O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA- MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK TAHLIL KAFEDRASI

A.SAFAROV

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

fanidan ma'ruzalar matni
III-qism
(2-kurs matematika bo'limi talabalari uchun)

TERMIZ-2013

Safarov A. Algebra va sonlar nazariyasi. Ma'ruzalar matnlari. III-qism. Termiz. 2013 yil. 76bet.

Ushbu o’quv qo’llanmasi 5130100-matematika ta'limi yo’nalishi o’quv dasturi asosida yozilgan bo’lib chiziqli fazolar va chiziqli almashtirishlar, chizqli, bichiziqli va kvadratik formalar, Evklid va unitar fazolar hamda ulardagi chiziqli almashtirishlar, matritsaning Jordan normal formasi, algebraik tuzilmalar: gruppa, halqa, maydon va ularning tadbiqlari misollar asosida bayon qilingan. Amaldagi rejadagi 2-kurs materiallarini o’z ichiga oladi. Qo’llanmadagi materiallarning taxminan 30 foizini mustaqil ta'limga ajratish mumkin.

Taqrizchilar: f.m.f.d., professor I.Allakov
f.m.f.d., professor M.Mirsoburov

Mundarija

Mavzu: Vektorli fazo

Reja:

1.Ta'rifi va misollar.
2. Fazoning bazisi va o'lchami.
3. Vektorning koordinatlari.
4. Bir xil o'lchamli vektorli fazolarning izomorfligi.
Adabiyotlar[1, 2, 3, 4, 6].

1. Ta'rifi va misollar. Agar S to'plam additiv Abel gruppasi bo'lib uning elementlarini K maydonning elementlari α ga ko'paytirish aniqlangan va

1). $\forall a,b \in S, \quad \alpha \in K \qquad \alpha\cdot(a+b)=\alpha a+\alpha b;$

2). $\forall \alpha_1,\alpha_2 \in K,\ a\in S \qquad (\alpha_1+\alpha_2)a=\alpha_1 a+\alpha_2 a;$

3). $\forall \alpha_1,\alpha_2 \in K,\ a\in S \qquad (\alpha_1\cdot\alpha_2)a=\alpha_1\cdot(\alpha_2 a);$

4). $1\cdot a=a$

shartlarni qanoatlantirsa, *S* ga *K* maydonga nisbatan chiziqli fazo deyiladi.

Bundan keyin biz S ning elementlarin i vektorlar, S ni esa vektorli fazo deb yuritamiz. K maydonning elementlarini esa sonlar (skalyarlar) deb yuritamiz. Quyidagilar vektorli fazoga misol bo'la oladi:

1) tekislikdagi vektorlar to'plami R^2 haqiqiy sonlar maydoni R ga nisbatan;
2) fazodagi vektorlar to'plami R^3 haqiqiy sonlar maydoni R ga nisbatan;
3) tekislikdagi koordinata boshidan chiquvchi vektorlar to'plami, R ga nisbatan;
4) *F* maydondagi barcha *mxn* –o'lchovli matritsalar to'plami $L_{mxn}(F)$;
5) *F* maydondagi darajasi *n* dan katta bo'lmagan ko'phadlar to'plami.

Vektor fazolarni tekshirish chiziqli algebraning asosiy vazifasidir. Chiziqli algebraning tadbiqlarida ko'pincha R va C maydonlarga nisbatan vektor fazolar qaraladi, lekin axborotlar nazariyasida esa chekli *GF(2)* maydonga nisbatan vektor fazo ham muhim rol o'ynaydi.

Ta'rifdan osonlik bilan quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1^0. *0·a=0.* Haqiqatan ham $0\cdot a+0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a.$ Bu tenglikning ikkala tomoniga $(0\cdot a)$ ga qarama-qarshi element $(-0\cdot a)$ni qo'shsak $0\cdot a+0\cdot a+(-0\cdot a)=0\cdot a+(-0\cdot a).$ *Bundan* $0\cdot a+(0\cdot a+(-0\cdot a))=0, \quad 0\cdot a+0=0 \quad 0\cdot a=0.$

2^0. $\alpha\cdot 0=0\cdot$ Chunki $\alpha\cdot 0=\alpha\cdot(0+0)=\alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0\to\alpha\cdot 0=0.$

3^0. Agarda $\alpha\cdot a=0$ bo'lsa, u holda yoki $\alpha=0$ yoki $a=0$. Haqiqatan ham, agar $\alpha\neq 0$ bo'lsa, α^{-1} mavjud va $\alpha\cdot a=0$ dan $\alpha^{-1}\cdot\alpha a=\alpha^{-1}\cdot 0,$ $(\alpha^{-1}\cdot\alpha)a=0.$ Bundan esa $1\cdot a=a=0$ yoki $a=0.$ $a\neq 0$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash qaraladi·

2.Fazoning bazisi va o'lchovi

Ta'rif. Agar S vektor fazoning barcha elementlari chekli yoki cheksiz vektorlar $u_1, u_2, \dots$ ning chiziqli kombinatsiyadan iborat bo'lsa, u holda $u_1, u_2, \cdots$ vektorlarga S vektor fazoning hosil qiluvchilari deyiladi.

Agar S fazoning hosil qiluvchilari chekli sonda bo'lsa, S ga chekli o'lchovli, aks holda cheksiz o'lchovli deyiladi.

Tushunarliki, chekli o'lchovli fazolarda chiziqli bog'lamagan sistemalar chekli sondagi vektorlardan tuzilgan bo'ladi, chunki hosil qiluvchi vektorlar soni chekli k ta bo'lsa, k+1 ta olsak chiziqli bog'langan bo'ladi.

Cheksiz o'lchovliga misol barcha ko'phadlar fazosidir; chunki $1, x, \dots, x^n$ lar ixtiyoriy n uchun chiziqli bog'lanmagan.

Bundan keyin biz chekli o'lchovi vektor fazoni qaraymiz. Endi ushbu xossalarni isbotlaymiz.

1^0.Hosil qiluvchi vektorlarning minimal sistemasi chiziqli bog'lanmagandir.

Isboti. Haqiqatan ham $u_1, u_2, \dots u_n$ -minimal hosil qiluvchi sistema bo'lsin. Agar bu sistema chiziqli bog'langan bo'lsa, ularning birortasi u_n qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ sistema ham hosil qiluvchi sistemadir.

2^0. Ixtiyoriy maksimal chiziqli bog'lanmagan sistema hosil qiluvchi sistema bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan ham $u_1, u_2, \dots u_n$ - maksimal chiziqli bog'lanmagan sistema u esa ixtiriy vektor bo'lsa, $u_1, u_2, \dots u_n, u$ sistema chiziqli bog'langan bo'ladi va $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ deb yoza olamiz, ya'ni $u_1, \dots, u_n$ hosil qiluvchi sistema.

3^0. Chiziqli bog'lanmagan vektorlardan tuzilgan har qanday hosil qiluvchi sistema hosil qiluvchi sistemalar orasidagi minimali va chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi orasida maksimal bo'ladi.

Isboti. Faraz etaylik $u_1, u_2, \dots u_n$ -hosil qiluvchi chiziqli bog'lanmagan sistema bo'lsin. $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ -ikkinchi bir hosil qiluvchi sistema bo'lsin. U holda $u_1, u_2, \dots u_n$ lar $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Agar $n > k$ bo'lsa, $u_1, \dots, u_n$ lar chiziqli bog'langan, demak $n \le k.$

Faraz etaylik $w_1, \dots, w_m$ chiziqli bog'lanmagan bo'lsin. U holda $w_1, \dots, w_m$ larni $u_1, \dots, u_n$ lar orqali ifodalash mumkin; m>n bo'lsa, $w_1, \dots, w_m$ lar chiziqli bog'langan bo'ladi, shuning uchun ham $m \le n$.

Isbotlangan1^0-3^0 xossadan uchta tushuncha: minimal hosil qiluvchi vektorlar sistemasi, vektorlarning maksimal chiziqli bog'lanmagan sistemasi va chiziqli bog'lanmagan vektorlarning hosil qiluvchi sistemasi tushunchalari teng kuchli ekanligi kelib chiqadi.

Bu shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlar sistemasiga fazoning bazisi; bu bazisni tashkil etuvchi vektorlar soniga esa o'lchovi deyiladi. S vektor fazoning o'lchovini dimS deb belgilaymiz.

4^0. Agar $u_1, u_2, \dots u_m$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan bo'lib, ularning soni m ularning o'lchovidan kichik bo'lsa, u holda yana bir u_{m+1} vektorni topish mumkinki, bu vektorni qo'shib olib hosil qilingan $u_1,\ldots,u_m,u_{m+1}$ sistema ham chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

Isboti. $\{\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_m u_m\}$ to'plamni qaraymiz. $u_1,u_2,\ldots u_m$ hosil qiluvchi sistema bo'lmagani uchun ham S da bu to'plamga kirmagan u_{m+1} vektor mavjud va $u_1,\ldots,u_m,u_{m+1}$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Aks holda u_{m+1} vektor $u_1,\ldots,u_m$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

Bu xossadan kelib chiqadi, har bir chiziqli bog'lanmagan sistemani bazisgicha to'ldirish mumkin. Ikkinchi tomondan esa har bir hosil qiluvchi sistemadan bazisni hosil qilish mumkin (ya'ni ortiqchalarini tushirib qoldirib).

5^0. Har bir hosil qiluvchi sistema bazis vektorlar sistemasini o'z ichiga oladi.

Isboti. Agar $u_1,\ldots,u_m$ hosil qiluvchi sistema chiziqli bog'liq bo'lganda ulardan birortasi u_m qolganlarining chiziqli kombinatsiyalaridan iborat bo'ladi. u_m ni tashlab $u_1,\ldots,u_{m-1}$ sistema uchun shu mulohazalarni takrorlaymiz va hokazo.

2.Vektorlarning koordinatalari

Faraz etaylik S_n n-o'lchovli vektorli (K maydonga nisbatan) fazo, $e_1,\ldots,e_n$ (e) shu fazoning biror bazisi bo'lsin. $x\in S_n$ ixtiyoriy vektor bo'lsa, uni bazis vektorlar orqali

$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n$ (1) $(\alpha_i\in K)$ ko'rinishda

ifodalash mumkin. Har bir vektorni (1) ko'rinishda yagona usulda ifodalash mumkin. Haqiqatan ham (1) bilan birga

$$x=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\ldots+\beta_ne_n \quad (2)$$

ham o'rinli bo'lsin. (1) va (2) dan

$$(\alpha_1-\beta_1)\ell_1+(\alpha_2-\beta_2)\ell_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\ell_n=0 \quad (3)$$

(e) chiziqli bog'lanmagan sistema bo'lganida $(\alpha_1-\beta_1)=0,\ (\alpha_2-\beta_2)=0,\ldots,(\alpha_n-\beta_n)=0$ yoki $\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\ \ldots,\alpha_n=\beta_n$. (1) dagi $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots,\alpha_n$ - koeffitsientlarga x vektorning (e) bazisdagi koordinatalari deyiladi.

4. Bir xil o'lchovli vektorli fazolarning izomorfligi

S va S' lar birga F maydonga nisbatan vektor fazo bo'lsin. Agap S вa S' lar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lib amallarni saqlasa, ya'ni

$$\left.\begin{array}{l} S\ni a\xleftrightarrow{f} a'\in S' \\ S\ni b\xleftrightarrow{f} b'\in S' \end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} S\ni a+b\xleftrightarrow{f} a'+b'\in S' \\ S\ni \alpha\cdot a\xleftrightarrow{f} \alpha\grave{a}'\in S' \end{array}\right. \quad (*)$$

bajarilsa,S va S' fazolarni o'zaro izomorf fazolar deyiladi. Bu moslik f ga esa izomorf moslik deyiladi.

$(*)$ ni $f(\alpha_1a+\alpha_2b)=\alpha_1a'+\alpha_2b'$ bilan almashtirish mumkin.

Izomorf moslikda chiziqli bog'lanmagan sistema chiziqli bog'lanmagan sistemaga o'tadi. Haqiqatan ham, $u_1,\ldots,u_m$ chiziqli bog'lanmagan bo'lsin. Ularning obrazlari $u_1',\ldots,u_m'$ chiziqli bog'langan bo'lsin. U holda,

$$f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_m u_m)=f(\alpha_1 u_1)+f(\alpha_2 u_2)+\ldots+f(\alpha_m u_m)=\alpha_1 u_1^{'}+\alpha_2 u_2^{'}+\ldots+\alpha_m u_m^{'}=0$$

Bundan $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_m u_m=0$ $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0.$

Demak izomorf fazolar bir xil o'lchovli va aksincha bir xil o'lchovli fazolar o'zaro izomorfdir degan xulosaga kelamiz.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar.

1. Qanday to'plamga chiziqli fazo (vektorli fazo) deyiladi.
2. Chiziqli fazoning bazisi deb nimaga aytiladi.
3. Chiziqli fazoning o'lchovi nima?
4. Chiziqli erkli sistemani fazoning bazisiga to'ldirish sxemasini gapirib bering.
5. Vektorning koordinatlari deb nimaga aytiladi.
6. Izomorf fazolar deb qanday fazolarga aytiladi.

Mavzu: Vektorli fazoning turli bazislari orasidagi bog'lanish. Qism-fazolar.

Reja:

1. Bazislar orasidagi bog'lanish.
2. Vektorning turli bazisdagi koordinatalari orasidagi bog'lanish.
3. Qism-fazolar.
4. Qism-fazolar yig'indisi, kesishmasi va to'g'ri yig'indisi.

Adabiyotlar [1, 2, 3, 4, 6].

1.Bazislar orasidagi bog'lanish

Faraz etaylik bizga V vektorli fazo berilgan bo'lsin. $e_1,\ldots,e_n$ (e) va $e_1^{'},\ldots,e_n^{'}$ $(e^{'})$ lar bu fazoning 2 ta bazisi bo'lsin. U holda $(e^{'})$ bazisni (e) orqali ifodalash mumkin.

$$\begin{cases} e_1^{'}=c_{11}e_1+c_{21}e_2+\ldots+c_{n1}e_n \\ e_2^{'}=c_{12}e_1+c_{22}e_2+\ldots+c_{n2}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n^{'}=c_{1n}e_1+c_{2n}e_2+\ldots+c_{nn}e_n \end{cases} \qquad c_{ij}\in F \qquad (1)$$

Biz bundan keyin $e_1,\ldots,e_n$ bazisni (e) bazis $e_1^{'},\ldots,e_n^{'}$ bazisni esa $(e^{'})$ bazis deb ataymiz. Shuningdek vektorli fazoni qisqa v.f. deb yozamiz.

(1) ning o'ng tomonidagi koeffitsientlar c_{ij}-lardan tuzilgan matritsa C ga (e) bazisdan $(e^{'})$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi.

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Demak $e' = Ce$. O'z navbatida (e) bazisni (e') orqali ifodalash mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} e_1 = b_{11}e_1' + b_{21}e_2' + \ldots + b_{n1}e_n' \\ e_2 = b_{12}e_1' + b_{22}e_2' + \ldots + b_{n2}e_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = b_{1n}e_1' + b_{2n}e_2' + \ldots + b_{nn}e_n' \end{cases} \tag{2}$$

Bu yerda $B = (b_{ij})$ deb olsak, $e = Be'$ bo'ladi. (1) ni (2) ga olib borib ko'ysak,

$$\begin{cases} e_1 = d_{11}e_1 + d_{21}e_2 + \ldots + d_{n1}e_n \\ e_2 = d_{12}e_1 + d_{22}e_2 + \ldots + d_{n2}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = d_{1n}e_1 + d_{2n}e_2 + \ldots + d_{nn}e_n \end{cases} \quad \begin{matrix} e = BCe \\ e = De \end{matrix}. \tag{3}$$

Bu yerda

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \ldots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22} & \ldots & d_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1n} & d_{2n} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$ ya'ni $D=BC$.

e bazis chiziqli bog'lanmaganligi uchun (3) dan $d_{ii} = 1, \; d_{ij} = 0, \; i = j.$

Demak $D=E$ birlik matritsa va $BC=E$, ya'ni B va C o'zaro teskari matritsalar va $C = B^{-1}$. (2) dan $e = C^{-1}e'$.

2. Vektorning turli bazisdagi koordinatalari orasidagi bog'lanish.

Faraz etaylik ixtiriy $x \in Y$ vektor bo'lsin. U holda *e* bazisda

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \tag{4}$$

e' bazisda

$$x = x_1'e_1' + x_2'e'_2 + \ldots + x_n'e_n' \tag{5}$$

deb yoza olamiz. (4), (5) va (1) dan

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \ldots + x_n'e_n' = x_1'\left(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n\right) +$$
$$x_2'\left(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n\right) + \ldots + x_n'\left(c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n\right) = \left(c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n'\right)e_1$$
$$+\left(c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n'\right)e_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(c_{n11}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n'\right)e_n.$$

Bu yerdan

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n' \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n' \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n = c_{n11}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n' \end{cases} \quad yoki \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{N}^t \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Buning matritsasi

$$\tilde{N}^t=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & \tilde{n}_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Demak x vektorning e\` bazisdagi koordinatalari berilgan bo'lsa e bazisdagi koordinatalarini topish uchun e\` bazisdagi koordinatalari e dan e\` ga o'tish matritsasining transponirlanganiga ko'paytirish kerak. (6) dan $x'=\left(\tilde{N}^t\right)^{-1}x.$ $\left(\tilde{N}^t\right)^{-1}$ *matritsaga C matritsaga nisbatan kontragradient matritsa deyiladi.*

3.Qism fazolar.

Faraz etaylik *n*–o'lchovli V chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $P\subset V$ bo'lib *P* ham *V* da aniqlangan (qo'shish va songa ko'paytirish) amallariga nisbatan v.f. bo'lsa, P ga V ning qism fazosi deyiladi.

Demak qism fazoga agar $u_1, u_2, \dots, u_s$ chekli sondagi vektorlar tegishli bo'lsa, ularning barcha mumkin bo'lgan chiziqli kombinatsiyalari ham tegishli bo'ladi. Tushunarliki P dagi har qanday chiziqli bog'lanmagan sistema V da ham chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Shuning uchun ham *dimP≤dimV* bajariladi.

Agarda dimP=dimV bo'lsa, P=V bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda P da n elementdan tuzilgan bazis mavjud va $P\subset V$ bo'lgani uchun u *V* ning ham bazisi bo'ladi. Demak, *P=V.*

Har qanday fazoning ikkita trivial qism fazosi bor: bu shu fazoning o'zi va faqat noldan (nol vektordan) iborat bo'lgan fazo.

k>1 uchun ham *k* o'lchovli fazo mavjud. Buni ko'rsatish uchun V ning bazisidan *k* ta vektorni ajratib olib ularning chiziqli kombinatsiyalaridan tuzilgan $\{\propto_1 u_1 + \propto_2 u_2 + \dots + \propto_k u_k\}$ to'plamni qarash kifoya.

Ilgari isbotlangan 5-xossaga ko'ra ixtiyoriy qism fazoning bazisini V asosiy fazoning bazisigacha to'ldirish mumkin.

4.Qism fazolar yig'indisi, kesishmasi va to'g'ri yig'indisi.

Faraz etaylik P va Q lar V ning ikkita qism fazolari bo'lsin. Bu qism fazolarning yig'indisi deb $\{x+y|x\in P, y\in Q\}$ vektorlar to'plamiga aytiladi va P+Q ko'rinishida belgilanadi. Tushunarliki P+Q ham V fazoning qism fazosi bo'ladi, chunki, agar$x=x_1+y_1,\ y=x_2+y_2\in P+Q$ bunda$x_1,x_2\in P,\quad y_1,y_2\in Q)$ bo'lsa,

$\forall x,y\in P+Q\ \rightarrow x+y=x_1+y_1+x_2+y_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in P+Q$, chunki $x_1+x_2\in P,\quad y_1,+y_2\in Q$. Shuningdek agar $x=x_1+y_1\in P+Q$ va $\lambda\in K$ bo'lsa,

$$\lambda x=\lambda(x_1+y_1)=\lambda x_1+\lambda y_1\in P+Q \text{ bo'ladi, chunki } \quad \lambda x_1\epsilon P, \lambda y_1 \epsilon Q.$$

P va *Q* lar qism fazolarning kesishmasi deb $\{x\ |x\in P, x\in Q\}$ vektorlar to'plamiga aytiladi va P∩Q ko'rinishida belgilanadi.

P∩*Q* to’plam ham asosiy fazo V ning qism fazosi bo’ladi. Buni yuqoridagi singari tekshirib ko’rish mumkin. Tushunarliki P∩Q fazo P va Q larga tegishli bo’lgan qism fazolarning eng kattasi bo’ladi. P va Q lar P+Q ga tegishli. P+Q esa P va Q tegishli bo’lgan eng kichik qism fazodir. Bu yerda ushbu teorema o’rinli

1-teorema. *dimP+dimQ= dim(P+Q)+dim(P∩Q).*

Isboti. P+Q=R va *P∩Q=T* deb belgilab olamiz. Qism fazolarning o’lchovlarini esa ularga mos bo’lgan kichik harflar bilan belgilaylik: *dimP=p, dimQ=q. T* ning birorta bazisi $e_1, e_2, \ldots, e_t$ ni olaylik $T \subset P$ ва $T \subset Q$ bo’lgani uchun bu bazisni *P*ning bazisigacha ham, *Q* ning bazisigacha ham to’ldirish mumkin.

$$\mathring{a}_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_t,\ e_{t+1},\ \ldots,\ e_p \qquad (1)$$

P ning bazisi,

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_t,\ e'_{t+1},\ \ldots,\ e'_q \qquad (2)$$

Q ning bazisi bo’lsin.

$$e_1, e_2, \ldots, e_t, e_{t+1}, \ldots, e_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_q \qquad (*)$$

ning R uchun bazis ekanligini ko’rsatamiz.

R dan ixtiyoriy z ni olaylik, u holda $z = x + y,\ x \in P\ ,\ y \in Q,$

$$z = x_1e_1 + \ldots + x_te_t + x_{t+1}e_t + x_{t+1}, e_{t+1} + \ldots + x_pe_p + y_1e_1 + \ldots + y_te_t + \ldots + y_{t+1}e'_{t+1} + \ldots + y_qe'_q,$$

ya'ni (*) sistema R uchun hosil qiluvchi sistema bo’ladi.

Endi (*) sistemaning chiziqli bog’lanmagan ekanligini isbotlaymiz.

$$\tilde{n}_1\mathring{a}_1 + \tilde{n}_2\mathring{a}_2 + \ldots + \tilde{n}_t\mathring{a}_t + \tilde{n}_{t+1}\mathring{a}_{t+1} + \ldots + c_pe_p + c'_{t+1}e'_{t+1} + \ldots + c'_qe'_q = 0$$

bo’lsin, u holda

$$u = \tilde{n}_1\mathring{a}_1 + \tilde{n}_2\mathring{a}_2 + \ldots + \tilde{n}_t\mathring{a}_t + \tilde{n}_{t+1}\mathring{a}_{t+1} + \ldots + c_pe_p = -c'_{t+1}e'_{t+1} - \ldots - c'_qe'_q$$

vektor *P* ga tegishli, chunki uning bazisi (1) ning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ikkinchi tomondan esa *Q* ga ham tegishli, chunki uning bazisi (2) $\mathrm{e}'_{t+1}, \ldots, \mathrm{e}'_q$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, demak $u \in P \bigcap Q,$ яъни

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_te_t.$$

Buni (3) ning o’ng tomoni bilan tenglashtirsak.

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_te_t = -c'_{t+1}e'_{t+1} - \ldots - c'_qe'_q \quad yoki$$

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_te_t + c'_{t+1}e'_{t+1} + \ldots + c'_qe'_q = 0$$

bu yerda $e_1, \ldots, e_t, e'_{t+1}, \ldots, e'_q$ *Q* ning bazisi bo’lgani uchun

$$c'_{t+1} = \ldots = c'_q = 0,\ a_1 = a_2 = \ldots = a_t = 0,$$

bu holda (3) dan $\tilde{n}_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_t e_t + c_{t+1} e_{t+1} + \ldots + c_p e_p = 0$. Bundan esa (1) sistema R ning bazis bo'lganligi uchun $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2 = \ldots = \tilde{n}_t = \tilde{n}_{t+1} = \ldots = \tilde{n}_p = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, (*) chiziqli bog'lanmagan.

Shunday qilib (*) sistema $R=P+Q$ uchun hosil qiluvchi sistema va chiziqli bog'lanmagan bo'lganligi uchun u R uchun bazis bo'ladi.

Demak $dim\ R=p+q-t$.

Agar P va Q fazolarning yig'indisi $P+Q$ ga kiruvchi har bir vektor x ni $x = x_1 + y_1, \quad x_1 \in P, \ \ x_2 \in Q$ ko'rinishda yagona usulda ifodalash mumkin bo'lsa, P+Q yig'indiga to'g'ri yig'indi deb aytildi va bu $\mathrm{P} \oplus \mathrm{R}$ ko'rinishda belgilanadi.
Ta'rifdan $\mathrm{P} \oplus \mathrm{R}$ bo'lsa, $u + v = 0, \ \ u \in P, \ v \in Q \ \ dan \ u = 0, v = 0$ kelib chiqadi.
Agar $\mathrm{V} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{Q}$ bo'lsa V v.f. P va Q qism fazolar to'g'ri yig'indisi yoyiladi deyiladi.

2-teorema. $P+Q$ yig'indining to'g'ri yig'indi bo'lishi uchun P va Q qism fazolar kesishmasi uchun $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q} = 0$ ning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. a) faraz etaylik P+Q yig'indi to'g'ri yig'indi bo'lsin va $z \in P \cap Q$ bo'lsin. U holda $z \in P \ \ va \ z \in Q \ \ \hat{a}\hat{a} \ \ z + (-z) = 0$ bo'lgani uchun z=0.
б) $P \cap Q = 0 \ \ bo'lsa, \ z \in P + Q \ \ ni \ \ z = z_1 + z_2, \ \ z_1 \in P, \ \ z_2 \in Q \ \ va \ \ z = z_1^{'} + z_2^{'}$ bo'lsin. U holda
$z_1 + z_2 = z_1^{'} + z_2^{'} \quad dan \ \ z_1 - z_2 = z_1^{'} - z_2^{'} \ \ \ z_1 - z_1^{'} \in P, \ \ z_2^{'} - z_1 \in Q \to \left(z_1 - z_1^{'}\right) + \left(z_2^{'} - z_1\right) = 0$
$\to z_1 = z_1^{'}, \ \ z_2 = z_2^{'}$

ya'ni P+Q yig'indi to'g'ri yig'indi.

3-teorema. P+Q yig'indining to'g'ri yig'indi bo'lishi uchun P va Q qism fazolar bazislarining birlashmasi P+Q ning bazisi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Yuqoridagi ta'rif va 1-teoremadan kelib chiqadi.

Qism fazolar yig'indisi tushunchasini ixtiyoriy chekli sondagi qism фазоларucHun ham umumlashtirish mumkin. $P_1, P_2, \ldots, P_k$ larning yig'indisi deb $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_k \ : \ \ u_i \in P_i, i = 1,2,\ldots,k\}$ to'plamga aytildi. Agarda $u \in P_1, P_2, \ldots, P_k \ \ ni \ \ u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k, \ u_i \in P_i$ bir qiymatli ifodalash mumkin bo'lsa, ya'ni $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = 0$ kelib chiqsa, bu yig'indiga to'g'ri yig'indi deyiladi.

2'-teorema. $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_k$ - yig'indining to'g'ri bo'lishi uchun har bir P_i - qism fazoning qolganlarining yig'indisi bilan kesishmasi nol bo'lishi zarur va yetarlidir.

3-teorema. $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_k$ - yig'indining to'g'ri bo'lishi uchun $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_k$ larning bazislari birlashmasi $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_k$ ning bazisi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar.

1. Vektorli fazoning e bazisdan e` bazisga o'tish matritsasi deganda qanday matritsa tushuniladi? Bu matritsaning determinanti nol bo'lishi mumkinmi?
2. .e bazisdan e` bazisga o'tish matritsasi qanday topiladi?
3. Kontragradient matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. x vektorning ikkita e va e` bazisdagi koordinatalari orasida qanday bog'lanish bor?

5. Qism fazo deb nimaga aytiladi. Qism fazoga misollar keltiring.
6. Qism fazolar yig'indisi, kesishmasi va to'g'ri yig'indisiga ta'rif bering.
7.Qism fazolar o'lchovlari ularning yig'indisi va kesishmasining o'lchovlari bilan qanday bog'langan.

Mavzu: Nisbiy chiziqli erklilik va nisbiy bazis.

REJA:

1. Nisbiy chiziqli bog'langanlik, nisbiy bazis.
2. Faktor-fazo.
3. Berilgan fazoga qo'shma fazo.
4. Dual bazis.

Adabiyotlar [2, 3, 6].

1. Nisbiy chiziqli bog'langanlik, nisbiy bazis. Faraz etaylik V v.f. ning P qism fazosi berilgan bo'lsin. $u_1,\ldots,u_k \in V$ vektorlar berilgan bo'lib $c_1u_1+\ldots+c_ku_k \in P$ *dan* $c_1=\ldots=c_k=0$ kelib chiqsa, $u_1,\ldots,u_k$ vektorlar R ga nisbatan chiziqli erkli deyiladi.

1-teorema. $u_1,\ldots,u_k$ vektorlarning R qism fazoga nisbatan chiziqli erkli bo'lishi uchun $u_1,\ldots,u_k, e_1,\ldots,e_m$ $(bunda\ e_1,\ldots,e_m\ \ P\ ning\ \ bazisi)$ sistemaning chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. 1) $u_1, u_2, \ldots, u_k$ P ga nisbatan chiziqli erkli bo'lsin. $u_1, \ldots, u_k, e_1,\ldots,e_m$ sistemaning chiziqli erkli bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham

$$c_1u_1+\ldots+c_ku_k+b_1e_1+\ldots+b_me_m=0 \qquad dan\ \ c_1u_1+\ldots+c_ku_k \in P$$

Bundan $c_1=\ldots=e_k=0,\ \ b_1=\ldots=b_m=0$ kelib chiqadi.

2)Aksincha $u_1, \ldots, u_k, e_1,\ldots,e_m$ chiziqli erkli bo'lsin. U holda

$$\tilde{n}_1u_1+\ldots+c_ku_k \in P \quad dan\ \ \tilde{n}_1u_1+\tilde{n}_2u_2+\ldots+c_ku_k=b_1e_1+b_2e_2+\ldots+b_me_m$$

$$\tilde{n}_1u_1-\tilde{n}_2u_2-\ldots-c_ku_k=b_1e_1-b_2e_2-\ldots-b_me_m=0.$$

Bundan $\tilde{n}_1=\tilde{n}_2=\ldots=\tilde{n}_k=0,\ \ b_1=b_2=\ldots=b_m=0.$

Agar $u_1,\ldots,u_k$ vektorlar R qism fazoga nisbatan chiziqli erkli bo'lib ixtiyoriy $x \in V$ ni R qism fazodagi vektorgacha aniqlik bilan shu vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa $yani\ \ (x=c_1u_1+\ldots+u_kc_k+y \quad y\in P)$ $u_1,\ldots,u_k$ vektorlarga V fazoning R qism fazoga nisbatan bazisi deyiladi.

2-teorema. $u_1,\ldots,u_k$ vektorlarni V fazoning R qism fazoga nisbatan bazisi bo'lishi uchun $u_1,\ldots,u_k,e_1,\ldots,e_m$ $(bunda\ e_1,\ldots,e_m\ \ P\ ning\ \ bazisi)$ sistemaning V ning bazisi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Ta'rifdan va 1-teoremadan kelib chiqadi.

1 va 2-teoremadan kelib chiqadiki R qism fazoning bazisini V asosiy fazoning bazisigacha to'ldiruvchi vektorlar sistemasi V ning R ga nisbatan bazisi bo'lar ekan.

2. Faktor fazo (Fazoning faktori).

Faraz etaylik ixtiyoriy V v.f. va R uning qism fazosi bo'lsin. Agar $x, y \in V$ *uchun* $x-y \in P$ bo'lsa, x va y vektorlarni R qism fazo bo'yicha taqqoslanuvchi deyiladi va bu $x \equiv y(P)$ ko'rinishda yoziladi. Tushunarliki shu yo'l bilan V ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish mumkin. Shuningdek agar $x \equiv y(P)$ va $u \equiv z(P)$

bo'lsa, u holda $c_1x + c_2u \equiv c_1y_1 + c_2z(P)$ bo'ladi. Shuning uchun ham R qism fazo bo'yicha ajratilgan sinflar to'plami V/P ham v.f. bo'ladi. Bu fazoga faktor fazo deyiladi.

3'-teorema. V fazoning R ga nisbatan bazisi tegishli bo'lgan sinflar V/P fazoning bazisi va aksincha V/P ning bazisini tashkil etuvchi sinflardan birtadan element olib sistema tuzsak, bu sistema V ning P ga nisbatan bazisi bo'ladi. 3-teoremadan V/P ning o'lchovi $\dim V - \dim P$ ga teng ekanligi

$\dim\left(V/P\right) = \dim V - \dim P$ kelib chiqadi.

3.Qo'shma fazo.

V fazoning vektorlarida aniqlangan qiymatlari asosiy F maydonga tegishli bo'lgan va chiziqlilik sharti $l(\tilde{n}_1\tilde{o} + \tilde{n}_2y) = c_1l(x) + c_2l(y)$ ni qanoatlantiruvchi l funktsiyaga V v.f. dagi chiziqli funktsiya deyiladi. $e_1, \ldots, e_n$ sistema V ning bazisi bo'lsin. U holda

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \ \ dan \ \ l(x) = x_1l(e_1) + x_2l(e_2) + \ldots + x_nl(e_n)$$

tushunarliki $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ tenglik yordamida aniklanuvchi funktsiya chiziqli bo'ladi. Shunday qilib V da chiziqli funktsiya va $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satrlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Chiziqli funktsiyalarning yig'indisi va asosiy maydonning elementlariga ko'paytmasi tabiiy ravishda $(l_1 + l_2)x = l_1(x) + l_2(x),\quad (cl)x = cl(x)$ V vektor fazoga qo'shma fazo deyiladi va V^*

bilan belgilanadi. V^* fazo tushunarliki $(a_1, \ldots, a_n)$ satrlar fazosiga izomorf va demak V singari u ham n o'lchovlidir. V fazoning elementlarи $x \in V$ ham V^* da chiziqli funktsiyani aniqlaydi, chunki $x(l) = l(x)$ deb olish mumkin. V ham V* ga qo'shma vektor fazodir. V fazodagi chiziqli funktsiyalarni kovektorlar deb ham yuritiladi. Bu termin bo'yicha chiziqli funktsiyaning vektordagi qiymati kovektorning vektorga skalyar ko'paytmasi deb ataladi.

4. Dual bazis. V da biror $e_1, \ldots, e_n$ bazis berilgan bo'lsin. V^* da kovektorning koordinatalari chiziqli funktsiyaning vektor koordinatalari orqali ifodasidagi koeffitsientlardan iborat bo'ladigan bazis mavjud ekanini ko'rsatamiz.

V dagi har bir *x* vektorga uning *e* bazisdagi *i*- chi koordinatasini x_i ni mos ko'yuvchi funktsiyani f_i bilan belgilaymiz. Tushunarliki f_i chiziqli funktsiya bo'ladi va $f_i(e_i) = 1, \quad f_i(e_j) = 0, \quad i \neq j$

u holda

$$l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_1f_1(x) + \ldots + a_nf_n(x) = (a_1f + \ldots + a_nf_n)(x).$$

Shunday qilib $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lar *l* kovektorning *f* bazisdagi koordinatlaridan iborat. Bu bazisga *V* fazoning e bazisiga dual bazis deyiladi.
Agar *V* ni *V** ga qo'shma v.f. deb qarasak *e* bazis *f* ga dual bazis bo'ladi.

V fazoda koordinatalarni almashtirilganda V^* fazoda koordinatalar almashinishi. Faraz etaylik *e* va *e*` lar $V_n$ ning 2 ta bazisi bo'lsin va $\tilde{N} = (\tilde{n}_{ij})$ *e* dan *e*` ga o'tish matritsasi bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \cdots + c_{n1}e_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ e_n' = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + \tilde{n}_{nn}e_n \end{cases} \qquad (e' = Ce) \qquad (1)$$

U holda x vektorning e bazisdagi koordinatalari $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *e*` bazisdagi koordinatalari $x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ orqali quyidagicha ifoda etilar edi.

$$\begin{matrix} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n' \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n' \end{matrix} \qquad (x = C^t x') \qquad (2)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ koordinatalarga ega bo'lgan $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ chiziqli funktsiyani (2) ga asosan quyidagicha yoza olamiz:

$$l(x) = (c_{11}a_1 + c_{21}a_2 + \ldots + c_{n1}a_n)\, x_1' + \ldots + (c_{1n}a_1 + c_{2n}a_2 + \ldots + c_{nn}a_n)\, x_n' = a_1'x_1' + \ldots + a_n'x_n'$$

Demak *l(x)* chiziqli funktsiyaning $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ bazisga dual bazisdagi koordinatalari

$$\begin{cases} a_1' = c_{11}a_1 + c_{21}a_2 + \ldots + c_{n1}a_n \\ a_2' = c_{12}a_1 + c_{22}a_2 + \ldots + c_{n2}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n' = c_{1n}a_1 + c_{2n}a_2 + \ldots + c_{nn}a_n \end{cases} \to \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

ya'ni kovektorning koordinatalari fazolarning bazisi o'zgarishiga kovariant ravishda o'zgarar ekan. (Bizga ma'lumki vektorning koordinatalari bu holda kontravariant o'zgarar edi, ya'ni $x' = (C^t)^{-1} x$).

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar.

1. Qanday vektorlar sistemasini nisbiy erkli sistema deyiladi?
2. V fazoning uchun R qism fazosiga nisbatan bazisi deb nimaga aytiladi.
3. V fazo elementlarining R qism fazo bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lishlik ta'rifini ayting.
4. R qism fazo bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lishlik munosabatining ekvivalentlik munosabati bo'lishini ko'rsating.
5. Faktor-fazo deb nimaga aytiladi?
6. Berilgan V chiziqli fazo, R uning qism fazosi va V/R-faktor-fazolar o'lchovlari qanday bog'langan.
7. Berilgan V chiziqli fazoga qo'shma fazo V* deb qanday fazoga aytiladi?
8. Dual bazis bu qanday bazis?

MAVZU: CHIZIQLI AKSLANTIRISHLAR.

R E J A:

1. Ta'rifi, matritsasi, obrazi va yadrosi.
2. Chiziqli akslantirish matritsasining kanonik ko'rinishi.
3. Chiziqli operatorlar (akslantirishlar) va ular ustida amallar.
4. Xosmas chiziqli akslantirishlar.

Adabiyotlar. [1, 2, 3, 4, 6].

1.Ta'rifi, matritsasi, obrazi va yadrosi. *V* vektor fazoda aniqlangan va qiymatlari to'plami *T* ga tegishli *A* funktsiya chiziqlilik sharti $A(c_1x+c_2y)=c_1Ax+c_2Ay$ ni qanoatlantirsa A ga V vektor fazoning T ga chiziqli akslantirishi (chiziqli operator) deyiladi, $A:V\to T$ ko'rinishda belgilanadi. Bundan keyin chiziqli operatorlarni yozma katta harflar bilan belgilaymiz.

Faraz etaylik $\dim V=n,\ \dim T=m$ *va* $e_1,e_2,\dots,e_n$ *(e)* *V* ning $f_1,f_2,\dots f_m$ esa *T* ning bazisi bo'lsin, hamda $A:V\to T$. Tushunarliki *A* ning qiymati uning e bazis vektorlardagi qiymatlari bilan to'la aniqlanadi. Chunki chiziqlilik shartiga ko'ra

$$A(x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n)=x_1Ae_1+x_2Ae_2+\dots+x_nAe_n$$

$Ae_1,Ae_2,\dots,Ae_n$ vektorlarning $f_1,f_2,\dots,f_m$ (f) bazisdagi koordinatalari ustunini

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

deb belgilaylik. Bu ustunlardan tuzilgan matritsa esa A bo'lsin, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

U holda y=Ax vektorning koordinatalari $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$

lar uchun *x* vektorningkoordinatalari orqali quyidagi tenglikka ega bo'lamiz

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{cases}\qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_m\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_m\end{pmatrix},$$

ya'ni *Y=AX*. Bu yerdagi A matritsaga **A** chiziqli akslantirish matritsasi deyiladi.
A akslantirish va T vektor fazoning 0 ga o'tuvchi V ning vektorlari to'plamiga uning yadrosi deyiladi. Buni biz *ker A* yoki yadr. *A* bilan belgilaymiz. Barcha $Ax,\ x\in V$ vektorlar to'plamiga *A* ning obrazi deyiladi va uni *AV* yoki
im A deb belgilaymiz. Tushunarliki, A ning yadrosi va obrazi mos ravishda V ning va T ning qismi fazolari bo'ladi. Haqiqatan ham:

1) $Ax=0\ \ Ay=0 \to A(x+y)=Ax+Ay=0$

$A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda\cdot 0=0$ *demak* $\ker A\subset V$.

2) $A(x+y)=Ax+Ay\in AV$, *chunki* $Ax\in AV$, $Ay\in AV$;

$A(\lambda x)=\lambda Ax\in AV$,

chunki *T* v.f..

V ning yadro *A* bo'yicha taqqoslanuvchi elementlari *T* da bir xil obrazga ega chunki, $x-y\in \ker.A$ *bo'lsa,* $A(x-y)=0$ *yoki* $Ax=Ay$ va aksincha agar *V* ning 2 ta elementi bir xil obrazga ega bo'lsa ular *ker A* bo'yicha taqqoslanuvchi bo'ladi: $\mathrm{Ax}=\mathrm{Ay}\to \mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{y})=0\to \mathrm{x}-\mathrm{y}\in\ker \mathrm{A}$. Shunday qilib *AV* obrazning va *V/kerA* faktor fazoning elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud va bu moslik amallarni saqlaydi, ya'ni

$\left(\mathrm{AV}\cong \mathrm{V}/_{\ker \mathrm{A}}\right)$ izomorf moslikdir. Demak $\dim AV=\dim V-\dim(\ker A)$.

2.Chiziqli akslantirish matritsasining kanonik ko'rinishi. Faraz etaylik *V* va *T* fazolarning *e* va *f* bazislari mos ravishda *e'* va *f'* bazislari bilan almashtirilgan bo'lsin. *x* vektorlarning *e* dagi koordinatalarini *X*, *e'* dagi kordinatalarini X', bilan $y=Àx$ vektorni *Ó va Ó'* lar bilan belgilaylik. Koordinatalarini almashtirish matritsalari C chiziqli operator matritsasini A bilan belgilaylik, u holda

$X=CX',\ Ó=BÓ',\ Ó=AX,$ *ÿúí è* $Ó'=B^{-1}Ó$ *âà* $Ó'=Â^{-1}AX=B^{-1}ACX'=DX',\ D=B^{-1}AC,$

demak, A ning yangi bazisdagi matritsasi $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{AC}$ ga teng ekan. Tushunarliki AV obrazning o'lchovi bu fazoni hosil qiluvchi $Ae_1,\dots,Ae_n$. sistemadagi chiziqli bog'lanmagan vektorlarning maksimal soniga teng, ya'ni A ning matritsasi A dagi maksimal chiziqli erkli ustunlar soniga teng. Demak, agar

rang $A=n$, $\dim AV=r$ bo'lsa, $\dim AV=\dim V-\dim\ker A$

bo'lganidan $r=n-\dim\ker A$ *yoki* $\dim\ker A$. Faraz etaylik, $e_1, e_2, \dots, e_r$ lar V vektor fazoning kerA ga nisbatan biror nisbiy bazisi bo'lsin. U holda $Ae_1,\dots,Ae_r$ *lar* AV ning bazisi bo'ladi. Haqiqatdan ham, V dagi vektorni $\ker\mathrm{A}$ dagi vektorgacha aniqlik bilan $e_1,\dots,e_r$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgani uchun $Ae_1, Ae_2,\dots, Ae_r$ vektorlar AV ning hosil qiluvchilari, $Ae_1, Ae_2\dots, Ae_r$ lar chiziqli bog'lanmagan, chunki

$c_1Ae_1+c_2\,Ae_2+\dots+c_r\,Ae_r\ =0\to A(c_1e_1+c_2\,e_2+\dots+c_r\,e)=0\to c_1e_1+c_2\,e_2+\dots+c_r\,e\in\ker A$

$e_1, e_2,\dots,e_r$ lar yadroA ga nisbatan nisbiy bazis bo'lgani uchun $c_1=c_2=\dots=c_r=0.$

Endi faraz etaylik $e_{r+1},e_{r+2},\dots,e_n$ lar yadroA ning biror bazisi bo'lsin. U holda $e_1,e_2,\dots,e_r,\ e_{r+1},\dots,e_n$ ni V bazisi deb olish mumkin. T fazodagi $Ae_1, Ae_2,\dots, Ae_r$ chiziqli erkli sistemani T ning bazisigacha to'ldiramiz $g_1=Ae_1,\ g_2=Ae_2\ \dots,\ g_r=Ae_r$ deb belgilab olib ularni T ning bazisigacha to'ldiruvchi vektorlarni $g_{r+1},\dots,g_m$ bilan belgilaylik.

Bunday tanlab, olingan bazisda chiziqli operatorlar matritsasi A quyidagi ko’rinishga ega

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\,,\ n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Bu natijani matritsalar tilida quyidagicha talqin qilish mumkin: $\forall\ m\times n$ matritsa A ni $A:V_n \to T_m$ chiziqli operatorning matritsasasi deb qabul qilish mumkin bo’lgani uchun $\forall\ m\times n$ - matritsa uchun shunday xosmas $B_{m\times m}$ ва $C_{n\times n}$ matritsalarni topish mumkinki,

$$B^{-1}AC = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad rang\ A = r$$

tenglik o’rinli bo’ladi. Bu tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin.

$$A = B\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{N}_0,\ bu\ yerda\ \ \tilde{N}_0 = \tilde{N}^{-1}.$$

Agar B_1-matritsa B ning birinchi r ta ustuni, B_2 esa qolgan m-r ta ustunidan tuzilgan matritsa bo’lsa, u holda

$$\hat{A} = \left(\hat{A}_1, \hat{A}_2\right) \quad \hat{a}\grave{a} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

bu yerda C_1 matritsa C_0 ning birinchi r ta satri, C_2 esa qolgan n-r ta satri. Demak,

$$A = \left(B_1, B_2\right)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \left(B_1, 0\right)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = B_1 \cdot C_1.$$

Shunday qilib ixtiyoriy $\grave{A}_{m\times n}\left(rang\ A = r\right)$ matritsani $B_1^{m\times r}$ $v\grave{a}$ $C_1^{r\times m}$ matritsalarni ko’paytmasi ko’rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $rang\ B_1 = r$ $\hat{a}\grave{a}$ $rang\ C_1 = r$ chunki B_1 ning r ustuni chiziqli erkli C_1 ning esa r ta satri chiziqli bog’lanmagan.

3. Chiziqli operatorlar ustida amallar.

Yig’indisi. Faraz qilaylik A va B lar $V_n \to U_m$ chiziqli operator bo’lsin. Bu operatorlarning chiziqli kombinatsiyasini, $\left(c_1 A + c_2 B\right)x = c_1 Ax + c_2 Bx$ tenglik yordamida aniqlaymiz. Tushunarliki, u holda chiziqli operatorlar vektor fazo bo’ladi. Chiziqli operatorlar $A:V_n \to U_m$ va $m\times n$-matritsalar A o’zaro izomorf bo’lganidan chiziqli operator fazosining o’lchovi mn ga tengdir.

Ko’paytmasi. Faraz qilaylik $A:U \to W,\ B:V \to U$ chiziqli operator berilgan bo’lsin. $(AB)x = A(Bx)$ tenglik bilan aniqlanuvchi $AB:V \to W$ akslantirishga A va B chiziqli operatorlarning ko’paytmasi deyiladi. A ning biror bazisdagi матрицани **A,** B nikini **B** билан белгиласак, **X** esa x ning koordinatalari ustuni bo’lsa, u holda Bx

vektorning koordinatlar ustuni **BX**, *ABx* векторнинг координата устуни эса **ABX** bo'ladi.

Shunday qilib chiziqli operatorlar ko'paytmasiga berilgan bazisda ularga mos matritsalar ko'paytmasi mos keladi.

Chiziqli operatorlar ko'paytmasi va yig'indisi uchun ushbu tengliklar ham o'rinli

$$\left(c_1A_1+c_2\hat{A}_2\right)\hat{A}=c_1A_1\hat{A}+c_2\hat{A}_2\hat{A},\quad A\left(c_1\hat{A}_1+c_2\hat{A}_2\right)=c_1A\hat{A}_1+c_2\hat{A}\hat{A}_2\cdot$$

4. Xosmas chiziqli akslantirishlar. Faraz etaylik $A{:}V\to U$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar bunda *A* ning obrazi U dan iborat bo'lib A ning yadrosi faqat 0 dan iborat bo'lsa, *A* ga xosmas chiziqli akslantirish deyiladi. Xosmas chiziqli akslantirishda *Ax=0* dan *x=0* kelib chiqadi. Xosmas chiziqli akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lgani uchun unga teskari akslantirish A^{-1}ham mavjud. $A^{-1}(Ax)=x;$ A^{-1} ham chiziqli akslantirish bo'ladi.

$$A^{-1}:U\to V,\quad A^{-1}A=\varepsilon.\qquad A^{-1}\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=A^{-1}\left(c_1Ax_1+c_2Ax_2\right)=A^{-1}\left(Ac_1x_1+Ac_2x_2\right)=$$

$$=A^{-1}A\left(c_1x_1+c_2x_2\right)=c_1x_1+c_2x_2=c_1\varepsilon x_1+c_2\varepsilon x_2=c_1\varepsilon\, x_1+c_2\varepsilon x_2==c_1A^{-1}\left(Ax_1\right)+c_2A^{-1}\left(Ax_2\right)=$$

$$=c_1A^{-1}y_1+c_2A^{-1}y_2.$$

$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\varepsilon$ ga birlik operator deyiladi.

Mavzuni mustaxkamlash uchun savollar.

1. Chiziqli akslantirish deganda nimani tushunasiz?
2. Chiziqli akslantirishning obrazi deb nimaga aytiladi? Yadrosi deb-chi?
3. Chiziqli akslantirishning matritsasi qanday aniqlanadi?
4. Chiziqli akslantirish matritsasining kanonik ko'rinishi deb qanday ko'rinishga aytiladi?
5. Chiziqli akslantirishning yig'indisi va songa ko'paytmasiga ta'rif bering.
6. Chiziqli akslantirishning ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Qanday chiziqli akslantirishga xosmos chiziqli akslantirish deyiladi?
8. O'zaro teskari akslantirishlar deb qanday akslantirishlarga aytiladi?
9. Chiziqli akslantirishning defekti nima?

Vektorli fazodagi chiziqli operatorlar.

R E J A:

1. Vektorli fazodagi chiziqli operator ta'rifi.
2. Invariant qism fazolar.
3. Chiziqli operatorning har xil bazisdagi matritsalari orasidagi bog'lanish.
4. Chiziqli algebra.

Adabiyotlar [1, 2, 3, 4, 6].

1.**Vektorli fazodagi chiziqli operator ta'rifi**. **Chiziqli operatorlar matritsasi**, $A{:}V_n\to V_n$ *va* $e_1,e_2,\dots,e_n.$ V_n fazoning bazisi bo'lsin. A operatorga $Ae_1,\ Ae_2\dots,\ Ae_n$ vektorlarning $e_1,\ e_2,\dots,e_n$ bazisdagi koordinatalaridan tuzilgan **A** kvadrat matritsa mos keladi. Koordinatalarini almashtirishga $A^{'}=C^{-1}AC$ matritsa mos keladi. Bu

yerda A A chiziqli operatorning e bazisdagi, A' esa e' базисдаги матрицаси, C koordinatalarni almashtirish matritsasi. Demak, bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tilsa A chiziqli operatorning matritsasiga o'xshash matritsaga o'tar ekan.
$det(tE-A)=0$ ko'phadga A *matritsaning xarakteristik ko'phadi* deyiladi.

$$\det\left(tE-A'\right)=\det\left(tE-\tilde{N}^{-1}AC\right)=\det\left(CtEC^{-1}-A\right)=\det\left(tE-A\right),$$

ya'ni o'xshash matritsalar bir xil xarakteristik ko'phadlarga ega. Boshqacha qilib aytganda chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi fazoning bazisini tanlashga bog'liq emas, faqat shu operatorning o'ziga bog'liq. Operatorlar ustida amallar $A{:}V_n\to U_m$ dagi singari aniqlanadi.
Vektorli fazoda bichiziqlilik shartlari:

$$\left(\tilde{n}_1x_1+c_2x_2\right)y=\tilde{n}_1x_1y+c_2x_2y, \qquad x\left(\tilde{n}_1y_1+c_2y_2\right)=\tilde{n}_1xy_1+c_2xy_2$$

qanoatlantiruvchi qo'paytirish amali aniqlangan bo'lsa, bunday fazoga algebra deyiladi. Agarda elementlarini ko'paytirish assotsiativlik shartiga bo'ysunsa assotsiativ algebra deyiladi.
Demak, $A:V\to V$ operatorlar to'plami operatorlar algebrasi bo'ladi. ε *gà* E matritsa mos keladi.

$$f\left(t\right)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n\in F\left[t\right]$$

n-darajadi ko'phad bo'lsa, uning *A* chiziqli operatordagi qiymati deb

$$f\left(A\right)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE$$

chiziqli operatorga aytiladi. Agar **A** uning matritsasi bo'lsa

$$f\left(A\right)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE$$

matritsa *f(A)* operatorning matritsasasi bo'ladi.
2.Invariant qism fazolar. Faraz etaylik *V* fazo va *P* uning qism fazosi bo'lsin. Agar $A:V\to V$ akslantirishda *P* ning elementlari *P* ga o'tsa, *P* qism fazoga *A* chiziqli operatorga nisbatan *invariant qism fazo* deyiladi. Agar A ning faqat *P* dagi joyini olsak *P* da aniqlangan va qiymatlari ham *P* da bo'lgan chiziqli operatorga ega bo'lamiz.

Agar $x\equiv y(P)$ *yani* $x-y\in P$ bo'lsa, $A(x-y)\in P$,ya'ni $Ax\equiv Ay(P)$ bo'ladi. Shunday qilib, A chiziqli operator taqqoslanuvchi bo'lishlik amalini saqlaydi va shuning uchun *V/P* faktor fazoda A bilan indutsirlangan operator aniqlangan deb qarash mumkin.
Faraz etaylik $e_1, e_2,\ldots,e_k$ - *P* invariant qism fazoning bazisi, $e_1, e_2,\ldots,e_k,\breve{a}_{k+1},\ldots,\breve{a}_n$ esa uning V ning bazisigacha to'ldirmasa bo'lsin. U holda
$\grave{A}e_1,\grave{A}e_2,\ldots,\grave{A}e_n$ vektorlarning koordinatalarining *k+1*-dan boshlab qolgani nol bo'lish kerak, ya'ni A chiziqli operatorga tanlangan bazisda

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mos keladi. Bu yerda

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

matritsa P qism fazodagi A chiziqli operatorning matritsasi.

$$\left.\begin{array}{l} Ae_{k+1}\equiv a_{k+1,k+1}\,e_{k+1}+\dots+a_{k+1,n}e_n \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \ \dots \\ Ae_n\equiv a_{n,k+1}\,e_{k+1}+\dots\ \ +a_{nn}\,e_n \end{array}\right\}(P)$$

bo’lgani uchun A_2 matritsa A operator bilan $V|P$ da indutsirlangan operatorning matritsasi.

1-teorema.V vektor fazoda aniqlangan chiziqli operator A ning xarakteristik ko’phadi invariant R qism fazoda aniqlangan A operatorning xarakteristik ko’phadiga bo’linadi. Bo’linmada hosil bo’lgan ko’phad esa $V|P$ da aniqlangan A bilan indutsirlangan chiziqli operatorning xarakteristik ko’phadi bo’ladi.

Isboti.

$$\det\left(tE_n-A\right)=\det\begin{pmatrix} tE_k-A_1 & B \\ 0 & tE_{n-k}-A_2 \end{pmatrix}=\det\left(tE_k-A_1\right)\det\left(tE_{n-k}-A_2\right)$$

dan kelib chiqadi.

3. Chiziqli operatorning har xil bazisdagi matritsalari orasidagi bog’lanish. Faraz etaylik V_n - chiziqli fazo berilgan bo’lsin va

$$e_1,e_2,\ \dots,\ e_n \qquad (e) \qquad (1)$$

$$f_1,\ f_2,\dots,\ f_n \qquad (f) \qquad (2)$$

Shu fazoning har xil bazislari bo’lsin. V_n fazodagi φ chiziqli operatorni qaraylik. φ ning (1) bazisdagi matritsasi A va (2) bazisdagi matritsasi B bo’lsin.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

U holda

$$\varphi\left(e_k\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}e_i, \qquad \left(k=1,\ 2,\ \dots,n\right)$$

$$\varphi\left(f_k\right)=\sum_{i=1}^{n}b_{ik}\,f_i, \qquad \left(k=1,\ 2,\ \dots,n\right) \qquad (3)$$

deb yoza olamiz, e bazisdan f ga o’tish matritsasi C bo’lsin.

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} c_{11} & \tilde{n}_{12} & \dots & \tilde{n}_{1n} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} & \dots & \tilde{n}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{n}_{n1} & \tilde{n}_{n2} & \dots & \tilde{n}_{nn} \end{pmatrix}, \ \textit{ÿúí è} \ \begin{cases} f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + e_{n1}e_n \\ f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + e_{n2}e_n \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + e_{nn}e_n \end{cases} \qquad (4)$$

C xosmas matritsadir. Haqiqatan ham, agar hech bo'lmasa birortasi $\neq 0$ bo'lganidan $c_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_n$ sonlar uchun

$$\begin{cases} \tilde{n}_1\tilde{n}_{11} + c_2\tilde{n}_{21} + \ldots + \tilde{n}_n\tilde{n}_{1n} = 0 & e_1 \\ c_1\tilde{n}_{21} + c_2\tilde{n}_{22} + \ldots + \tilde{n}_n\tilde{n}_{2n} = 0 & e_2 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots & \ldots \\ c_1\tilde{n}_{n1} + c_2\tilde{n}_{n1} + \ldots + \tilde{n}_n\tilde{n}_{nn} = 0 & e_n \end{cases}$$

dan

$$\tilde{n}_1\left(\tilde{n}_{11}\mathring{a}_1 + \tilde{n}_{21}\mathring{a}_2 + \ldots + \tilde{n}_{n1}e_n\right) + \tilde{n}_2\left(\tilde{n}_{12}\mathring{a}_1 + \tilde{n}_{22}\mathring{a}_2 + \ldots + \tilde{n}_{n2}e_n\right) + \ldots + \tilde{n}_n\left(\tilde{n}_{1n}\mathring{a}_1 + \tilde{n}_{2n}\mathring{a}_2 + \ldots + \tilde{n}_{nn}e_n\right) = 0$$

kelib chiqadi. Bundan $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lar bazis vektorlar sistemasi. Shunday qilib $\det C \neq 0$. Shuning uchun ham shunday (unga **C** matritsa mos keladi) C chiziqli operator mavjud bo'lib (1) ni (2) ga akslantiradi:

$$\nu\left(\mathring{a}_i\right) = f_i, \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right) \qquad (5)$$

(5) *í è* (3) *äàí*

$$\varphi\nu\left(e_k\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu\left(e_i\right) \qquad (6)$$

ni hosil qilamiz.

$\det C \neq 0$ bo'lgani uchun ν^{-1} mavjud. ν^{-1} ni (6) ga tadbiq qilsak,

$$\nu^{-1}\varphi\nu\left(e_k\right) = \nu^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \nu^{-1}b_{ik}\nu\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu^{-1}\nu\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}e_i \qquad (7)$$

ni hosil qilamiz. Buning chap tomonidagi $\nu^{-1}\varphi\nu$ operatorning matritsasi $C^{-1}\grave{A}\tilde{N}$ o'ng tomoniniki esa B. Demak,

$$\hat{A} = \tilde{N}^{-1}\grave{A}\tilde{N} \ . \qquad (8)$$

(8) shartni kanoatlantiruvchi A va B matritsalarga *o'xshash matritsalar* deyiladi.

4.Chiziqli algebra. *P* sonli maydon ustida *V* chiziqli fazoning $\forall x, \acute{o} \in V$ vektorlarini ko'paytirish qoidasi tayinlangan deb faraz qilib, x va y vektorlar ko'paytmasini xy ko'rinishda belgilaymiz.

1-ta'rif. *P* sonli maydon ustida *V* chiziqli fazoning istalgan 2 ta vektorini ko'paytirish qoidasi berilgan bo'lib, ushbu aksiomalar bajarilsa, *V* fazo *P* maydon ustida *chiziqli algebra* deyiladi.

1) $\forall \tilde{o}, \acute{o} \in V, \quad xy \in V$

2) $\forall x, y, z \in V \quad x\left(yz\right) = \left(xy\right)\cdot z;$

3) $\forall \tilde{o}, \acute{o}, z \in V \ \left(x + y\right)\cdot z = xz + yz, \ \ x\left(y + z\right) = xy + xz;$

4) $\forall a \in P, \ \forall x, y \in V, \ (ax)y = a\left(xy\right)$

(aralash ko’paytma assotsiativ).
Agar bu shartlarga qo’shimcha ravishda *xy=yx* shart bajarilsa, *kommutativ chiziqli algebra* deyiladi.

Misollar. 1). P maydondagi V fazoda $x, y \in V$ ko’paytmani *xy=0* deb aniqlasak *V* chiziqli algebra bo’ladi;

2). P maydondagi kvadrat matritsa $(n \times n)$ lar to’plami;

3) . P maydondagi kvadrat chiziqli almashtirishlar to’plami;

2. Izomorf chiziqli algebra ta'rifiga ko’ra (bu ta'rif fazolardagi singari beriladi) P maydondagi kvadrat matritsalar algebrasi shu maydondagi V_n fazodagi chiziqli akslantirishlar algebrasiga izomorfdir.

3. Invariant qism fazolarga misol sifatida:

1) V_3 ni 90^0 ga burishni, ya'ni xyz fazoni biror o’q atrofida 90^0 ga burishni φ debolsak, u holda $\varphi: V_3 \to V_3$ bo’ladi, ya'ni V_3 yuqoridagicha aniqlangan φ ga nisbatan invariantdir.

2) $\deg f \le n-1$ bo’lgan *L* ko’phadlar fazosida $\varphi: f(x) \to f'(x)$ *yani* $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ *ga* uning hosilasini mos ko’yuvchi akslantirishni φ deb olsak. *L* qism fazo akslantirishga nisbatan invariant bo’ladi.

Mavzuni mustaqkamlash uchun savollar.

1. Vektorli fazodagi chiziqli operator deganda nimani tushunasiz?
2. Matritsaning xarakteristik ko’phadi qanday aniqlanadi?
3. Operatorlar algebrasi nima?
4. Invariant qism fazo deb qanday qism fazoga aytiladi?

Mavzu: Chiziqli operatorlar va ularning matritsalari.

Reja:

1. Chiziqli operatorlar va unga doir misollar.
2. Nol operatorning matritsasi
3. Teskari akslantirishlarning xoccalari .

Ma'lumki chiziqli fazoning o`z-o`ziga akslantirishiga $f: V \to V$ *chiziqli operator* deb ataladi.

Misollar. 1) F maydonning λ elementi berilgan bo`lsin. Bu maydon ustidagi *V* chiziqli fazoning $x \to \lambda x$ akslantirishi chiziqli operatordir.

2) $D_2(a)$ va $D_3(a)$ fazolarda biror to`g`ri chiziq berilgan bo`lsin. Yo`naltirilgan kesmaning bu to`g`ri chiziqqa ortogonal proektsiyalanishi chiziqli operator bo`ladi.

3) $A \in F^{nxn}$ matritsa berilgan bo`lsin. $F^n$ chiziqli fazo elementlarini $n$ ta elementli bir ustun ko`rinishida ifodalab, uning o`zini o`ziga ushbu $x \to Ax$ akslantirishi chiziqli operatordir.
4) $R[t]$ va $R_n[t]$ chiziqli fazolarda hosila olish amali chiziqli operator.

5) $C[a,b]$ fazoda har bir $x(t)$ uzluksiz funktsiya uchun $f(t) = \int_a^t x(u)du, \quad (a \le t \le b),$ tenglik bilan aniqlanuvchi akslantirish chiziqli operatordir.
Birlik (ayniy) va nol operatorlar chiziqli akslantirishlardagi singari aniqlanadi.

$\forall x \in V \quad \varepsilon : x \to x$ va $D : x \to \overline{0}$.

V chiziqli fazodagi *f* chiziqli operator va V_1 qism fazo berilgan bo`lsin. Agarda $\forall x \in V_1$ uchun $f(x) \in V_1$ shart bajarilsa, V_1 qism fazoga *f* chiziqli operatorga nisbatan *invariant qism fazo* deyiladi.

Masalan: har bir *f* chiziqli operator uchun $\ker f = \{x | f(x) = 0, \ x \in V\}$ va $f(V)$ qism fazolar invariantdir.

Haqiqatan ham agar $x \in \ker f$ bo`lsa, $f(x) = \overline{0} \in \ker f$. Shuningdek, agar $x \in f(V)$ bo`lsa, $f(x) \in f(V)$ bo`ladi.

F maydon ustidagi chekli o`lchamli V chiziqli fazoda $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazis va $f : V \to V$ chiziqli operator berilgan bo`lsin. U holda

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in V \quad \text{uchun} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i)$$

bo`ladi. Bundan ko`rinadiki har bir chiziqli operator *f* o`zining bazis vektorlardagi qiymatlari bilan to`la aniqlanar ekan. $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ larni bazis bo`yicha yoysak

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \quad a_{ik} \in F, \ \left(k = \overline{1,n}\right)$$

hosil bo`ladi. Bu yerdagi $A = (a_{ik}) \in F^{nxn}$ matritsaga *f* chiziqli operatorning (e) bazisdagi matritsasi deyiladi.

Demak, berilgan chiziqli operator o`zining matritsasi yordamida bir qiymatli aniqlanadi, ya'ni *n*-tartibli kvadrat matritsalar va *n*-o`lchovli chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli operatorlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Misollar. 1) D_3 fazoda bazis sifatida i, j, k ortlarni olib, *f* sifatida abstsissa o`qiga ortogonal proektsiyalashni qaraymiz.
Bunda

$$\begin{aligned} f(i) &= i \\ f(j) &= 0 \\ f(k) &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agarda f sifatida xy tekisligiga ortogonal proektsiyani olsak $f(i)=i,\quad f(j)=j,\quad f(k)=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2) F^n fazoda bazis sifatida $e_1=(1,0,.....,0),\quad e_2=(0,1,.......,0),....,\ e_n=(0,0,.....,1)$ ortlarni olib $A=(a_{ik})\in F^{n\times n}$ matritsa orqali $f(x)=Ax$ chiziqli operatorni

$f(e_1)=a_{11}e_1+a_{21}e_2+...+a_{n1}e_n,\ f(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2+...+a_{n2}e_n,...,\ f(e_n)=a_{1n}e_1+a_{n2}e_2+...+a_{nn}e_n$

munosabat orqali aniqlaymiz. U holda A matritsa *f* ning matritsasi bo`ladi.

3). $R_n[t]$ fazoda $\{1,t,....,t^n\}$ bazis olinsa, *f* sifatida differentsiallash operatorini olsak

$$f(1)=0,\ f(t)=1,\ f(t^2)=2t,\ f(t^3)=3t^2,.......,\ f(t^n)=n\cdot t^{n-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&n\\0&0&0&\ldots&0&0\end{pmatrix}\quad \text{bo`ladi.}$$

4) Nol operatorning matritsasi har qanday bazisda ham nol matritsa bo`ladi.
5) Birlik operatorning matritsasi har qanday bazisda ham birlik matritsa bo`ladi.

Agarda V chekli o`lchamli fazodagi *f* chiziqli operator $A_f$ matritsa bilan berilgan bo`lsa, u holda quyidagilar o`rinli:

$$A_{f+g}=A_f+A_g;\qquad A_{\lambda f}=\lambda A_f;\qquad \lambda\in F;\qquad A_{fg}=A_f\cdot A_g$$

Bu xossalar ta'rifdan kelib chiqib isbotlanadi. Biz bu yerda faqat oxirgisini isbotlash bilan kifoyalanamiz. V fazodagi f chiziqli operatorning (e) bazisdagi matritsasi $A_f=(\alpha_{ik}),\ g$ operatorning shu bazisdagi matritsasi $A_g=(\beta_{ik})$ va fg chiziqli operatorning matritsasi esa $A_{fg}==(\gamma_{ik})$ bo`lsin. U holda

$$f(e_k)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i,\qquad g(e_k)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}e_i,\quad (fg)(e_k)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}e_i,\quad k=1,2,...,n\qquad \text{bo`ladi.}$$

Ikkinchi tomondan esa

$$(fg)(e_k)=f(g(e_k))=f\left(\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}e_p\right)=\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}f(e_p)=\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}f(e_p)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ip}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}\alpha_{ip}\right)e_i\ .$$

Demak $\gamma_{ik}=\sum_{p=1}^{n}\beta_{pk}\alpha_{ip}=\beta_{1k}\alpha_{i1}+\beta_{2k}\alpha_{i2}+\ldots+\beta_{nk}\alpha_{in}$, ya'ni γ_{ik} element A_f matritsaning *i*-satr elementlarini A_g ning k-ustun elementlariga mos ravishda ko`paytirib qo`shamiz natijasida hosil bo`ladi. Shuning uchun $A_f\cdot A_g=A_{fg}$.

Ta'rif. Agar $f:V\to V$ akslantirish (*f* ning chiziqli bo`lishi shart emas) uchun shunday bir $g:V\to V$ akslantirish mavjud, bo`lsaki, $f\cdot g=g\cdot f=e$ -birlik (ayniy) akslantirish bo`lsa, *g* akslantirishga *f* ga *teskari akslantirish* deb ataladi.

Agarda berilgan *f* akslantirishga teskarisi mavjud bo`lsa, u yagonadir. Faraz etaylik $g_1, g_2$ lar *f* uchun teskarisi bo`lsin:

$f\cdot g_1=g_1\cdot f=e$ va $f\cdot g_2=g_2\cdot f=e$ bo`ladi, bundan

$g_2fg_1=(g_2f)g_1=e\cdot g_1=g_1$ hamda $g_2fg_1=g_2(f\cdot g_1)=g_2\cdot e=g_2$. Oxirgi ikkita tenglikning chap tomonlari teng, shuning uchun o`ng tomonlari ham teng bo`lishi kerak, ya'ni $g_1=g_2$.

Bundan keyin berilgan *f* akslantirishga teskari akslantirishni f^{-1} bilan belgilaymiz. Agar *f* chiziqli bo`lsa, unga teskari $f^{-1}$ operator ham chiziqli operator bo`ladi. Agar $\forall x,y\in V$ bo`lsa, *f* ning teskarisi mavjud bo`lgani uchun yagona $a,b\in V$ elementlar mavjudki $f(a)=x,\quad f(b)=y$ va *f* chiziqli bo`lgani uchun

$f(a)+f(b)=f(a+b)=x+y$ hamda

$$f^{-1}(x+y)=f^{-1}(f(a)+f(b))=f^{-1}(f(a+b))=(f^{-1}\cdot f)(a+b)=a+b=$$
$$=f^{-1}(x)+f^{-1}(y).$$

Shuningdek $f^{-1}(\lambda x)=\lambda f^{-1}(x)$ bajariladi.

1-meorema. Chekli o`lchamli fazodagi chiziqli operatorning teskarisi mavjud bo`lishi uchun uning matritsasining xosmas bo`lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. f ning teskarisi *g* mavjud bo`lsin u holda $f\cdot g=gh=e$ va buni matritsa tilida yozsak $A_{fg}=A_f\cdot A_g=E$. Demak $A_g=A_{f^{-1}}$.

$\det(A_f\cdot A_g)=\det A_f\cdot\det A_g=\det E$. Shuning uchun $\det A_f\neq 0,\quad \det A_g\neq 0.$

Endi agar aksincha A_f xosmas bo`lsa, unga $A_f^{-1}$ mavjud bo`ladi va $A_f\cdot A_f^{-1}=E$ bajariladi. Bundan esa matritsalar orasidagi o`zaro bir qiymatli moslikdan $f\cdot f^{-1}=f^{-1}\cdot f=e$ ga ega bo`lamiz.

Endi bazis o`zgarganda chiziqli operator matritsasining qanday o`zgarishini ko`rib chiqamiz. F maydon ustidagi V chiziqli fazoning $e_1,\ldots,e_n(e)$ va $f_1,\ldots,f_n\ (f)$ bazislari va $u:V\to V$ chiziqli operator berilgan bo`lsin. $A=(\alpha_{ik})$ va $B=(\beta_{ik})$ matritsalar *u* chiziqli operatorning mos ravishda (e) ва(*f*) bazisdagi matritsalari $C=(\gamma_{ik})$ esa (e) bazisdan (*f*) bazisga o`tish matritsasi bo`lsin. U holda

$u(e_k)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}e_i$, $u(f_k)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}f_i$, $f_k=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}e_i$, $k=1,2,\dots,n$ bo`ladi.
Ushbu $\nu(e_k)=f_k$ bilan yangi $\nu:V\to V$ chiziqli operatorni aniqlaymiz. U holda bu operatorning (e) bazisdagi matritsasi $C=(\gamma_{ik})$ bo`ladi. C matritsa (e) dan $(f)$ bazisga o`tish matritsasi bo`lgani uchun u xosmas va shuning uchun ham ν ning teskarisi ν^{-1} mavjud. $u(\nu(e_k))=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}\nu(e_i)=\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}e_i\right)$ dan $\nu^{-1}u\nu(e_k)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ik}e_i$
Demak $B=C^{-1}AC$.
Shunday qilib ushbu teoremani isbotladik.

2-teorema. Chiziqli operatorning turli bazisdagi matritsalari o`xshashadir.
(Biz chiziqli akslantirishlar mavzusini ko`rganda o`xshash matritsalarga ta'rif bergan edik. Agar A va B kvadrat matritsalar uchun shunday bir xosmas n-tartibli matritsa topilsaki $B=C^{-1}AC$ tenglik o`rinli bo`lsa, bunday A va B matritsalarga *o`xshash matritsalar* deyiladi).
O`xshash matritsalar refleksivlik $(A\sim A)$, simmetrlik $(A\sim B\ \text{ва}\ B\sim A)$ va tranzitivlik xossalari $(A\sim B\ \text{ва}\ B\sim D\ \text{дан}\ A\sim D)$ ga ega.

$A=C^{-1}AC,\quad A=C^{-1}BC\Rightarrow B=CAC^{-1}.$ hamda

$A=C^{-1}BC$ va $B=U^{-1}DU$ dan $A=C^{-1}U^{-1}DUC=(UC)^{-1}D(UC)$ kelib chiqadi.

Xos vektorlar va xos sonlar.
REJA:

1. Xos vektorlar va xos sonlar unlarga misollar.
2. Chiziqli operatorning diyaganallashuvchi bo'lishlik sharti.
3. Xos vektorlar va xos sonlar haqidagi teoremalar.

Agar chekli o`lchamli fazoda chiziqli operator matritsasi uchun uni diagonal ko`rinishga keltiradigan bazis mavjud bo`lsa, bunday chiziqli operatorga *dioganallashuvchi* deyiladi. Operatorning diyaganallashuvchi bo'lishlik masalasi tabiiy ravishda xos vektorlar va xos sonlar tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif. Agar $x\neq 0$ vektor uchun $\exists\lambda\in F$ soni mavjud bo`lsaki, $f(x)=\lambda x$ tenglik bajarilsa, x vektor f chiziqli operator ning *xos vektori* va λ esa bu vektorga mos *xos son* deb ataladi.

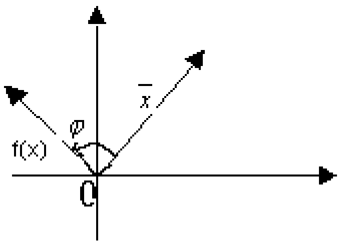
Misollar. 1) D_3 fazoda berilgan to`g`ri chiziqqa ortoganal proeksiyalashdan iborat bo`lgan chiziqli operator uchun bu to`g`ri chiziqda yotuvchi har bir noldan farqli vektor xos vektor bo`ladi.
Bu vektorlar har birining xos soni 1 ga teng. $f(x)=x=1\cdot x$.

2) $R[t]$ fazodagi hosila olish operatorining xos vektorlari faqat o`zgarmas sonlardan iborat. Ular har birining xos soni 0 ga teng.

$$f(x)=(a_0)'=0=0\cdot x,\qquad \lambda=0$$

Umuman agar chiziqli operator noldan farqli yadroga ega bo`lsa, yadroga tegishli har bir vektor-xos vektor, uning xos soni 0 ga teng.

3) $D_2(a)$ fazoda berilgan φ burchakka $\varphi \neq n\pi$ burishdan iborat chiziqli operatorning xos vektori yo`q.



2 .

1-teorema. Chekli o`lchamli fazodagi chiziqli fazodagi chiziqli operatorning diaganallashuvchi bo`lishi uchun uning xos vektortorlaridan tashkil topgan bazisining mavjud bo`lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. f chiziqli operatorning biror (e) bazisdagi matritsasi diaganal ko`rinishda A=$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ bo`lsin. U holda $f(e_k) = \lambda_k e_k \quad (k = 1,2,....,n)$. Demak

$e_1, e_2,...., e_n$ xos vektorlar, $\lambda_1, \lambda_2,...., \lambda_n$ lar esa ularga mos xos sonlar.

Endi, aksincha, agar xos vektorlardan iborat bazis $e_1, e_2,...., e_n$ mavjud bo`lsa, $f(e_k) = \lambda_k e_k \quad (k = 1,2,....., n)$ bajariladi va shuning uchun ham uning matritsasi dioganal ko`rinishda bo`ladi.

3. *2-teorema.* Chekli o`lchamli kompleks fazoda har qanday chiziqli operator xos vektorga ega.

Isboti. x xos vektor va λ xos son uchun $f(x) = \lambda x$ tenglik $(f - \lambda e)(x) = \bar{0}$ tenglikka teng kuchli. Bundan esa x vektorning $f - \lambda e$ chiziqli operatorning yadrosiga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak $x \neq 0$ xos vektor bo`lishi uchun $f - \lambda e$ chiziqli operatorning noldan farqli yadroga ega bo`lishi kerak ekan. Bu esa $f - \lambda e$ ning teskari mavjud emasligiga teng kuchli, ya'ni $f - \lambda e$ chiziqli operator bo`ladi. Bu matritsa tilida $\det(A_f - \lambda E) = 0$ ga teng kuchli. Bu tenglama $\lambda$ ga nisbatan $n$ darajali tenglama bo`lib, uning bosh hadi $(-1)^n \lambda^n$ dan iborat. Algebraning asosiy teoremasiga ko`ra kamida bitta ildizga ega. Demak kamida birta xos songa va unga mos kamida birta xos vektorga ega.

Bu teoremadagi chekli o`lchamli bo`lishlik sharti muhim. Cheksiz o`lchamli $C[t]$ fazoda $f(x) = tx$ operator hech qanday xos vektorga ega emas.

Chiziqli operator uchun chiziqli V fazoda xos vektorning mavjud bo`lishi bu fazoda bir o`lchamli invariant qism fazoning mavjud bo`lishiga teng kuchli. Shuning uchun ham 2-teoremadan chekli o`lchamli kompleks fazodagi har qanday chiziqli operator bir o`lchamli invariant qism fazoga ega.

3-теорема. Agar chekli o`lchamli kompleks fazodagi f va g operatorlar uchun $fg = gf$ tenglik bajarilsa, u holda ular umumiy xos vektorga ega.

Исботи. f chiziqli operator uchun a xos vektor va λ_1 unga mos xos son bo`lsin: $f(a) = \lambda_1 a$. $V_1$ fazo $f - \lambda_1 e$ operatorning yadrosi bo`lsin. U holda $V_1 \neq 0$, chunki $a \in V_1$. Agar $x \in V_1$ bo`lsa, u holda $f(x) = \lambda_1 x$ va $fg(x) = gf(x) = g(\lambda_1 x) = \lambda_1 g(x)$. Bu esa $g(x) \in V_1$ekanligini ko`rsatadi. Demak, V_1 qism fazo f va g chiziqli operatorlar uchun invariant. g chiziqli operatorning aniqlanish sohasini V_1 gacha toraytirish natijasida hosil bo`lgan operatorni $g_1$ bilan belgilaymiz. 2-teoremaga ko`ra g_1 operator V_1 da kamida birta xos vektorga ega. Masalan $b \in \mathrm{V}_1$ shunday xos vektor bo`lsin: $g_1(b) = \lambda_1 b$. Bu vektor $f$ chiziqli operator uchun ham xos vektor bo`ladi, chunki $b \in \mathrm{V}_1$.

Bu yerda koeffitsientlari F maydondan olingan kvadrat matritsa A uchun tuzilgan $\det(A - \lambda \mathrm{E})$ ko`phad $A$ *matritsaning xarakteristik ko`phadi* deyiladi.
O`xshash matritsalarning xarakteristik ko`phadi o`zaro teng: $B = C^{-1}AC$ bo`lsa, $|B - \lambda \mathrm{E}| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda \mathrm{E} C| = |C^{-1}(A - \lambda \mathrm{E})C| = \det C^{-1}.\ \det(A - \lambda \mathrm{E}) \cdot \det C = \det(A - \lambda \mathrm{E})$.
Demak, berilgan ko`phadning turli bazisdagi matritsalari bir xil xarakteristik ko`phadga ega.

4-teorema. Agarda sonli F maydon ustidagi n o`lchovli chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli operatorning xarakteristik ko`phadi n ta turli ildizga ega bo`lsa, bu operator dioganallashuvchidir.

Isboti. Avvalo ixtiyoriy chiziqli fazodagi chiziqli operatorning turli xos sonlariga mos keluvchi xos vektorlarining chiziqli erkli ekanligini ko`rsatamiz. Faraz etaylik $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ lar turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlar bo`lsin: $f(x_i) = \lambda_i x_i \quad (i = 1,2,\ldots., k)$, bu yerda $i \neq j,\ \ \lambda_i \neq \lambda_j$. k bo'yicha matematik induktsiya usulini qo'llaymiz. k=1 da $x_1 \neq 0$ vektor chiziqli erkli . *k-1* ta $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ vektorlar uchun teorema o'rinli bo'lsin. *k* ta xos vektorlardan tuzilgan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sistemaning chiziqli erkli ekanini ko'rsatamiz. Faraz etaylik

$$\propto_1 x_1 + \propto_2 x_2 + \cdots + \propto_{k-1} x_{k-1} + \propto_k x_k = 0 \tag{1}$$

bo'lsin. U holda

$f(\propto_1 x_1 + \propto_2 x_2 + \cdots + \propto_{k-1} x_{k-1} + \propto_k x_k) = \propto_1 f(x_1) + \propto_2 f(x_2) + \cdots + \propto_{k-1} f(x_{k-1}) + \propto_k f(x_k) = \propto_1 \lambda_1 x_1 + \propto_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \propto_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1} + \propto_k \lambda_k x_k = 0$

. (1)ni λ_k ga ko'paytirib bu tenglikdan ayiramiz. U holda $\propto_1 (\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \propto_2 (\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \cdots + \propto_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0$ hosil bo'ladi. Bu yerda $i \neq j,\ \ \lambda_i \neq \lambda_j$ va $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ lar chiziqli erkli bo'lgani uchun $\propto_1 = 0, \propto_2 = 0, \ldots, \propto_{k-1} = 0$ ra ega bo'lamiz. Buni hisobga olib (1) dan $\propto_k x_k = 0$. Bunda $x_k \neq 0$ bo'lgani uchun $\propto_k = 0$. Demak $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorlar chiziqli erkli.

Endi agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar turli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ xos sonlarga mos bo'lsa ular chiziqli bog'lanmagan va n- o'lchovli fazoning bazisi, ya'ni V_n xos vektorlardan tuzilgan bazis mavjud. Endi teorema 1-teoremadan kelib chiqadi.

Mavzu: EVKLID FAZOLARI

Reja:

1.Ta'rifi, misollar
2.Gramm determinanti, xossalari.
3.Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.
4.Skalyar ko`paytmaning elementar geometriya masalalariga tadbiqlari.

Adabiyotlar [1,2,3]

1-ta'rif. V haqiqiy chiziqli fazodagi ikki vektor argumentli (x, y) skalyar funksiya uchun ushbu shatrlar:

$1)\forall x, y \in V,\ \ (x,y) = (y,x);$

$2)\forall x_1, x_2, y \in V,\ \ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$

$3)\forall x, y \in V,\ \ \lambda \in R\ \ uchun\ \ (\lambda x, y) = \lambda(x,y);$

$4)\forall x \in V (x \neq 0),\ (x,x) > 0$

bajarilsa,(x,y) funktsiyaga skalyar ko`paytma deyiladi. Skalyar ko`paytmali V fazoga **Evklid fazosi** deb ataladi.

Tushunarliki Evklid fazosining har qanday qism fazosi ham Evklid fazosi bo`ladi.

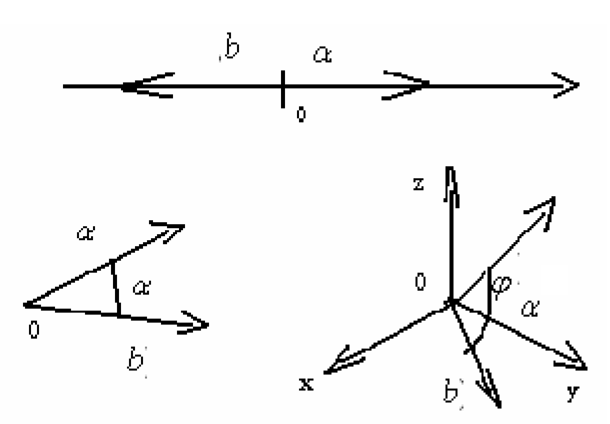
Ta'rifdagi 2) va 3) shartlar skalyar ko`paytmaning birinchi argument bo`yicha chiziqli ekanligini bildiradi. 1), 2), 3) shartlar birgalikda (x,y) ning simmetrik bichiziqli forma ekanligini bildiradi. Oxirgi 4)-shart esa bu bichiziqli formaga mos kvadratik formaning musbat aniqlangan ekanligini ko`rsatadi.

Misollar: 1) $D_1(a),\ D_2(a)\ \ va\ \ D_3$ fazolarga yo`naltirilgan kesmalarning skalyar ko`paytmasi deb ularning uzunliklarini ular orasidagi burchakning kosinusiga ko`paytmasini olsak Evklid fazosi bo`ladi.

$D_1(a)\ da\quad (\alpha, b) = |\alpha||b|$

$D_2(a)\ da\quad (\alpha, b) = |\alpha||b|\cos\alpha$

$D_3\ da\quad (\alpha, b) = |\alpha||b|\cos\alpha.$



2)
$R^n\ da\ x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\ va\ \ y = (\beta_1, \beta_2, \dots$
vektorlarning skalyar ko`paytmasi deb

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$$

ni qabul qilsak R^n ham Evklid fazosi bo`ladi.
3) $C[a,b]$ *da* $x(t)$ *va* $y(t)$ uzluksiz funksiyalarning skalyar ko`paytmasi deb

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$$

ni qabul qilsak 1), 2), 3), 4) shartlar bajariladi va $C[a,b]$ Evklid fazosi bo`ladi.

Evklid fazosi V dagi $x_1,x_2,\ldots,x_k$ vektorlar sistemasining *Gram determinanti* deb

$$\gamma(x_1,\ldots,x_k)=\begin{vmatrix}(x_1,x_1)(x_1,x_2) & \cdots(x_1,x_k)\\ (x_2,x_1)(x_2,x_2) & \cdots(x_2,x_k)\\ --- \quad --- & --- \; ---\\ (x_k,x_1)(x_k,x_2) & \cdots(x_k,x_k)\end{vmatrix}$$

determinantga, *Gram matritsasi* deb esa ushbu $((x_i,x_j))$ $(i,j=1,2,\ldots,k)$ matritsaga aytiladi.

1-teorema. Agar $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sistema chiziqli erkli bo'lsa, uning Gramm determinanti musbat, va aks holda nolda teng.

*Isboti.*_ $x_1,x_2,\ldots,x_k$ chiziqli erkli bo`lsin. U holda bu sistema uning chiziqli qobig`ining V_1 bazisi bo`ladi. Bu sistemaning Gram matritsasi esa *(x,y)* simmetrik bichiziqli formaning $V_1$ dagi matritsasi bo`ladi. $\forall x,y\in V_1$

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_kx_k,\quad y=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_kx_k$$

$$(x,y)=\alpha_1\beta_1(x_1,x_1)+\alpha_1\beta_2(x_1,x_2)+\ldots+\alpha_1\beta_k(x_1,x_k)+\alpha_2\beta_1(x_2,x_1)+\alpha_2\beta_2(x_2,x_2)+\ldots+\alpha_2\beta_k(x_2,x_k)+$$
$$+---------------+\alpha_k\beta_1(x_k,x_1)+\alpha_k\beta_2(x_k,x_2)+\ldots+\alpha_k\beta_k(x_k,x_k)$$

(x,x) kvadratik forma musbat aniqlangan bo`lgani uchun $\Delta_k=\gamma(x_1,\ldots,x_k)>0$ bo`ladi. (Silvestr) shartiga qarang.

Endi faraz etaylik $x_1,x_2,\ldots,x_k$ sistema chiziqli bog`langan bo`lsin. U holda hech bo`lmasa birortasi noldan farqli $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ sonlari mavjud bo`lib

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_kx_k=0$$

bajariladi. Bundan ixtiyoriy $x_i(i=1,2,\ldots,k)$ vektor uchun

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_kx_k,x_i)=\lambda_1(x_1,x_i)+\lambda_2(x_2,x_i)+\ldots+\lambda_k(x_k,x_i)=(\bar{0},x_i)=0,$$

ya'ni $\gamma(x_1,\ldots,x_k)$ determinantning satrlari chiziqli bog`langan. Shuning uchun ham uning qiymati nolga teng.

Bu teoremadan ushbu Koshi-Bunyakoveskiy tengsizligi (ba'zan Shvarts tengsizligi ham deb ataladi) kelib chiqadi.

2-teorema. Evklid fazosining ixtiyoriy x va y vektorlari uchun

$$(x,y)^2\le(x,x)(y,y)\qquad(1)$$

tengsizlik o`rinli. Bu yerda tenglik *x* va *y* vektorlar chiziqli bog`langan bo`lgandagina bajariladi.

Isboti. Agar x va y lar chiziqli erkli bo`lsa, u holda

$$0<\gamma(x,y)=\begin{vmatrix}(x,x)(x,y)\\(y,x)(y,y)\end{vmatrix}=(y,y)(x,x)-(x;y)^2.$$

Agarda *x* va *y* lar chiziqli erkli bo`lsa, u holda $\gamma(x,y)=0$.

Agar (1) da *x,y* vektorlar sifatida R^n Evklid fazosining vektorlari $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ va $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ lar olinsa:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2$$

ga ega bo`lamiz.

Agarda *x* va *y* vektorlar sifatida $C[a,b]$ dagi $x(t)$ *va* $y(t)$ larni olsak, $[a,b]$ da aniqlangan har qanday $x(t)$ *va* $y(t)$ uzluksiz funktsiyalar uchun

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2\le\int_a^b x(t)^2\,dt\;\cdot\;\int_a^b y^2(t)dt$$

munosabatning o`rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Evklid fazosidagi *x vektorning uzunligi* deb $\sqrt{(x,x)}$ songa aytiladi va uni $|x|$ ko`rinishda belgilanadi, $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Bu ta'rifdan nol vektorning uzunligi nolga, noldan farqli har qanday vektorning uzunligi musbat son bo`ladi. $\forall x\in V$ *va* $\lambda\in R$ *uchun* $|\lambda x|=|\lambda||x|$ bajariladi. Haqiqatan ham $|\lambda x|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|\cdot|x|$

3-teorema. $\forall x,y\in V\quad |x+y|\le|x|+|y|$,

Isboti.

$$|x+y|^2=(x+y,\;x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=$$
$$=|x|^2+|y|^2+2(x,y)\le|x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y|=(|x|+|y|)^2.$$

Bundan $|x+y|\le|x|+|y|$.

2-ta'rif. Evklid fazosidagi *x* va *y vektorlar orasidagi masofa* deb $\rho(x,y)=|x-y|$ haqiqiy funktsiyaga aytiladi.

Bu $\rho(x,y)$ funktsiya quyidagi xossalarga ega

1) $\forall x,y\in V,\ \rho(x,y)=\rho(y,x)$

2) $\forall x,y\in V,\ \ x\ne y\ \ uchun\ \ \rho(x,y)>0\ \ va\ \ x=y$

bo`lgandagina $\rho(x,y)=0$ hamda agar $\rho(x,y)=0$ bo`lsa $x=y$ bo`ladi.

3) $\forall x,y,z\in V$ *uchun* $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ 1) va 2) xossalarning bajarilishi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. 3) ni quyidagicha isbotlash mumkin:

$$|x-y|=|x-z+z-y|\le|x-z|+|z-y|.$$

1), 2), 3) shartlarni qanoatlantiruvchi funktsiya $\rho(x,y)$ ga *metrika* ham deb ataladi. $\rho(x,y)=|x-y|$ ga *Evklid metrikasi* deb yuritiladi.

Mavzu: ORTOGONAL VA ORTONORMAL VEKTORLAR

SISTEMALARI.

Reja:

1. Ikki vektor orasidagi burchak.
2. Ortogonal va ortonormal vektorlar sistemalari.
3. Misollar.
4. Ortogonallashtirish jarayoni.

Adabiyotlar [1, 2, 3]

Yuqorida isbotlangan Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi ixtiyoriy ikkita noldan farqli x, y vektorlar orasidagi burchakni

$$\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}, \qquad \left(chunki \left| \frac{(x,y)}{|x||y|} \right| \le 1 \right)$$

ko`rinishda kiritish imkonini beradi. (o`rta maktabdagi singari $(x,y) = |x||y| \cos\varphi$).

Agar $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo`lsa x va *y vektorlarni ortogonal vektorlar* deyiladi.

Demak, x va y lar ortogonal bo`lsa, $(x,y) = 0$ va aksincha, agar $(x,y) = 0$ bo`lib $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$ bo`lsa $x$ va $y$ lar ortogonal bo`ladi.

Agar Evklid fazosi Vdagi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorlar sistemasi uchun $(x_i, x_j) = 0,\ i \neq j$ bo`lsa bu sistemaga *ortogonal sistema,* agarda

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

bo`lsa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektorlar sistemasiga *ortonormal sistema* deb ataladi.

Agarda $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ortogonal sistema bo`lsa, u holda undagi har bir vektorni uning uzunligiga bo`lish natijasida hosil bo`lgan

$$\frac{x_1}{\sqrt{|x_1|}}, \ \frac{x_2}{\sqrt{|x_2|}}, \ \ldots, \ \frac{x_k}{\sqrt{|x_k|}}$$

sistema ortonormal bo`ladi. Haqiqatan ham

$$\left(\frac{x_i}{\sqrt{(x_i,x_i)}}, \frac{x_j}{\sqrt{(x_j,x_j)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{(x_i,x_i)\,(x_j,x_j)}}(x_i,x_j)$$

$$= \begin{cases} 1, \ agarda \ i = j \ \ bo'lsa; \\ 0, agarda \ i \neq j \ \ bo'lsa; \end{cases}$$

Misollar. 1) $C[a,b]$ Evklid fazosidagi $2n+1$ vektordan iborat.

$1, \cos t, \ \sin t, \ \cos 2t, \ \sin 2t, \ldots, \cos nt, \ \sin nt$

sistema ortogonal. Chunki ixtiyoriy $k, m \in Z$ uchun

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin mt \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(k+m)t + \sin(k-m)t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k+m}\cos(k+m)t \Big|_0^{2\pi} + \frac{-1}{k-m}\cos(k-m)t \Big|_0^{2\pi} \right] = 0.$$

Shuningdek

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos mt\, dt = \begin{cases} 0, \ agar \ k \neq m \\ \pi, k = m \neq 0 \\ 2\pi, k = m = 0, \end{cases}, \quad \int_0^{2\pi} \sin kt \sin mt\, dt = \begin{cases} 0, \ agar \ k \neq m \\ \pi, \ agar \ k = m \end{cases}.$$

Endi agar har bir vektorni uning uzunligiga bo`lsak

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

ortonormal sistemaga ega bo`lamiz.

Teorema. Har qanday chekli o`lchamli Evklid fazosida ortonormal sistema mavjud.

Isboti. Simmetrik bichiziqli forma (x,y) ning kanonik bazisi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mavjud. Bu bazis vektorlar ortogonal, chunki $i \neq k$ da $(e_i, e_k) = 0$. Bu bazis vektorlarning har birini uning uzunligiga bo`lib ortonormal sistemaga ega bo`lamiz.

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar sistemasi bazis bo`lsa, uni ortogonal bazis bilan almashtirish uchun quyidagicha yo`l tutish mumkin: $f_1 = e_1$ deb olamiz. $f_2 = \alpha_1 f_1 + e_2$ deb olib α_1 ni $(f_1, f_2) = 0$ shartdan aniqlaymiz.

$$(f_1, f_2) = \alpha_1 (f_1, f_1) + (f_1, e_2) = 0 \qquad \alpha_1 = -\frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} \qquad f_3 = \alpha_1' f_1 + \alpha_2' f_2 + e_3$$

deb olib α_1', α_2' larni $(f_3, f_1) = 0,\ \ (f_3, f_2) = 0$ lardan aniqlaymiz.

$$(f_3, f_1) = \alpha_1'(f_1, f_1) + \alpha_2'(f_2, f_1) + (e_3, f_1) = 0, \quad (f_2, f_1) = 0 \quad dan \quad \alpha_1' = -\frac{(f_1, e_3)}{(f_1, f_1)}.$$

$$(f_3, f_2) = \alpha_1'(f_1, f_2) + \alpha_2'(f_2, f_2) + (e_3, f_2) = 0, \quad (f_1, f_2) = 0 \quad dan \quad \alpha_2' = -\frac{(f_2, e_3)}{(f_2, f_2)}.$$

Umuman

$$f_k = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{k-1} f_k + e_k$$

deb olib $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ koeffitsientlarni $\alpha_i = \dfrac{-(f_i, e_k)}{(f_i, f_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1$

dan aniqlaymiz.

Misol. $e_1 = (2,3,4), e_2 = (1,2,1), e_3 = (3,4,5)$ uch o`lchovli Evklid fazosining bazisini ortonormal bazisga aylantiring

$$f_1 = e_1, \ f_2 = \alpha_1 f_1 + e_2, \qquad \alpha_1 = -\frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} = -\frac{12}{29},$$

$$(f_1, f_1) = 4 + 9 + 16 = 29; \qquad (f_1, e_2) = 2 + 6 + 4 = 12$$

$$f_2 = -\frac{12}{29}(2,3,4) + (1,2,1) = \left(\frac{5}{29}, \frac{22}{29}, -\frac{19}{29}\right)$$

$$f_3 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + e_3$$

$$\beta_1 = -\frac{(f_1, e_3)}{(f_1, f_1)} = -\frac{6+12+20}{29} = \frac{38}{29}$$

$$\beta_2 = -\frac{(f_2, e_3)}{(f_2, f_2)} = -\frac{+\left(\frac{15}{29} + \frac{88}{29} - \frac{95}{29}\right)}{\frac{1}{29^2}\left(25 + 22^2 + 19^2\right)} = -\frac{8 \cdot 29}{509 + 361} = -\frac{232}{870} = -\frac{116}{435}.$$

Unitar fazolar

Unitar fazo bu Evklid fazosining kompleks ko\`rinishi. $F = \tilde{N}$.

<u>*Ta'rif.*</u> Agar V kompleks chiziqli fazoda ikki vektor argumentli (x, y) kompleks qiymatli funksiya ushbu:

1) $\forall x, y \in V \quad \overline{(x,y)} = (y,x)$; 2) $\forall x_1, x_2, y \in V \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

3) $\forall x, y \in V, \lambda \in C \quad (\lambda x, y) = \lambda(x,y)$; 4) $\forall x \in V \ (x \neq 0) \ (x,x) > 0$

shartlar bajarilsa, unga V *kompleks fazodagi skalyar ko\`paytma* deb ataladi.

Tushunarliki, unitar fazoning har qanday qism fazosi ham unitar fazo bo\`ladi.

2 va 3-shartlar skalyar ko\`paytma birinchi argumenti bo\`yicha chiziqli ekanligini ko\`rsatadi. Bundan uning 2-argumenti bo\`yicha 2-tur chiziqli ekanligi, ya'ni $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$ shartlarning $\forall x, y, y_1, y_2 \in V$, $\lambda \in C$ uchun bajarilishi kelib chiqadi. Shuning uchun ham unitar fazodagi skalyar ko\`paytma *Ermit formasi* bo\`ladi, unga mos kvadratik forma esa musbat aniqlangan.

Misol. C^n fazodagi $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ vektorlarning skalyar ko\`paytmasini $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k}$ tenglik bilan kiritsak, C^n unitar fazoga aylanadi.

Evklid fazosidagi unitar fazoda ham Gramm determinanti tushunchasi kiritiladi va vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo\`lsa, ularning Gramm determinanti musbat ekanligi va aks holda nolga teng ekanligini ko\`rsatish mumkin. Bu teoremani 2 ta vektorga tadbiq qilib unitar fazo uchun Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

o\`rinli ekanligini ko\`rsatish mumkin. Evklid fazosida o\`rinli bo\`lgan teoremalarning barchasining unitar fazo uchun ham o\`rinli ekanligini ko\`rsatish qiyin emas. Unitar fazoda ikkita vektor orasidagi burchak tushunchasi kiritilmaydi. By yerda ortogonal va ortonormal vektorlar sistemalari ham Evklid fazolaridagi singari kiritiladi. Unitar fazoda ortanormal bazisning mavjudligi Ermit fazolari haqidagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi. Agar $e_1, e_2, ..., e_n$ V unitar fazoning ortanormal bazisi bo\`lsa, u holda $\forall x, y \in V$ $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ dan $\xi_k = (x, e_k)$, $(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k}$, $|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2$ tengliklar kelib chiqadi.

Mavzu: Ortogonal proektsiyalar.

Reja:

1. Ortoganal proekyiyalar.
2. Ortogonal proektsiyaning yagonaligi .
3. Unitar fazo Evklid fazo kompleks ko`rinishi.

V Evklid fazosining V_1 qism fazosi va $x \in V$ vektori berilgan bo`lsin. Agar $x$ vektor $V_1$ qism fazoning har bir vektoriga ortoganal bo`lsa, *x vektorni V_1 qism fazoga ortoganal* deyiladi.

Ta'rif. V_1 qism fazoga tegishli bo`lmagan $x \in V$ vektor uchun shunday bir $x_1 \in V_1$ vektor topilsaki $x - x_1$ vektor $V_1$ qism fazoga ortoganal bo`lsa, bunday x_1 vektorni x vektorning V_1 qism fazodagi *ortogonal proektsiyasi* deyiladi.

Xususiy holda x vektor V_1 qism fazoga ortoganal bo`lsa, u holda nol vektor $x$ vektorning $V_1$ dagi ortoganal proektsiyasi bo`ladi.

1-meorema. Agar $x \in V_1$ vektor $x \in V$ vektorning ortoganal proektsiyasi bo`lsa, u holda $x_1 \neq z \in V_1$ vektor uchun $|x - z| > |x - x_1|$ tengsizlik o`rinli bo`ladi, (ya'ni $x \in V_1$ vektor $V_1$ fazodagi $x \in V$ vektorga eng yaqin Evklid metrikasi ma'nosida) vektor bo`ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham $z - x_1 \in V_1$ va $z - x_1 \neq 0$, teorema shartiga ko`ra $(x - x_1, z - x_1) = 0$. Shuning uchun ham

$$|x - z|^2 = (x - z, x - z) = ((x - x_1) - (z - x_1); (x - x_1) - (z - x_1)) =$$

$$= |x - x_1|^2 + |z - x_1|^2 > |x - x_1|^2$$

Bundan esa $|x - z| > |x - x_1|$.

2-teorema. Agar V_1 fazoV Evklid fazosining chekli o`lchamli qism fazosi bo`lsa, u holda V_1 ga tegishli bo`lmagan har qanday x vektor yagona $x_1 \in V_1$ ortoganal proektsiyaga ega.

Isboti. V_1 ning biror ortonormal bazisi $e_1, e_2, ..., e_k$ ni olamiz. U holda

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \in V_1 \qquad (*)$$

(bu yerda $x_1 = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_i e_i + \ldots + \xi_k e_k$, $(x_1, e_i) = \xi_i$) vektor x vektorning V_1 ga ortogonal proektsiyasidir.

Haqiqatan ham $m = 1, 2, \ldots, k$ lar uchun

$$(x_1, e_m) = \left(\sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i, e_m \right) = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i)(e_i, e_m) = (x, e_m) \quad \text{va}$$

$$(x - x_1, e_m) = (x, e_m) - (x_1, e_m) = 0 \qquad \text{bo`ladi.}$$

Demak $(x - x_1, e_m) = 0$ hamda har qanday $y = \sum_{m=1}^{k} \eta_m e_m \in V_1$ vektor uchun

$$(x - x_1, y) = \left(x - x_1, \sum_{m=1}^{k} \eta_m e_m \right) = \sum_{m=1}^{k} \eta_m (x - x_1, e_m) = 0$$

ya'ni x_1 vektor $x \in V$ vektorning V_1 fazodagi ortogonal proektsiya bo`ladi.

Ortogonal proektsiyaning yagonaligi 1-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Vektorning cheksiz o`lchamli qism fazoga ortogonal proektsiyasi mavjud bo`lmasligi ham mumkin. Masalan $C[a,b]$ fazoda Evklid metrikasida e^t uzluksiz funktsiyaga eng yaqin turgan ko`phad mavjud emas. Bundan esa $e^t$ funktsiyaning ko`phadlar qism fazosida ortogonal proektsiyasi mavjud emasligi kelib chiqadi.

Misollar. 1) Eng kichik kvadratlar usuli.

Agarda V_1 ning $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bazisi ortonormal bo`lmasa $x_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k$. c_i koeffitsientlar $x - x_1$ ning V_1 ga ortogonalligidan topiladi. Bu ortogonallik esa

$$(x - x_1, e_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, k \qquad (1)$$

ga teng kuchli, ya'ni $(x, e_m) = (x_1, e_m)$ (1) дан

$$c_1(e_1, e_m) + c_2(e_2, e_m) + \ldots + c_k(e_k, e_m) = (x, e_m) \qquad m = 1, 2, \ldots, k \qquad (2)$$

sistemaga ega bo`lamiz. x_1 ni topish uchun bu holda (2) sistemadan c_i lar aniqlanadi.

Faraz etaylik u miqdor $x_1, \ldots, x_m$ miqdorlarning chiziqli funktsiyasi

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m$$

bo`lsin. $c_1, c_2, \ldots, c_m$ lar o`zgarmas koeffitsientlar bo`lib hozircha noma'lum bo`lsin. Ko`pincha bu koeffitsientlar tajribadan aniqlanadi. Buning uchun esa $x_1, x_2, \ldots, x_m$ va u miqdorlar bir necha marta o`lchanadi. k-o`lchash natijalarini $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk}$ va y_k deb belgilaylik. U holda $c_1, c_2, \ldots, c_m$ larni ushbu tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{21}c_2 + \ldots + x_{m1}c_m = y_1 \\ x_{12}c_1 + x_{22}c_2 + \ldots + x_{m2}c_m = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}c_1 + x_{2n}c_2 + \ldots + x_{mn}c_m = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

dan aniqlashga harakat qilish mumkin. Bu erdagi tenglamalar soni n o`lchashlar soniga teng, shuning uchun ham etarlicha ko`p marta o`tkazib $n > m$ deb hisoblash mumkin. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ va u miqdorlarni o`lchash albatta ma'lum bir xatoliklar bilan bog`liq, bo`lgani uchun umuman olganda (3) sistema ziddiyatli sistema va shuning uchun ham uning aniq echimi haqida gapirish foydasiz. (3) ning faqat taqribiy echimlari haqida gap borishi mumkin.

Shuning uchun ham $c_1, c_2, \ldots, c_m$ noma'lumlarning shunday qimyatlarini topish kerakki (3) ning chap tomonlari mos o`ng tomondagi qiymatlarga etarlicha yaqin bo`lsin.

Bunday masalalarda yaqinlik darajasi sifatida tenglamalar chap tomonlarining ozod hadlardan kvadratik chetlanishi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{1k}c_1 + x_{2k}c_2 + \ldots + x_{mk}c_m - y_k\right)^2 \qquad (4)$$

miqdor olinadi. Biz $c_1, c_2, \ldots, c_m$ larni shunday aniqlashimiz kerakki, (4) ifoda eng kichik qiymat qabul qilsin.

Bu minimum masalasini bevosita echish ham mumkin (h.u.fani), lekin biz yuqorida qaragan teoremalardan foydalanib osonlik bilan hal etiladi.

Haqiqatan ham n-o`lchamli Evklid fazosini va shu fazoning

$e_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}),\ \ldots,\ e_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$

$x = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorlarini qaraymiz.

U holda (3)-tenglamalar sistemasining o`ng tomoni $x$ vektorning koordinatalari chap tomoni esa $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m$ vektorning koordinatlari. Shuning uchun ham (4) $x$ vektordan $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m$ vektorgacha bo`lgan masofaning kvadratiga teng. Shunday qilib biz qo`yilgan masalani ushbu masalaga «$c_1, c_2, \ldots, c_m$ sonlarini shunday tanlash kerakki $x$ va $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m$ vektorlar orasidagi masofa eng kichik bo`lsin».

Agarda n-o`lchamli Evklid fazosining $e_1, e_2, \ldots, e_m$ vektorlarining chiziqli kombinatsiyasidan tuzilgan qism fazosini $V_1$ deb olsak, u holda masala $x$ vektorning $V_1$ dagi proektsiyasini topishdan iborat bo`ladi. Bu erdagi $c_1, c_2, \ldots, c_m$ larni (2) dan topish mumkin:

$$\begin{cases}(e_1,e_1)c_1 + (e_2,e_1)c_2 + \ldots + (e_m,e_1)c_m = (x,e_1)\\ (e_1,e_2)c_1 + (e_2,e_2)c_2 + \ldots + (e_m,e_2)c_m = (x,e_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1,e_m)c_1 + (e_2,e_m)c_2 + \ldots + (e_m,e_m)c_m = (x,e_m)\end{cases} \qquad (5)$$

bu yerda $(x, e_k) = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}y_j$, $(e_i\ e_k) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{kj}$.

Va (5)-sistemaga bu hamda normal tenglamalar sistemasi deyiladi. Shunday qilib (3) sistemani taqribiy echish (5) sistemani echishga keltirildi. Agar (3) ning rangi m ga teng bo`lsa $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sistema chiziqli erkli bo`ladi va (5)-sistema aniq sistema bo`lib yagona echimga ega bo`ladi.

Masalan. Eng kichik kvadratlar usuli bilan, ushbu

$$2c = 3$$
$$3\tilde{n} = 4$$
$$4c = 5$$

tenglamalar sistemasini eching.

Yechilishi. Bizda $e_1 = (2,3,4),\quad x = (3,4,\ 5)$.Bu hoda (5) normal sistema $(e_1, e_1) = (e_1, x)$ dan iborat bo`ladi.

Bundan $(4+9+16)c = 6+12+20,\quad 29c = 38,\qquad c = \dfrac{38}{29}$.

(3)-sistema 1 ta noma'lumli n ta tenglamadan tuzilgan

$$x_1c = y_1, x_2c = y_2, ..., x_nc = y_n \qquad (3`)$$

bo`lsa, yechimni

$$c = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ko`rinishida yozishimiz mumkin. (3`) sistemani taqribiy echishni geometrik jihatdan quyidagicha izohlash mumkin: koordinatalar boshidan o`tuvchi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ nuqtalarga imkoniyati boricha yaqin bo`lgan to`g`ri chiziqni o`tkazish. Bunda C shu to`g`ri chiziqning burchak koeffitsientga teng bo`ladi.

2-misol. Funktsiyalarni trigonometrik ko`phadlar bilan yaqinlashtirish. $f(t)\,[0,\, 2\pi]$ oraliqdagi uzluksiz funktsiya bo`lsin. Ko`pincha berilgan $f(x)$ funktsiyadan imkoni boricha kam farq qiladigan $P(t)$ (berilgan tartibli) trigonometirik ko`phadni topish talab qilinadi. $P(t)$ ning $f(x)$ dan chetlanish o`lchovi sifatida

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - P(t)]^2\, dt \qquad (6)$$

formula bilan aniqlanuvchi kvadrat chetlanishni olamiz. Qaralayotgan masalani quyidagicha aniq ifodalash mumkin:

«n-tartibli barcha ko`phadlar

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \qquad (7)$$

orasidan berilgan $f(x)$ funktsiyadan kvadrat chetlanishi minimal bo`lgan ko`phadni toping».

Ma'lumki $C[0, 2\pi]$ da

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt \quad \text{va} \quad \sqrt{(f, f)} = |f| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t) dt}\,.$$

Shuning uchun ham (6) kvadrat chetlanish $f(x)$ dan $P(t)$ bo`lgan masofaning kvadratiga teng bo`ladi. (7) ko`rinishdagi ko`phadlar to`plami $C[0, 2\pi]$ ning $V_1$ qism fazosini tashkil qiladi va uning o`lchovi $2n+1$ ga teng. Demak V_1 dagi $f(x)$ dan minimal (uzoqlikda) masofada turgan elementni topish kerak. Bu esa $f(t)$ nuqtadan V_1 qism fazoga perpendikulyar tushirish bilan aniqlanadi. V_1 ning bazisi sifatida ilgari qaralgan ortonormal bazis

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_1 = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad e_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \quad e_{2n-1} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2n} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

ni olsak

$$P(t)=\sum_{k=0}^{2n} c_k e_k \qquad (8)$$

bo`ladi. Bu yerda $c_k=(f,e_k)$, ya'ni

$$c_0=(f,e_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)dt\ , \quad c_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt\ ,$$

$$c_{2k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt\ , \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Bularni (8) ga olib borib qo`yib ($c_k$ va $e_k$ larni (8) qo`yamiz) quyidagi natijaga kelamiz. Berilgan $f(t)$ funktsiyadan kvadratik chetlanishi minimal bo`lgan trigonometrik ko`phad

$$P(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kt+b_k\sin kt$$

ni aniqlash uchun a_k, b_k koeffitsientlarni

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\ ; \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt\ , \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ktdt$$ formulalar

bilan aniqlash kerak ekan. Bu sonlarga Fure koeffitsientlari deyiladi.

Mavzu: Chiziqli formalar

Rejasi

1. Chiziqli formalar.
2. Misollar.
3. Chiziqli forma koeffitsiyentlarining bazis o`zgarganda o`zgarishi.
4. Berilgan fazoga qo`shma fazo.
5. Chiziqli forma yadrosining o`lchovi.

Adabiyotlar [1, 199-200betlar], [3, 95-112 betlar].

1.Chiziqli formalar. Bizga F maydon ustidagi V chiziqli fazo berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar $\varphi: V\to F$ funktsiya ushbu shartlar:

1) $\forall x,y\in V$, $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;

2) $\forall x\in V$, $\lambda\in F$ uchun $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ ni qanoatlantirsa φ ga chiziqli forma (chiziqli funktsiya, chiziqli funktsional) deb ataladi.

2. Misollar:

1). Agar V n o`lchamli chiziqli fazo, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ lar shu fazodagi $x$ vektorning biror bazisdagi koordinatalari va $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in F$ lar berilgan bo`lsa, u holda

$$\varphi(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\ldots+\alpha_n\xi_n$$

funktsiya V dagi chiziqli forma bo`ladi.

Bu yerda 1), 2) shartlarning bajarilishini osonlik bilan ko`rish mumkin. Keyinchalik biz V dagi ixtiyoriy chiziqli formaning shu ko`rinishda ifodalanishini ko`rsatamiz.

2). Cheksiz o`lchamli $C[a,b]$ fazoda $\varphi : C[a,b] \to R$ akslantirishni

$$\forall x(t) \in C[a,b] \qquad \varphi(x) = \int_a^b x(t)dt$$

tenglik bilan aniqlaymiz. U holda $\varphi(x)$ funktsiya $C[a,b]$ da chiziqli forma bo`ladi.

3. Bazis o`zgargandan chiziqli forma koeffitsiyentlarining o`zgarishi.

Faraz etaylik V n o`lchamli chiziqli fazo, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ uning biror bazisi, $x$ esa shu fazodagi ixtiyoriy vektor bo`lsin. U holda $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ deb yoza olamiz. Agarda $\varphi : V \to F$ chiziqli forma bo`lsa,

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \xi_2 \varphi(e_2) + \ldots + \xi_n \varphi(e_n) =$$
$$= a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n,$$

bunda $\alpha_i = \varphi(e_i)$ bo`ladi.

Shunday qilib har qanday chiziqli forma φ bazisga kiruvchi vektorlardagi qiymatlari bilan to`la aniqlanadi. Bu qiymatlar chiziqli formaning berilgan bazisdagi koeffitsientlari deb ataladi.

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \qquad (e)$$
$$f_1, f_2, \ldots, f_n \qquad (f)$$

lar V fazoning ikkita bazisi va $c = (\gamma_{ik})$ esa (e) dan (*f*) ga o`tish matritsasi bo`lsin, ya'ni

$$\begin{cases} f_1 = \gamma_{11} e_1 + \gamma_{21} e_2 + \cdots + \gamma_{n1} e_n \\ f_2 = \gamma_{12} e_1 + \gamma_{22} e_2 + \ldots + \gamma_{n2} e_n \\ ------------------ \\ f_k = \gamma_{1k} e_1 + \gamma_{2k} e_2 + \ldots + \gamma_{nk} e_n \qquad \left(= \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} e_i \right) \\ ------------------- \\ f_n = \gamma_{1n} e_1 + \gamma_{2n} e_2 + \ldots + \gamma_{nn} e_n \end{cases}$$

u holda

$$\beta_k = \varphi(f_k) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} \alpha_i \ , \qquad (k = 1, \overline{n}).$$

Bu formula bazis o`zgarganda chiziqli forma koordinatalarining qanday o`zgarishini ko`rsatadi.

4. Berilgan fazoga qo`shma fazo.

Qiymati F maydonda yotuvchi V chiziqli fazoda aniqlangan ikkita chiziqli formaning yig`indisi va V da aniqlangan chiziqli formaning skalyarga ko`paytmasi, ya'na shu fazodagi chiziqli forma bo`ladi. Haqiqatan ham $\varphi$ va $\psi$ lar chiziqli formalar bo`lsin. U holda

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\lambda x_1) = \lambda \varphi(x_1)$$
$$\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2), \quad \psi(\lambda x_1) = \lambda \psi(x_1)$$

va

$$(\varphi+\psi)(x_1+x_2)=\varphi(x_1+x_2)+\psi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\psi(x_1)+\psi(x_2)=$$
$$(\varphi(x_1)+\psi(x_1))+(\varphi(x_2)+\psi(x_2))=(\varphi+\psi)(x_1)+(\varphi+\psi)(x_2)$$
$$(\mu\varphi)(\lambda x_1)=\mu\lambda\varphi(x_1)=\lambda(\mu\varphi(x_1))(\mu\varphi)(\lambda x_1)=\mu\lambda\varphi(x_1)=\lambda(\mu\varphi(x_1)).$$

Demak, V da aniqlangan barcha chiziqli formalar to`plami F maydon ustida chiziqli fazo bo`lar ekan. Bu fazoga V ga qo`shma fazo deb ataladi.

5. Chiziqli forma yadrosining o`lchami.

Teorema: Agar $\varphi : V_n \to F$ chiziqli forma bo`lsa, $k(\varphi)-\varphi$ chiziqli formaning yadrosi *n-1* o`lchamli qism fazodir.

Isboti. Ma'lumki

$\left(k(\varphi)=\{x \mid \varphi(x)=0, x\in V\}\right.$ va $\left.\dim k(\varphi)+\dim\varphi(V)=\dim(V)=n\right)$

Bu yerda $\varphi(V)=F$ va F maydon o`zi ustida 1 o`lchamli. Shuning uchun ham $\dim k(\varphi)=n-1$.

Mavzu: Bichiziqli va kvadratik formalar.

1. Bichiziqli formalar.
2. Misollar.
3. Bazis o`zgarganda bichiziqli forma matritsasining o`zgarishi.
4. Kvadratik formalar.

Adabiyotlar[1, 200-203 betlar], [2, 254-262 betlar], [3, 55-64 betlar]

1. Bichiziqli formalar.

Ta'rif. Agar 2 ta vektor argumentli skalyar $\varphi(x,y)$ funktsiya $\varphi : V^2 \to F$ har bir argumenti bo`yicha chiziqli bo`lsa, ya'ni:

1) $\forall\ x_1, x_2 \in V$ và $\lambda\in F, \mu\in F$ uchun $\varphi(\lambda x_1+\mu x_2, y)=\lambda\varphi(x_1,y)+\mu\varphi(x_2,y)$;

2) $\forall\ y_1, y_2 \in V$ và $\lambda,\mu\in F$ uchun $\varphi(x,\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda\varphi(x,y_1)+\mu\varphi(x,y_2)$

shartlar bajarilsa, φ *ga bichiziqli forma deyiladi*, (funktsiya, funktsional deb ataladi).

2. Misollar.

1) *D_1(a), D_2(a), D_3(a)* fazolarda umumiy boshlang`ich uchga ega bo`lgan bir to`g`ri chiziqda yotuvchi vektorlar fazosida vektorlarning skalyar ko`paytmasi bichiziqli forma bo`ladi.

$$a=(\xi_1,\xi_2),\ \ b=(\eta_1,\eta_2),\ \ (a,b)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2,\ c=(\varsigma_1,\varsigma_2),\ \ a+c=(\xi_1+\varsigma_1,\xi_2+\varsigma_2)$$
$$(a+c,b)=((\xi_1+\varsigma_1,\xi_2,+\varsigma_2);(\eta_1,\eta_2))=(\xi_1+\varsigma_1)\eta_1+(\xi_2+\varsigma_2)\eta_2=$$
$$=\xi_1\eta_1+\varsigma_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\varsigma_2\eta_2=(\xi_1\eta_1+\varsigma_2\eta_2)+(\eta_1\varsigma_1+\eta_2\varsigma_2)=(a;b)+(c,b)$$

Shuningdek, $(a,b+d)=(a,b)+(a,d)$. $\quad(\lambda a,b)=\lambda(a,b),\ \ (a,\mu b)=\mu(a,b)$

lar ham bajariladi. Shuning uchun ham *D_2(a)* dagi skalyar ko`paytma bichiziqli forma bo`ladi.

2). F^n arifmetik fazodagi $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ $y=(\eta_1,\ldots..,\eta_n)$ vektorlar uchun

$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_1\eta_i$ tenglik bilan aniqlangan funktsiya bichiziqli.

3) Elementlari F maydondan olingan n-tartitbli (α_{ik}) matritsa berilgan bo`lsin. U holda F^n fazoning ixtiyoriy $x=(\xi_1,\ldots..,\xi_n)$ *ва* $y=(\eta_1,\ldots.,\eta_2)$ vektorlari uchun

$$\varphi(x,y)=\alpha_{11}\xi_1\eta_1+\alpha_{12}\xi_1\eta_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_1\eta_n+\alpha_{21}\xi_2\eta_1+\alpha_{22}\xi_2\eta_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_2\eta_n+$$

$$+\ldots.+\alpha_{n1}\xi_n\eta_1+\alpha_{n2}\xi_n\eta_2+\ldots+\alpha_{nn}\xi_n\eta_n=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\xi_i\eta_k$$ tenglik bilan

aniqlanuvchi funktsiya bichiziqlidir.

4). C[a,b] fazoning *x(t)* va *y(t)* elementlari uchun

$$\varphi(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt \qquad \left(\varphi(x,y)=\int_a^b\int_a^b k(s,t)x(t)y(s)dtds\right)$$

funktsiya bichiziqlidir.

3. Bichiziqli formaning matritsasi. Endi $\dim V=n$ ва $e_1,e_2,\ldots,e_n$ shu fazoning bazisi va

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i, \qquad y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ldots.+\eta_ne_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_ke_k$$

lar shu fazoning ixtiyoriy vektorlari bo`lsin. U holda

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_1e_1;\ \sum_{k=1}^{n}\eta_ke_k\right)=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{i,k}\xi_i\eta_k$$ bu yerda $\alpha_{ik}=\varphi(e_i,e_k)$

α_{ik} larga $\varphi(x,y)$ bichiziqli formaning (e) bazasida koffitsientlari,

$A=(\alpha_{ik})=(\varphi(e_i,e_k))\in F^{nxn}$ ga esa matritsasi deyiladi.

Shunday qilib tayinlangan bazisda elementlari *F* maydondan olingan kvadrat (n-tartibli) matritsalar va $\varphi:V^2\to F$ bichiziqli formalar orasida o`zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Endi bazis o`zgarganda bichiziqli forma matritsasining qanday o`zgarishini tekshiramiz. 1-punktdagi singari $\varphi(x,y)$ ning (e) bazisdagi matritsasi $A=(\alpha_{ik})$ va *(f)* bazisdagi matritsasi esa $B=(\beta_{ik})$ bo`lsin. $c=(\alpha_{ik})$ (e) bazisdan *(f)* bazisga o`tish matritsasi bo`lsin. U holda

$$\beta_{ik}=\varphi(f_i,f_k)=\varphi\left(\sum_{q=1}^{n}\gamma_{pi}e_p,\sum_{q=1}^{n}\gamma_{qk}e_q\right)=\sum_{p,q=1}^{n}\gamma_{pi}\gamma_{qk}\ \varphi(e_p,e_q)=\sum_{p,q=1}^{n}\gamma_{ip}^{T}\alpha_{pq}\gamma_{qk}$$

ya'ni $B=C^TAC$. Bu yerda C xosmas matritsa *(detC≠0) r(B)qr(A).* Demak bichiziqli formaning har xil bazisdagi matritsalarining rangi teng. Bu son bichiziqli formaning rangi deyiladi.

4. Kvadratik formalar. Agar $\varphi(x,y)$ bichiziqli forma bo`lsa, $q(x)=\varphi(x,x)$ formaga unga mos *kvadratik forma* deyiladi. ($\varphi(x,y)$ ga qutb forma ham deb yuritiladi). Biz yuqorida qaragan har bir misol kvadratik formaga misol bo`la oladi.

Agar $\forall x, y \in V$ uchun $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$tenglik o`rinli bo`lsa, φ ga simmetrik bichiziqli forma deyiladi.

Simmetrik bichiziqli formaning matritsasi har qanday bazisda simmetrikdir;.

$$\alpha_{ik} = \varphi(e_i, e_k) = \varphi(e_k, e_i) = \alpha_{ki}$$

Aksincha, agar bichiziqli formaning matritsasi biror bazisda simmetrik bo`lsa, bichiziqli forma ham simmetrik. Haqiqatdan ham

$$\varphi(y, x) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_i \xi_k = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_i \xi_k = \sum_{k,i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_k \eta_i = \varphi(y, x).$$

Agarda qaraliyotgan F maydonning xarakteristikasi ≠2 bo'lsa, u holda $g(x) = \varphi(x, x)$ kvadratik forma

$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x, y) + \psi(y, x)\}$ simmetrik bichiziqli forma bilan ham hosil qilinadi.

Aksincha bu $\psi(y, x)$ simmetrik bichiziqli forma *q(x+y)* kvadratik forma bilan bir qiymatli aniqlanadi.

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = \varphi\langle x, x\rangle + 2\varphi(x, y) + \psi(y, y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

Kvadratik formani hosil qiluvchi yagona (qutb) simmetrik bichiziqli formaning matritsasiga kv. formaning matritsasi deyiladi.

$$\varphi(x, y) = \xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_2 + 3\xi_1\eta_3 + 2\xi_2\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 + 5\xi_2\eta_3 + 3\xi_3\eta_1 + 5\xi_3\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad q(x) = \varphi(x, x) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 6\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 + 10\xi_2\xi_3 + \xi_3^2$

Mavzu: Kvadaritik formani kanonik shakldа keltirish.

Rejasi:
1. Kanonik bazis.
2. Kanonik shaklga keltirishning Yakobi usuli.
3. Misollar.

Adabiyotlar [1, 203-207], [2], [3, 69-72]

1. Kanonik bazislar. F maydon ustida V chiziqli fazo va $\varphi : V \to F$ -bichiziqli forma berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar V dagi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda $\varphi(x, y)$ bichiziqli formaning matritsasi diagonal (ya'ni $i \neq k$ bo`lganda $\varphi(e_k, e_i) = 0$) bo`lsa, bu bazis $\varphi(x, y)$ bichiziqli forma uchun *kanonik bazis* deb ataladi.

1-teorema. Xarakteristikasi 2 dan farqli har qanday maydon ustidagi chekli o`lchamli fazoda aniqlangan simmetrik bichiziqli forma kanonik bazisga ega.

Isboti. Isbotni chiziqli fazoning o`lchami bo`yicha matematik unduktsiya metodi yordamida bajaramiz.

$n=1$ da tasdiqning o`rinligi ayon, chunki 1-tartibli har qanday matritsa diagonal ko`rinishga ega. Endi $n>1$ bo`lsin va o`lchami $<n$ bo`lgan chiziqli fazolar uchun teorema isbotlangan deb faraz etamiz.

Agar $\varphi(x,y)\equiv 0$ bo`lsa, u holda matritsa ham nol matritsa bo`lib u diagonal ko`rinishda. Agar $\varphi(x,y)\neq 0$ bo`lsa, u holda $\exists e_1\in V$ vektor mavjudki $\varphi(e_1,e_1)\neq 0$ bo`ladi, chunki aks holda har qanday $x,y\in V$ vektorlar uchun $\varphi(x,y)=\frac{1}{2}\{\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x,x)-\varphi(y,y)\}=0$ bo`lar edi.

Ushbu $V_1=\{x\in V/\varphi(x,e_1)=0\}$ to`plamni qaraymiz. Bu to`plamning V da o`lchami $n-1$ ga teng qism fazoni tashkil etishini ko`rsatamiz. Agar $x,y\in V_1$ va $\lambda,\mu\in F$ bo`lsa, $\varphi(\lambda x+\mu y,\, e_1)=\lambda\varphi(x,e_1)+\mu\varphi(y,e_1)=0$ bo`ladi. Demak $\lambda x+\mu y\in V_1$. V_1 qism fazo. Har bir $x\in V$ vektorni yagona usulda $x=\lambda e_1+y,\ (\lambda\in F,\ y\in V_1)$ ko`rinishda ifodalash mumkin.

Haqiqatan ham oxirgi tenglikdan $y=x-\lambda e_1\ \in V_1$ va $\varphi(y,e_1)=\varphi(x,e_1)-\lambda\varphi(e_1,e_1)=0$ yoki $\lambda=\dfrac{\varphi(x,e_1)}{\varphi(e_1,e_1)}$. λ bu tenglik yordamida yagona usulda aniqlanadi va demak $x=\lambda e_1+y$ ham yagona.

Shunday qilib V fazo V_1 qism fazo bilan bir o`lchamli $\{\lambda e_1|\lambda\in F\}$ qism fazolarning to`g`ri yig`indisidan iboratdir. Bundan

$$\dim V_1=n-1$$

Induktivlik farazimizga ko`ra $V_1$ da $\varphi(x,y)$bichiziqli formaning kanonik bazisi mavjud. $e_2,e_3,\ldots,e_n$ shu kanonik bazislardan biri bo`lsin. $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n$ ning V ning kanonik bazisi ekanligini ko`rsatamiz. Haqiqatan ham $1<k$ bo`lsa $e_k\in V_1$ bo`ladi va shuning uchun $\varphi(e_1,e_k)=0$. Agarda $2\le i<k$ bo`lsa, u holda $e_2,e_3,\ldots,e_k$ V_1 da kanonik bazis bo`lgani uchun $\varphi(e_i,e_k)=0$ bo`ladi.

Bulardan $\varphi(e_i,e_k)=0$, $\left(i\neq k,\ i,k=\overline{1,n}\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

Isbotlangan teorema bichiziqli forma uchun kanonik bazisning mavjudliginigina ko`rsatib, berilgan bichiziqli forma uchun uni qanday usul bilan topish kerakligi haqida ko`rsatma (algoritm) bermaydi.

Quyida keltirladigan teorema ba'zi bir simmetrik bichiziqli formalar uchun shunday ko`rsatmani beradi.

2-teorema. Biror $e_1,e_2,\ldots,e_n$ bazisda matritsasi $A=(\alpha_{ik})$ ning barcha tartibli bosh minorlari noldan farqli bo'lgan $\varphi(x,y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo`lsin. U holda bichiziqli formaning bu bazis bilan uchburchakli o`tish matritsasi orqali bog`langan shunday $f_1,f_2,\ldots,f_n$ kanonik bazisi mavjudki

$$\varphi(f_k, f_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}, \quad \left(k = \overline{1, n}\right),$$

bu yerda $\Delta_0 = 1,\ \Delta_k$ esa A ning k-burchak minori.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun berilgan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (e) bazis bilan uchburchakli o`tish matritsasi orqali bog`langan va $1 \le j < k \le n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi j, k lar uchun

$$\varphi(f_k, e_j) = 0, \qquad \varphi(f_k, e_k) = 1 \qquad (1)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi yagona bazis ($f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazis) mavjudligini va bu bazisning teoremaning barcha shartlarini qanoatlantirishini ko`rsatamiz.

Yangi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazisni

$$f_1 = \gamma_{11} e_1$$

$$f_2 = \gamma_{12} e_1 + \gamma_{22} e_2$$

$$f_3 = \gamma_{13} e_1 + \gamma_{23} e_2 + \gamma_{33} e_3$$

…………………………..

$$f_k = \gamma_{1k} e_1 + \gamma_{2k} e_2 + \ldots + \gamma_{kk} e_k \left(= \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik} e_k \right), \ \gamma_{ik} \in F$$

………………………………………

$$f_n = \gamma_{1n} e_1 + \gamma_{2n} e_2 + \ldots + \gamma_{nn} e_n,$$

ko`rinishda izlaymiz. (1) dan

$$0 = \varphi(f_k, e_j) = \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_j) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_j) + \ldots + \gamma_{2k}\varphi(e_k, e_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

va

$$1 = \varphi(f_k, e_k) = \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_k) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_k) + \ldots + \gamma_{kk}\varphi(e_k, e_k).$$

Bularni kengaytirib yozsak

$$\begin{cases} \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_1) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_1) + \ldots + \gamma_{kk}\varphi(e_k, e_1) = 0 \\ \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_2) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_2) + \ldots + \gamma_{kk}\varphi(e_k, e_2) = 0 \\ ------------------------ \\ \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_{k-1}) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_{k-1}) + \ldots + \gamma_{kk}\varphi(e_k, e_{k-1}) = 0 \\ \gamma_{1k}\varphi(e_1, e_k) + \gamma_{2k}\varphi(e_2, e_k) + \ldots + \gamma_{kk}\varphi(e_k, e_k) = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemaning determinanti shartga ko`ra

$$\Delta_k = \left|\varphi(e_i, e_j)\right| = \left|\alpha_{ij}\right| \ne 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (3)$$

Shuning uchun ham (2) sistema yagona yechimga ega. Bu yechimni Kramer qoidasi bo`yicha topsak, xususiy holda

$$\gamma_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} \ne 0 \qquad \left(k = \overline{1, n}\right)$$

bo`ladi.

Shuning uchun (e) bazisdan (f) ga o`tish matritsasi xosmas, chunki uning determinanti

$$\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn} = \frac{1}{\Delta} \ne 0$$

va uning uchun *(f)* sistema ham bazis bo`ladi.

(1) dan $i<k$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi i, k lar uchun

$$\varphi(f_k, f_i)=\varphi\left(f_k, \sum_{j=1}^{i}\gamma_{ji}e_j\right)=\sum_{j=1}^{i}\gamma_{ji}\varphi(f_k, e_j)=0$$

tenglikga ega bo`lamiz.

Bundan $\varphi(x,y)$ ning simmetrikligiga asosan $i>k$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi i, k lar uchun $\varphi(f_k, f_i)=0$ munosabat kelib chiqadi. Demak *(f)* sistema $\varphi(x,y)$ uchun kanonik bazis. (1) ga asosan

$$\varphi(f_k, f_k)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ik}\varphi(f_k, e_i)=\gamma_{kk}\,\varphi(f_k, e_k)=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} \qquad (k=\overline{1, n}).$$

Kanonik bazisni topishning bu usuliga Yakobi usuli deyiladi.

Misol. Uch o`lchovli fazodagi $e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)$ bazisda $2\xi_1^2+2\xi_1\xi_3+\xi_2^2+\xi_3^2+3\xi_1\xi_2$ ko`rishiga ega bo`lgan kvadrat formani Yakobi usulidan foydalanib kanonik ko`rinishga keltiring.

*Yechilishi***:** Bunga mos qutb bichiziqli forma

$$\varphi(x,y)=2\xi_1\eta_1+\frac{3}{2}\xi_1\eta_2+2\xi_1\eta_3+\frac{3}{2}\xi_2\eta_1+\xi_2\eta_2+2\xi_3\eta_1+\xi_3\eta_3.$$

Bosh minorlari

$$\Delta_1=2\neq 0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{vmatrix}=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}\neq 0,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & \frac{3}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4\frac{1}{4}\,.$$

Demak teorema shartlari bajariladi.

$$f_1=\gamma_{11}e_1 \qquad\qquad =(\gamma_{11},0,0)$$
$$f_2=\gamma_{21}e_1+\gamma_{22}e_2 \qquad =(\gamma_{21},\gamma_{22},0)$$
$$f_3=\gamma_{31}e_1+\gamma_{32}e_2+\alpha_{33}e_3=(\gamma_{31},\gamma_{32},\gamma_{33})$$

deb olib γ_{ij} larni topamiz.

(1) дан $\varphi(f_k, e_k)=1$, ya'ni $k=1$ да $\varphi(f_1, e_1)=1$. Shuning uchun

$$\varphi(f_1, e_1)=\varphi(\gamma_{11}e_1, e_1)=\gamma_{11}\varphi(e_1, e_1)=\gamma_{11}\cdot 2=1$$

$$\gamma_{11}=\frac{1}{2} \qquad \text{va} \qquad f_1=\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right).$$

Shuningdek $\varphi(e_j, f_k)=0,\quad j=1,2,\ldots, k-1;$

bo`lgani uchun $\varphi(e_1, f_k)=0\Rightarrow\varphi(e_1, f_2)=0\ \ \varphi(e_2, f_2)=1$. Bulardan

$$\varphi(e_1, f_2)=\varphi(e_1;\gamma_{21}e_1+\gamma_{22}e_2)=\gamma_{21}\varphi(e_1, e_1)+\gamma_{22}\varphi(e_1, e_2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(e_1, f_2)=2\gamma_{21}+\frac{3}{2}\gamma_{22}=0\\ \varphi(f_2,e_2)=\frac{3}{2}\gamma_{21}+\gamma_{22}=1\end{array}\right|_{\frac{3}{2}} \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\gamma_{21}=-\frac{3}{2}, \qquad \gamma_{21}=6\ .$$

$$\gamma_{22}=1-\frac{3}{2}\gamma_{21}=1-\frac{3}{2}\cdot 6=-8.$$

Demak, $f_2=6e_1-8e_2=(6,-8,0)$.

Endi $\gamma_{31},\gamma_{32},\gamma_{33}$ larni topamiz. (1) dan

$$\begin{cases}\varphi(f_3,e_1)=0\\ \varphi(f_3,e_2)=0\\ \varphi(f_3,e_3)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\gamma_{31}+\frac{3}{2}\gamma_{32}+2\gamma_{33}=0\\ \frac{3}{2}\gamma_{31}+\gamma_{32}+ \qquad =0\\ 2\gamma_{31} \qquad +\gamma_{33}=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\gamma_{31}+\frac{3}{2}\gamma_{32}+\gamma_{33}=0\\ \frac{3}{2}\gamma_{31}+\gamma_{32} \qquad =0\\ \gamma_{31}-\frac{3}{4}\gamma_{32} \qquad =1\end{cases} \qquad \begin{array}{l}2\gamma_{31}+\frac{3}{2}\gamma_{32}+\gamma_{33}=0\\ \frac{17}{8}\gamma_{31}=1\end{array}$$

$$\gamma_{31}=\frac{8}{17},\quad \gamma_{32}=-\frac{12}{17},\quad \gamma_{33}=\frac{1}{17}.$$

Demak $f_3=\left(\frac{8}{17},\ -\frac{12}{17},\ \frac{1}{17}\right)$. Shunday qilib berilgan bichiziqli formani

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\Delta_1}\xi_1\eta_1+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2\eta_2+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\xi_3\eta_3=\frac{1}{2}\xi_1\eta_1-8\xi_2\eta_2+\frac{1}{17}\xi_3\eta_3$$

ko`rinishda yozish mumkin. Unga mos kvadaratik forma esa

$$\varphi(x,x)=\frac{1}{2}\xi_1^2-8\xi_2^2+\frac{1}{17}\xi_3^2.$$

Mustaqil vazifa.

1) Kvadartik formalarning inertsiya qonuni (indeksi, signaturasi).

2) Quyidagi misollarni ishlang.

1177 П, 1182 П, 1189, 1191, 1194, 1214. 1226

Mavzu: Berilgan chiziqli almashtirishga qo`shma chiziqli almashtirish.

Reja

1.Chiziqli almashtirishlar va bichiziqli formalar orasida bog`lanish.

2.Berilgan chiziqli almashtirishga qu`shma chiziqli almashtirish.

3.Qo`shma almashtirishning hossalari.
Adabiyotlar: [1.2]

1.Evklid fazosidagi chiziqli almashtirishlar va bichiqli formalar orasidagi bog`laniosh. Biz ilgari chiziqli fazolarni alohida bichiziqli formalarni alohida qaradik.Evklid fazosidagi bichiziqli formalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida muhim bog`lanishlar mavjud.

*1-teorema.*Har bir *A*-chiziqli almashtirishga Evklid fazosidagi

$$A(x,y)=(Ax,y) \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanuvchi *A(x,y)* bichiziqli forma mos keladi.

Isboti. Haqiqatdan ham (1) tenglik bilan aniqlanuvchi *A(x,y)* funksiya bichiziqli formaning barcha shartlarini qanoatlantiradi

1) $(A(x_1+x_2),)=(Ax_1+Ax_2,y)=(Ax_1,y)+(Ax_2,y),(A(\lambda x),y)=(\lambda Ax,y)=\lambda(Ax,y).$

2)$(x,A(y_1+y_2))=(x,Ay_1+Ay_2)=(x,Ay_1)+(x,Ay_2),(x,A(\lambda y))=(x,\lambda Ay)=\lambda (x,Ay).$

A(x,y) bichiziqli formaning *A* chiziqli almashtirishning bir qiymatli aniqlanishini ko`rsatamiz. Faraz etaylik *A(x,y)* va *A(x,y)=B(x,y)* bo`lsin.U holda $(Ax,y)=(Bx,y)$ yoki $(Ax,y)-(Bx,y)=0\Rightarrow(Ax-Bx, y)=0$, tenglik ihtiyoriy *y* vektor uchun bajariladi. Demak $A\, x-Bx=0\Rightarrow Ax=Bx$ ihtiyoriy *x* vektor uchun ,ya`ni $A=B$.
Bu teoremaning teskarisi ham o`rinli. *R*-unitar fazo bo`lsin. *A(x,y)* esa undagi bichiziqli forma bo`lsin. *R* dagi biror ortonormal bazis $e_1,e_2 ,...,e_n$ ni tanlab olamiz. Agar $x=\xi_1e_1+\xi_2e+...+\xi_ne_n$ va $y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+...+\eta_ne_n$ deb olsak, u holda

$$A(x,y)=a_{11}\xi_1\bar\eta_1+a_{12}\,\xi_2\,\bar\eta_2+...\ +a_{1n}\xi_1\bar\eta_n+a_{21}\xi_2\bar\eta_1+\ a_{22}\xi_2\bar\eta_2+...\ \ +a_{2n}\xi_{2n}\bar\eta_n+$$
$$+...+a_{n1}\xi_n\bar\eta_1+a_{n2}\xi_n\bar\eta_2+...\ \ +a_{nn}\xi_n\bar\eta_n \qquad (2)$$

Endi (2)ni skalyar ko`paytma shaklida yo`zishga harakat qilamiz. Buning uchun (2) quyidagicha yo`zib olamiz

$$A(x,y)=(a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+...+a_{n1}\xi_n)\,\bar\eta_1+(a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+...+a_{n2}\xi_n)\,\bar\eta_2+$$
$$+..........+(a_{1n}\xi_1+a_{n2}\xi_2+...+a_{nn}\xi_n)\,\bar\eta_n.$$

Bunda $\zeta_1=a_{11}\xi+a_{21}\xi_2+...+a_{n1}\xi_n,\ \zeta_2=a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+...+a_{n2}\xi_n,$
$..., \zeta_n=a_{1n}\xi_1+a_{n2}\xi_2+...+a_{nn}\xi_n$

deb olsak ,u holda $z=(\zeta_1,\zeta_2,...\zeta_n)$ vektor *x* vektorlarning *A(x,y)* bichiziqli formaning matrisasia(a_{ik}) ning transponerlanganiga $A=(a_{ik})$ mos keluvchi chiziqli almashtirish yordamida hosil qilinadi,yani z=Ax .Shunday qilib $A(x,y)=\zeta_1\acute\eta_1+\zeta_2\acute\eta_2+\ldots+\zeta_n\acute\eta_n=$ (z,y)=(Ax,y) va unitary fazodagi har bir A(x,y) bichiziqli formaga A(x,y)=(Ax,y) tenglik yordamida aniqlanuvchi A chiziqli almashtirish mos keladi. Demak (1) tenglik Evklid fazosidagi bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlar orasidagi o`zaro bir qiymatli moslikdir.

Bichiziqli formalar va chiziqli almashtirishlar orasidagi moslikni boshqacharoq yo’l bilan ham o`rnatish mumkin ,yani

$$A(x,y) =(x,A^*y) \qquad (3)$$

tenglik yordamida, haqiqatdan ham (2) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\text{A(x,y)}=(a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+...a_{n1}\xi_n)\bar\eta_1+\left(a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+...a_{n2}\xi_n\right)\bar\eta_2+....$$
$$+(a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+...a_{nn}\xi_n)\bar\eta_n$$

$$A(x,y)=\xi_1(a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2+...+a_{1n}\eta_n\ +\xi_2(a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2+...+a_{2n}\eta_n)+$$

$$\ldots\ldots + \xi_n(a_{n1}\overline{\eta_1} + a_{n2}\overline{\eta_2} + \ldots + a_{nn}\overline{\eta_n}) = \xi_1\overline{(\bar{a}_{11}\eta_1 + \bar{a}_{12}\eta_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}\eta_n)} +$$
$$+ \xi_2\overline{(\bar{a}_{21}\eta_1 + \bar{a}_{22}\eta_2 + \ldots + \bar{a}_{nn}\eta_n)} + \ldots + \xi_n\overline{(\bar{a}_{n1}\eta_1 + \bar{a}_{n2}\eta_2 + \ldots + \bar{a}_{nn}\eta_n)} =$$
$$+ \xi_1\overline{\zeta_1} + \xi_2\overline{\zeta_2} + \ldots + \xi_n\overline{\zeta_n} = (x, A^*y).$$

Bu yerda A* matrisa A matrisadan transponirlanganiga o`tib qo`shmasini olib hosil qilinadi. Shuni ham takidlab o`tish kerakki ortonormal bo`lmagan bazisda *A* va *A** matrisalar orasidagi bog`lanishlar ancha murakkabroqdir.

<u>*2.A chiziqli almashtirishdan uning qo`shmasi A\* ga o`tish amali*</u>. Agar A unitar fazodagi chiziqli almashtirish bo`lsa ,u holda *(Ax,y)=(x,A\*y)* tenglik yordamida aniqlanuvchi A* almashtirishga A ga *qo`shma almashtirish* deb ataladi.

2-teorema. Unitar fazodagi har bir chiziqli almashtirishga yagona qo`shma almashtirish mops keladi.

*Isboti.*1-teoremaga ko`ra *A(x,y)=(Ax,y)* va(3) ga ko`ra *A(x,y)=(x,A*y)* . Bulardan

$$(Ax,y)=(x,A^*y) \qquad (4)$$

Tenglik hosil bo`ladi.(3) va (1) tengliklar yordamida A(x,y) ortonormal bazisda bir qiymatli aniqlangani uchun ham (4) yordamida aniqlanuvchi A vaA* lar ham yagonadir. Bu teoremadan kelib chiqadiki qo`shma A* almashtirishning matrisasi A chiziqli almashtirishning matrisasidan transponirlab qo`shmasini olish yo`li bilan hosil qilinadi. A dan A*ga o`tishni quyidagi qoyida yordamida bajariladi: Agar (Ax,y) ifodada A ni ikkinchi o`zgaruvchiga o`tkazmoqchi bo`lsak unga unda A ning o`rniga A* ni olish kerak. Berilgan chiziqli almashtirishga qo`shma almashtirish quyidagi hossalarga ega.:

1) (AB)=B*A**   *3) (A+B)*=A*+B**
2) (A)*=A*   *4) (λA)*= λA**
5) E=E.*

Bulardan 1) va2) ni isbotlayniz: 1*) ning isboti.*

$$(ABx,y)=(Bx,A^*y)=(x,B^*A^*y) \qquad (5)$$

Ikkinchi tomondan esa chiziqli almashtirishlar ko`paytmasi *AB* yana chiziqli almashtirish bo`ladi, demak

$$((AB)x,y)=(x,(AB)^*y) \qquad (6)$$

2) *ning isboti*. *A** ning tarifiga ko`ra *(Ax,y)=(x,A\*y)* . Vaqtincha *C=A\** deb olaylik . U holda *(Ax,y)=(x,Cy)* , bunda *(y,Ax)=(Cy,x)*. Endi *x* ni *y* va *y* ni *x* bilan almashtiraniz, u holda *(x,Ay)=(Cx,y)* hosil bo`ladi. Bunda *(Cx,y)=(x,C*y)* bo`lgani uchun *A=C\*=(A\*)\** bo`ladi.

Mavzu: O`z-o`ziga qo`shma, unitar va normal almashtirishlar.

Reja:

1. Ta`riflar ,misollar.
2. Chiziqli almashtirishni o`z-o`ziga qo`shma chiziqli akslantirishlar yig`indisi ko`rinishida yozish.
3. O`z-o`ziga qo`shma chiziqli akslantirishlar ko`paytmasi.

1. O`z- o`ziga qo`shma va normal chiziqli almashtirishlarning tariflari.

* amal kompleks sonlardagi λ kompleks sonidan unga qo`shma $\bar{\lambda}$ soniga o`hshashdir, chunki agar *A* 1-tartibli matrisa bo`lsa \* amal kompleks sondan uning qo`shmasiga o`tishni bildiradi. A\*=A shartni qanoatlantiruvchi cchiziqli almashtirishga *o`z-o`ziga qo`shma almashtirish yoki Ermit almashtirishi* deb ataladi

1-teorema. A chiziqli almashtirishning o`z-o`ziga qo`shma bo`lishi uchun *(Ax,y)* bichiziqli formaning Ermit formasi bo`lishi zarur va yetarlidir.
Haqiqatam ham (Ax,y) ning Ermit formasi bo`lsin

$$(Ax,y)=\overline{(Ay,x)}. \qquad (a)$$

A ning o`z-o`ziga qo`shma ekanligi esa

$$(Ax,y)=(x,Ay) \qquad (b)$$

Bu (a) va (b) tengliklar ekvivalentdir.
Har qanday kompleks son e ni $e=\alpha+i\beta$ (bunda α va β lar haqiqiy sonlar) ko'rinishda yozish mumkin. Shunga o'xshash ixtiyoriy chiziqli almashtirish *A* ni

$$A=A_1+iA_2 \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda A_1 va A_2 o'z-o'ziga qo'shma almashtirish.
Haqiqatan ham

$$A=\frac{A+A^*}{2}+i\frac{A-A^*}{2i}$$

tenglik o'rinli. Bu yerda

$$A_1=\frac{A+A^*}{2}\quad,\quad A_2=\frac{A-A^2}{2}$$

deb belgilab olsak, u holda

$$A_1^*=\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^*=\frac{1}{2}(A+A^*)^*=\frac{1}{2}(A+A^{**})=\frac{1}{2}(A^*+A)=A_1$$

Shuningdek $A_2^*=-\frac{1}{2i}(A-A^*)^*=-\frac{1}{2i}(A^*-A^{**})=\frac{A-A^*}{2i}=A_2$

ya'ni A_1 va A_2 lar o'z-o'ziga qo'shma almashtirish.

Shunday qilib, o'z-o'ziga qo'shma almashtirishlar barcha chiziqli almashtirishlar orasida kompleks sonlardagi haqiqiy sonlar singari rolni o'taydi. Agarda A ixtiyoriy chiziq1i almashtirish bo'lsa, u holda AA^* va A^*A lar o'z-o'ziga qo'shmadir. Haqiqatan ham,

$$(AA^*)^*=A^{**}A^*=AA^*$$

$$(A^*A)^*=A^*A^{**}=A^*A$$

kompleks sonlarda $\alpha\bar{\alpha}=\bar{\alpha}\alpha$, lekin chiziqli akslantirishlarda $AA^*\neq A^*A$.

Lekin 2 ta o'z-o'ziga qo'shma A va B chiziqli almashtirishlarning ko'paytmasi hamma vaqt ham o'z-o'ziga qo'shma bo'lavermaydi. Bu yerda teorema o'rinli:

2-teorema. Ikkita *A* va *B* o'z-o'ziga qo'shma chiziqli akslantirishning ko'paytmasi *AB* ning o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun *AB=BA* tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Shartga ko'ra, $A=A^*$, $B=B^*$ va *(AB)*=AB* bo`lsin . U holda 1-hossaga ko`ra *(AB)*=B*A*=BA* .Demak *AB=BA* . Endi *AB=BA* bo`lsin , u holda *(AB)*=(BA)*=A*B*=AB.*
Moduli 1 ga teng bo`lgan ,ya`ni $z\bar{z}=1$ shartni qanoatlantiruvchi kompleks sonlar rolini chiziqli almashtirishlar to`plamida unitar almashtirishlar o`taydi .
$U\cdot U^*=U^*\cdot U=E$ shartni qanoatlantiruvchi U chiziqli almashtirishga *unitar almashtirish* deb ataladi. Shuni ham ta`kidlash kerakki chekli *n*-o`lchovli fazolarda $U\cdot U^*=E$ *va* $U\cdot U=E$ lar ekvivalent lekin cheksiz o`lchovli fazolarda ular turlicha bo`ladi.Demak unitar almashtirishlar uchun $U^*=U^{-1}$ ekan.Unitar almashtirishlarning hossalari,hususan uning geometrik talqini hamda har bir chiziqli almashtirishni o`z-o`ziga qo`shma va unitar almashtirishning ko`paytmasi ko`rinishida ifodalash mumkin ekanligini keyingi ma`ruzalarimizda ko`rib o`tamiz. Hozir esa normal almashtirishning ta`rifini keltirish bilan chegaralanamiz.
$A\cdot A^*=A^*\cdot A$ shartni qanoatlantiruvchi A-chiziqli almashtirishga *normal almashtirish* deb ataladi.
Bu ta`riflardan kelib chiqadiki o`z-o`ziga qo`shma almashtirishlar ham , unitar almashtirishlar ham normal almashtirishning hususiy holidir .

**O`z-o`ziga qo`shma operatorlar.** Agar $f:L\to L$ operator uchun $f^*=f$ bo`lsa ,*f* ga *o`z-o`ziga qo`shma operator* deyiladi. Bu yerda ushbu teorema o`rinli:

1-teorema. Chekli o`lchamli unitar *L* fazoda *f* operatorning o`z-o`ziga qo`shma bo`lishi uchun uning normal va barcha hos sonlari haqiqiy bo`lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. A) zarurligi . $f=f^*$ ва $f\cdot f^*=f^*f$ bo`lsin . U holda $f\cdot f^*=f^*f=f^2$ bo`ladi. *f*-normal operator. Shu sababli *L* da hos vektorlardan tuzilgan ortonormal bazis mavjud. Bu bazisda *f* va *f** lalrning matrisalari

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad A^*=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \bar\lambda_2 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \bar\lambda_n\end{pmatrix}$$

ko`rinishida ega bo`ladi. $f=f^*$ dan $A=A^*$ ya`ni $\lambda_1=\bar\lambda_1,\lambda_2=\bar\lambda_2,\dots\dots\lambda_n=\bar\lambda_n$ lar kelib chiqadi.Demak $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ lar haqiqiy.
b) Yetarligi . *f* ning normalligi va $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ lar haqiqiy bo`lsalar $A=A^*$ kelib chiqadi.Bu holda L da xos vektorlardan tuzilgan ortonormal bazis mavjud va bu bazisda f ning matritsasi A, f* niki esa A* bo'ladi. $\lambda_k=\overline{\lambda_k}$ $(k=\overline{1,n})$ bo'lgani uchun A=A* va demak f=f*, f o'z-o'ziga qo'shma.

*2-teorema.*Unitar *L* fazoda har qanday f chiziqli operator $g+ih$ ko`rinishda ifodalanishi mumkin, bu yerda *g,h* lar o`z-o`ziga qo`shma operatorlar.

Isboti. $g=\frac{1}{2}(f+f^*)$, $h=\frac{1}{2i}(f-f^*)$ deb olsak $f=g+ih$ bo`ladi va

$g^*=\frac{1}{2}(f+f^*)^*=\frac{1}{2}(f^*+f)=g$, $h^*=-\frac{1}{2i}(f^*-f)=\frac{1}{2i}(f-f^*)=h$. Teorema isbot bo`ldi.

Chiziqli operatorning o`z-o`ziga qo`shmaligi $\varphi(x,y)=(f(x),y)$ formaning Ermitligiga teng kuchli. Haqiqatdan ham $f=f^*$ bo`lsa $\varphi(y,x)=(f(y),x)=(y,f^*(x))=(y,f(x))=\left(\overline{f(x),y}\right)=\overline{\varphi(x,y)}$, aksincha agar $\overline{\varphi(x,y)}=\varphi(y,x)$, ya`ni $\varphi$ Ermit formasi bo`lsa , u holda $\overline{\varphi(x,y)}=\overline{(f(x),y)}=\left(\overline{x,f^*(y)}\right)=(f^*(y),x)=\varphi(y,x)=(f(y),x)$, lardan $(f^*(y),x)=(f(y),x)$, ya`ni $f^*=f$ kelib chiqadi.

Agar f chiziqli operator uchun $e_1,e_2,\ldots e_n$- uning hos vektorlaridan tuzilgan bazis bo`lsa ,u holda $\varphi(e_i, e_i)=(f(e_i), e_k)=(\lambda_i, e_i,e_k) = \lambda_i(e_i, e_k)=$
$\lambda_i\cdot\delta_{ik}=\begin{cases}\lambda_k, i=k\\ 0\, agarda\ i\neq k\ bo`lsa\end{cases}$

Shunday qilib ,bu bazis $\varphi(x,y)$ uchun kanonik bazis.
Ikkinci tomondan esa chekli o`lchamli unitar $L$ fazodagi har qanday bichiziqli $\varphi(x,y)$ forma $(f(x),y)$ ko`rinishda ifodalanadi. Bunda f operatorning matrisasi $\varphi(x,y)$ matrisasining transponirlanganiga teng bo`ladi. Shunday qilib quyidagi tasdiq isbotlandi.

3-teorema. Chekli o`lchamli L fazoda har qanday Ermit bichiziqli formasi uchun ortonormal kanonik bazis mavjud.

Natija. Agar chekli o`lchamli kompleks $L$ fazoda ikkita Ermit $\varphi(x,y)$ va $\psi(x,y)$ formalar berilgan va ularning biri musbat bo`lsa , u holda ular L da umumiy kanonik bazisga ega.

Isboti. Aniqlik uchun $\psi(x,y)>0$ bo`lsin . U holda $L$ da $(x,y)=\psi(x,y)$ tenglik yordamida skalyar ko`paytmani kiritamiz. 3-teoremaga asosan L da $\varphi(x,y)$ uchun ortonormal kanonik bazis mavjud . Bu *bazis* $\psi(x,y)$ uchun ham kanonik bazis bo`ladi, chunki:

$$\psi(e_i,e_k)=(e_i,e_k)=\begin{cases}\lambda_k, & agarda\quad i=k\quad bo`lsa\\ 0, & agarda\ i\neq k\ bo`lsa\end{cases}$$

Musbat operatorlar. Agar chekli o`lchamli unitar $L$ fazodagi chiziqli $f$ operator uchun $f=g\cdot g^*$ tenglikni qanoatlantiruvchi maxsusmas $g$ operator mavjud bo`lsa ,f operatorga *musbat operator* deb ataladi.

Tushunarliki f ham maxsusmas va $\forall x\in L$ uchun $(x\neq\bar{0})$
$(f(x),x)=(g\cdot g^*(x),x)=(g^*(x),g^*(x))>0$ bo`ladi. Endi ushbu teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Chekli o`lchamli unitar fazoda berilgan $f$ chiziqli operatorning musbat bo`lishi uchun uning normal va barcha hos sonlarining musbat bo`lishi zarur va kifoya.

*Isboti.*1) f –chiziqli operator musbat $f=g\cdot g^*$ bo`lsin . U holda $f^*=(g\cdot g^*)^*=g^{**}\cdot g^*=g\cdot g^*=f$ , ya`ni f o`z-o`ziga qo`shma. Ilgarigi mavzudagi 1-teoremaga asosan u normal bo`ladi. Agar λ f ning hos soni bo`lsa $f(e)=\lambda e$ *dan* $(f(e),e)=(\lambda e,e)=\lambda(e,e)$. Bundan $\lambda=\dfrac{(f(e),e)}{(e,e)}>0$ kelib chiqadi.

Aksincha, f normal va barcha hos sonlari musbat bo`lsin , u holda biror ortonormal bazisda matrisasi $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ko`rinishga ega. Bundan $A=B\cdot B^*=B^2$.

$$B=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Shunday qilib $f=g\cdot g^* =g^2$, bu yerda g-matrisasi B bo`lgan chiziqli operator . Teoremani isbotlash davomida biz har qanday musbat $f$ operator biror $g$ musbat operatorning kvadratiga teng ekanligini ko`rsatdik.

Lemma. Agar φ normal operator bo`lsa , u holda $\varphi$ va $\varphi^*$ operatorlar umimiy hos vektor $e$ ega va $|e|=1$, $Ae= \lambda e$ ,$A^*e=\bar{\lambda} e$ bo`ladi.

Isboti . λ φ nin g hos soni bo`lsin. $R_\lambda$ esa $L$ ning $\varphi x-\lambda x=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementlari to`plami , yani $R_\lambda=yadro(\varphi-\lambda I)$ bo`lsin. Agar $x\in R_\lambda$ bo`lsa $\varphi^*(x) \in R_\lambda$ bo`lishini ko`rsataamiz. $\varphi(\varphi^* x) = \varphi^*(\varphi x) = \varphi^*(\lambda x) = \lambda\varphi^*(x)$, ya`ni $\varphi^*(x) ham \varphi$ ning $\lambda$ hos soniga mos keluvchi hos vektor , $\varphi^*(x)\in R_\lambda$. Demak $R_\lambda$ $\varphi^*$ ga nisbatan integral qism fazo . Endi $\varphi^*$ $R_\lambda$ ni $R_\lambda$ ga o`tkazuvchi operator sifatida qarasak $\varphi^*(e)=\mu e$ tenglikni qanoatlantiruvchi e $(|e| =1)$ mavjud deya olamiz. R_λ ni φning λ ga mos keluvchi hos vektorlardan iborat bo`lgani uchun $\varphi(e)= \lambda e$ bo`ladi.Shunday qilib e vektor φ va φ^* larning umumiy hos vektori.

Endi $(\varphi(e),e)=(\lambda e,e)= \lambda(e,e)$ *va* $(\varphi(e),e)=(e, \varphi^*(e))=(e,\mu e)= \bar{\mu}(e,e)$ lardan $\mu=\bar{\lambda}$ kelib chiqadi.

Unitar operator . Agar f chiziqli operator uchun $f\bullet f^*=f^*f=E$ tenglik o`rinli bo`lsa f ga unitar operator deb ataladi.Demak $f^{-1}=f^*$.

*1-teorema.*Chekli o`lchamli unitary L chiziqli fazoda aniqlangan f chiziqli operatorning unitar bo`lishi uning skalyar ko`paytmani saqlashi ,ya`ni

$$\forall x,y\in L \text{ uchun } (f(x),f(y))=(x,y) \qquad (1)$$

tenglikning o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.

Isboti. 1) f^{-1}=va $f^{-1}=f^*$ bo`lsin .U holda $(f(x),f(y))=(x,f^*f(y))=(x,e(y))=(x,y)$.

2) Agar f uchun (1) munosabat o`rinli bo`lsa u holda f uchun qo`shmasi $f^*$ mavjud ,va (1) asosan $(f(x),F(y))=(x,f^*f(y))=(x,y)$ ,ya`ni $f^*\bullet f=E$-birlik operator . Matrisasiga o`tsak $A^*\cdot A=E$ ,ya`ni $A^*=A^{-1}$ .demak f^{-1} mavjud.

2-teorema. Chekli o`lchamli L unitar fazodagi f chiziqli operatorning unitary bo`lishi uchun uning normal va barcha hos sonlarining moduli 1 ga teng bo`lishi zarur va yetarli.

*Isboti.*Agar f unitary bo`lsa ,ta`rifga ko`ra $f\cdot f^*=f^*\cdot f=E$, ya`ni u normal. Shuning uchun biror ortonormal bazisda f va f^* lar mos ravishda

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}, \qquad A^*=\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \bar\lambda_2 & \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & \bar\lambda_n\end{pmatrix}$$

matrisalar bilan beriladi..Bundan

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2 & 0 & 0\\ 0 & |\lambda_2|^2 & 0\\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ 0 & 0 & |\lambda_n|^2\end{pmatrix}=E \text{ , yoki } |\lambda_k|=1, \ (k=1,2,\dots.n)$$

Aksincha ,agar $f\cdot f^*=f^*\cdot f$ va f ning barcha λ_k hos sonlarining moduli birga teng bo`lsa ,u holda biror ortonormal bazis uchun $A\cdot A^*=A^*\cdot A=E$ tenglik o`rinli bo`ladi.Bundan $f\cdot f^*=f^*\cdot f=\varepsilon$ ,ya`ni $f^{-1}=f^*$.

Har qanday unitary operator ixtiyoriy ortonormal bazisni ortonormal bazisga aks ettiradi.

$$(f(e_i),f(e_j))=(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & agar\ \ i=j\ bo`lsa\\ 0, & agar\ \ i\neq j\ bo`lsa\end{cases}.$$

Agar chekli o`lchamli unitar fazoda aniqlangan f operator biror ortonormal bazisni ortonormal bazisga aks ettirsa ,u holda f unitar operator bo`ladi.

Haqiqatan ham ,lagar $e_1,e_2\dots e_n$ -berilgan ortonormal bazis bo`lsa

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \ \ va \quad y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k \qquad \text{bo`lsa}$$

$$(f(x),f(y))=\sum_{i,k=1}^{n}\xi_i\bar\eta_k\,(f(e_i),f(e_k))=\sum_{i,k=1}^{n}\xi_i\bar\eta_k\,(e_i,e_k)=(x,y)\ .$$

Demak 1-teoremaga ko`ra f unitar operator. Ma`lumki har qanday unitary operatorning ortonormal bazisdagi A matrisasi $A\cdot A^*=A^*\cdot A=E$ tenglikni qanoatlantiradi. Bu tenglikni qanoatla;ntiruvchi A matrisaga *unitary matrisa* deyiladi. Bu tenglik A unitary matrisaning satr va ustunlar sistemasiga C^n dagi vektorlar deb qarasak , ular bu fazoda ortonormal tizimni hosil qilishini ko`rsatadi.

Maxsusmas operatorning trigonometrik ifodasi.

Teorema. Chekli o`lchamli unitary fazodagi har qanday maxsusmas f chiziqli operator uchun shunday musbat g_1,g_2 operatorlar va h_1,h_2 unitar operator mavjudki $f=g_1h_1=g_2h_2$ bajariladi.

Isboti. F maxsusmas operator uchun $t_1=f\cdot f^*$ musbat operator bo`ladi .U holda u biror $g_1$ musbat operatorning kvadratiga teng bo`ladi:

$f\cdot f^*=g_1^2$.Ushbu $h_1=g^{-1}_1\cdot f$ operatorning unitary ekanligi isbotlaymiz.Haqiqatan ham $h_1^*=(g^{-1}_1\cdot f)^*=f^*\cdot(g^{-1}_1)^*=f^*\cdot g^{-1}_1$.

Bunda asosan $h_1\cdot h_1^*=g^{-1}_1 f\cdot f^* g^{-1}_1=g_1^{-1}\cdot g^2_1\cdot g^{-1}_1=(g^{-1}_1 g_1)(g_1 g_1^{-1})=\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon$,shuningdek $h_1^*\cdot h_1=f^* g^{-1}_1\, g^{-1}_1 f=f^*(g_1^{-1})^2 f=f^* t_1^{-1} f=f^*(f^*)^{-1} f^{--1}\cdot f=\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon$.

Sunday qilib f= g_1h_1. Shung a o`hshash $t_2$=f*·f=$g^2{}_2$d eb olib f=$h_2$g ifoda isbotlandi. Maxsusmas operator uchun olingan ifoda noldan farqli kompleks sonning trigonometrik ifodasiga ,ya`ni musbat sonning va moduli 1 ga teng bo`lga n sonlarning ko`paytmasi shaklida ifodalashga o`hshash.

Mavzu: Unitar fazolardagi chiziqli operatorlar.

Reja;

1. Berilgan operatorga qo'shma operator.
2. Qo'shma operatorning asosiy xossalari.
3. Normal operatorlar.
4. Misollar.

Adabiyotlar [1], [2]

L unitar fazo va φ, g; $L \to L$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar har qanday $x, y \in L$ uchun

$$(\varphi(x); y) = (x, g(y)) \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, g *operator* φ *ga qo'shma* deb ataladi.

Agar φ operator uchun qo'shma operator mavjud bo'lsa, u yagona. Haqiqatan ham g va h lar φ ga qo'shma operatorlar bo'lsin. U holda (1) bilan birga har qanday $x, y \in L$ lar uchun

$$(\varphi(x), y) = (x, h(y)) \qquad (2)$$

bajariladi. (1) va (2) dan $(x, g(y)) - (x, h(y)) = (x; g(y) - h(y)) = 0$ tenglikning barcha $x, y \in L$ lar uchun bajarilishi kelib chiqadi. Xususiy holda $x = g(y) - h(y)$ bo'lganda ham bu tenglik bajarilishi kerak ya'ni $(g(y) - h(y); g(y) - h(y)\ ) = O$ Bundan $g(y) - h(y) = 0 \quad \forall y \in L$. Demak $g = h.$ Bundan keyin biz φ ga qo'shma operatorni $\varphi *$ bilan belgilaymiz.

$\varphi *$ operator quyidagi xossalarga ega;

$1^0 (\varphi *)* = \varphi$ (ya'ni qo'shma operatorga qo'shma bo'lgan operator dastlabki operatorning o'ziga teng).

Haqiqatan ham $\left(\varphi^*(x), y\right) = \overline{\left(y, \varphi^*(x)\right)} = \overline{(\varphi(y), x)} = (x, \varphi(y)),$ ya'ni $\left(\varphi^*(x), y\right) = (x, \varphi(y)).$ Bundan esa ta'rifga ko'ra $\varphi *$ ning qo'shmasi φ ga tengligi kelib chiqadi.

2^0 $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$ (operatorlar yig'indisining qo'shmasi shu operatorlar qo'shmalarining yig'indisiga teng).

Haqiqatan ham, $(\varphi(x) + \psi(x); y) = (\varphi(x); y) + (\psi(x); y) = \left(x; \varphi^*(y)\right) + \left(x, \psi^*(y)\right) = \left(x; \varphi^*(y) + \psi^*(y)\right).$

3^0 $\forall \lambda \in C^*$ uchun $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$.Bu xossaning o'rinli ekanligi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi; $(\lambda\varphi(x), y) = \lambda(\varphi(x), y) = \lambda\left(x, \varphi^*(y)\right) = \left(x\bar{\lambda}\varphi^*(y)\right)$

4^0 $(\varphi \cdot \psi)^* = \psi^* \cdot \varphi^*$.

Haqiqatan ham $(\varphi\psi(x), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) = (x, \psi^*\varphi^*(y))$.

5^0. Agar φ chiziqli operatorning teskarisi mavjud bo'lsa, φ^* ning ham teskarisi mavjud va $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

Haqiqatan ham φ ning teskarisi φ^{-1} mavjud bo'lsin, u holda

$$(\varphi^{-1})^* \cdot \varphi^* = (\varphi \cdot \varphi^{-1})^* = e^* = e,$$

chunki $(e(x), y) = (x, e^*(y)) = (x, y)$.

Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Chekli o'lchamli unitar fazoda har qanday chiziqli operator f uchun qo'shmasi f^* mavjud. Agar $A = (\alpha_{ik})$ va $A^* = (\beta_{ik})$ lar f va f^* larning o'rta normal bazisdagi matrisalari bo'lsalar, u holda $\beta_{ik} = \overline{a_{ki}}$ bo'ladi.

Isboti. A f chiziqli operatorning $e_1, e_2 ..., e_n$ ortonormal bazisdagi matrisasi bo'lsin. U holda $f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i$ deb yoza olamiz. Bu bazisda A^* matrisaga ega bo'lgan chiziqli operatorni g bilan belgilaymiz' u holda

$$g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_{ki} e_i .$$

Endi $\varphi(x, y) = (f(x), y)$ va $\psi(x, y) = (x, g(y))$ bichiziqli formalarni qaraymiz. Har bir $k = \overline{1, n}$ va $l = \overline{1, n}$ uchun

$$\varphi(e_k, e_l) = (f(e_k), e_l) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, e_l \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} (e_i, e_l) = \alpha_{ek},$$

$$\psi(e_k, e_l) = (e_k, g(e_l)) = \left(e_k, \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}_{ie} (e_k, e_i) = \overline{\beta}_{ke} = \alpha_{ek}$$

, tengliklardan $\varphi(x,.y) = \psi(x, y)$, ya'ni $\forall x, y \in L$ $(f(x), y) = (x, g(y))$ ni hosil qilamiz.

Bundan esa $g = f^*$ kelib chiqadi.

*Normal operatorlar***.** Agar chiziqli $\varphi : L \to L$ operator uchun $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$ bo'lsa φ ga *normal operator* deb ataladi.

Agar φ normal operator bo'lsa, φ va φ^* lar umumiy xos vektor e ga ega bo'ladi unga mos keluvchi xos sonlar λ, μ lar qo'shma kompleks sonlardir.

Haqiqatan ham $\varphi(e) = \lambda e$ bo'lsin $\varphi^* e = \overline{\lambda} e$ ekanligini ko'rsatamiz.

$\varphi(e) = \lambda e$ dan $(\varphi - \lambda\varepsilon)e = 0$ yoki

$$0 = ((\varphi - \lambda\varepsilon)e, (\varphi - \lambda\varepsilon)e) = (e, (\varphi - \lambda\varepsilon)^* (\varphi - \lambda\varepsilon)e) = (e, (\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)(\varphi - \lambda\varepsilon)e) =$$
$$= (e, (\varphi - \lambda\varepsilon)(\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)e) = ((\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)e; (\varphi^* - \lambda\varepsilon)e).$$

Demak $(\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)e = 0$, yoki $\varphi^* e = \overline{\lambda} e$

Endi ushbu teoremani isbotlaymiz

Teorema. Chekli o'lchamli unitar L fazodagi f chiziqli operator uchun xos vektorlardan iborat ortonormal bazis mavjud bo'lishi uchun uning normal bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. Zaruriyligi. f chiiziqli operator uchun $e_1, e_2, ..., e_n$ uning xos vektorlaridan tuzilgan ortanormal bazis va $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ularga mos xos sonlar bo'lsin. f ning normal ekanligini ko'rsatamiz.

f bu bazisda A=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ matrisaga, f^* esa A=$\begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$

matrisa bilan beriladi.

$A \cdot A^* = A^* \cdot A$ bo'lgani uchun $f \cdot f^* = f^* \cdot f$, ya'ni f normal chiziqli operator.

Yetarli ekanligi. Tasdiqni L unitar fazoning o'lchami $n = \dim L$ bo'yicha matematik induksiya metodini qo'llab isbotlaymiz. n=1 da teorema o'rinli. n>1 bo'lsin yuqorida isbotlanganiga asosan f va f^* lar umumiy xos vektorga e_n $(|e_n| = 1)$ ega. $L^1 = \{x \in L / (x, e_n) = 0\}$ bo'lsin. U holda $\dim L^1 = n - 1$ bo'ladi. L^1 fazo f va f^* larga nisbatan invariant. Haqiqatan ham, agar $(x, e_n) = 0$ bo'lsa, u holda

$$(f(x), e_n) = (x, f^*(e_n)) = (x, \overline{\lambda}_n e_n) = \lambda_n (x, e_n) = 0$$

va

$$(f^*(x), e_n) = (x, f(e_n)) = (x, \lambda_n e_n) = \overline{\lambda}_n (x, e_n) = 0 \ .$$

Induktivlik farazimizga ko'ra L^1 da f operatorning xos vekktorlaridan tuzilgan $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ ortonormal bazis mavjud. U holda $e_1, e_2, ..., e_{n-1}\ e_n$ vektorlar sistemasi L da f ning xos vektorlaridan tuzilgan ortonormal bazis bo'ladi.

<u>Misol.</u> 1541. Agar e_1, e_2 tekislikning ortonormal bazisi bo'lib φ akslantirish $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ bazisda $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan shu f_1, f_2 bazisda φ^*ning matrisasini toping. $A^* = \Gamma^{-1} A^1 \Gamma$, $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Mavzu: MATRISALI KO`PHADLAR.

Reja:

1. Matrisali ko`phad tushunchasi. Tartibi va darajasi, juqori koeffisienti.
2. λ-matrisalar halqasidagi qoldiqli bo`lish haqidagi teorema.
3. Gamilton-Keli teoremasi.
4. λ-matrisalarning unimodulyarlik sharti.

Adabiyotlar [1] 240-243 betlar [2], [3].

*Matrisali ko`phad* deb, $\lambda$-kompleks o`zgaruvchili shunday $A(\lambda)$ funksiyaga aytiladiki uning qiymatlari C maydon ustidagi n-tartibli kvadrat matrisalar bo`lib, u

$$A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m \qquad (1)$$

ko`rinishga ega, bunda $A_0, A_1, + \ldots + A_m$ lar n-tartibli kvadrat matrisalar.
Ta'rifdagi *n*-soni matrisali *ko`phadning tartibi* deyiladi. Agar $A_m \neq 0$ bo`lsa, m soni matrisali ko*`phadning darajasi,* A_m esa *yuqori koeffitsenti* deyiladi.

Matrisalar ustidagi amallarning xossalaridan foydalanib, har qanday matrisali ko`phadni *n*-tartibli matrisa:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) \ldots a_{1n}(\lambda) \\ ---------- \\ a_{n1}(\lambda) \ldots a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bu matrisaning elementlari $a_{ij}(\lambda)$ lar $\lambda$ o`zgaruvchining kompleks koeffitsentli ko`phadlaridan iborat. Bunday matrisalarga λ*-matrisalar* deb ataladi.

λ-matrisalar (1) ko`phaddagi $A_0, A_1, \ldots A_m$ matrisalar bilan bir qiymatli aniqlanadi. Xususan $\forall \lambda \in C$ uchun $A(\lambda)$ nol matrisa bo`lishi uchun barcha $A_0, A_1, \ldots A_m$ koeffitsentlarning nol matrisa bo`lishi zarur va kifoyadir.

Agar $A(\lambda)$ noldan farqli matrisa bo`lsa, u holda $A(\lambda)$ ga noldan farqli koeffitsent bilan kiruvchi $\lambda$ ning eng yuqori darajasi $A(\lambda)$ matrisali ko`phadning darajasi bo`ladi. Tushunarliki, $A(\lambda)$ ning darajasi uning (2) ifodasidagi $a_{ik}(\lambda)(i, k = \overline{1, n})$ ko`phadlarning darajalarining eng kattasiga teng. Bundan keyin barcha n-tartibli λ matrisalar to`plamini $C^{nxn}[\lambda]$ orqali belgilaymiz.

Matrisali ko`phadlarning (2) yozuvidan foydalanib ularning yig`indisi va ko`paytmasini matrisalarning yig`indisi va ko`paytmasi orqali kiritish mumkin. Bu amallar $C^{nxn}[\lambda]$ to`plamni halqaga aylantiradi (halqa aksiomalarining bajarilishini tekshirib ko`ring). Bu halqada birlik element rolini birlik matrisa o`taydi. Agarda $n \geq 2$ bo`lsa bu halqa kommutativ emas va nolning bo`luvchilariga ega. (tekshirib ko`ring).

$C^{nxn}[\lambda]$ halqada qoldiqli bo`lish haqidagi quyidagi teorema o`rinli.

1-teorema. Agar $A(\lambda), B(\lambda)$-tartibi n ga teng matrisali ko`phadlar, $B(\lambda)$-noldan farqli va uning yuqori koeffisenti maxsusmas bo`lsin. U holda n-tartibli shunday $Q_1(\lambda), R_1(\lambda), Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ matrisali ko`phadlar mavjudki $A(\lambda) = Q_1(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda)Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$ tengliklar o`rinli bo`ladi. Bunda, agar $R_1(\lambda)$ va $R_2(\lambda)$ matrisali ko`phadlar noldan farqli bo`lsa, u holda ularning darajasi $B(\lambda)$ ning darajasidan kichik bo`ladi.

Isboti. Agar $A(\lambda)$ nol yoki darajasi $B(\lambda)$ nikidan kichik ko`phad bo`lsa $Q_1(\lambda) = Q_2(\lambda) = 0, \quad R_1(\lambda) = R_2(\lambda) = A(\lambda)$ deb olinsa, teorema isbot bo`ladi.

Endi dar. $A(\lambda) = m,$ dar. $B(\lambda) = k \ \ va \ \ m \geq k$ bo`lsin. U holda teoremani nol ko`phadlar yoki dar.<m ko`phadlar uchun isbotlangan deb faraz qilamiz. $A(\lambda)$ va $B(\lambda)$ ko`phadlarni λ ning darajalarining kamayib borish tartibida yozib olamiz:
$A(\lambda) = A\lambda^m + \ldots, \qquad B(\lambda) = B\lambda^k + \ldots.$

Bunga ko`ra $A_1(\lambda)=A(\lambda)-AB^{-1}B(\lambda)\lambda^{m-k}$ ko`phad yoki nol yoki uning dar<m bo`ladi. U holda induktivlik farazimizga ko`ra

$A_1(\lambda)=Q_0(\lambda)B(\lambda)+R_1(\lambda)$, (bunda $R_1(\lambda)=0$ yoki dar. $R_1(\lambda)<k$) tenilik o'rinli.

Shunday qilib

$A(\lambda)=A_1(\lambda)+AB^{-1}B(\lambda)\lambda^{m-k}=(Q_0(\lambda)+AB^{-1}\lambda^{m-n}).B(\lambda)+R_1(\lambda)=Q_1(\lambda)B(\lambda)+R_1(\lambda)$

ga ega bo`lamiz. Bu yerda $Q_1(\lambda)=Q_0(\lambda)+AB^{-1}\lambda^{m-k}$. $Q_2(\lambda)$ *va* $R_2(\lambda)$ ko`phadlarning mavjudligi ham shunga o`xshash isbotlanadi (mustaqil tekshirib ko`ring).

Endi $A(\lambda)=A_0+A_1\lambda+\ldots+A_m\lambda^m-n$-tartibli matrisali ko`phad, X esa n-tartibli kompleks matrisa bo`lsin. $A(\lambda)$ *da* λ ning o`rniga X ni qo`yib barcha amallarni bajarish natijasida hosil bo`lgan matrisa $A(X)=A_0+A_1X+\ldots+A_mX^m$ *ga* $A(\lambda)$ *ko`phadning X matrisadagi qiymati* deb ataladi.

Tushunarliki agar $A(\lambda)=B(\lambda)+C(\lambda)$ bo`lsa, u holda $\forall X\in C^{nxn}$ matrisa uchun $A(X)=B(X)+C(X)$ bo`ladi. Lekin $A(\lambda)=B(\lambda)\cdot C(\lambda)$ tenglikdan hamma vaqt ham $A(X)=B(X)\cdot C(X)$ kelib chiqavermaydi.

Buning sababi shuki $B(\lambda)$ va $C(\lambda)$ matrisalar ko`paytirilganda $\lambda$ o`zgaruvchi bu ko`phadlarning koeffitsentlari bo`lgan matrisalar bilan o`rin almashtirish xossasiga ega, ammo X matrisa esa bunday xossaga ega bo`lmasligi mumkin. Agarda X matrisa $C(\lambda)$ ko`phadning matrisalardan iborat koeffitsentlari bilan o`rin almashinuvchi bo`lsa, u holda $A(\lambda)=B(\lambda)\cdot C(\lambda)$ dan $A(X)=B(X)\cdot C(X)$ kelib chiqadi.

Ushbu izohdan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

2-teorema. (Gamilton-Keli) . Agar A matrisaning xarakteristik ko`phadi $\varphi(\lambda)$ bo`lsa, u holda $\varphi(A)=0$ bo`ladi (bu yerda $\varphi(A)$ deb $\varphi(\lambda)E$ matrisali ko`phadning A matrisadagi qiymati tushuniladi).

Isboti. $B(\lambda)$ orqali $\left(A_{ik}(\lambda)\right)^T$ matrisani belgilaymiz, bunda $A_{ik}(\lambda)$ orqali $A-\lambda E$ matrisadagi mos elementning algebraik to`ldiruvchisi belgilangan. U holda determinantlar nazariyasidan ma'lumki

$$\varphi(\lambda)E=B(\lambda)(A-\lambda E)$$

deb yoza olamiz. Bundan $\varphi(A)E=B(A)(\lambda-AE)=0.$ $C^{nxn}[\lambda]$ halqada teskarisi mavjud bo`lgan elementlar *unimodulyap* λ*-matrisalar deb* ataladi.

3-teorema. λ-matrisa unimodulyar bo`lishi uchun uning determinanti o`zgarmas (ya'ni λ ga bog`liq emas) bo`lishi zarur va yetarli.

Isboti. Agar $A(\lambda)$ matrisa unimodulyar bo`lsa ta'rifga asosan shunday $\lambda$ matrisa $B(\lambda)$ mavjudki $A(\lambda)\cdot B(\lambda)=B(\lambda)\cdot A(\lambda)=E$ bo`ladi. Bundan $\det A(\lambda)\cdot\det B(\lambda)=1$. Demak $\det A(\lambda)\neq 0$ va $\det A(\lambda)$ o`zgarmas son.

Aksincha agar $\det A(\lambda)=\Delta\neq 0$ (noldan farqli son bo`lsa va $A(\lambda)=(a_{ik}(\lambda))$ bo`lsa, u holda $B(\lambda)=\left(\beta_{ik}(\lambda)\right)$ *da* $\beta_{ik}=\dfrac{1}{\Delta}A_{ki}(\lambda)$ deb olamiz, bu yerda $A_{ki}(\lambda)$ bilan

$A(\lambda)$ matrisadagi a_{ki} elementning algebraik to`ldiruvchisi belgilangan. U holda $A(\lambda)\cdot B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$ bo`ladi.

Mavzu: Kanonik λ-matritsalar.

Reja:

1. Tarifi, xossalari.
2. λ-matritsalarning elementar almashtirishlari;
3. Har qanday λ-matritsaning biror kanonik λ-matritsaga ekvivalentligi.

Adabiyotlar. [1,2,3]

1.Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi λ-matritsaga *kanonik λ-matritsa* deyiladi:
1) u dioganal matritsa bo`lishi kerak;
2) dioganalda dastlab noldan farqli ko`phadlar keyin esa nollar (ular bo`lsa) joylashgan bo`lishi kerak:
3) noldan farqli har qanday ko`phadning yuqori koeffisienti 1ga teng bo`lishi kerak;
4) noldan farqli har bir keyingi ko`phad oldingisiga bo`linishi kerak:

Bundan keyin biz G' sonli maydonda aniqlangan λ-matritsalarni qaraymiz, yani koeffisientlari F maydon ustidagi n-tartibli matritsalar bo`lgan λ-matritsalarni qaraymiz.

Kanonik λ-matritsaning ko`rinishini

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \bigcirc \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

deb yozish mumkin.

$e_{k-1}(\lambda)\setminus e_k(\lambda)$ va $e_i(\lambda)\neq 0$ bo`lsa yuqori koeffitsienti 1 ga teng. Xususiy holda birlik va nol matritsalar ham kanonik $\lambda$-matritsaga misol bo`ladi.
Boshqa misollarni biroz keyin qaraymiz.

2.Quyidagi almashtirishlarga *λ-matritsalarning elementar almashtirishlari* deb ataladi:
1) λ-matritsaning biror satrini (ustunini) noldan farqli songa ko`paytirish (bunday almashtirishlar 1-tur elementar almashtirishlar deyiladi);
2) λ-matritsaning biror satrini (ustunini) $F[\lambda]$ halqadan olingan ko`phadga ko`paytirib, boshqa satriga (ustuniga) qo`shish.

Ta'rif. Ikkita λ-matritsadan birini 2-chisidan chekli marta elementar almashtirishlarni qo`llab hosil qilish mumkin bo`lsa ularni *ekvivalent λ-matritsalar* deyiladi.
Ekvivalentlik tushunchasi refleksivlik, simmetriklik va transitivlik xossalariga ega.

3. *Teorema.* Har qanday λ-matritsa biror kanonik λ-matritsaga ekvivalent.

Isboti. Nol matritsa kanonik bo`lgani uchun uning uchun teorema o`rinili. G'araz etaylik $A(\lambda)\neq 0$ bo`lsin. Teoremani $\lambda$-matritsaning tartibi bo`yicha induktsiya yordamida isbotlaymiz.

$n=1$ da $A(\lambda)$ matritsa bitta elementdan iborat bo`ladi $A(\lambda)=(a(\lambda))$,
$a(\lambda)=a_0+a_1\lambda+.....+a_m\lambda^m,\ a_0,a_1,....,a_m\in F,\ a_m\neq 0.$ $A(\lambda)$ a_m^{-1} ra ko`paytirib yuqori koefftsientli 1 ga teng bo`lgan ko`phadga keltiramiz. Bu bilan $A(\lambda)$ kanonik ko`rinishga ega bo`ladi.

Endi faraz etaylik tartibi $\leq n-1$ bo`lgan $\lambda$-matritsalar uchun o`rinli bo`lsin. Tartibi n bo`lgan $A(\lambda)$ matritsani va unga ekvivalent bo`lgan barcha $\lambda$-matritsalarni olamiz. Bundan $\lambda$-matritsalarning elementlari ichida darajasi eng kichik va yuqori koefftsienti 1 bo`lganini $\mathrm{E}_1(\lambda)$ orqali belgilaymiz. Bu $\mathrm{E}_1(\lambda)$ element kirgan λ-matritsada bu elementni satrlarning va ustunlarning transpozitsiyasi orqali matritsaning chap burchagiga o`tkazib olamiz.
U holda

$$A(\lambda)\approx\begin{pmatrix}\varepsilon_1(\lambda) & a_{12}(\lambda)......a_{1n}(\lambda)\\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda).....a_{2n}(\lambda)\\ \multicolumn{2}{l}{.............................}\\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda)......a_{nn}(\lambda)\end{pmatrix}$$

bo`ladi. Bu matritsaning 1-satri va 1-ustunidagi barcha elementlarning $\varepsilon_1(\lambda)$ ga bo`linishini ko`rsatamiz. Haqiqatan
$a_{1k}(\lambda)=g(\lambda)\varepsilon_1(\lambda)+r(\lambda),\ dar.r(\lambda)<dar.\varepsilon_1(\lambda)$ bo`lsin. U holda 1-ustunni $(-g(\lambda))$ ga ko`paytirib k-ustuniga qo`shamiz. Hosil bo`lgan matritsa $A(\lambda)$ ga ekvivalent bo`lib uning birinchi satrining k-ustunida $r(\lambda)$ turadi. Bu matritsaning 1-satrini $r(\lambda)$ yuqori koefftsientiga bo`lamiz. Buning natijasida shunday $A(\lambda)$ ga ekvivalent bo`lgan matritsaga kelamiz uning 1-satri k-ustinida darajasi $\varepsilon_1(\lambda)$ ning darajasidan kichik va yuqori koeffitsienti 1ga teng $r(\lambda)$ ko`phad bo`ladi. Bu esa $\varepsilon_1(\lambda)$ ning tanlanishiga zid. Demak $r(\lambda)=0$.
Shunga o`xshash mulohazalarni 1-satr va 1-ustun elementlarining barchasi ustida bajarib, quyidagi λ-matritsaga kelamiz:

$$A(\lambda)\approx\begin{pmatrix}\varepsilon_1(\lambda) & 0\ ....\ 0\\ 0 & \beta_{22}(\lambda)\ldots\beta_{22}(\lambda)\\ \multicolumn{2}{l}{...........................}\\ 0 & \beta_{n2}(\lambda)\ ...\beta_{nn}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Induktuvlik farazimizga ko`ra

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\beta_{22}(\lambda)......\beta_{2n}(\lambda)\\ ....\\ \beta_{n2}(\lambda).......\beta_{nn}(\lambda)\end{pmatrix}$$

(n-1)-tartibli matritsa quyidagi kanonik λ-matritsaga ekvivalent

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\varepsilon_2(\lambda)\ \dots\ 0\\ \dots\dots\dots\dots\\ 0\ \dots\ \varepsilon_n(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Shuning uchun $A(\lambda)$ matritsa ustida faqat $B(\lambda)$ matritsaning satr va ustunlarini o`zgartiradigan shunday elementar almashtirishlarni bajaramizki, bunda $B(\lambda)$ kanonik ko`rinishga o`tsin:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}\varepsilon_1(\lambda) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_2(\lambda) & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Oxiriga λ-matritsaning kanonik ekanligini ko`rsatamiz. Buning uchun $\varepsilon_2(\lambda)$ning $\varepsilon_1(\lambda)$ ga bo`linishini ko`rsatish kifoya. $A(\lambda)$ning 1-satrini 2-satriga qo`shib

$$A(\lambda)\approx\begin{pmatrix}\varepsilon_1(\lambda) & \varepsilon_2(\lambda) & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_2(\lambda) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n(\lambda)\end{pmatrix}$$ ni hosil qilamiz. Yuqorida $a_{ik}(\lambda)$ning $\varepsilon_1(\lambda)$ ga bo`linishini ko`rsatgan usulda $\varepsilon_2(\lambda)$ning $\varepsilon_1(\lambda)$ga bo`linishi ko`rsatiladi.

Mavzu: Determinant bo`luvchilar va invariant ko`paytuvchilar.

Reja:

1. Determinant bo`luvchilar.
2. Invariant ko`paytuvchilar.
3. 1 va 2-tur elementar matritsalar.
4. O`xshashlik va ekvivalentlik.

Adabiyotlar [1] 247-251,betlar; [2],[3].

n-tartibli $A(\lambda)$ λ-matritsa va k-natural son $(1\le k\le n)$ berilgan bo`lsin.

Quyidagicha topiladigan $\delta_k(\lambda)$ ko`phadga $A(\lambda)$-matritsaning *k-tartibli detirminant bo`luvchisi* deb ataladi:

a) Agar $A(\lambda)$ ning barcha *k*-tartibli minorlari nolga teng bo`lsa $\delta_k(\lambda)$-nol ko`phad.

b) Agar $A(\lambda)$ ning *k*-tartibli minorlari $\neq 0$ bo`lsa, $\delta_k(\lambda)$ noldan farqli *k*-tartibli minorlarning eng katta umumiy unitar bo`luvchisiga teng.

Xususiy holda $\delta_1(\lambda)$ $A(\lambda)$-matritsaning elementlarining EKUB, $\delta_n(\lambda)$ esa $A(\lambda)$ matritsaning determinantini uning bosh hadi koeffitsientiga bo`lish natijasida hosil bo`lgan ko`phadga teng bo`ladi.

1-teorema. λ-matritsalarning determinant bo`luvchilari elementar almashtirishlarda o`zgarmaydi.

Isboti. Elementar almashtirishlarda *k*-tartibli minorlarning qanday o`zgarishini aniqlaymiz. Biz satrlarni elementar almashtirishni kuzatish bilan chegaralanamiz (ustunlarniki ham shunga o`xshash bo`ladi).

$A(\lambda)$ matritsaning biror satri holdan farqli songa ko`paytirilgan bo`lsin. U holda bu satr qatnashgan minorlar ham shu songa ko`paytiriladi, qolgan minorlar esa o`zgarmaydi. Bundan ko`rinadiki bu xil elementar almashtirishda $d_k(\lambda)$ o`zgarmaydi, chunki o`zgarmas ko`paytuvchi ko`phadlarning EKUB ni hisoblashga ta'sir qilmaydi.

Endi $A(\lambda)$ matritsaning j-satri $\varphi(\lambda)$ ko`phadga ko`paytirilib i-satriga qo`shilgan bo`lsin. Buning natijasida hosil bo`lgan $\lambda$-matritsa $\overline{A}(\lambda)$ bilan uning determinant bo`luvchisini esa $\overline{\delta}_k(\lambda)$ bilan belgilaylik.

$\delta_k(\lambda)=\overline{\delta}_k(\lambda)$ ekanligini ko`rsatamiz.

$A(\lambda)$ va $\overline{A}(\lambda)$ larning k-tartibli minorlarini quyidagicha 3-guruhga bo`lamiz. 1-guruhga i-satrni o`z ichiga olmagan k-tartibli minorlar ular $A(\lambda)$ va $\overline{A}(\lambda)$ da bir xil, teng. 2-guruhga i va j-satrlarning ikkalasini ham o`z ichiga olgan k-tartibli minorlar. Bular ham teng, chunki determinantda biror satr elementlarini biror ko`phadga ko`paytirib ikkinchi bir satriga qo`shsak uning qiymat o`zgarmaydi. 3-guruhga i-satrni o`z ichiga oluvchi lekin j-satrni oz ichiga olmaydigan k-tartibli minorlar. Bu minorlar

$$M=\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{i\alpha_1}(\lambda)\dots\dots\mu_{i\alpha_k}(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad \overline{M}=\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{i\alpha_1}(\lambda)+\mu_{j\alpha_1}(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)\dots\dots\mu_{i\alpha_k}(\lambda)+\mu_{j\alpha_k}(\lambda)\varphi(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

ko`rinishga ega bo`lib, bunda nuqtalar o`rnida yozilmagan satrlar M va $\overline{M}$ da bir xil. Detirminantlarning xossalariga ko`ra

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{i\alpha_1}(\lambda)\dots\dots\mu_{i\alpha_k}(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}+\varphi(\lambda)\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{j\alpha_1}(\lambda)\dots\dots\mu_{j\alpha_k}(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}=M+\varphi(\lambda)N.$$

Bu yerdagi N ham $A(\lambda)$ ning biror k-tartibli minori. $A(\lambda)$ ning barcha k-tartibli minorlari $\delta_k(\lambda)$ ga bo`linadi. Shuning uchun ham $\overline{M}$ ning ham barcha k-tartibli minorlari (Uchala guruhda ham) $\delta_k(\lambda)$ ga bo`linadi.

Shu jumladan $\delta_k(\lambda)\backslash\overline{\delta}_k(\lambda)$. Endi o`z navbatida $A(\lambda)$ ni ham $\overline{A}(\lambda)$ matritsadan (teskari almashtirish bilan) hosil qilish mumkin, u holda yuqoridagicha mulohaza yuritsak $\overline{\delta}_k(\lambda)\backslash\delta_k(\lambda)$ ga ega bo`lamiz. $\delta_k(\lambda)$ va $\overline{\delta}_k(\lambda)$ larning yuqori koeffisienti 1 ga teng bo`lgani uchun $\delta_k(\lambda)=\overline{\delta}_k(\lambda)$ hosil bo`ladi.

Biz yuqorida har qanday λ-matritsaning biror kanonik λ-matritsaga ekvivalent ekanligini ko`rgan edik. Endi 1-teoremadan foydalanib kanonik λ-matritsaning yagonaligini isbotlashimiz mumkin.

2-teorema. Har qanday λ-matritsa yagona kanonik λ-matritsaga ekvivalent.

Isboti. Berilgan $A(\lambda)$ matritsa ushbu

$$\overline{A(\lambda)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\lambda)\ldots\ldots.0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots\ldots\varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

kanonik λ-matritsaga ekvivalent bo`lsin. U holda 1-teoremaga asosan har qanday $k = 1,2.\ldots,n$ uchun $\delta_k(\lambda) = \overline{\delta}_k(\lambda)$ bo`ladi. $\overline{A}(\lambda)$ ning $\varepsilon_1(\lambda),\ldots..,\varepsilon_r(\lambda)$ elementlari $\neq 0$ va $\varepsilon_k(\lambda) = 0,\ k = r+1, r+2,\ldots\ldots,n$ bo`lsin. U holda $\delta_k(\lambda) = \overline{\delta}_k(\lambda) = 0$, $\left(k = \overline{r+1,n}\right)$ bo`ladi.

Kanonik λ-matritsaning tarifiga ko`ra bu matritsaning har qanday $k-(1 \le k \le r)$ tartibli minori ushbu $\varepsilon_1(\lambda)\cdot\varepsilon_2(\lambda)\ldots\varepsilon_k(\lambda)$ burchak minorga bo`linadi. Bunga asosan $\delta_k(\lambda) = \overline{\delta}_k(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda),\ldots..,\varepsilon_k(\lambda)$, $(k = 1,2.\ldots.,r)$ va $\delta_k(\lambda) \neq 0\ \left(k = \overline{1,r}\right)$. Endi $\delta_0(\lambda) = 1$ deb olib, ushbu munosabatlarga ega bo`lamiz:

$$\varepsilon_k(\lambda) = \frac{\delta_k(\lambda)}{\delta_{k-1}(\lambda)},\ \left(k = \overline{1,r}\right);\ \ \varepsilon_k(\lambda) = 0, \left(k = \overline{r+1,n}\right).$$

Demak $A(\lambda)$ ga ekvivalent bo`lgan $\overline{A}(\lambda)$ kanonik λ-matritsa $A(\lambda)$ bilan bir qiymatli aniqlanadi.

1. $A(\lambda)$ ga ekvivalent bo`lgan yagona kanonik $\lambda$-matritsaning diagonalidagi $\varepsilon_1(\lambda),\ldots,\varepsilon_k(\lambda)$ elementlari $A(\lambda)$ matritsaning *invariant ko`paytuvchilari* deb ataladi.

Invariant ko`paytuvchilarni hisoblash formulalari ko`pincha λ-matritsalarning ekvivalentlik masalasini oson yechishga imkon beradi.

Misol. 1) Ushbu

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

matritsani qaraylik. Buning birinchi tartibli minorlari o`zaro tub. Ikkinchi tartibli minor esa $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ ga teng. Demak $\delta_1(\lambda) = 1;\ \delta_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. $A(\lambda)$ invariant ko`paytuvchilari $\varepsilon_1(\lambda) = 1,\ \ \varepsilon_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Shuning uchun ham $A(\lambda)$ matritsa ushbu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{pmatrix}$ kanonik λ-matritsaga ekvivalent.

2) $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ elementar almashtirishlardan foydalanib kanonik ko`rinishga keltiring.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

3) $$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda^2+5\lambda & \lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\lambda^3-\frac{10}{3}\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix}.$$

$u(\lambda)$ n-tartibli unimodulyar matritsa bo`lsa uning determinanti $\neq 0$ songa teng bo`lgani uchun $\delta_n(\lambda)=\varepsilon_1(\lambda)\ldots\varepsilon_n(\lambda)=1$. Bundan $\varepsilon_1(\lambda)=\ldots=\varepsilon_n(\lambda)=1$ kelib chiqadi. Shunday qilib har qanday unimodulyar matritsa birlik matritsadan iborat kanonik matritsaga ekvivalent ekan.

Ta'rif. Bitta diagonal elementi $\nu \neq 0$ son qolgan elementlari esa birga teng: ko'rinishdagi matritsaga 1-tur elementar matritsa deb ataladi.

Barcha diagonal elementlari 1ga teng, bosh dioganaldan tashqarida yotuvchi elementlarning biriko'phad, qolganlari nolga teng
ko`rinishdagi λ-matritsaga *2-tur elementar matritsa* deb ataladi.

Tushunarliki barcha elementar λ-matritsalar unimodulyardir. $A(\lambda)$ ni $E_i(\gamma)$ ga chapdan (o`ngdan) ko`paytirsak $A(\lambda)$ ning *i*-satr elementlari (*i*-ustun elementlari) γ ga ko`paytiriladi. (1-tur elementar almashtirish).

Agarda $A(\lambda)$ ni chapdan (o`ngdan) $E_{ij}(\varphi(\lambda))$ ga ko`paytirsak $A(\lambda)$ ning *i*-satriga (ustuniga) *j*-satr (ustun) elementlari $\varphi(\lambda)$ ko`paytirib qo`shiladi (II-tur elementar almashtirish).

Bu yerdan unimodulyar matritsalarning ko`paytmasi ham unimodulyar bo`lgani uchun ekvivalent $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ λ-matritsalar mavjudki $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$ tenglik o`rinli bo`ladi. Shunday qilib quyidagi teoremani isbotladik.

3-teorema. 2 ta $A(\lambda)$ va $B(\lambda)$-matritsalarning ekvivalent bo`lishi uchun $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$ tenglikni qanoatlantiruvchi unimodulyar $U(\lambda)$ va $V(\lambda)$ matritsalarning mavjud bo`lishi zarur va yetarli.

Mavzu: Matritsaning normal Jordan formasi.

Reja:

1. Jordan katakchalari, jordan matritsasi.
2. Misollar.
3. Jordan matritsasining determinant bo'luvchilari, invariant ko'paytuvchilari.
4. Jordan λ-matritsa $(j-\lambda E)$nig rangi.
5. Jordan λ-matritsalarining ekvivalentligi.
6. Misollar.

Adabiyotlar [1,2,3,]

1. Jardon kataklari va matritsasi. Agar F maydon ustidagi kvadrat matritsaning diagonalidagi barcha elementlari o`zaro teng, har bir satrda diagonaldagi elementdan o`ng tomonda turgan element 1 ga teng va qolgan barcha elementlari nolga teng matritsaga *Jordan katagi* deb ataladi. Demak

$$J_k(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bu yerdagi α son *jordan kataginining xos soni* deb ataladi.

Xususiy holda $J_1(\alpha)=(\alpha)$, $J_2(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$

Agar F maydon ustidagi kvadrat matritsaning bosh diagonali birin-ketin joylashgan jordan kataklardan iborat va bu kataklardan tashqarida barcha elementlar nol bo`lsa bunday matritsaga *jordan matritsasi* deb ataladi.

Ta'rifga ko`ra jordan matritsasi o`zining jordan kataklari $J_{k_1}(\alpha_1), J_{k_2}(\alpha_2),\dots,J_{k_s}(\alpha_s)$ ketma-ketligi bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bu yerdagi $k_1,k_2,\dots,k_s$ va $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ sonlari turli bo`lishi shart emas. Xususiy holda diognal matritsani 1-tartibli jordan kataklaridan hosil qilingan matritsa deb qarash mumkin. Umumiy holda Jordan matritsasini

$$J=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\alpha_s) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ko`rinishda yozish munkin.

1-Teorema. $J_k(\alpha)-\lambda E$ matritsa uchun $\varepsilon_i(\lambda)=1$ $\left(i=\overline{1,k-1}\right)$ $\varepsilon_k(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k$, ya'ni u quyidagi kanonik λ matritsaga ekvivalent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda-\alpha)^k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Isboti. Ushbu

$$J_k(\alpha)-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \qquad (3)$$

matritsaning determinanti $(\alpha-\lambda)^k$ ga teng. Determinant bo`luvchi $\delta_k(\lambda)$ unitar bo'lgani uchun $\delta_k(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k$. Agar (3) ning 1-ustuni oxirgi satrini o`chirsak diagnalda 1-soni diagonalidan yuqorida nol bo`lgan $A_1(\lambda)$ matritsani olamiz. Demak, $\delta_{k-1}(\lambda)=1$. Bu matritsada bir xil satr va ustunlarni o`chirib $\delta_{k-2}(\lambda)=\ldots=\delta_1(\lambda)=1$ ni hosil qilamiz. Bulardan

$$\varepsilon_k(\lambda)=\frac{\delta_k(\lambda)}{\delta_{k-1}(\lambda)} \qquad \left(k=\overline{1,r}\right) \text{ ga ko`ra}$$

$$\varepsilon_i(\lambda)=1 \quad \left(i=\overline{1,k-1}\right),\ \varepsilon_k(\lambda)=(\lambda-\alpha)^k.$$

Shunday qilib $J_k(\alpha)-\lambda E$ matritsaning kanonik ko`rinishi (2)-matritsa bilan beriladi.

Natija. $J_k(\alpha)-\lambda E$ matritsaning rangi uning tartibiga teng bo`lib $D(J_k(\alpha)-\lambda E)=\{(\lambda-\alpha)^k\}$, ya'ni yagona $(\lambda-\alpha)^k$ ko`phaddan iborat.

2-Teorema. Agar ixtiyoriy J jondan matritsasi berilgan bo`lib, y (1) ko`rinishga ega bo`lsa, u holda $J-\lambda E$ matritsaning rangi tartibiga teng bo`lib $D(J-\lambda E)$ to`plam $D(J_{k_i}(\alpha_i)-\lambda E_i)$ to`plamlarning yig`indisiga teng.

(Bunda biror $(\lambda-\alpha)^k$ ko`phad $D(J_{k_i}(\alpha_i)-\lambda E_i)$ to`plamlarga necha marta kirsa, y $D(J-\lambda E)$ to`plamda shuncha marta olinadi.)

Isboti. $J-\lambda E$ matritsa ushbu

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} J_{k_1}(\alpha_1)-\lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_1}(\alpha_1)-\lambda E_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_1}(\alpha_1)-\lambda E_s \end{pmatrix} \qquad (4)$$

ko`rinishga ega bo`lib, unda E_i bilan tartibi k_i ga teng birlik matritsa belgilangan. 1-teoremaga ko`ra har bir $J_{k_i}(\alpha_i)-\lambda E_i$ matritsaning determinanti $(\alpha_i-\lambda)^{k_i}$ ga teng. Demak, $J-\lambda E$ matritsaning determinanti

$$\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i-\lambda)^{k_i}$$

гa teng bo`ladi. Bundan esa $J-\lambda E$ matritsaning rangi uning tartibiga teng ekanligi kelib chiqadi.

$D(J-\lambda E)$ to`plamga doir tasdiqni isbotlash uchun quyidagi 2 ta lemmadan foydalanamiz.

1-Lemma. Faqat diagonalidagi elementlarning o`rni bilan farq qiladigan 2 ta diagonal λ-matritsalar o`zaro ekvivalentdir.

Isboti. Diagonal matritsadagi *i*-va *j*-elementlarning o`rnini, almashtirish uchun *i*- va *j*- satrlarining o`rnini, keyin esa *i*- va *j*-ustunlarining o`rinlarini almashtirish kifoya.

$A(\lambda)$ va $B(\lambda)$ diagonal λ-matritsalarning diagonal elementlarining ixtiyoriy o`rin almashtirishi chekli marta satrlar va ustunlarni almashtirish orqali bajarish mumkin. Shuning uchun ham ular ekvivalent.

2-Lemma. Agar $F[\lambda]$ halqada $\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),\ldots,\varphi_m(\lambda)$ ko`phadlarning ixtiyoriy 2 tasi o`zaro tub bo`lsa, u holda quyidagi $\lambda$-matritsalar o`zaro ekvivalentdir:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_m(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \prod_{i=1}^{m}\varphi_i(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Isboti. Agar $m=2$ bo`lsa, $\delta_2(\lambda)=\gamma\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, bu yerda $\gamma\neq 0$ o`zgarmas son. $(\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda))=1$ bo`lganligi sababli $\delta_1(\lambda)=1$. Bulardan $\varepsilon_1(\lambda)=1,\quad \varepsilon_2(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$. Demak,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$m=k-1$ uchun to`g`ri desak

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\ldots\varphi_{k-1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

U holda $m=k$ bo`lganda

$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi_k(\lambda) \end{pmatrix}$ matritsada $d_k(\lambda)=\gamma\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),\ldots,\varphi_k(\lambda)$ va $d_{k-1}(\lambda)=1$. Shuning uchun ham lemma ixtiyoriy *m* natural soni uchun o`rinli.

J matritsaning $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ xos sonlari ichida turlilarini tanlab olamiz va ularni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ $(t \le s)$ bilan belgilaymiz. J matritsada $\lambda_i \left(i = \overline{1, r}\right)$ xos songa ega bo`lgan Jordan kataklari $q_i$ ta bo`lsin. Faraz etaylik bu kataklarning tartiblari

$$k_{i_1} \ge k_{i_2} \ge \ldots \ge k_{i_q} \ge 1 \qquad (5)$$

shartni qanoatlantirsin (hamma vaqt bunga erishish mumkin). Agar (4) matritsaning ixtiyoriy katagi $J_{k_i}(\alpha_i) - \lambda E_i$ yotgan satr va ustinlar ustida elementar almashtirishlar bajarib uning kanonik ko'rinishiga o'tilsa, boshqa kataklar o'zgarishsiz qoladi. Bundan foydalanib, (4) matritsadagi har bir $J_{k_i}(\alpha_i) - \lambda E_i$ katakni unga ekvivalent bo'lgan (2)- ko'rinishdagi kanonik katak bilan almashtirsak, (4)-matritsaga ekvivalent bo'lgan quyidagi $A(\lambda)$ dioganal λ - matritsani olamiz; $A(\lambda)$ matritsaning dioganalida 1 lar va (4)-matritsaning Jordan kataklarining 1 dan farqli invariant ko'paytuvchilaridan iborat ushbu

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}} (\lambda - \lambda_1)^{k_{12}} \ldots (\lambda - \lambda_1)^{k_{1q_1}} \\ (\lambda - \lambda_2)^{k_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{22}} \ldots (\lambda - \lambda_2)^{k_{2q_2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda - \lambda_t)^{k_{t1}} (\lambda - \lambda_t)^{k_{t2}} \ldots (\lambda - \lambda_t)^{k_{tq_t}} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

ko'phadlar joylashgan bo'ladi. Bundan (5) ga ko'ra

$$\left.\begin{array}{l} k_{11} \ge k_{12} \ge \ldots \ge k_{1q_1} \ge 1 \\ k_{21} \ge k_{22} \ge \ldots \ge k_{2q_2} \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{t1} \ge k_{t2} \ge \ldots \ge k_{tq_t} \ge 1 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

1-lemmaga ko'ra $A(\lambda)$ ning dioganalida 1 larning va bu ko'phadlarning qanday joylashganligi katta ahamiyatga ega emas.

Endi $q_1, q_2, \ldots, q_t$ sonlarining eng kattasini q bilan belgilaymiz. Har bir p, $\left(p = \overline{1, q}\right)$ uchun (6) jadvalning p-ustinida turgan $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ip}}$ ko'phadlarning ko'paytmasini $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\varepsilon_{n-p+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{t} (\lambda - \lambda_i)^{k_{ip}} .$$

Bundan biror q_i uchun $q_i > p$ (ya'ni p-ustinning i satri bo'sh bo'lsa) bu satrga mos ko'paytuvchini 1 ga teng deb olamiz. (6) jadvaldagi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ lar turli sonlar bo'lgani uchun bu jadvalning har bir ustinidagi ixtiyoriy 2 ta ko'phad o'zaro tubdir. Shuning uchun ham $A(\lambda)$ matritsaga 2-lemmani qo'lashimiz mumkin. U holda $A(\lambda)$

elementar almashtirishlar yordamida diagonalida 1 lar va $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)\ \left(p=\overline{1,\,q}\right)$ ko`phadlar yotgan $B(\lambda)$ diagonal $\lambda$ matritsaga o`tadi:

$$(\text{J-}\lambda\text{E})\sim B(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & & \varepsilon_{n-q+1}(\lambda) & o & 0 \\ & \dots & & \dots & \varepsilon_{n-1}(\lambda) & 0 \\ & 0 & & 0 & \dots & \varepsilon_n(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

(5) shartga ko`ra har bir $\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)$ ko`phad $\varepsilon_{n-(p-1)+1}(\lambda)$ ko`phadga bo`lingani uchun $B(\lambda)$ kanonik ko`rinishdagi $\lambda$-matritsa. Demak $B(\lambda)$ matritsa $J-\lambda E$ matritsaning kanonik ko`rinishidir. Bundan (6) jadvaldagi ko'phadlar $D(J-\lambda E)$ to'plamni hosil qilishini olamiz. Ammo (6)-jadvaldagi ko'phadlar tuzilishiga ko'ra $D\left(J_{k_i}(\alpha_i)-\lambda E_i\right)$ to'plamlarning yig'indisidan iborat. Teorema isbot bo'ldi.

Isbotlangan teoremadan ko'rinadiki, har bir $J-\lambda E$ matritsa uchun shunday $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t$ turli sonlar va (7) shartni qanoatlantiruvchi k_{ij} natural sonlar mavjudki $D(J-\lambda E)$ to'plam (6)-jadval bilan berilgan ko'phadlardan iborat bo'ladi. Aksinchasi ham o'rinli;

Natija. Agar ixtiyoriy $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t$ turli sonlar va (7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k_{ij} natural sonlar berilsa, shunday J jordan matritsasi mavjudki, uning uchun $D(J-\lambda E)$ to'plam (6) jadval bilan beriladi.

Isboti. Bunday J Jordan matritsasi quyidagicha topiladi. Har bir λ_i va (7)-shartni qanoatlantiruvchi k_{ij} soni uchun $J_{k_{ij}}(\alpha_i)$ jordan katagini olsak, 1-teorema natijasiga ko'ra $D\left(J_{k_{ij}}(\lambda_i)-\lambda E_{k_{ij}}\right)=\left\{(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}\right\}$.

Endi J–sifatida barcha $J_{k_{ij}}(\alpha_i)$ jordan kataklaridan iborat jordan matritsasi olinsa, 2-teoremaga ko`ra $D(J-\lambda E)$ to`plam (6) jadvaldan iborat bo`ladi.

Misol.

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ bo`lsin. Bu 9-tartibli jordan matritsasi uchun (6) ko`phadlar jadvali quyidagicha bo`ladi

$$(\lambda-2)^3, \quad (\lambda-2), \quad \lambda-2$$
$$(\lambda-5)^2, \quad (\lambda-5)^2.$$

shuning uchun ham J ning invariant ko`paytuvchilari

$e_9(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2, \quad e_8(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2, \quad e_7(\lambda)=\lambda-2,$

$e_6(\lambda)=\ldots=e_1(\lambda)=1$ lardan iborat bo`ladi. Demak $J$ ning kanonik ko`rinishi

$$J=\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&& (\lambda-2) && \\ &&&&&&& (\lambda-2)(\lambda-5)^2 & \\ &&&&&&&& (\lambda-2)^3(\lambda-5)^2 \end{bmatrix}$$

dan iborat bo`ladi.

Mavzu: Matrisaning Jordan normal formasi.

λ*-matrisani jordan normal korinishga keltirish.* Endi biz ushbu teoremani isbotlaymiz.

3-teorema. C maydon ustidagi har qanday A matrisa biror jordan matrisasiga o'xshash. Bu Jordan matrisasi A orqali Jordan kataklarining joylashish ornigacha aniqlik bilan topiladi. (Bu Jordan matrisalarining har biri A matrisaning Jordan normal formasi deb ataladi).

Isboti. $A\in C^{n\times n}$ berilgan bolsin. Unga oxshash bolgan Jordan matrisasi $J\in C^{n\times n}$ ni tuzamiz. Ilgari isbotlanganiga asosan A va J ning oxshashligi- $A-\lambda E$ va $J-\lambda E$ $\lambda-$matrisalarning ekvivalentligiga teng kuchli.

A ning xarakteristik kophadi $\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ ni qaraymiz. U n ta kompleks ildizga ega (ildizlarni karraligi bilan hisoblanganda) $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_t$ sonlar $\varphi(\lambda)$ning turli ildizlari, $k_{1,}k_{2,}\ldots k_t$ sonlar bu ildizlarning karralik soni bo'lsin. U holda

$$k_1+\ldots+k_t=n \quad \text{va} \quad \varphi(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\left(\lambda-\lambda\ \right)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_t)^{k_t}$$

Bundan $A-\lambda E$ matrisaning rangi uning tartibiga teng ekanligi kelib chiqadi.

$\varepsilon_1(\lambda),\varepsilon_2(\lambda),\ldots,\varepsilon_n(\lambda)$ lar $A-\lambda E$ matrisaning invariant kopaytuvchilari bo'lsin. U holda

$$\varepsilon_1(\lambda)\varepsilon_2(\lambda)\ldots\varepsilon_n(\lambda)=\delta_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\lambda_t)^{k_t}$$

bo'ladi. Bundan

$$\varepsilon_{n-p+1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{1p}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2p}}\ldots(\lambda-\lambda_t)^{k_{tp}}\left(p=\overline{1,q}\right)$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar bu ifodada biror $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ip}}$ ko'paytuvchi qatnashmasa $k_{ip}=0$ deb hisoblaymiz. Bunga asosan $A-\lambda E$ ning elementar bo'luvchilari (6) ko'rinishga ega. 2-teorema natijasiga asosan elementar bo'luvchilari (6) jadval ko'rinishiga ega bolgan –jordan matrisasi mavjud. Bundan esa A va T matrisalarning o'xshash ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi xulosaga kelamiz. Chekli o'lchamli chiziqli fazoda har qanday chiziqli operator uchun shunday bazis mavjudki bu bazisda uning matrisasi jordan matrisasidir. (ba'zan bu bazis berilgan chiziqli operatorning Jordan bazisi deb ham ataladi) isbotlangan teoremadan chiziqli operatorning diogonallashuvchiligining zaruriy va yetarli sharti oson chiqariladi.

Jordan kataklari bilan elementar bo'luvchilar orasidagi moslikga muvofiq chiziqli operatorning diogonallashuvchi bo'lishi uning barcha elementar bo'luvchilarining 1-tartibli ekanligiga teng kuchli. Bu oxirgi shart esa o'z navbatida eng keyingi $\varepsilon_n(\lambda)$ invariant ko'paytuvchining karrali ildizlari yo'qligiga teng kuchli. Shunday qilib, chiziqli operatorning diogonallashuvchi bo'lishligi uchun uning eng keyingi invariant ko'paytuvchisining karrali ildizlarga ega bo'lmasligi zarur va yetarli. F maydonda det ($A-\lambda E$) xarakteristik ko'phad chiziqli ko'paytuvchilarga ajralsa, teoremaning bunday F maydon va A chiziqli operator uchun o'rinli bo'lishi isbotdan bevosita kelib chiqadi. Aksincha, F maydon ustidagi A matrisa shu maydon ustidagi biror J–jordan matrisasiga o'xshash bo'lsin. U holda $A-\lambda E$, $J-\lambda$E matrisalarning invariant ko'paytuvchilari bir hil, demak $\det(A-\lambda\varepsilon)=(-1)^n\,\varepsilon_1(\lambda).....\varepsilon_n(\lambda)$ ko'phad ham chiziqli ko'paytuvchilarga ajraladi.Shunday qilib quyidagi teoremani isbotladik;

4-teorema. G' maydon ustidagi chekli o'lchamli chiziqli fazodagi chiziqli operatorning Jordan bazisi mavjud bo'lishi uchun uning xarakteristik ko'phadi – G' maydon ustida chiziqli ko'paytuvchilarga ajralishi zarur va yetarlidir.

Misollar. 1) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$ matrisaga o'xshash Jordan matrisasini topaylik.

Xarakteristik ko'phadni qaraymiz;

$$A-\lambda\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{pmatrix}.$$

Buning invariant ko'paytuvchilari

$\delta_1(\lambda)=1$ va

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & -7-\lambda\\ 6 & -7\end{vmatrix}=-28+42+6\lambda=14+6\lambda=6\left(\lambda+\frac{7}{3}\right);$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 6 & 7-\lambda\end{vmatrix}=28-4\lambda-48=-4(\lambda+5),$$

$$(M_{13},M_{12})=1$$

ya'ni $\delta_2(x)=1$.

$$M_3=\det(A-\lambda\mathrm{E})=-(1-\lambda)(7+\lambda)(7-\lambda)-16\cdot7-48\cdot3+24(7+\lambda)+12(7-\lambda)+56(1-\lambda)=$$
$$-(1-\lambda)\left(49-\lambda^2\right)-112-144+168+24\lambda+84-12\lambda+56-56\lambda=-49+\lambda^2+$$
$$+49\lambda-\lambda^3+52-44\lambda=-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=$$
$$=-\left(\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3\right)=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

	+1	-1	-5	-3
-1	1	-2	-3	0
-1	1	-3	0	
-1	1	-4		

Demak, $\delta_3(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$

$\varepsilon_1(\lambda)=1,\ \varepsilon_2(\lambda)=1$

$\varepsilon_3(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$

Shunday qilib elementar bo`luvchilar: $\lambda-3$ va $(\lambda+1)^2$. Ularga mos jordan kataklari (3) va $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Isbotlanayotgan jordan matritsasi $J=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ dan iborat ekan.

2) $A=\begin{pmatrix}-16 & -17 & 87 & -108\\ 8 & 9 & -42 & 54\\ -3 & -3 & 16 & -18\\ -1 & -1 & 6 & -8\end{pmatrix}$ matritsaga o`xshash jordan normal matritsasini toping.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-16-\lambda & -17 & 87 & -108\\ 8 & 9-\lambda & -42 & 54\\ -3 & -3 & 16-\lambda & -18\\ -1 & -1 & 6 & -18-\lambda\end{pmatrix}.$$

Bundan $\delta_2(\lambda)=1,\ \delta_3(\lambda)=1$

$$M_{14}=\begin{vmatrix}8 & 9-\lambda & -42\\ -3 & -3 & 16-\lambda\\ -1 & -1 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1-\lambda & 6\\ 0 & 0 & -2-\lambda\\ -1 & -1 & 6\end{vmatrix}=(2+\lambda)(1-\lambda)$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}8 & 9-\lambda & 54\\ -3 & -3 & -18\\ -1 & -1 & -8-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1-\lambda & -10-8\lambda\\ 0 & 0 & 6-\lambda\\ -1 & -1 & -8-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(6-\lambda)$$

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1),\qquad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^3(\lambda+2)$$

$$\varepsilon_1(\lambda)=\varepsilon_2(\lambda)=1,\ \ \varepsilon_3(\lambda)=\lambda-1,\quad \varepsilon_4(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Invariant ko`paytuvchilar

$(\lambda-1)^2$, $\lambda-1$ va $\lambda+2$ larga mos Jordan katakchalari.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, (1) va (-2)

$$J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

.

Mavzu: Elementar bo`luvchilar.

Rejasi:

1. Elementar bo`luvchilar.
2. λ-matritsaning tartibi elementar bo`luvchilari rangi va invariant ko`paytuvchilari orasidagi bog`lanish.

Adabiyotlar [1, 2, 3]

C kompleks sonlar maydoni ustida n-darajali $(n\geq 1)$ biror $f(\lambda)$ ko`phad berilgan va $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ lar uning turli ildizlari bo`lsin. U holda

$$f(\lambda)=a_0(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\alpha_s)^{k_s} \qquad (1)$$

deb yoza olamiz. Bu erda $k_1,k_2,\ldots,k_s$ lar natural sonlar. Ushbu $(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\alpha_s)^{k_s}$ ko`phadlar $f(\lambda)$ *ko`phadning elementar bo`luvchilari* deyiladi. $F$ ko`phadning elementar bo`luvchilar to`plamini $D(f)$ bilan belgilaymiz.

Biror $A(\lambda)$ matritsa berilgan va $\varepsilon_1(\lambda),\varepsilon_2(\lambda),\ldots,\varepsilon_n(\lambda)$lar uning invariant bo`luvchilari bo`lsin. rang $A(\lambda)=r$ bo`lsa, $\varepsilon_i(\lambda)\neq 0,\ \left(i=\overline{1,\ r}\right)$ va $\varepsilon_j(\lambda)=0,\ \ j=\overline{r+1,n}$ bo`ladi.

$\varepsilon_i(\lambda)\neq 0\ \left(i=\overline{1,r}\right)$ lar orasida birdan farqli bo`lganlarining soni $q$ ta bo`lsin. U holda $\varepsilon_i(\lambda)=1,\ (i=1,\ r-q)$ va $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)\neq 1\ \ \left(p=\overline{1,\ q}\right)$ deb yoza olamiz.

$\varepsilon_r(\lambda)$ invariant ko`paytuvchining turli ildizlarini $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$ bilan belgilaymiz. Bu $\varepsilon_r(\lambda)$ invariant ko`paytuvchi har bir $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)$ ga bo`lingani uchun bu $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)$ ko`phadlarning ildizlari $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$ sonlari orasida bo`ladi. Bunga ko`ra har bir birdan farqli $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)$ ko`phadning (1) ko`rinishidagi yoyilmasi

$$\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{1p}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2p}}\ldots(\lambda-\lambda_t)^{k_{tp}}$$

ko`rinishda bo`ladi. Ushbu

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}\ldots(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q}}\\(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\ldots(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q}}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}(\lambda-\lambda_t)^{k_{t2}}\ldots(\lambda-\lambda_t)^{k_{tq}}\end{array}\right\}\qquad(2)$$

jadvalga $A(\lambda)$ matritsaning elementar bo`luvchilari jadvali deb ataladi. Bu jadvaldagi p-ustundagi elementlarining ko`paytmasi $\varepsilon_{r-p+1}(\lambda)$ ga teng. Jadvaldagi ba'zi bir $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ ko`phadlar 1 ga teng, ya'ni $k_{sm}=0$ bo`lishi mumkin. Har bir $\varepsilon_{i+1}(\lambda)$ ko`phad $\varepsilon_i(\lambda)$ ko`phadga bo`lingani uchun

$$\left.\begin{array}{l}k_{11}\geq k_{12}\geq\ldots\geq k_{1q}\\k_{21}\geq k_{22}\geq\ldots\geq k_{2q}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\k_{t1}\geq k_{t2}\geq\ldots\geq k_{tq}\end{array}\right\}\qquad(3)$$

shartlar bajarilishi kerak. $A(\lambda)$ matritsaning ekvivalentlik masalasini qaraganda $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t$ ildizlarning qanday tartibda olinishi ahamiyatga ega emas bo`lganligi sababli satrlarining o`rni bilan farq qiluvchi turli (2) jadvallarni teng (bir xil) deb hisoblaymiz.

(2) jadvaldagi 1 dan farqli barcha $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ ko`phadlar to`plamini $D(A)$ orqali belgilaymiz. Bunda biror $(\lambda-\lambda_s)^{k_{sm}}$ ko`phad (2) jadvalda necha marta uchrasa, bu ko`phad $D(A)$ to`plamda shuncha marta olinadi.

$D(A)$ to`plam $A(\lambda)$ matritsaning *elementar bo`luvchilari to`plami* deb ataladi.

1-Teorema. $A(\lambda)$ matritsaning tartibi, rangi va $D(A)$ elementar bo`luvchilari to`plami bu matritsaning invariant ko`paytuvchilarini to`la aniqlaydi.

Isboti. $A(\lambda)$ matritsaning tartibi n, rangi r va $D(A)$ to`plami berilgan bo`lsin. U holda $A(\lambda)$ matritsa $n-r$ tasi nolga teng bo`lgan invariant ko`paytuvchilarga ega.

Dastlab $D(A)$ to`plam $A(\lambda)$ matritsaning (2) elementar bo`luvchilari jadvalini to`la aniqlashini ko`rsatamiz. $D(A)$ to`plamda turli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ ildizlarga mos keluvchi $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_t)^{k_t}$ ko`rinishdagi ko`phadlar ichida eng yuqori darajalilarini bittadan olamiz: $(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}, \ldots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{t1}}$. Ular (3)-shartga ko`ra (2)-jadvalning 1-ustunini beradi. Bu ko`phadlarni $D(A)$ to`plamlar ichidan chiqarib tashlab, qolgan ko`phadlar ichidan yuqori darajalilarini tanlab olamiz. Ular (3)-shartga ko`ra (2)-jadvaldagi 2-ustunning 1 dan farqli elementlarini beradi. Bu mulohazani $D(A)$ to`plam elementlarining barchasi (2) jadvalga joylashguncha davom ettiramiz. Bundan ko`rinadiki (2)-jadval $D(A)$ to`plam bilan to`la aniqlanar ekan. Xususan $D(A)$ to`plam (2) jadvalning $q$ ustunlari sonini ham to`la aniqlaydi. U holda $A(\lambda)$ matritsaning 1 ga teng bo`lgan invarinat ko`paytuvchilari soni $r-q$ ta bo`ladi.

Natija. Agar bir xil tartibli, bir xil rangli 2 ta $A_1(\lambda)$ va $A_2(\lambda)$ matritsalar uchun $D(A_1)=D(A_2)$ bo`lsa, bu λ-matritsalar ekvivalentdir.

Bu natija isbotlangan teoremadan (agar har bir $A(\lambda)$ matritsaga ekvivalent yagona matritsa mavjudligini e'tiborga olsak) kelib chiqadi.

O`xshashlik va ekvivalentlik.

F maydon ustida A kvadrat matritsa berilgan bo`lsin.

Ta'rif. $A-\lambda E$ matritsaga A matritsaning xarakteristik λ-matritsasi deb ataladi.

Teorema. G’ maydon ustidagi 2ta A vaB matritsalarning o`xshash bo`lishi uchun ularning mos $A-\lambda E$ va $B-\lambda E$ xarakteristik λ-matritsalarining ekvivalent bo`lishi zarur va yetarli.

Isboti. Faraz etaylik A va B lar o`xshash, ya’ni $B=C^{-1}AC$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\det C \neq 0$ bo`lganC matritsa mavjud bo`lsin. U holda

$B-\lambda E = C^{-1}AC-\lambda E = C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC = C^{-1}(A-\lambda E)C$ bundan

$B-\lambda E \sim A-\lambda E$.

Aksincha $A-\lambda E$ va $B-\lambda E$ matritsalar ekvivalent bo’lsin. U holda shunday $u(\lambda)$ *va* $V(\lambda)$ unimodulyar matritsalar mavjudki $B-\lambda E = U(A-\lambda E)V$ bo`ladi. $U(\lambda)$ va $V(\lambda)$ larni ko`phad deb qarab ularga qoldiqli bo`lish haqidagi teoremani tadbiq qilamiz. U holda

$$U=(B-\lambda E)Q_1+R_1, \qquad V=Q_2(B-\lambda E)+R_2 .$$

Bulardan foydalansak:

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (U-(B-\lambda E)Q_1)(A-\lambda E)(V-Q_2(B-\lambda E)) =$$
$$=(U(A-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(A-\lambda E))\cdot(V-Q_2(B-\lambda E)) =$$
$$=U(A-\lambda E)V-(B-\lambda E)Q_1(A-\lambda E)V-U(A-\lambda E)Q(B-\lambda E)+$$
$$+(B-\lambda E)Q_1(A-\lambda E)Q_2(B-\lambda E)$$

ga ega bo`lamiz.

U vaV lar teskarisi U^{-1} va V^{-1} lar mavjud bo`lgan $\lambda$ -matritsalar bo`lgani uchun

$$(A-\lambda E)V = U^{-1}(B-\lambda E) \text{ va } U(A-\lambda E) = (B-\lambda E)V^{-1}$$

deb yoza olamiz. Bulardan foydalansak

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1U^{-1}(B-\lambda E)-(B-\lambda E)V^{-1}Q_2(B-\lambda E)+$$
$$+(B-\lambda E)Q_1(A-\lambda E)Q_2(B-\lambda E) = B-\lambda E-(B-\lambda E)(Q_1U^{-1}+V^{-1}Q_2-Q_1(A-\lambda E)Q_2)\times$$
$$\times(B-\lambda E)$$

tenglikni olamiz. Agarda

$$Q_1U^{-1}+V^{-1}Q_2-Q_1(A-\lambda E)Q_2$$

matritsa noldan farqli bo`lsa oxirgi ifoda $\lambda$ ga nisbatan darajasi $\geq 2$ bo`lgan matritsali ko`phad bo`lar edi, lekinda $R_1(A-\lambda E)R_2$ ifodaning darajasi birdan katta bo`lishi mumkin emas. Bu ziddiyatdan

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = B-\lambda E \quad \text{va}\, B = R_1AR_2\,,\;\; R_1R_2 = E\,,$$

ya'ni $B = C^{-1}AC, \quad C = R_2$ ni hosil qilamiz.

Natija. A va B matritsalarning o`xshash bo`lishi uchun $A-\lambda E$ va $B-\lambda E$ mos invariant ko`paytuvchilari (det bo`luvchilari) teng bo`lishi zarur va yetarlidir.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Hojiyev J., FaynleybA.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, Uzbekiston 2001 y. 304б.
2. Малъцев А .И. Основы линейной алгебры. М.: Наука. 1970. 400с.
3. Гельфанд И. М .Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1971. 272с.
4.Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука.1984, 416с.
5.А.И.Кострикин. Введение в алгебру. М.: Наука.1977, 496с.