{\partial u}{\partial x}] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Endi (8)-(10) masala uchun bir jinsli ayirmali sxemalarni tuzishga kelamiz. $\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, I, x_0 = 0, x_I = 1\}$ to'r $0 \leq x \leq 1$ da ixtiyoriy notekis to'r, $\hat{\omega}_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, 2, \dots, J\}$ to'r $0 \leq t \leq T$ da ixtiyoriy tekis to'r, $\overline{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ - to'r esa D_T to'g'ri to'rtburchakda berilgan to'r bo'lsin. Avvalo fiksirlangan $t \in \overline{\omega}_\tau$ da $Lu + f$ operatorni approksimatsiyalaymiz va $\Lambda u + \varphi = (a(x, t)u_{\bar{x}})_{\hat{x}} + \varphi$ - ayirmali operatorga keltiramiz.

Bularni quyidagicha almashtiramiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=t_j} \sim u_{\bar{t}t}, \quad Lu + F = \Lambda(t_j)u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi,$$

Bu erda

$$u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)u + \sigma_2 \overset{\vee}{u},$$

$$\Lambda(t_j)u = (a(x, t_j)u_{\bar{x}})_{\hat{x}}, \quad u = u^j, \quad \overset{\vee}{u} = u^{j-1}, \quad \hat{u} = u^{j+1}.$$

Quyidagi belgilashlarni eslaymiz

$$v_{\bar{x}, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} = v_{\bar{x}, i+1}, \quad v_{\hat{x}, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\bar{h}_i},$$

bu erda

$$\hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1}), Lv = \frac{d^2v}{dx^2}, (L_h v)_i = \frac{1}{\hbar_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right] = v_{\hat{x}\hat{x},i} = v_{\hat{x}\hat{x}}, \quad \text{va}$$

bulardan quyidagi vaznli bir jinsli uch qatlamli sxemani hosil qilamiz

$$y_{\hat{t}\hat{t}} = \Lambda(t_j) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi. \quad (12)$$

$t=t_j$ o`rta qatlamda a koeffitsientni olamiz

$$\text{Quyidagi } \hat{y} = y + \tau y_t + 0,5\tau^2 y_{\hat{t}\hat{t}}, \quad \check{y} = y - \varepsilon y_0 + 0,5\tau^2 y_{\hat{t}\hat{t}}, \quad \text{bu erda}$$

$y_t = (\check{y} + \hat{y})/(2\tau)$, $y_{\hat{t}\hat{t}} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2$ larni qo`llab $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\varepsilon y_0 + 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{\hat{t}\hat{t}}$ ni hosil qilamiz, bulardan keyin (12) sxemani quyidagicha yozamiz

$$(E - 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 \Lambda) y_{\hat{t}\hat{t}} - (\sigma_1 - \sigma_2)\tau \Lambda y_0 = \Lambda y + \varphi, \quad (13)$$

bu erda E – birlik operator. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ da *simmetrik* sxemani hosil qilamiz

$$(E - \sigma\tau^2 \Lambda) y_{\hat{t}\hat{t}} = \Lambda y + \varphi(x, t), \quad 0 < t = \tau_j \quad (14)$$

va uni o`rganish bilan cheklanamiz.

(10) chegaraviy shartlar va (9) birinchi boshlang`ich shart aniq qanoatlantiriladi

$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (15)$$

$\partial u / \partial t|_{t=0} = \bar{u}_0(x)$ ikkinchi boshlang`ich shartni ikki usul bilan approksimatsiyalash mumkin. Bitta usul yuqorida ko`rsatildi

$$y_z(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f)_{t=0}. \quad (16)$$

U τ bo`yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega.

Ikkinchi usul shundan iboratki, $y(\tau)$ ni aniqlash uchun quyidagi ayirmali tenglama yoziladi

$$(E - \sigma\tau^2 \Lambda(0)) y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(\Lambda u_0 + f(x, 0)). \quad (17)$$

Natijada (14)-(16) (yoki (14), (15), (17)) ayirmali masalani hosil qilamiz.

Bu sxema uch *qatlamli* deyiladi. Yangi qatlamdagi $\hat{y} = y^{j+1}$ ni hisoblash uchun avvalgi ikkita qatlamdagi y^j va y^{j-1} qiymatlarni bilish kerak. Har bir $t = t_{j+1}$ yangi qatlamda chegaraviy masala $\hat{y} = y^{j+1}$ ga nisbatan echiladi (progonka usuli bilan):

$$(E - \sigma\tau^2 \Lambda) \hat{y} = F,$$

$$0 < x = ih < 1, \quad \hat{y}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{y}_1 = \hat{u}_2,$$

$$F(t) = 2y - \check{y} - \tau^2 \Lambda \left((2\sigma - 1)y - \sigma \check{y} \right) + \tau^2 \varphi, \quad t \geq \tau,$$

$$F(0) = u_0 + \tau^2(0,5 - \sigma)\Lambda(0)u_0 + \tau \bar{u}_0(x) + 0,5\tau^2 f(x, 0).$$

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Tor tebranish tenglamasi uchun birjinsli holda boshlang`ich chegaraviy masala qanday qo`yiladi?
2. Tor tebranish tenglamasi uchun bir parametrli ayirmali sxema qanday tuziladi?
3. Xatolik uchun masala qanday aniqlanadi?
4. $O(\tau^2 + h^4)$ aniqlik bilan sxema qanday hosil qilinadi?
5. Uzilishga ega koeffitsientlar bilan berilgan tenglama uchun masala qanday qo`yiladi?
6. Uzilishga ega koeffitsientlar bilan berilgan tor tebranish tenglamasi uchun ayirmali sxemalar qanday tuziladi?

14 - ma`ruza

LAPLAS OPERATORINI TEKIS VA NOTEKIS TO`RDA APPROKSIMATSIYA QILISH.

PUASSON TENGLAMASI UCHUN DIRIXLE AYIRMALI MASALASI

Ma`ruza rejasi

1. Ko`p o`lchovli sohada Dirixle masalasi

2. Laplas operatorining ayirmali approksimatsiyasi
3. Laplas operatorining «xoch» notekis shablonda approksimatsiyasi
4. Misol
5. Sxema xatoligini baxolash
6. Ayirmali tenglamaning kononik shakli

Kalit soʻzlar: Dirixle masalasi, «xoch» shablon, notekis shablon, approksimatsiya xatoligi, toʻgʻri toʻrtburchakda Dirixle masalasi, kanonik shakl

Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasi quyidagicha qoʻyiladi: ushbu $G + \Gamma$ sohada

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} = -f(x), \quad x \in G \quad (1)$$

Puasson tenglamasini hamda ushbu $u|_{\Gamma} = \mu(x)$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz $u(x)$ funktsiyani topish talab qilinadi. Bu erda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; G - r -oʻlchovli, chegarasi G boʻlgan chekli soha.

1. Laplas operatorining ayirmali approksimatsiyasi

$x = (x_1, x_2)$ tekislikda

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

Laplas operatorining ayirmali koʻrinishini yozamiz.

$x = (x_1, x_2)$ nuqtada har bir $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ yoki $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ operatorlarni uch nuqtali

Λ_1 yoki Λ_2 operatorlar bilan approksimatsiyalaymiz

$$L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{h_1^2} (v(x_1 + h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 - h_1, x_2)), \quad (3)$$

$$L_2 v \sim \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_2^2} (v(x_1, x_2 + h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 - h_2)), \quad (4)$$

bu erda \sim approksimatsiya belgisi, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ – berilgan sonlar (x_1 va x_2 oʻqlar boʻyicha qadamlar).

Λ_1 operator

$$(x_1 - h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2)$$

regulyar uchnuqtali shablonda, Λ_2 operator esa

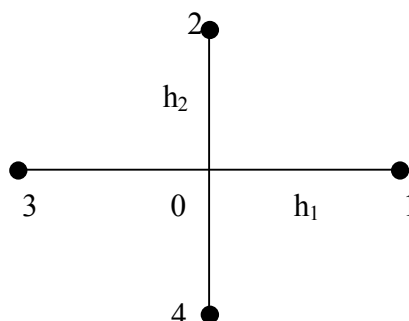
$$(x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2)$$

regulyar uchnuqtali shablonda aniqlangan.

(3) va (4) dan foydalanib, (2) Laplas operatorini besh nuqtali «xoch» shablonda aniqlangan

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (5)$$

chekli ayirmali operator bilan almashtiramiz.



Ko`rinib turibdiki

$$\Lambda v_0 = \frac{1}{h_1^2} (v_1 - 2v_0 + v_3) + \frac{1}{h_2^2} (v_2 - 2v_0 + v_4). \quad (6)$$

Xususiy xolda, $h_1 = h_2 = h$ bo`lganda

$$\Lambda v_0 = \frac{1}{h^2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0). \quad (7)$$

(5) ayirmali operator bilan (2) Laplas operatorini approksimatsiya qilgandagi xatolikni hisoblaymiz. $\alpha = 1, 2$ bo`lganda

$$\Lambda_\alpha v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4) = L_\alpha v + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 v + O(h_\alpha^4), \quad (8)$$

unda

$$\Lambda v - \Delta v = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 v + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 v + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Bundan ko`rinib turibdiki, agar $v(x)$ - ixtiyoriy funktsiya x_α bo`yicha to`rttadan kam bo`lmagan tartibli xosilaga ega bo`lsa, unda $\Lambda v - \Delta v = O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ bo`ladi. SHunday qilib, (5) ayirmali operator (2) Laplas operatorini «xoch» regulyar shablonda ikkinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi.

SHunga o`xshash r -o`lchovli ($r > 2$) Laplas operatorining

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (9)$$

ayirmali approksimatsiyasini tuzamiz.

L_α larni Λ_α uchnuktali ayirmali operator bilan almashtirib

$$\Lambda v = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha v \quad (10)$$

$$\Lambda_{\alpha} v = v_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} = \frac{1}{h_{\alpha}^2} (v^{(+1\alpha)} - 2v + v^{(-1\alpha)}), \quad (11)$$

ni xosil qilamiz, bu erda $v^{(\pm 1\alpha)} = v(x^{(\pm 1\alpha)})$. Bunda $x^{(+1\alpha)}$ (yoki $x^{(-1\alpha)}$) - $x=(x_1, \dots, x_r)$ nuqta x_{α} yo`nalish bo`yicha h_{α} kesma uzunligida o`ngga (chapga) siljigandagi nuqta. (10) operator uchun shablon $2r+1$ ta $x, x^{(\pm 1\alpha)}, \alpha = \overline{1, p}$ nuqtalardan iborat, approksimatsiya xatoligi esa ikkinchi tartibga ega.

2. Laplas operatorini notekis «xoch» shablondagi approksimatsiyasi

Ikki o`lchamli holda ($r=2$) shablon

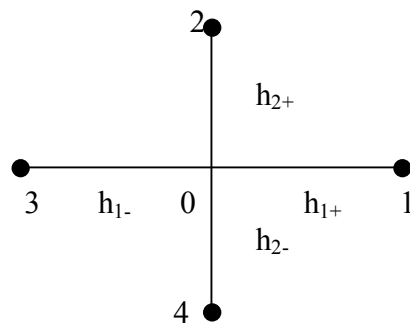
$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}),$$

beshta nuqtadan iborat bo`ladi, bu erda $h_{1\pm} > 0, h_{2\pm} > 0$, xech bo`lmaganda bir α uchun $h_{\alpha+} \neq h_{\alpha-}$.

Har bir L_1 i L_2 operatorlarni uch nuqta bo`yicha approksimatsiyalaymiz

$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2), \quad (3, 1, 0 \text{ nuqtalar})$$

$$(x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}), (x_1, x_2). \quad (4, 2, 0 \text{ nuqtalar})$$



Buning uchun quyidagi ifodalardan foydalanamiz:

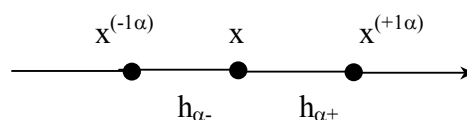
$$L_1 v \sim \Lambda_1^* v = \frac{1}{h_1} \left[\frac{v(x_1 + h_{1+}, x_2) - v(x_1, x_2)}{h_{1+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1 - h_{1-}, x_2)}{h_{1-}} \right], \quad (12)$$

$$L_2 v \sim \Lambda_2^* v = \frac{1}{h_2} \left[\frac{v(x_1, x_2 + h_{2+}) - v(x_1, x_2)}{h_{2+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h_{2-})}{h_{2-}} \right],$$

bu erda $\bar{h}_{\alpha} = 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+}), \alpha = 1, 2$.

Laplas ayirmali operatori notekis shablonda quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$\Lambda^* v = \Lambda_1^* v + \Lambda_2^* v = v_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} \quad (13)$$



Agar, misol uchun, $h_{1-} = h_{1+} = h_1$ bo`lsa, unda $\Lambda_1^* v = \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 x_1}$ va xakozo.

Ushbu

$$x^{(+1_1)} = (x_1 + h_{1+}, x_2), \quad x^{(-1_1)} = (x_1 - h_{1-}, x_2), \quad x^{(\pm 1_2)} = (x_1, x_2 \pm h_{2\pm}),$$

$$v^{(+1_\alpha)} = v(x^{(+1_\alpha)}), \quad v = v(x), \quad v^{(-1_\alpha)} = v(x^{(-1_\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2,$$

belgilashlarni kiritamiz.

Λ_α^* uchun

$$\Lambda_\alpha^* v = v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha} \left[\frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{h_{\alpha+}} - \frac{v - v^{(-1_\alpha)}}{h_{\alpha-}} \right], \quad \hbar_\alpha = 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+}), \quad \alpha = 1, 2 \quad (14)$$

ifodani yozish mumkin.

$Lv = v''$ bo'lganligi uchun

$$L_h v = \frac{1}{\hbar} \left[\frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_+} - \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-} \right] = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{\hbar}$$

bo'ladi.

Ushbu

$$v(x + h_+) = v(x) + h_+ v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v''' + O(h_+^4),$$

$$v(x - h_-) = v(x) - h_- v'(x) + \frac{h_-^2}{2} v''(x) + \frac{h_-^3}{6} v''' + O(h_-^4),$$

yoyilmalarni hisobga olib

$$v_x = v' + \frac{h_+}{2} v''(x) + \frac{h_+^2}{6} v''' + O(h_+^3), \quad v_{\bar{x}} = v' + \frac{h_-}{2} v''(x) + \frac{h_-^2}{6} v''' + O(h_-^3),$$

$$L_h v = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{\hbar} = v'' + \frac{h_+^2 - h_-^2}{6\hbar} v''' + O(\hbar^2)$$

ifodalarga ega bo'lamiz.

U holda

$$\psi = L_h v - Lv = \frac{h_+ - h_-}{3} v''' + O(\hbar^2) = O(\hbar).$$

Tafovut uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Lambda_\alpha^* v - L_\alpha v = \frac{1}{3} (h_{\alpha+} - h_{\alpha-}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2). \quad (15)$$

SHuday qilib, (13) formula bo'yicha aniqlanuvchi Λ^* ayirmali operator notekis shablonda Laplas operatorini birinchi tartibda approksimatsiya qiladi.

Bizga Laplas operatorini notekis shablonda approksimatsiya qilishning ikkinchi usuli ham kerak bo'ladi. (14) formula o'rniga

$$\Lambda_\alpha^* v = \frac{1}{h_\alpha} \left[\frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{h_\alpha^+} - \frac{v - v^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-} \right], \quad h_\alpha = \max(h_{\alpha-}, h_{\alpha+}), \quad (16)$$

ega bo'lamiz va demak $\Lambda_\alpha^* v = \frac{\hbar_\alpha}{h_\alpha} v_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}$.

Bu holda Λ_α^* operator nolinchi tartibli lokal approksimatsiyaga ega bo`ladi

$$\Psi_\alpha = \Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = O(1).$$

Haqiqatdan ham (15) ni hisobga olib, quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= \Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = -\left(1 - \frac{\hbar_\alpha}{h_\alpha}\right) L_\alpha u + \frac{\hbar_\alpha}{3h_\alpha} (h_{\alpha+}^+ - h_{\alpha-}^-) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2) = \\ &= -\left(1 - \frac{h_{\alpha+} + h_{\alpha-}}{2h_\alpha}\right) L_\alpha u + O(\hbar_\alpha) = -\frac{2 \max\{h_{\alpha+}, h_{\alpha-}\} - (h_{\alpha+} + h_{\alpha-})}{2h_\alpha} L_\alpha u + O(\hbar_\alpha) = \\ &= \pm \frac{h_{\alpha+} - h_{\alpha-}}{2h_\alpha} L_\alpha u + O(\hbar_\alpha) = O(1), \end{aligned}$$

chunki

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^* u &= \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \left[v' + \frac{h_{\alpha+}}{2} v'' + \frac{h_{\alpha+}^2}{6} v''' + O(\hbar_\alpha^3) - v' + \frac{h_{\alpha-}}{2} v'' - \frac{h_{\alpha-}^2}{6} v''' + O(\hbar_\alpha^3) \right] = \\ &= \frac{1}{h_\alpha} \left[\frac{h_{\alpha+} + h_{\alpha-}}{2} v'' + \frac{h_{\alpha+}^2 - h_{\alpha-}^2}{6} v''' + O(\hbar_\alpha^3) \right] = \frac{\hbar_\alpha}{h_\alpha} v'' + \frac{(h_{\alpha+} - h_{\alpha-}) \hbar_\alpha}{h_\alpha} v''' + O(\hbar_\alpha^2). \end{aligned}$$

(16) approksimatsiyadan qanday holatda foydalanishni quyidagi misolda ko`rsatamiz.

Misol. Ushbu

$$u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

birinchi jinsli chegaraviy masalani qaraymiz.

Approksimatsiya uchun chegara yaqinida tekis bo`lmagan

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, \quad x_1 = h_1, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad i=1,2,\dots,N-1, \quad x_{N+1} = x_N + h_2\}$$

to`rni tanlaymiz, $h_1 < h$, $h_2 < h$, $h_1 + h_2 + (N-1)h = 1$. Ichki x_i , $1 < i < N$ regulyar tugunlarda

$$u_i'' \sim u_{\bar{x},i}'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

chegaraviy tugunlarda esa

$$u_1'' \sim \Lambda^* u_1 = \frac{1}{h} \left[\frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{u_1 - u_0}{h_1} \right], \quad u_N'' \sim \Lambda^* u_N = \frac{1}{h} \left[\frac{u_{N+1} - u_N}{h_2} - \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \right]$$

approksimatsiyalarga ega bo`lamiz.

Natijada quyidagi chekli ayirmali sxemaga ega bo`lamiz

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}} &= -f(x_i), \quad x_i = h_1 + (i-1)h, \quad 1 < i < N, \\ \Lambda^* y_1 &= -f(x_1), \quad \Lambda^* y_N = -f(x_N), \quad y_0 = y_{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$z = u - u$ uchun

$$\Lambda z = -\Psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad z_0 = z_{N+1} = 0, \quad (18)$$

tenglamaga ega bo`lamiz, bu erda $x_1 < x_i < x_N$ bo`lganda $\Lambda z = z_{\bar{x},i}$, $i=2, 3, \dots, N-1$ bo`lganda

$$\Lambda z_1 = \Lambda^* z_1, \quad \Lambda z_N = \Lambda^* z_N, \quad \Psi_i = O(h^2), \quad i=1, N \text{ da esa } \Psi_i = O(1).$$

Sxema $i=1, N$ chegaraviy tugunlarda approksimatsiyaga ega bo'lmasa ham, (17) sxema S fazoda ikkinchi tartibli aniklikga ega: $\|z\|_c = O(h^2)$.

Bu baxoni olish uchun (18) tenglamani $x=x_i, x_N$ da yozamiz

$$\frac{1}{h} \left(\frac{z_2 - z_1}{h} - \frac{z_1 - \bar{z}_0}{h_1} \right) = 0, \quad \frac{1}{h} \left(\frac{\bar{z}_{N+1} - z_N}{h_2} - \frac{z_N - z_{N-1}}{h} \right) = 0,$$

bu erda $\bar{z}_0 = hh_1\psi_1, \quad \bar{z}_{N+1} = hh_2\psi_N$. SHunday qilib, (18) masala

$$z_{\bar{x}\bar{x}} = -\psi(x), \quad x_1 < x_i < x_N, \quad \Lambda^* z_1 = 0, \\ \Lambda^* z_N = 0, \quad z_0 = hh_1\psi, \quad z_{N+1} = hh_2\psi_N,$$

masalaga ekvivalent bo'ladi.

Ushbu

$$\|z\|_c \leq \max(|z_0|, |z_{N+1}|) + \sum_{i=1}^N h \sum_{k=1}^N h |\psi_k|,$$

aprior bahodan foydalanamiz.

Bundan

$$\|z\|_c = \|y - u\|_c \leq hh_1|\psi_1| + hh_2|\psi_N| + \max_{1 < i < N} |\psi_i| \leq Mh^2,$$

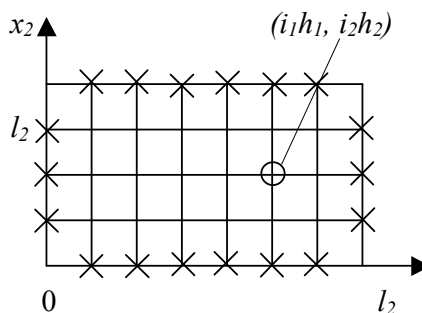
kelib chiqadi, ya'ni (17) sxema ikkinchi tartibli aniqlikga ega.

3. To'g'ri to'rtburchakda Dirixle ayirmali masalasi

$\bar{G}_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2)$ tomonlari l_1 i l_2 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak bo'lsin, G – uning chegarasi. $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$ da Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasini qaraymiz:

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G_0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (1')$$

\bar{G}_0 da $h_1 = l_1 / N_1$ va $h_2 = l_2 / N_2$ qadamlar bilan $\bar{\omega}_h$ to'rtburchakni quramiz, bu erda $N_1 > 0$ va $N_2 > 0$ - butun sonlar. Buning uchun $x_1^{(i)} = i_1 h_1, \quad i_1 = \overline{0, N_1}, \quad x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \quad i_2 = \overline{0, N_2}$ ikki to'g'ri chiziqlar oilasini quramiz.



Bu to'g'ri chiziqlarning $i_1 h_1$ va $i_2 h_2$ koordinatalardagi kesishish nuqtasini $x=(i_1 h_1, i_2 h_2)$ tugun deb ataymiz. Umumiy ichki tugunlar soni $(N_1-1)(N_2-1)$ ga teng.

To`g`ri to`rtburchak chegarasida yotuvchi tugun ($i_1=0, N_1$ yoki $i_2=0, N_2$ bo`lganda), quyidagi to`rtta $(0,0)$, $(0,l_1)$, $(0,l_2)$, (l_1,l_2) nuqtadan tashqari nuqtalarni *chegaraviy tugunlar* deb ataymiz. Ular $\gamma_h = \{(i_1, h_1, i_2, h_2)\}$ to`plamni tashkil qiladi. Barcha ichki va chegaraviy tugunlar to`plamini $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ to`r deb ataymiz.

Har bir $x \in \omega_h$ ichki tugunda besh nuqtali «xoch» regulyar shablonni qurish mumkin, bunda $x^{(\pm 1\alpha)}$ $\alpha=1, 2$ tugunlar $\bar{\omega}_h$ (ya`ni, yoki ω_h , yoki γ_h) da yotadi. SHuning uchun Δu Laplas operatorini barcha ichki tugunlarda

$$\Delta u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}$$

ayirmali operator bilan almashtirish mumkin.

(1') tenglamaning o`ng qismi- $f(x)$ ni $\varphi(x)$ to`r funtsiya bilan shunday approksimatsiya qilish mumkinki $\varphi(x) - f(x) = O(|h|^2)$, $f(x) \in C^{(2)}$ bo`ladi. $f(x)$ funktsiyaning uzluksizligini hisobga olib, $\varphi(x) = f(x)$ deb faraz qilamiz.

(1') masalaga mos keluvchi ayirmali Dirixle masalasini qo`yamiz: ichki tugunlarda (ω_h da)

$$\Delta y = -f(x), \quad \Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \quad (19)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $\bar{\omega}_h$ da aniklangan va γ_h chegarada

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (20)$$

qiymatlari berilgan $u(x)$ to`r funktsiyani topish kerak.

$h_1 \neq h_2$ da $\bar{\omega}_h(\bar{G}_0)$ to`r to`g`ri to`rtburchakli, $h_1 = h_2 = h$ da esa kvadrat to`r deyiladi.

Δy uchun kvadrat to`rda to`liq ifodani yozamiz

$$\Delta y = \frac{1}{h^2} (y^{(+l_1)} + y^{(-l_1)} + y^{(+l_2)} + y^{(-l_2)} - 4y).$$

$\varphi = 0$ bo`lsin. $\Delta y = 0$ tenglamani u ga nisbatan ehamiz:

$$y = \frac{1}{4} (y^{(+l_1)} + y^{(-l_1)} + y^{(+l_2)} + y^{(-l_2)}).$$

SHablon markazidagi u ning qiymati qolgan to`rtta tugundagi u larning o`rta arifmetik qiymatiga teng bo`ladi. Bu formula garmonik funktsiya uchun o`rta qiymat formulasining chekli ayirmali analogi bo`ladi.

(19), (20) dan ko`rinib turibdiki, $\mu(x)$ larning to`g`ri to`rtburchakning uchlaridagi qiymatlaridan foydalanilmaydi. Bu esa γ_h ni qanday tarzda tanlaganimizni izohlab beradi. Uchinchi chegaraviy masala xolatida $O(|h|^4)$ sxema γ_h chegaraning barcha nuqtalaridan tashkil topadi (to`rtburchak uchilarining nuqtalari ham kiradi).

$(N_1-1)(N_2-1)$ tartibli(19) algebraik tenglamalar sistemasini sonli echish usullari keyin ko`rib chiqiladi. (19)-(20) ayirmali sxema aniqligini baxolash uchun $z=y-i$ ayirmanini tuzamiz, bu erda $u - (19)$, (20) masalaning echimi, $i - (1')$ masalaning echimi. $y=z+u$ ni (1') ga quyib, z uchun quyidagi masalaga ega bo`lamiz ω_h da :

$$\Delta z = -\psi, \quad \gamma_h \text{ da esa } z = 0, \quad (21)$$

bu erda $\psi = \Lambda u + f$ - (1') tenlamani approksimatsiyalashdagi (19) sxema xatoligi.

$\psi = \Lambda u + f - Lu + Lu = \Lambda u - Lu$ bo'lganda $Lu+f=0$ bo'ladi, ya'ni $\psi = \Lambda u - Lu$.

(8) dan kelib chiqadiki, $u \in C^{(4)}$ bo'lganda $\psi = \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$, bu erda yuqori chiziqcha

argumentlarning mos ravishda (x_1-h_1, x_2) , (x_1+h_1, x_2) va (x_1, x_2-h_2) , (x_1, x_2+h_2) intervallardagi ba'zi o'rtacha nuqtadagi qiymatlari olinganini bildiradi.

$$M_4 = \max_{\bar{G}, \alpha} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} \right| \text{ deb belgilab, } |\psi| \leq M_4 \frac{|h|^2}{12} \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

To'g'ri to'rtburchakda

$$\hat{\omega}_h = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad x_\alpha^{(0)} = 0, \quad x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}$$

$h_1^{(i_1)} = x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}$, $h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}$ qadamlar bilan notekis to'r ham kiritilishi mumkin. Bu xolatda (13) ayirmali operatoridan foydalanib (19), (20) o'rniga

$$\Lambda y = -f(x), \quad \Lambda y = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y|_\gamma = \mu(x) \quad (22)$$

masalani olamiz.

Bu sxema birinchi lokal tartibli approksimatsiyaga ega bo'ladi

$$\psi_i = (\Lambda u + f(x))_i = (u_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} + f(x))_i = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^2 (h_\alpha^{(i_\alpha+1)} - h_\alpha^{(i_\alpha)}) \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(|h|^2) + O(|h|),$$

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

4. Ayirmali tenglamani kanonik shaklda yozish

Regulyar tugunda $2p+1$ nuktali $\Lambda y = -f$ sxemani qaraymiz

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1_\alpha)} - 2y + y^{(-1_\alpha)}) = -f.$$

Bu tenglamani quyidagicha ifodalaymiz

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_\alpha^2} y(x) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} (y^{(+1_\alpha)} + y^{(-1_\alpha)}) + f(x). \quad (23)$$

(23) tenglamani notekis bo'lgan shablon uchun ham yozish mumkin.

(23) tenglamani kanonik shaklda yozamiz

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (24)$$

bu erda $SH'(x)$ - markazi x nuktada bo'lgan $(2r+1)$ - nuqtali «xoch» shablonning x tugundan tashqari, ya'ni $\xi \neq x$, $2r$ tugunlari to'plami. $SH'(x)$ to'plamni x tugunning atrofi deb ataymiz.

$A(x)$ va $V(x, \xi)$ - tenglamaning berilgan koeffitsientlari. (23) dan ko'rinadiki,

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi) = A(x), \quad \forall x \in \omega_h.$$

(24) tenglamaga $y|_{\gamma_h} = \mu(x)$ shart qo`shiladi.

Ayirmali Dirixle masalasi quyidagi umumiy masalaning xususiy xoli hisoblanadi:
 $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ da aniqlangan

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in III'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x)$$

tenglamani hamda $x \in \omega_h$, $y(x) = \mu(x)$, $x \in \gamma_h$ shartni qanoatlantiruvchi $u(x)$ to`r funksiyani topish kerak, bu erda barcha $x \in \omega_h$ uchun:

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{x \in III'(x)} B(x, \xi) \geq 0.$$

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar va topshiriqlar

1. Ko`p o`lchamli sohada Dirixli masalasi qanday qo`yiladi?
2. Regulyar shablonda Laplas operatori qanday approksimatsiyalanadi?
3. Notekis shablonda Laplas operatori qanday approksimatsiyalanadi?
4. Notekis shablonda Laplas operatori xatoligi qanday baxolanadi?
5. To`g`ri to`rtburchakda Dirixle masalasi qanday qo`yiladi?
6. Puasson tenglamasi uchun ayirmali sxema kanonik ko`rinishga qanday keltiriladi?

INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

Ma`ruza rejasi

1. Birinchi va ikkinchi tur Fredgolm va Volter integral tenglamalari
2. Fredgolm teoremasi
3. Mexanik kvadraturalar usuli
4. Yadroni "ko`paytma" yadro bilan almashtirish yordamida yechish usuli
5. Ketma-ket yaqinlashishlar usuli

Kalit so`zlar: Fredgolm va Volter integral tenglamalari, integral xad kvadraturasi, "ko`paytma" yadro, ketma-ket yaqinlashish

Quyidagi tenglama

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (1)$$

Fredgolmning birinchi tur tenglamasi,

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (2)$$

- tenglama esa Fredgolmning ikkinchi tur tenglamasi deb ataladi.

Vol'terning birinchi va ikkinchi tur tenglamalari quyidagi ko`rinishlarda bo`ladi

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (3)$$

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (4)$$

bunda $f(x)$, $K(x, s)$ - berilgan funksiyalar, $y(x)$ - qidirilayotgan funksiya.

Ayrim masalalarni echishda differentsial tenglamalardan ko`ra integral tenglamalardan foydalanish qulaydir. Misol uchun Koshi masalasining qo`yilishini

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

integral ko`rinishda ifodalash mumkin

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds .$$

Shunday qilib, integral tenglama to`liq qo`yilgan masaladan iborat, uning uchun qo`shimcha (boshlang`ich va chegaraviy) shartlar berilishi kerak emas.

Endi ikkinchi tur tenglamalari uchun masalalarni qaraymiz. Birinchi tur uchun masalalar nokorrekt qo`yilgan.

Agar (2) tenglamaning o`ng tomoni nolga teng bo`lsa, u holda quyidagi ko`rinishda ifodalash mumkin bo`lgan ikkinchi tur birjinsli Fredgolm tenglamasi hosil bo`ladi

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \quad (5)$$

$$a \leq x \leq b .$$

$y(x) = 0$ bu tenglamaning nol (trivial) yechimi bo`ladi. Uning uchun xos qiymat masalasini qo`yish mumkin. Agar (5) tenglama $y = \varphi_i(x)$ noldan farqli yyechimga ega bo`lsa,

λ_i parametrlar $K(x, s)$ yadroning yoki (5) tenglamaning *xos qiymatlari* deyiladi, ularga mos $\varphi_i(x)$ yechimlar esa *xos funksiyalar* deyiladi.

Fredgolm teoremasi. Agar λ son $K(x, s)$ yadroning xos qiymati bo'lmasa, u holda birjinslimas (2) tenglama $x \in [a, b]$ da $y(x)$ yagona uzluksiz yechimga ega bo'ladi, aks holda bu birjinslimas tenglama yoki yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Amaliyotda $K(x, s) = K(s, x)$ bo'lgan haqiqiy simmetrik yadroli Fredgolmning ikkinchi tur tenglamalari muhim rol o'ynaydi.

Simmetrik yadro uchun quyidagi xossalar o'rinli:

- 1) Simmetrik yadro xech bo'lmaganda bitta xos qiymatga ega bo'ladi;
- 2) Simmetrik yadroning barcha xos qiymatlari haqiqiydir;
- 3) Simmetrik yadroning xos funksiyalari ortogonal, ya'ni

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i \neq j.$$

(4) Vol'ter tenglamasi xos qiymatlarga ega emas. Unga mos $f(x) = 0$ bo'lgandagi birjinsli tenglama faqat $y(x) = 0$ trivial yechimga ega. Haqiqatdan, (4) birjinslimas tenglama hamisha λ ning ixtiyoriy qiymatida yechimga ega va u yagonadir.

1. Mexanik kvadraturlar usuli

Biror-bir sonli integrallash formulasidan foydalanamiz

$$J(\psi) = \int_a^b \psi(x) dx \approx S_m(\psi) = \sum_{j=1}^m c_j \psi(x_j^{(m)}), \quad (6)$$

bunda c_j - umuman olganda m dan bog'liq.

Quyidagi tenglikga ega bo'lamiz

$$J(\psi) = S_m(\psi) + R_m(\psi), \quad (7)$$

bu erda $R_m(\psi)$ - (6) kvadratur formulaning qoldiq hadi.

(2) tenglamani qaraymiz. (7) munosabat yordamida uni quyidagicha ifodalash mumkin

$$y(x) - \lambda \sum_{j=1}^m c_j K(x, x_j^{(m)}) y(x_j^{(m)}) - R_m(\lambda Ky) = f(x), \quad (8)$$

bu erda $R_m(\lambda Ky)$ qoldiq xad, (6) kvadratur yordamida $\lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds$ integralni

hisoblashdagi x o'zgaruvchining funksiyasidir. (8) tenglamada $x = x_i^{(m)}$, $i = \overline{1, m}$ deb olib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$y(x_i^{(m)}) - \lambda \sum_{j=1}^m c_j K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}) y(x_j^{(m)}) = f(x_i^{(m)}) + R_m(\lambda Ky)|_{x_i^{(m)}}.$$

Qoldiq hadni tashlab yuborib chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (CHATS)ni hosil qilamiz

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^m c_j K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}) y_j = f_i, \quad (9)$$

$$f_i = f(x_i^{(m)}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Bu sistemani echish uchun CHATSni echishning standart usullarini qo'llash mumkin.

(9) tenglamalar sistemasini sistemaning matritsasi simmetrik bo'ladigan ko'rinishda almashtirish mumkin. Buning uchun (9) sistemaning i -inchi tenglamasini c_i ga ko'paytiramiz va quyidagi simmetrik matritsali tenglamalar sistemasini olamiz

$$c_i y_i - \lambda \sum_{j=1}^m c_i c_j K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}) y_j = c_i f_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Bunda $K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)})$ - simmetrik yadro.

Sistema matritsasini simmetrik holga keltirishning yana bir usuli quyidagicha. (9) da i -inchi tenglamani $\sqrt{c_i}$ ga ko'paytiramiz va $\sqrt{c_i} y_i = z_i$ deb olib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilinadi

$$z_i - \lambda \sum_{j=1}^m \sqrt{c_i} \sqrt{c_j} K(x_i^{(m)}, x_j^{(m)}) z_j = \sqrt{c_i} f_i. \quad (11)$$

$c_i > 0$ bo'lganda sistema matritsasini simmetrik holga keltirishning ikkinchi usuli afzaldir.

2. Yadroni "ko'paytma" yadro bilan almashtirish yordamida integral tenglamalarni yechish

Integral tenglamalarni yechishning boshqa klassik usullari (2), (4) masalalardagi $K(x, s)$ - integral operator yadrosini "ko'paytma" yadro bilan almashtirishdir.

"Ko'paytma" yadro ushbu ko'rinishda ifodalanadi

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^q c_j(x) d_j(s), \quad q < \infty.$$

Endi

$$K(x, s) \approx K^0(x, s) = \sum_{j=1}^q c_j(x) d_j(s) \quad (12)$$

bo'lsin deylik.

Aniqlik maqsadida $c_1(x), c_2(x), \dots, c_q(x)$ va $d_1(s), d_2(s), \dots, d_q(s)$ lar chiziqli erksiz bo'lsin deb faraz qilaylik. Aks holda $K^0(x, s)$ yadroni eng kichik qiymatli q bilan (12) ko'rinishda yozish mumkin.

(12) holda kutishga asos bor, chunki (2) tenglamani echish

$$y(x) - \lambda \int_a^b K^0(x, s) y(s) ds = f(x) \quad (13)$$

integral tenglamani yechishga yaqin.

$K^0(x, s)$ ifodani (13) ga qo'yib quyidagi tenglikni olamiz

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^q c_j(x) d_j(s) y(s) ds. \quad (14)$$

Demak

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^q A_j c_j(x), \quad (15)$$

bunda

$$A_j = \int_a^b d_j(s) y(s) ds.$$

Shunday qilib (2) tenglamani yechish A_j koeffitsientlarni aniqlashga olib kelinadi.

$y(x)$ uchun (15) ifodani (14) ga qo'yib, quyidagi munosabatni olamiz

$$\lambda \sum_{i=1}^q A_i c_i(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^q c_i(x) d_i(s) \left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^q A_j c_j(s) \right) ds = 0.$$

Bu tenglikni olishda ikki holatda j indeks i bilan belgilangan. Oxirgi tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$\sum_{i=1}^q B_i c_i(x) = 0,$$

bunda

$$B_i = A_i - \int_a^b d_i(s) f(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^q A_j \int_a^b d_i(s) c_j(s) ds.$$

$c_i(x)$ larning chiziqli erksizligidan $B_i = 0$ kelib chiqadi. A_i ga nisbatan tenglamalar sistemasi ni olamiz

$$A_i - \lambda \sum_{j=1}^q (d_i, c_j) A_j = (d_i, f),$$

bu erda $(g, f) = \int_a^b g(x) f(x) dx$ - skalyar ko'paytma. A_i ni aniqlagandan so'ng quyidagi ko'rinishdagi masala yechimiga yaqinlashishni olamiz

$$y(x) \approx f(x) + \lambda \sum_{j=1}^q A_j c_j(x).$$

3. Ketma-ket yaqinlashishlar usuli

Fredgolm tenglamasini qaraymiz

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (16)$$

(16) tenglamani echishda chiziqalmas tenglama uchun oddiy iteratsiya usuliga o'xshash iteratsion jarayonni quramiz. $y_0(x)$ - $y(x)$ izlanayotgan funksiyaning boshlang'ich yaqinlashishi bo'lsin. U holda $y_0(x)$ ni (16) ning o'ng tomoniga qo'yib

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y_0(s) ds$$

munosabatni olamiz.

Xuddi shunday topilgan qiymatni integral ostidagi ifodaga qo'yib $y_2(x)$ topiladi va xokazo jarayon davom ettiriladi. Ixtiyoriy $k+1$ - inchi yaqinlashish uchun quyidagicha yozish mumkin

$$y_{k+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots$$

$|\lambda|$ ning etarlicha kichik qiymatida va $K(x, s)$ chekli yadroda bu iteratsion jarayon x bo'yicha tekis yaqinlashadi va bu yaqinlashish chiziqli bo'ladi. Yaqinlashishning yetarlilik sharti quyidagicha

$$M \cdot |\lambda| (b-a) < 1, \quad (17)$$

$$M = \max_{x,s} |K(x,s)|.$$

Ketma-ket yaqinlashishlar usulining yana bir variantida darajali qatorlardan foydalanishadi. Bunda $y(x)$ izlanayotgan funksiya λ daraja bo'yicha qator ko'rinishida yoyiladi

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x). \quad (18)$$

Bu yoyilmanni (16) tenglamaga qo'yib, bir xil λ darajalardagi ifodalar tenglashtirilib, quyidagi rekurrent munosabatlarni olamiz

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_k(x) = \int_a^b K(x,s) \varphi_{k-1}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Agar (17) shart bajarilsa, chegaralangan $K(x,s)$ va $f(x)$ larda (18) qator yaqinlashadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Birinchi va ikkinchi tur Fredgolm va Volter integral tenglamalarini yozing.
2. Integral tenglamalar uchun qo'shimcha shartlar berilishi kerakmi?
3. Fredgolm teoremasini ayting.
4. Mexanik kvadraturalar usuli qanday qo'llaniladi?
5. Integral tenglamani yechishda mexanik kvadraturalar usuli nimaga olib keladi?
6. Mexanik kvadraturalar usulini qo'llashda qanday qilib koeffitsientlari simmetrik matritsali CHATSni olish mumkin?
7. Qanday yadrolar "ko'paytma" deyiladi?
8. Ketma-ket yaqinlashishlar usuli yaqinlashishining yetarlilik shartini keltiring.

Интернет сайтлари

1. <http://mschool.kubsu.ru>,
2. <http://cde.spbstu.ru>,
3. <http://alice.stup.ac.ru>,
4. <http://aco.ifmo.ru>
5. <http://exponenta.ru>
6. <http://moscowbooks.ru>
7. <http://fiziki.uniyar.ac.ru>
8. <http://cde.ifmo.ru>
9. <http://otd.tstu.ru>
10. <http://nspu.ru>
11. <http://old.tspu.edu.ru>
12. <http://forum.grodno.net>
13. <http://iqlib.ru>

Информацион таъминот:

1. www.referat.ru – Сетевые технологии и Internet.
2. www.referat.ru – Информатика ка наука.
3. www.informatika.ru – программы Excel.
4. www.bankreferatov.ru – программы Microsoft Access.
5. <http://www.intuit.ru> – Российский университет информационных технологий.
6. www.ziyonet.uz- Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигини ахборот таълим портали
7. www.desktop.ru – Какой антивирус лучше?
8. www.microsoft.com/rus/ - Microsoft Windows Server 2003.
9. www.gduportal.uz – ГулДУ ахборот таълим портали
10. www.guldu.uz – ГулДУ веб саҳифаси

