МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИСЛАМА КАРИМОВА

АБДУКАРИМОВ А., ШАМСИЕВ Д.Н., ХАЛДЫБАЕВА И.Т.

М А Т Е М А Т И К А

Конспект лекций
Часть 2

Ташкент 2018

Математика: Конспект лекций. Часть 2 / Абдукаримов А., Шамсиев Д.Н., Халдыбаева И.Т. Ташкент: ТашГТУ, 2018. 112 с.

Конспект лекций предназначен для проведения лекций по разделам высшей математики в высших технических учебных заведениях.

Вторая часть конспекта содержит в себе следующие разделы высшей математики: дифференциальные уравнения; теория рядов; кратные, криволинейные и поверхностные интегралы; теория поля.

Конспект лекций охватывает содержание программы по дисциплине «Высшая математика», утвержденной приказом МВ и ССО РУз от 24 августа 2017г. №603.

Для облегчения понимания рассматриваемых вопросов в лекциях приведены соответствующие примеры с иллюстрациями, а в конце контрольными вопросами.

Конспект лекций может быть полезен студентам, магистрантам и докторантам.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета.

Рецензенты:
-Таш ГТУ, доц. каф. «Высшая математика», к.ф.-м.н. Эсонов Э.Э.;
-НУУз, проф.каф. «Теоретические основы механики», д.ф.-м.н. Ахмедов А.Б.

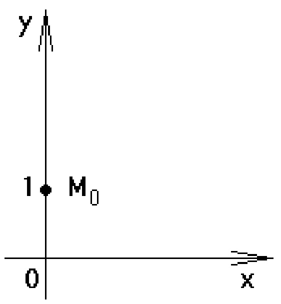
Модуль 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

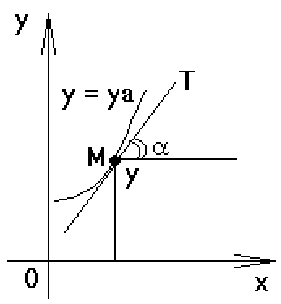
Лекция №28. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения

Прежде чем дать определение дифференциального уравнения и связанных с ним общих понятий, рассмотрим задачу, которая приводится к нахождению функции, являющейся решением дифференциального уравнения.

Задача 1. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(0,1)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y= y(x)$ есть уравнение кривой, обладающей в каждой своей точке $M(x,y)$ указанным в задаче свойством.





Обозначим через α угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси x.

Угловой коэффициент касательной MT есть $\mathrm{tg}\alpha$, и он равен производной от y по x, так что $\mathrm{tg}\alpha = y'$. С другой стороны, по условию задачи $\mathrm{tg}\alpha= 2x$. Приравнивая значение $\mathrm{tg}\alpha$, получаем

$$y' = 2x \tag{28.1}$$

В этом уравнении содержится производная от неизвестной функции. Уравнения такого типа, которые содержат производные искомой функции, называются дифференциальными уравнениями.

Таким образом, задача сводится к нахождению функции, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению (28.1), то есть обращала бы это уравнение в тождество.

Такая функция называется решением дифференциального уравнения, а процесс нахождения решений – интегрированием этого уравнения. Решением дифференциального уравнения (28.1) является любая первообразная функция $2x$. Например,

$$y = x^2 \tag{28.2}$$

Следовательно, все решения дифференциального уравнения (28.1) можно записать в виде

$$y = x^2 + C \qquad (28.3)$$

где C – это произвольная постоянная.

Получили бесконечное множество решений дифференциального уравнения (28.1). Искомая кривая $y = y(x)$ является графиком решения дифференциального уравнения (1). Она называется интегральной кривой этого уравнения. Таким образом, интегральными кривыми уравнения (28.1) будут парабола (28.2) и все параболы (28.3), получающиеся из нее сдвигам, параллельным оси у, на С единиц. Все эти параболы удовлетворяют условию поставленной задачи.

Теперь среди этого семейства интегральных кривых (28.3) нужно выделить интегральную кривую, которая проходила бы через точку $M_0\ (0, 1)$.

В (28.3) подставляем значение абсциссы и ординаты точки M_0 и получаем: $1 = 0 + C \rightarrow C = 1$.

Следовательно, уравнение искомой интегральной кривой примет вид $y = x^2 + 1$.

Из рассмотренного примера видно, что одному и тому же дифференциальному уравнению могут удовлетворять очень многие функции. Итак**, основной задачей** теории дифференциальных уравнений являются разыскание всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида:

$$F\,(x,y,y',\ldots\ldots,y^{(n)}) = 0 \quad \text{или} \quad F\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dy^2},\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \qquad (28.4)$$

связывающее независимую переменную х, искомую функцию у=у(х) и ее производные $y(x)$, $y''(x)$, ……, $y^{(n)}(x)$. F – заданная функция своих аргументов.

В обыкновенном дифференциальном уравнении искомая функция у = у(х) есть функция одной независимой переменной х. А если искомая функция есть функция двух (и более) независимых переменных, то имеем дифференциальное уравнение с частной производной.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение $y' - 5xy + 3 = 0$ есть уравнение первого порядка. Уравнение $y'' + 2y' - 3y + 4 = 0$ есть уравнение второго порядка и т.д.

Определение 3. Решением или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая при постановке её вместе с производной в это уравнение, превращает его в тождество.

Уравнение $y' = \frac{y+x}{x}$ имеет решение $y = xlnx + Cx$.

В самом деле, найдя производную $y' = lnx + x + C$ и подставив ее в уравнение, получим тождество

$$lnx + 1 + C = \frac{xlnx + Cx + x}{x}$$

Уравнение вида

$$F\ (x, y, y') = 0, \tag{28.5}$$

где x - независимая переменная; y - искомая функция; y'- ее производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Если уравнение (28.5) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{28.6}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение (28.6) имеет решение, дает теорема Коши, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (28.6) и является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема Коши. Если функция $f\ (x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области G, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условиям

$$y = y_0 \text{ при } \quad x = x_0 \tag{28.7}$$

Условия (28.7), в силу которых функция $y = y(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0 называют начальными условиями решения и записывают обычно так:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \qquad (28.8)$$

Отыскание решения уравнения (28.6), удовлетворяющего начальным условиям (28.8), одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется **задачей Коши**.

Определение 4. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi\,(x, c), \qquad (28.9)$$

которая зависит от одной произвольной постоянной С и удовлетворяет следующим условиям:

а) Она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной С.

б) Каково бы ни было начальное условие $y = y_0$, $x = x_0$, т. е. $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi\,(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

Определение 5. Частным решением уравнения (28.6) в области G называется функция $y = \varphi\,(x, c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi\,(x, C)$ при определённом значении постоянной $C = C_0$.

Например. Для уравнения первого порядка $y' = -\frac{y}{x}$. **Общим решением** будет семейство функций $y = \frac{C}{x}$. Это можно проверить простой подстановкой в уравнение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующему начальному условию: $y_0 = 1$ при $x_0 = 2$. Подставляя эти значения x_0 и y_0 в формулу $y = \frac{C}{x}$, получим $1 = {}^{C}\!/_{2}$, или $C = 2$. Следовательно, искомым частным решением будет функция $y = {}^{2}\!/_{x}$.

Конрольные вопросы

1. Дайте определение обыкновенному дифференциальному уравнению.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения.
3. Какая функция называется общим решением дифференциального уравнения.

4. Сформулируйте задачу Коши.

5. Что называется, частным решением дифференциального уравнения.

Лекция № 29. Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Уравнения, приводящие к однородным

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (29.1)$$

называется уравнением с разделёнными переменными. Его общий интеграл есть

$$\int \mathrm{M(x)}dx + \int N(x)dy = C$$

Пример 1. Найдем решение уравнения

$$\frac{dy}{y} = 3x^2dx,$$

удовлетворяющее условию $y|_{x=x_0} = 2$. Интегрируя и записывая для удобства потенцирования произвольную постоянную в виде $ln|\mathrm{C}|$, получим $ln|y| = x^3 + ln|\mathrm{C}|$ или

$$y = \mathrm{C} * e^{x3}$$

Подставляя в общее решение начальное условие, найдём С. 2=С. Таким образом, функция $y = 2e^{x^3}$ является искомым частным решением данного уравнения.

Определение 2. Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(\mathrm{x})N_2(y)dx = 0 \qquad (29.2)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Оно может быть приведено к уравнению с разделёнными переменными путём деления обеих частей на выражение $N_1(y) * M_2(\mathrm{x})$, предполагая, что $N_1(y) \neq 0$, $M_2(\mathrm{x}) \neq 0$

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0$$

или

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

т.е. к уравнению вида (29.1). Найдём общий интеграл

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Пример 2. Дано уравнение $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0.$ Разделяя переменные, находим

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0, \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0$$

Интегрируя, получаем $ln|x| + 1 + ln|y| - y = C,$ или $ln|x * y| + x - y = \text{C};$ последнее соотношение есть общий интеграл данного уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение 3. Функция f(x,y) называется однородной функцией n – го измерения относительно переменных x и y, если при любой допустимой t справедливо тождество

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$$

Пример: $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - x^3$ есть однородная функция третьего измерения, т.к.

$$f(tx, ty) = 3t^2x^2ty + t^3y^3 - t^3x^3 = t^3(3x^2y + y^3 - x^3) = t^3 \cdot f(x, y)$$

Определение 4. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (29.3)$$

называется однородным относительно x и y, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Решение однородного дифференциального уравнения. По условию $f(tx,ty) = f(x,y)$. Положив в тождестве $t = \frac{1}{x}$, получим $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция зависит только от отношения аргументов. Тогда уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (29.4)$$

Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$, т.е. $y = ux$ и $y' = u + u'x$. Подставляя это выражение производной в уравнение (29.4), получим $u + x\frac{du}{dx} = f(1;u)$; Это – уравнение с разделяющимися переменными: $x\frac{du}{dx} = f(1;u) - u$, или $\frac{du}{f(1;u)-u} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, найдем:

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношения $\frac{y}{x}$, получим интеграл уравнения (29.4).

Пример 3. Найти решение однородного уравнения

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$$

Решение. Замена y=ux приводит к уравнению

$$u + u'x = \frac{u-u^2}{1-2u} \text{ или } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{u-u^2}{1-2u} - u\right) = \frac{1}{x} * \frac{u^2}{1-2u}$$

Разделяя переменные, находим $\frac{1-2u}{u^2}du = \frac{dx}{x}$, откуда $\frac{1}{u} + 2ln|u| = ln\left|\frac{C}{x}\right|$, или $\ln\left(e^{\frac{1}{u}} * u^2\right) = ln\left|\frac{C}{x}\right|$ и значит, $u^2 e^{\frac{1}{u}} = \frac{C}{x}$. Возвращаясь к переменной y, приходим к общему решению.

$$\frac{y^2}{x} e^{\frac{x}{y}} = C.$$

Замечание 1. Уравнение вида $M(x, y)\, dx + N(x, y)dy = 0$ будет однородным в том и только в том случае, когда $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Это вытекает из того, что отношение двух однородных функций одного измерения является однородной функцией нулевого измерения.

Уравнения, приводящиеся к однородным

К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{du}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}, \quad (29.5)$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 – постоянные числа.

1. Пусть $c_1 = c = 0$, тогда уравнение (29.5) примет вид $\frac{du}{dx} = \frac{ax + \text{в}y}{a_1 x + \text{в}_1 y}$ или $\frac{du}{dx} = \frac{a + \text{в}\frac{y}{x}}{a_1 + \text{в}_1\frac{y}{x}}$ и заменой $u = \frac{y}{x}$ это уравнение сводится к однородному.

2. Пусть c_1 и c_2, (или одно из них) отличны от нуля. Сделаем замену переменных

$$x = x_1 + h,\ y = y_1 + k \tag{29.6}$$

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Подставляя в уравнение (29.5) выражения x, y и $\frac{dy}{dx}$, будем иметь

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + ah + by_1 + bk + c}{a_1x_1 + a_1h + b_1y_1 + b_1k + c} \tag{29.7}$$

Подберем h и k так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \tag{29.8}$$

т.е. определим h и k, как решения системы уравнений (29.8). При этом условии уравнение (29.7) становится однородным

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

Решив это уравнение и перейдя снова к x и y по формуле (29.6), получим решение уравнения (29.5).

3. Пусть система (29.8) не имеет решения, если $\begin{vmatrix} ab \\ a_1b_1 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $ab_1 = a_1b$, то в этом случае $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, т.е. $a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$ и, следовательно, уравнение (29.5) можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \tag{29.9}$$

Тогда подстановкой $z = ax + by$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Данные приемы, примененные к интегрированию уравнения (29.5), можно распространить и к интегрированию уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}\right),$$

где f - какая угодно непрерывная функция.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$.

Решение. Чтобы преобразовать его в однородное уравнение, делаем замену $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$

Тогда $\frac{dy_1}{d^{x_1}} = \frac{x_1+h+y_1+k-3}{x_1+h-y_1-k-1}$, решая систему двух уравнений,

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{cases} \text{ находим } h = 2, k = 1$$

В результате получаем однородное уравнение $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$, которое решаем подстановкой $\frac{y_1}{x_1} = u$; тогда

$$y_1 = x_1 u, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}, \qquad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными $x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$. Разделяем переменные $\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$. Интегрируя, находим $arctg\, u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x_1| + ln|C|$, $arctgu = ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right|$, или $Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{arctgu}$. Подставляя сюда $\frac{y_1}{x_1}$ вместо u, получим

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие дифференциальные уравнения называются уравнением с разделёнными переменными.
2. Напишите общий вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
3. Какие функции называются однородной функцией n-го измерения.
4. Какие уравнения называются однородным уравнением первого порядка.
5. Объясните ход решения однородного уравнения.
6. Уравнение какого вида приводится к однородным уравнениям.

Лекция № 30. Линейное уравнение. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение Бернулли

Линейное уравнение

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной. Оно имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad (30.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

Если $q(x) = 0$, то $y' + p(x)y = 0$ называется однородным уравнением, соответствующим уравнению (30.1). Для решения уравнения (30.1) существует два способа; метод подстановки и метод вариации произвольных постоянных. Мы решаем уравнение (30.1) методом подстановки.

Будем искать решение уравнения (30.1) в виде произведения двух функций от x :

$$y = u(x) * \vartheta(x) \qquad (30.2)$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определяется на основании уравнения (30.1).

Из равенства $y = u * \vartheta$ находим производную y':

$$y' = u'\vartheta + u\vartheta'$$

Подставляя это выражение в уравнение (30.1), имеем

$u'\vartheta + u\vartheta' + p(x) * u * \vartheta = q(x),$ или $u'\vartheta + u(\vartheta' + p(x) * \vartheta) = q(x)$

Выберем в качестве ϑ какое-нибудь частное решение уравнения

$$\vartheta' + p(x) * \vartheta = 0 \qquad (30.3)$$

Тогда для отыскания u получим уравнение

$$u\vartheta' = q(x) \qquad (30.4)$$

Сначала найдем ϑ из уравнения (30.3). Разделяя переменные, имеем

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -p(x)dx.$$

Откуда

$$ln\vartheta = -\int p(x)dx \text{ и } \vartheta = e^{-\int p(x)dx}$$

Зная ϑ, находим далее u из уравнения (30.4)

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{\vartheta} = q(x)e^{\int p(x)dx}, du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

и значит

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C$$

По u и ϑ найдём искомую функцию y:

$$y = u * \vartheta = e^{-\int p(x)dx} * \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

Полученная формула даёт общее решение линейного уравнения (30.1).

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{sinx}{x}$.

Решение. Предположим $y = u * \vartheta$, тогда $y' = u'\vartheta + u\vartheta'$. Имеем $u'\vartheta + u\vartheta' + \frac{1}{x}u\vartheta == \frac{sinx}{x}$ или $u'\vartheta + u\left(\vartheta' + \frac{\vartheta}{x}\right) = \frac{sinx}{x}$. Пусть $\vartheta' + \frac{\vartheta}{x} = 0$. Отсюда $\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{dx}{x}$ и, значит, $ln\vartheta = -lux$, т.е $\vartheta = \frac{1}{x}$. Следовательно, $u' * \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, откуда

$$\vartheta' = \sin x\,, u = -cos + c$$

Имеем окончательно

$$y = u * \vartheta = \frac{1}{x}(-cos + c)$$

Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$M(x{,}y)dx + N(x{,}y)dy = 0 \qquad (30.5)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $M(x{,}y)$ и $N(x{,}y)$ непрерывные дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (30.6)$$

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Если уравнение (30.5) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом:

$$du(x{,}y) = 0,$$

где $u(x,y)$ такая функция, что $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (30.5) в неявном виде определяется уравнением $u(x,y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Предположим, что левая часть уравнения (30.5) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{30.7}$$

Дифференцируя первое соотношение по y, а второе по x, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

т.е. равенство (30.6) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (30.5) была полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

Допустим, что условие (30.6) выполнено. Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ находим

$$u = \int M(x,y)dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y.

Теперь подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношения (30.7). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по y и результат приравниваем $N(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + \varphi'(y)$$

Но так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то можем написать

$$\int \frac{\partial N}{\partial x}dx + \varphi'(y) = N$$

$$\varphi'(y) = N - \int \frac{\partial N}{\partial x}dx$$

или

$$\varphi'(y) = \int (N - \int \frac{\partial N}{\partial x} dx) dy + C_1$$

Таким образом, функция $u(x,y)$ будет иметь вид

$$U = \int M(x,y)dx + \int \left(N - \int \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) dy + C_1$$

Приравнивая это выражение произвольной постоянной С, получим общий интеграл уравнения (30.5).

$$\int M(x,y)dx + \int (N - \int \frac{\partial N}{\partial x} dx)\, dy = C.$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

Решение:

$$M = \frac{2x}{y^3};\ N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4};\ \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

Условие (30.6) выполняется при $y \neq 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ то, следовательно, $u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ неопределенная пока функция. Дифференцируем это соотношение по y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y).$$

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$, находим

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \text{ или } \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2};$$

Следовательно,

$$\varphi(y) = \int \frac{1}{y^2} dy,\ \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$u = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения есть

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

Уравнение Бернулли

К линейным уравнениям часто приводятся уравнения более сложного вида. Рассмотрим, например, так называемое уравнение Бернулли.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{(n)}$$

При $n = 0$ это линейное уравнение, а при $n = 1$ можно разделить переменные. При других значениях n оно сводится к линейному при помощи следующего приёма: делим обе части уравнения на y^n и записываем его так:

$$y^{-n}y^1 + p(x)y^{-n+1} = q(x)$$

Если ввести вспомогательную неизвестную функцию $y^{-n+1} = z$, то $z' = (-n+1) * y^{-n} * y'$ и уравнение имеет вид

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x)$$

Это линейное уравнение: решая его и переходя от z снова к y, мы и получим решение исходного уравнения.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями?
2. Напишите общее решение линейного уравнения.
3. Какие уравнения называются уравнением в полных дифференциалах?
4. Как решается уравнения в полных дифференциалах?
5. Напишите уравнение Бернулли.
6. Объясните ход решения уравнения Бернулли.

Модуль 12. Дифференциальное уравнения высших порядков

Лекция №31. Дифференциальное уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности. Уравнение, допускающее понижение порядка

Дифференциальное уравнения высших порядков

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной, выходящей в уравнение. Дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \dots\ y^{(n)}\right) = 0 \tag{31.1}$$

или, если его можно решать относительно n-ой производной,

$$y^{(n)} = f\ (x, y, y', y'', \dots\ \ y^{(n-1)}) \tag{31.2}$$

Для этого уравнения имеет место теорема о существовании и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме о решении уравнения первого порядка. Приведем его без доказательства.

Теорема. Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots\ \ y^{(n-1)})$$

функция $f(x, y, y', y'', \dots\ \ y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y, y', \dots\ \ y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения

$$x = x_0, y = y_0, y' = y_0', y'' = \ y_0'', \dots\ y^{(n-1)} = \ y_0^{(n-1)},$$

то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y|_{x=x0} = \ y_0, y'|_{x=x0} = \ y_0, \dots\ y^{(n-1)}|\ _{x=x0} = y_0^{(n-1)}.$$

Это условие называется начальным условием.

Введем понятие общего решения уравнения n-го порядка.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$$y = \varphi(x, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots \mathrm{C}_n),$$

зависящая от n произвольных постоянных $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots \mathrm{C}_n$ и такая, что:

а) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots \mathrm{C}_n$;

б) при заданных начальных условиях

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y^{(n-1)}{}_0$$
постоянные $С_1, С_2, \dots С_n$ можно подобрать так, что функция $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots c_n)$ будет удовлетворять этим условиям.

Всякая функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных $С_1, С_2, \dots С_n$ называется **частным решением**.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n-го порядка – значит:

а) найти его общее решение (если начальные условия не заданы) или

б) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Уравнения, допускающие понижения порядка

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференциального уравнения n-го порядка.

1. Уравнение вида
$$y^{(n)} = f(x) \qquad (31.3)$$
Найдем общий интеграл этого уравнения. Интегрируя по x левую и правую части, принимая во внимание, что $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, получим
$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + С_1$$
Интегрируя еще раз, получим
$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx + С_1 \right) dx = \iint f(x)dx + С_1 x + С_2$$
Продолжая аналогично получим, выражение общего интеграла
$$y = \iint \dots \int f(x)dx\,dx \dots dx + С_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + С_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + С_{n-1}x + С_n$$
Пример 1. Найти общий интеграл уравнения
$$y''' = sin2x$$
и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям
$$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \; y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \; y''|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$$
Решение. Последовательно 3 раза интегрируем данное уравнение.

$y'' = -\frac{1}{2}cos2x + C_1$, $y' = -\frac{1}{4}sin2x + C_1x + C_2$, $y = \frac{1}{8}cos2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + +C_3$. Это есть общий интеграл. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее данное начальное условие, достаточно определить соответствующие значения C_1, C_2, C_3.

Из условия $y''|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$ находим $C_1 = -1 - \frac{1}{2}, C_1 = -\frac{3}{2}$;

Из условия $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$ находим $0 = C_1 * \frac{\pi}{2} + C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{3\pi}{4}$;

Из условия $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$ находим $1 = -\frac{1}{8} + \left(-\frac{3}{2}\right) * \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{2} * \frac{\pi}{2} + C_3, C_3 = -\frac{3\pi^2}{16} + +\frac{9}{8}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{1}{8}cos2x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3\pi}{4}x - \frac{3\pi^2}{16} + \frac{9}{8}.$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение, не содержащее явным образом неизвестную функцию и ее производные до *(n-1)*-го порядка

$$F\ (x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots\ y^{(n)} = 0 \qquad (31.4)$$

Обозначим производную $y^{(k)} = p$, тогда $y^{(k+1)} = p', y^{(k+2)} = y'', \dots y^{(n)} == p^{(n-k)}$. Подставляя эти выражения производных в уравнение (31.4) получим уравнение *(n-k)*-го порядка

$$F\left(x, p, p', p'', \dots\ p^{(n-k)}\right) = 0$$

Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение

$$p = \varphi\ (x, C_1, C_2, \dots\ C_n)$$

А затем из соотношения $y^{(n)} = p$, относительно неизвестной функции получаем уравнение вида (1).

$$y^{(k)} = \varphi\ (x, C_1, C_2, \dots\ C_n)$$

Из этого выражения, интегрируя последовательно k раз, находим общий интеграл уравнения (31.4).

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$xy'' - y' = 0$$

Решение. Обозначим производную $\frac{dy}{dx} = p$, тогда $y'' = p'$ и мы получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p от x

$$xp' - p = 0$$

Разделяя переменные, будем иметь $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow p = \ c_1 * x$. Тогда из уравнения $y' = \ c_1 * x$. Получаем $y = \ c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$

3. Рассмотрим уравнение вида

$$F\big(y, y', y'', \dots \ y^{(n)}\big) = 0, \qquad (31.5)$$

не содержащее явным образом независимой переменной x. Для его решения снова положим $\frac{dy}{dx} = p$, но теперь мы будем считать p функцией от y (а не от x, как прежде). Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} * \frac{dy}{dx} = p * \frac{dp}{dy}, \dots$$

подставляя эти выражения в уравнение (31.5), получим уравнение *(n-1)*-го порядка относительно *p=p(y)*

$$\Phi\left(y, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \dots \ \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0 \qquad (31.6)$$

Предположим, уравнение (31.6) имеет решение

$$p = \varphi\ (y, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots \ \mathrm{C}_n)$$

Тогда учитывая $y' = p$, решение уравнение (31.5) находится из уравнения разделенных переменных

$$\frac{dy}{\varphi\ (y, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots \ \mathrm{C}_n)} = dx$$

Пример 3. Найти общий интеграл уравнения $y\, y'' - \ y'^2 = 0$. и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям *y (0)=1*, $y'(0) = 2$.

Решение. Введем обозначение $y' = p(y)$, $y'' = p * p'$, и мы получим уравнение первого порядка для функции *p(y)*

$y * \ p'p$ - $p^2 = 0$

Разделяя переменные, находим решение $p = c_1 y$ или $y' = c_1 y$. Интегрируя это уравнение, найдем общее решение $y = c_2 e^{c_1 x}$. Используя начальные условия, найдем частное решение $y = e^{2x}$.

Контрольные вопросы

1. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
2. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения.
3. Дайте определение частным решениям.
4. Как решается уравнение вида $y'' = f(x)$?

5. Как решается дифференциальное уравнение не содержащее явным образом независимой переменной x?

Лекция № 32. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Уравнение второго и высшего порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно совокупности искомой функции y и ее производных $y', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т.е имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \qquad (32.1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и $f(x)$ заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой мы рассматриваем уравнение (32.1). В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и $f(x)$ непрерывны при всех значениях x, причем коэффициент $a_0 = 1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него).

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным неоднородным. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (32.2)$$

и называется линейным однородным .

Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь в доказательствах уравнениями второго порядка.

Теорема 1. Если y_1и y_2 – два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (32.3)$$

то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Доказательство. Так как y_1и y_2 - решения, то

$$y_1'' + a_1 y' + a_2 y_1 = 0_1, y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \qquad (32.4)$$

Подставляя в уравнение (32.3) сумму $y_1 + y_2$ и принимая во внимание тождества (32.4), будем иметь $(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' +$ $+a_2(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$

т.е. $y_1 + y_2$ есть решение уравнения.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (32.3) и С - постоянная, то Cy_1 также решение уравнения (32.3).

Доказательство. Подставляя в уравнение (32.3) выражение Cy_1, получим

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1) = \mathrm{C}(y'' + a_1y' + a_2y_1) = \mathrm{c} * 0 = 0;$$
тем самым теорема доказана.

Определение 2. Два решения уравнения (32.3) y_1и y_2 называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е., если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const$$

В противном случае решения называются линейно независимыми.

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем линейное однородное уравнение второго порядка.

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{32.4}$$

где p и q - постоянные действительные числа. Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно, как было доказано выше, найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \text{ где } k = const, \tag{32.5}$$

тогда

$$y' = k\mathrm{e}^{kx}, y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}.$$

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (32.4), находим

$$\mathrm{e}^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $\mathrm{e}^{kx} \neq 0$,то, значит

$$\mathrm{k}^2 + \mathrm{pk} + \mathrm{q} = 0. \tag{32.6}$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (32.6), то e^{kx} будет решением уравнения (32.4). Уравнение (32.6) называется характеристическим уравнением по отношению к уравнению (32.4). Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня , обозначим их через k_1 и k_2. При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Возможны следующие случаи :

1. k_1 и k_2 –- действительные и притом не равные между собой числа ($k_1 \neq k_2$);
2. k_1 и k_2 – комплексные числа;
3. k_1 и k_2 –действительные равные числа $k_1 = k_2$;

Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительные и различны ($k_1 \neq k_2$). В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} = const$$

следовательно, общий интеграл имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

Пример 1. Дано уравнение $y'' + y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$. Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \;\; k_1 = 1, \;\; k_2 = -2;$$

Общий интеграл есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

II. Корни характеристического уравнения комплексные. Так как комплексные корни входят попарно сопряженными, то обозначим

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta$$

где $\alpha = -\frac{\rho}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Частные решения можно записать в форме

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{32.7}$$

Это - комплексные функции действительного аргумента удовлетворяющие дифференциальному уравнению (32.4). Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента

$$y = u(x) + i\vartheta(x) \tag{32.8}$$

удовлетворяет уравнению (32.4), то этому уравнению удовлетворяют функции $u(x)$ и $\vartheta(x)$. Действительно, подставляя выражение (32.8) в уравнение (32.4), будем иметь

$$[u(x) + i\vartheta(x)]'' + p[u(x) + i\vartheta(x)] + q[u(x) + i\vartheta(x)] \equiv 0$$

или $(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0$. Но комплексная функция равняется нулю тогда и только тогда, когда равно нулю действительная часть и мнимая часть, т.е.

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad v'' + pv' + qv = 0$$

Мы и доказали ,что $u(x)$ и $\vartheta(x)$ являются решением уравнения. Перепишем комплексные решения (32.7) в виде суммы действительной и мнимой части:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} * \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} cos\, \beta x - i e^{\alpha x} * sin\, \beta x$$

По доказанному частными решениями уравнения (1) будут действительные функции.

$$\widetilde{y_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

(32.9′)

$$\widetilde{y_2} = e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad (32.9'')$$

Функции $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ линейно независимы, так как

$$\frac{\widetilde{y_1}}{\widetilde{y_2}} = \frac{e^{\alpha x} cos\, \beta x}{e^{\alpha x} sin\, \beta x} = ctg\, \beta x \neq const$$

Следовательно, общее решение уравнения (32.4) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 \widetilde{y_1} + C_2 \widetilde{y_2} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x, \qquad (32.10)$$

где C_1 и C_2- произвольные постоянные.

Важным частным случаем решения (32.10) является случай, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые. Это имеет место тогда, когда в уравнении (32.4) $p = 0$, и оно имеет вид

$$y'' + qy = 0$$

Характеристическое уравнение (32.6) принимает вид $k^2 + q = 0, q > 0$

Корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \ \ \alpha = 0.$$

Решение (32.10) принимает вид

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

Пример 2. Дано уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$. Найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1$$

Решение. 1) напишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

и найдем его корни $k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i$. Следовательно, общий интеграл есть

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

III. Корни характеристического уравнения действительные и равные. В этом случае $k_1 = k_2$. Одно частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым. Будем искать второе частное решение в виде

$$y_2 = u(x)e^{k_1 x}$$

где $u(x)$- неизвестная функция, подлежащая определению.

Дифференцируя, находим

$$y_2' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{kx} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$$

Подставляя выражения производных в уравнение (1), получаем

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0$$

Так как k_1-кратный корень характеристического уравнения , то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0$$

Кроме того, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$или $2k_1 = -p, 2k_1 + p = 0$. Следовательно, для того чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1 x}u'' = 0,$ или $u'' = 0.$ Интегрируя , получаем $u = Ax + B.$ В частности, можно положить $A = 1,\ B = 0$; тогда $u = x$. Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять

$$y_2 = xe^{k_1 x}$$

Эти решения линейно независимые, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \not\equiv const.$ Поэтому общим интегралом будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

Пример 4. Дано уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$. Находим его корни: $k_1 = k_2 = 2$. Общим интегралом будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (32.11)$$

Если коэффициенты уравнения (32.11) постоянны, то общее решение находится так же, как и в случае уравнения второго порядка.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = 0$$

Находим корни характеристического уравнения

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = -1, \qquad k_3 = i, \qquad k_4 = -i.$$

Пишем общий интеграл

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

где $C_{1,} C_2, C_3, C_4$ –произвольные постоянные.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциальному уравнению n-го порядка.
2. Какие решения называются линейно независимыми?
3. Какое уравнение называется характеристическим уравнением?
4. Напишите общий интеграл для случая корни характеристического уравнения комплексные.

Лекция №33. Уравнение второго порядка с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{33.1}$$

где p и q- действительные числа; $f(x)$ непрерывная функция.

Нам известно, что общее решение такого уравнения представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решение соответствующего однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы умеем находить, а для нахождения частного решения можно применять метод вариации произвольных постоянных. Если в правой части уравнения (33.1) - многочлен, либо показательная функция, либо тригонометрическая функция $\sin \beta x$ или $\cos \beta x$, либо линейная комбинация перечисленных функций, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, не содержащим процесса интегрирования. Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (33.1).

1. Правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)$ (33.2)
где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$многочлен степени n.

Тогда частное решение $\bar{y}_{\text{част}}$ можно искать в виде

$$\bar{y}_{\text{част}} = Q_n(x) * x^r, \tag{33.3}$$

где $Q_n(x)$- многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ а r - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 \qquad \text{(Берман № 4272)}$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид.

$$y_{\text{одн}} = e^{3x}(C_1 + C_2x)$$

Так как правая часть уравнения многочлен второй степени и ни один из корней характеристического уравнения $k^2 - 6k + 9 = 0$ не равен нулю ($k_1 = k_2 = 3$), то частное решение ищем в виде

$$\bar{y}_{\text{част}} = (Ax^2 + Bx + C)x^0 = Ax^2 + Bx + C$$

где A, B и C- неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $y = Ax^2 + Bx + C$ и подставляя y, y' и y'' в данное уравнение, найдем

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства :

$$\begin{aligned} x^2:&\quad 9A = 2,\\ x:&\quad -12A + 9B = -1,\\ x^0:&\quad -6B + 2A + 9C = 3,\end{aligned}$$

находим: $A = \frac{2}{9}$, $\quad B = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}$.

Итак, частное решение данного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_{\text{част}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$$

а его общее решение

$$y = y_{\text{одн}} + \bar{y}_{\text{част}} = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$$

2. Правая часть имеет вид: $\quad f(x) = P_n(x) * e^{\alpha x}, \qquad (33.4)$

где $P_n(x)$-многочлен степени n. Тогда возможны следующие частные случаи:

а) число α не является корнем характеристического уравнения. В этом случае $f(x) = P_n(x)$, т.е имеет место случай (33.1)

б) число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения. В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$\bar{y}_{\text{част}} = xQ_n(x)e^{\alpha x} \qquad (33.5)$$

в) число α есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда частное можно брать в форме.

$$\bar{y}_{\text{част}} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (33.6)$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x) \qquad (Б.4275.(7))$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1; k_2 = 2$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Среди корней характеристического уравнения имеется только один корень $k_1 = \alpha = 1$. В данном случае $P_n(x) = 3 - 4x$ многочлен первой степени. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде

$$\bar{y}_{част} = x * e^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем $-2A = -4$, $2A - B = 3$, отсюда $A = 2, B = 1$. Подставляя найденные значения A и B в выражение для $\bar{y}_{част}$, получаем частное решение данного уравнения

$$\bar{y}_{част} = xe^x(2x + 1)$$

Общее решение имеет вид

$$y_{общ} = y_{одн} + \bar{y}_{част} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x^2 e^x + xe^x$$

3. Правая часть имеет вид:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$$

где M, N и β-известные числа. Тогда частное решение $\bar{y}_{част}$ надо искать в виде:

$$\bar{y}_{част} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) x^r$$

где A и B - неизвестные коэффициенты, а -число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

4. Правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} * [P_n \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x],$$

где $P_n(x)$ -многочлен степени n, a $P_m(x)$ многочлен степени m. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\bar{y}_{част} = x^r e^{\alpha x}[Q_1 \cos \beta x + Q_2 \sin \beta x],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$многочлены степени S, $S = \max(n, m)$, a r –число корней характеристического уравнения , равных $\alpha + i\beta$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - y = 3 * e^{2x} \cos x$

Решение. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{2x}[M \cos x + N \sin x]$$

причем $M = 3, N = 0$ Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения есть

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Так как числа $\alpha + i\beta = 2 + i * 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\bar{y}_{\text{част}} = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$(2A + 4B)e^{2x}\cos x + (-4A + 2B)e^{2x}\sin x = 3\, e^{2x}\cos x$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$2A + 4B = 3, -4A + 2B = 0$$

Отсюда $A = \frac{3}{10}$, B=3/5. Следовательно, частное решение

$$\bar{y}_{\text{част}} = e^{2x}(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x),$$

а общее

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x)$$

Докажем теорему, которую часто применяют при решении линейных неоднородных уравнений, в правой части которых сумма нескольких слагаемых.

Теорема. Если $\bar{y}_1$- решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \qquad (33.7)$$

а $\bar{y}_2$ решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x), \qquad (33.8)$$

то сумма $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ является решением уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) \qquad (33.9)$$

Доказательство. Составим сумму $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ и подставим ее в левую часть уравнения (33.9). Получим

$$(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)'' + p(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)' + q(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = (\bar{y}_1'' + p\bar{y}_1{}' + q\bar{y}_1) +$$
$$+(\bar{y}_2'' + p\bar{y}_2' + q\bar{y}_2) = f_1 + f_2,$$

так как по условию выражение в первой скобке равно $f_1(x)$, а выражение во второй скобке равно $f_2(x)$, следовательно, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ решение уравнения (33.9).

Контрольные вопросы

1. В каком виде можно искать частное решение уравнения

   $y'' + py' + qy = f(x)$ если

   а) $f(x) = P_n(x)$

   б) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

в) $f(x) = M\cos x + N\sin x$

г) $f(x) = e^{\alpha x}[P_n \cos\beta x + P_m \sin\beta x]$?

2. Сформулируйте теорему, если правая часть уравнения есть сумма нескольких слагаемых.

Лекция №34. Нормальная система дифференциальных уравнений. Метод исключения для решения нормальной системы

Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_{2,\ldots,} y_n)\\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_{2,}\ \ldots, y_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_{2,}\ \ldots, y_n)
\end{aligned}
\qquad (34.1)
$$

где $y_1, y_{2,}\ \ldots y_n$ - искомые функции, x −аргумент.

Такая система, когда в левой части уравнении стоят производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется нормальной.

Проинтегрировать систему – значит определить функцию $y_1, y_{2,}\ \ldots y_n$, удовлетворяющие системе уравнений (34.1) и данным начальным условиям:

$$(y_1)_{x=x_0}=y_{10},\ (y_2)_{x=x_0}=y_{20},\ \ldots(y_n)_{x=x_0}=y_{n0}, \qquad (34.2)$$

Интегрирование системы вида (34.1) производится следующим образом.

Дифференцируем по x первое из уравнений (34.1) :

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$,…, $\frac{dy_n}{dx}$ их выражениями f_1, f_2,…, f_n из уравнений (34.1), будем иметь уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_{1,} \ldots, y_{n,}).$$

Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдем:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_{1,} \ldots, y_{n,}).$$

Продолжая далее, таким же образом получим, уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_{1,}\ldots, y_{n,}).$$

Итак, мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_{2,} \ldots y_n) \\ &\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_{2,} \ldots y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^n y_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, y_{2,} \ldots y_n) \end{aligned} \qquad (34.3)$$

Из первых n-1 уравнений определим $y_2, y_{3,} \ldots y_n$, выразив их через x, y_1 и производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y_1}{dx^n}$:

$$\begin{aligned} &y_2 = \varphi_2\,(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &y_3 = \varphi_3\,(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = \varphi_n\,(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \end{aligned} \qquad (34.4)$$

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений (34.3), получим уравнение n- го порядка для определения y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \qquad (34.5)$$

Решая это уравнение, определим y_1:

$$y_1 = \psi\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (34.6)$$

Дифференцируя последнее выражение n-1 раз, найдем производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y_1}{dx^n}$ как функции от $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$$\begin{aligned} &y_2 = \varphi_2\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = \varphi_n\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned} \qquad (34.7)$$

Для того чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям (34.2), остается лишь найти из уравнений (34.6) и (34.7) соответствующие значения постоянных C_1, C_2, $\ldots, C_n$.

Пример. Проинтегрировать систему:

$$\frac{dx}{dt} = y+z\,; \quad \frac{dy}{dt} = x+z; \quad \frac{dz}{dt} = y+x.$$

Решение. Дифференцируя по t первое уравнение, находим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x+z) + (x+y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x+e+z.$$

Исключая переменные y и z из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y+z; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x+e+z,$$

Будем иметь уравнение второго порядка относительно x

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим его общее решение:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \qquad (34.8)$$

Отсюда находим:

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \text{ и } y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z. \qquad (34.9)$$

Подставляя в третье из заданных уравнений найденные выражения для x и y, получим уравнения для определения z :

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$z = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \qquad (34.10)$$

Но тогда на основании (34.9) получаем:

$$y = -(C_1+C_2)e^{-t} + C_2 e^{2t} \qquad (34.11)$$

Уравнения (34.8), (34.11) и (34.10) дают общее решение заданной системы.

Контрольные вопросы

1. Что называется системой дифференциальных уравнений?
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Описать приемы сведение произвольной системы дифференциальных уравнений к нормальной.

Модуль 13. Числовые ряды

Лекция №35. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Свойства. Гармонический ряд. Признак сравнения знакоположительных рядов

Определение. Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots.. , \qquad (35.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - члены числовой последовательности.

Коротко ряд (35.1) записывается так:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Выражение для n- го члена ряда при произвольном n называется общим членом ряда. Ряд считается заданным, если задано его общий член.

Чаще всего общий член ряда задается формулой u_n= f(x), пользуясь которой можно сразу написать любой член ряда. Например, если $u_n=\frac{1}{2^n}$, то ряд имеет вид

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Примеры: 1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

2) $1+2+3+\ldots n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} n$

Пусть дан ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

Сумму n первых его членов обозначим через s_n

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

и назовем его n- й частичной суммой ряда

$$s_1=u_1,$$
$$s_2=u_1+u_2$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Определение. Если при n → ∞ существует предел последовательности частичных сумм членов данного ряда

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

то ряд называется сходящимся, а число s – его суммой. Если же этот предел равен ∞ или не существует, то ряд называется расходящимся. Расходящиеся ряды суммы не имеют.

Приведем теперь простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots..$$

сходится и имеет сумму s, то ряд, образованный из произведений всех членов данного ряда на одно и то же число α :

$$\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 + \ldots + \alpha u_n + \ldots..$$

тоже сходится и имеет сумму αs.

2. Если сходятся ряды

$$s' = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots..$$

$$s'' = v_1 + v_1 + v_1 + \ldots + v_1 + \ldots,$$

то ряд, образованный сложением соответствующих членов данных рядов:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$

тоже сходится и его сумма равна $s' + s''$.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем приписывания или отбрасывания любого конечного числа членов.

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд сходится, то общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{35.2}$$

Доказательство. Известно, что $u_n = s_n - s_{n-1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s,$$

отсюда получается равенство (2)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Теорема доказана.

Следует твердо помнить, что стремление n – го члена ряда к нулю не является достаточным для сходимости ряда.

Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

который называется **гармоническим**. Здесь $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, тем не менее ряд расходится. В самом деле, сейчас мы докажем, что $s_n \to$

∞ при n→ ∞. Известно, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$ e . Для всех n из этого равенства имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \text{ e}$$

Логарифмируем это неравенство

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \qquad (35.3)$$

Из (35.3) имеем

$$\ln 2 < 1$$
$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$
$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots..$$
$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Почленно суммируем эти неравенства ln(n+1)<1+ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$. Выражение в правой части последнего неравенства является суммой n первых членов гармонического ряда. Если мы обозначим его через s_n, то

$$s_n > \ln(n+1)$$

Из этого неравенства $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ или s >. Таким образом, мы доказали, что гармонически ряд расходится.

Если все члены ряда положительные, то ряд называется знакоположительным рядом.

Признаки сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \qquad (u_k > 0) \qquad (35.4)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k + \ldots \qquad (v_k > 0) \qquad (35.5)$$

и пусть каждый член ряда (35.4) не больше соответствующего члена ряда (35.5), т.е. $u_k \le v_k$ (35.6)

Тогда:

1) Если сходится ряд (35.5), то сходится и ряд (35.4).
2) Если расходится ряд (35.4), то расходится и ряд (35.5).

Доказательство. Докажем сначала первую часть. Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \ \ \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

По условию ряд (35.5) сходится, поэтому $\sigma_n < \sigma$, где σ - сумма второго ряда. А из условия (35.6) следует, что

$$s_n \leq \sigma_n < \sigma,$$

т.е. что частичные суммы ряда (35.4) ограничены сверху. Но тогда ряд (35.4) сходится.

Для доказательства второй части достаточно заметить, что, поскольку ряд (35.4) расходится, его частные суммы неограниченно возрастают:

$$s_n \to \infty.$$

Так как $\sigma_n \geq s_n$, то и $\sigma_n \to \infty$. Следовательно, ряд (35.5) расходится, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называется гармоническим?
3. Необходимый признак сходимости.
4. Признак сравнения.

Лекция №36. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признак Даламбера. Пусть дан ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.. \qquad (36.1)$$

Если при $n \to \infty$ существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, равный q:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \qquad (36.2)$$

то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится. При $q = 1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. Пусть $q<1$. В силу определения предела всегда можно выбрать такое число N, что при всех $n \geq N$ будет справедливо неравенство

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < q$$

Мы имеем

$$u_{N+1} < q u_N$$
$$u_{N+2} < q u_{N+1} < q^2 u_{N+1}$$
$$u_{N+3} < q u_{N+2} < q^3 u_{N+1}$$

…………

Отсюда вытекает,что члены ряда

$$u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$$

представляющего N- й остаток данного ряда, меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, N—й остаток ряда сходится, но тогда сходится и сам ряд.

Пусть q>1. Тогда можно выбрать такое число N, что при всех $n \geq N$ будет справедливо неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ или $u_{n+1} > u_n$. Но тогда каждый последующий член ряда будет больше предыдущего и, поскольку все они положительны, не может выполняться необходимый признак сходимости ряда, согласно которому общий член должен стремиться к нулю. Значит, ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

Решение: Здесь $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}$.

Отсюда: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$.

Ряд сходится.

Радикальный признак Коши. Если для ряда с положительными членами (36.1) величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел q при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то:

1) в случае q <1 ряд сходится;
2) в случае q >1 ряд расходится;

Доказательство. Пусть q<1. Рассмотрим число *l*, удовлетворяющее условию q<*l*<1. В силу определения предела всегда можно выбрать такое число N, что при всех n > N будет справедливо неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, $u_n < q^n$. Тогда $S_n < \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$,

$S = \lim_{n \to \infty} S_n < \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Отсюда вытекает, что данный ряд сходится.

Интегральный признак Коши. Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (u_n > 0),$$

члены которого являются значениями непрерывной функции f(x) при целых значениях аргумента x:

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),\ \ldots$$

и пусть f(x) монотонно убывает в интервале (1, ∞). Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда.

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} +,,, + \frac{1}{n^p} +,,, = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Решение: Функция f(x) является $\frac{1}{x^p}$. Интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x \to \infty} (x^{-p+1} - 1)$$

сходится, если p>1, так как в этом случае $\lim_{x \to \infty} x^{-p+1} = 0$ и $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$; если же p<1, то интеграл расходится, так как теперь $\lim_{x \to \infty} x^{-p+1} = \infty$. При p=1 интеграл тоже расходится $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$ Поэтому рассматриваемый ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p \leq 1$.

Контрольные вопросы

1. Что такое достаточность и необходимость?
2. Признак Даламбера.
3. Радикальный признак Коши
4. Интегральный признак Коши.

Лекция № 37. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда

Ряд, состоящий как из положительных, так и отрицательных членов, называется знакопеременным. Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$u_1\text{-}u_2+u_3\text{-}u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (37.1)$$

Теорема Лейбница. Если в знакочередующемся ряде абсолютные величины членов ряда убывают, т.е. в ряде (37.1) $u_1 > u_2 > \ldots > u_{n-1} > u_n \ \ldots (u_n > 0)$ и общий член стремится к нулю, то ряд сходится, причем его сумма по абсолютной величине меньше u_1, т.е. $0<S<u_1$.

Доказательство: Возьмем для определенности перед всем рядом (37.1) знак плюс

$$u_1 - u_2+u_3\text{-}u_4 \ \ldots\text{-}u_{2m}+u_{2m+1}\text{-} \ \ldots$$

Рассмотрим сначала последовательность частичных сумм s_{2m} с четными индексами и запишем их в виде

$$s_{2m}= (u_1\text{-}\ u_2) +(u_3\text{-}u_4\ ) +\ldots+ (u_{2m-1}\text{-}\ u_{2m}) \ .$$

Так как по условию выражение в каждой скобке положительно и число таких скобок растет вместе с m, то последовательность s_{2m} будет возрастающей. Наоборот, последовательность частичных сумм с нечетными индексами будет убывающей, так как

$$s_{2m} = u_1\text{-}\ [(u_2\text{-}u_3)+(\ u_4\ \text{-}\ u_5) +\ldots+(\ u_{2m}\text{-}\ u_{2m+1})]$$

и сумма в квадратной скобке, на основании только что высказанных соображений, будет возрастать вместе с m.

Таким образом,

$$s_2<s_4<s_6 < \ldots \quad \text{и} \quad s_1>s_3>s_5> \ldots$$

Легко заметить, что любая сумма с четным индексом меньше любой суммы с нечетным индексом

$$\mathrm{s}_{2\mathrm{m}} < \mathrm{s}_{2\mathrm{k}+1}$$

Действительно, если m< k, то

$$s_{2m}< s_{2k}\ = s_{2k+1}\ \text{-}\ \ u_{2k+1} <s_{2k+1}\ .$$

Если же m>k (или m=k), то

$$s_{2m} = s_{2m+1}\text{-}\ u_{2m+1}\ \ <s_{2m+1} < s_{2k+1}.$$

Последовательность сумм с четными индексами возрастает и ограничена сверху; значит, она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = \mathrm{s}$.

Так как $s_{2m+1}\ = s_{2m}+ u_{2m+1}$ и $u_{2m+1} \to 0$ при $m\to\infty$, то

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m}= \mathrm{s},$$

Пример. Исследовать сходимость ряда.

$$1+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ \text{-}\ \frac{1}{4} + \ldots =\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Решение: 1) $1> \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \ \ldots.> \frac{1}{n} >\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n_n}$. По теореме Лейбница данный ряд сходится.

Рассмотрим знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (37.2)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|u_1| + |u_2| +\ldots|u_n| +\ldots \qquad (37.3)$$

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Доказательство. Обозначим через s_n сумму n первых членов ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

через s_n^+ - сумму всех положительных членов, а через s_n^- - сумму абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов ряда. Тогда

$$s_n = s_n^+ - s_n^- \quad \text{и} \quad \sigma_n = s_n^+ + s_n^-,$$

где

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| +\ldots|u_n| +\ldots.$$

Так как по условию σ_n имеет предел (обозначим его через σ), а s_n^+ и $-s_n^-$ положительный и возрастающий функции от n, причем $s_n^+ \le \sigma_n < \sigma$ и $s_n^- \le \sigma_n < \sigma$, то и они имеют пределы. Вследствие этого и $s_n = s_n^+ - s_n^-$ при $n \to \infty$ стремится к пределу, что и требовалось доказать.

Этот достаточный признак не является необходимым, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться и тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится. Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится по теореме Лейбница, а ряд (гармонический)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

составленный из абсолютных величин его членов, как известно, расходится.

Определение. Ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется **абсолютно сходящимся**.

Если ряд сходится, а ряд, образованный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный ряд называется **неабсолютно** или **условно сходящимся**.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают почти всеми свойствами конечных сумм. Например, свойства переместительности. При любой перестановке членов абсолютно сходящийся ряд суммы не меняет.

Сумма условно сходящегося ряда при перестановке членов может измениться, более того можно так переставить члены, что получится расходящийся ряд.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

Решение: Данный ряд по теореме Лейбница сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Поэтому рассматриваемый ряд является условно сходящимся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда.

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Решение. Данный ряд по теореме Лейбница сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, тоже сходится. Поэтому рассматриваемый ряд является абсолютно сходящимся.

Контрольные вопросы

1. Какой ряд называется знакопеременным рядом?
2. Сформулировать теорему Лейбница.
3. Какие ряды называется абсолютно сходящимися.

Модуль 14. Функциональные ряды

Лекция№38. Функциональные ряды. Область сходимости. Мажорируемые ряды

Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n + \ldots$ называется функциональным, если члены его являются фукциями от x.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (38.1)$$

Если в ряд (38.1) вместо x подставить число x_0, то получится числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots, \qquad (38.2)$$

если этот числовой ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости функционального ряда. Если же ряд расходится, то точка x_0 называется точкой расходимости функционального ряда.

Определение. Множество всех x, при которых функциональный ряд сходится, называют областью сходимости этого ряда.

Сумму n - первых членов ряда (38.1) назовем n - ой частичной суммой

$$S_n = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x)$$

Если этот ряд сходится и сумма равна s(x), то s(x)=$s_n(x)$ +$r_n(x)$, где $r_n(x)$ есть сумма ряда $u_n(x)+\ldots$, т.е. $r_n(x)=u_n(x)+u_n(x)+\ldots$
В этом случае величина $r_n(x)$ называется остатком ряда (38.1). Для всех значений x в области сходимости ряда имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$,

Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[s(x)-s_n(x)]=0$, т.е. остаток $r_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда.

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots + \frac{x^n}{2^n} + \cdots .$$

Решение: Составим ряд из абсолютных величин.

$$\left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{x^2}{2^2}\right| + \cdots + \left|\frac{x^n}{2^n}\right| + \cdots$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1(x)}}{U_{n(x)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{x^n}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^n.2} \cdot \frac{2^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|$$

Ряд сходится при $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, отсюда $|x| < 2$ или $-2 < x < 2$.

Область сходимости $x \in (-2; 2)$. При x=2 данный ряд имеет вид

$$1-1+1-\cdots$$

Этот ряд является расходяшимся. При x= -2 ряд имеет вид

$$-1+1-1+1-1+...$$

Этот ряд тоже расходится.Таким образом, при x≥ 2 или x≤ -2 ряд расходится.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда.

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+x^2}+\cdots$$

Решение: Для всех x выполняется неравенство $\frac{1}{n^2+x^2}\leq\frac{1}{n^2}$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. По первому признаку сравнения рядов функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$ сходится для всех x. Областью сходимости является x $\in(-\infty:\infty)$.

Мажорируемые ряды

Определение. Функциональный ряд
$u_1(x)$+$u_2(x)$+$u_3(x)$+…+$u_n(x)$ +... называется мажорируемым в некоторой области изменения *x,* если существует такой сходящийся числовой ряд

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+... \qquad (38.3)$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)|\leq\alpha_1, |u_2(x)|\leq\alpha_2,\ldots, |u_n(x)|\leq\alpha_n,\ \ldots \qquad (38.4)$$

Иначе говоря, ряд называется мажорируемым, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Например, ряд

$$\frac{\cos(x)}{1}+\frac{cos2(x)}{2^2}+\frac{cos3(x)}{3^2}+\ldots+\frac{cosn(x)}{n^2}+\ldots$$

есть ряд, мажорируемый на всей оси *Ox*. Действительно, для всех значений x выполняется соотношение

$$\left|\frac{cosn(x)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}\qquad(\text{n} = 1,2,\ldots),$$

а ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

как известно, сходится.

Определение. Пусть функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

мажорируем на отрезке [a,b]. Пусть s(x) –сумма этого ряда, $s_n(x)$ - сумма n первых членов этого ряда. Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на отрезке [a,b], если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех n > N будет выполняться неравенство $|\, s(x) - s_n(x)\, | < \varepsilon$ для любого x из отрезка [a,b].

Свойства равномерно сходящихся рядов

1.О почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. Если функциональный ряд (38.1) равномерно сходится при x∈ [a,b] и члены ряда непрерывны, причем S(x) является суммой функционального ряда то для любых значениях x_1 и $x_2 \in$ [a,b] справедливо равенство:

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx + \ldots$$

т.е. ряд можно почленно интегрировать

$$\int_{x_1}^{x_2} (\, u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \,)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx + \ldots$$

2. О почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда. Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке [a,b], сходится на этом отрезке к сумме s(x) и ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots,$$

составленный из производных его членов, мажорируем на том же отрезке, то сумма ряда производных равна производной от суммы первоначального ряда, т.е. $s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$

Контрольные вопросы

1. Как найдется область сходимости функционального ряда?
2. Что такое мажорируемый ряд?
3. Что такое равномерная сходимость?

Лекция №39. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование рядов

Степенные ряды

Частным случаем функционального ряда являются степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{39.1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$- постоянные числа, называемые коэффициентами.

Теорема (теорема Абеля). 1) Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$;

2) Если ряд расходится при некотором значении x_0', не равном нулю, то он расходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0'|$.

Доказательство. 1) Так как, по предположению, числовой ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{39.2}$$

сходится, то его общий член $a_nx^n \to 0$ при $n \to \infty$, а это значит, что существует такое положительное число M, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M.

Перепишем ряд (39.1) в виде

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{39.3}$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{39.4}$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \tag{39.5}$$

При $|x| < |x_0|$ последний ряд представляет геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (39.4) меньше соответствующих членов ряда (39.5), то ряд (39.4) тоже сходится, а это и значит, что ряд (39.2) или (39.3) сходится абсолютно.

2) Теперь нетрудно доказать и вторую часть теоремы: пусть в некоторой точке x_0' ряд (39.1) расходится. Тогда он будет расходится и в любой точке x, удовлетворяющей условию $|x| > |x_0'|$.

Из теоремы Абеля следует, что при $|x| < |x_0|$ или $-x_0 < x < x_0$ степенной ряд абсолютно сходится.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал от –R до R, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называют радиусом сходимости.

Пусть имеем ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{39.6}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \ldots + |a_n||x^n| + \ldots \tag{39.7}$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1(x)}}{U_{n(x)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L|x|$$

Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L|x|$. Ряд (10) сходится, если $L|x| < 1$, т.е., если $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится, если $L|x| > 1$, т.е., если $|x| < \frac{1}{L}$.

Из предыдущего следует, что интервал $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ есть интервал сходимости степенного ряда (39.6), т.е.

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Аналогичным образом для определения интервала сходимости можно пользоваться признаком Коши и тогда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Свойства степенных рядов

1) Если степенной ряд сходится в интервале (-R,R), то этот ряд сходится равномерно на любом отрезке (-r,r) целиком входящим в этот интервал 0<r<R

2) Если степенной ряд сходится в интервале (-R,R), то сумма этого ряда непрерывна в каждой точке этого интервала.

3) Если степенной ряд сходится в интервале (-R,R), то в каждой точке этого интервала ряд можно почленно дифференцировать.

4) Если степенной ряд сходится в интервале (-R,R), то этот ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, целиком лежащим в этом интервале.

Пример. Определить интервал сходимости ряда

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+\ldots$$

Решение. Применяем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x|=|2x|$$

Ряд сходится, если $|2x|<1$, т.е. если $|x|<\frac{1}{2}$; при $x=\frac{1}{2}$ ряд сходится; при $x=-\frac{1}{2}$ ряд расходится.

Контрольные вопросы

1. Что такое степенной ряд?
2. Сформулируйте и докажите теорему Абеля.
3. Свойства степенных рядов.
4. Почленное дифференцирование степенных рядов.
5. Почленное интегрирование степенных рядов.

Лекция №40. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд. Биномиальный ряд. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. Решение дифференциальных уравнении с помощью рядов

Пусть для функции f(x), имеющей все производные до (n+1)-го порядка включительно, в окрестности точки x=a справедлива формула, которая называется рядом Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (40.1)$$

Это равенство справедливо лишь в том случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. В этом случае написанный справа ряд сходится и его сумма равна данной функции f(x).

Если в ряде Тейлора положим a=0, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (40.2)$$

Разложение заданной функции f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 распадается на два этапа.

1) Сначала мы вычисляем значения функции f(x) и ее производных в точке x_0 и составляем ряд Тейлора для функции f(x). При этом предполагается, что функция f(x) бесконечное число раз дифференцируема.

2) Находим интервал, в котором составленный ряд Тейлора сходится к функции f(x), т.е. устанавливаем , для каких значений x остаточный член ряда $R_n(x)$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Приведём разложение простых элементарных функции в ряд Маклорена.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (40.3)$$

$$cosx = 1-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (40.4)$$

$$sinx = x-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad (40.5)$$

При любом x суммы этих рядов соответственно равны функциям e^x, $sinx$, $cosx$.

Если в разложении (40.3) заменить x на $-x$, то имеем

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (40.6)$$

Из равенств (40.3) и (40.6) получаем

$$shx=\frac{e^x - e^{-x}}{2} = = x+\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Биномиальный ряд. Разложим в ряд Маклорена функцию f(x) = $(1+x)^m$, где m- произвольное постоянное число. Заметив, что функция f(x) = $(1+x)^m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+x)\, f'(x) = m\, f(x) \quad (40.7)$$

и условию f(0) = 1, найдем степенной ряд, сумма которого s(x) удовлетворяет уравнению (40.7) и условию s(0) = 1:

$$s(x) = 1+ a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (40.8)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях равенства, находим:

$$a_1 = m;\ a_1 + 2a_2 = ma_1;\quad \ldots,\ na_n + (n+1)\, a_{n+1} = ma_n;\ \ldots$$

Подставляя их в формулу (40.8), получим:

$$S(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (40.9)$$

Если m – целое положительное число, то,начиная с члена, содержащего x^{m+1}, все коэффициенты равны нулю, и ряд превращается в многочлен.

Определим радиус сходимости ряда (40.9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \frac{n!}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n} = x \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(m-n)}{n+1}\right| = |x|$$

Таким образом, ряд (40.9) сходится при $|x| < 1$.
В интервале (-1,1) ряд (40.9) представляет функцию s(x), удовлетворящую дифференциальному уравнению (40.7) и условию s(0) = 1.

Так как дифференциальному уравнению (40.7) и условию s(0) = 1 удовлетворяет единственная функция, то, следовательно, сумма ряда (40.9) тождественно равна функции $(1+x)^m$, и мы получим разложение, которое называется **биномиальным рядом:**

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

В частности, при m= -1 получаем:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (40.10)$$

Интегрируя равенство (40.10) в пределах от 0 до x, получим:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)dx$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots \qquad (40.11)$$

Это равенство справедливо в интервале (1,-1).

Если в этой формуле заменить x на $-x$, то получается ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\ldots \qquad (40.12)$$

который сходится в интервале (1,-1). Вычитая почленно равенство (40.12) из равенство (40.11) , находим:

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 2(x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{3}+..........+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+........)$$

Если в равенстве (40.10) заменить x на x^2, то получается ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+..........(-1)^n x^{2n}+............... , \quad (40.13)$$

который сходится в интервале (1,-1).

Интегрируя равенство (40.13) в пределах от 0 до x, получим:

$$arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...........+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+.......$$

При m= - $\frac{1}{2}$ будет:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^2\cdot 3!}x^3+........... \quad (40.14)$$

В равенстве (40.14), заменив x на $-x^2$, получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 2\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+........ ,$$

который сходится в интервале (1,-1). Интегрируя равенство (40.14) в пределах от 0 до x, получим:

$$\arcsin x = x\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7}+..........$$

Применение степенных рядов в приближенных вычислениях. Решение дифференциальных уравнении с помощью рядов

Если функция f(x) в окрестности точки x_0 разлагается в ряд Тейлора, то точное значение функции f(x) в любой точке этой окрестности может быть вычислено по ряду Тейлора, а приближенное ее значение – по частичной сумме этого ряда. Возникающую при этом ошибку можно оценивать либо опираясь на теорему об оценке остаточного члена, либо непосредственно оценивая остаток ряда.

Примеры. 1) Вычислить cos5^0 с точностью до 0.001.

Решение. Запишем разложение функции cosx в ряд Маклорена

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (40.15)$$

5^0 переведем в радианы $5^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{36}$.

$$cos5^0 = \cos\frac{\pi}{36} = 1-\frac{(\frac{\pi}{36})^2}{2!}+\frac{(\frac{\pi}{36})^4}{4!}-\frac{(\frac{\pi}{36})^6}{6!}+\ldots$$

Вычисление будем выполнять четырьмя знаками после запятой. Этот ряд является знакочередующимся рядом и остаток ряда по абсолютной величине не превышает первого из отброшенных членов.

$$\frac{(\frac{\pi}{36})^2}{2!} = 0.0038 > 0.001\ ;\ \frac{(\frac{\pi}{36})^2}{2!} = 4\cdot 10^{-6} < 0.001$$

$$cos5^0 \approx 1-\frac{(\frac{\pi}{36})^2}{2!} = 1 - 0.0038 = 0.9962.$$

2) Вычислить $\ln\frac{3}{2}$ с точностью до 0.001.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

В этой формуле вместо x подставляем $\frac{1}{2}$ и имеем:

$$\ln\frac{3}{2} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + ...$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6} = 0.003 > 0.001\ ,\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} < 0.0001.$$

$$\ln\frac{3}{2} \approx 0.5 - 0.125 + 0.041 - 0.015 + 0.006 - 0.003 = 0.404$$

3) Вычислить интеграл. $\int_0^x \frac{sinx}{x}$

Решение. Деля ряд для sinx на x, получим

$$\frac{sinx}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Этот ряд, как и ряд для sinx, имеет своим интервалом сходимости всю ось Ox. Интегрирование дает

$$\int_0^x \frac{sinx}{x} = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x5^3}{5!5} - \dots$$

4) Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения второго порядка :

$$y'' = F(x, y, y'), \qquad (40.16)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\ ,\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \qquad (40.17)$$

Решение. Допустим, что решение y = f(x) существует и представимо в виде ряда Тейлора:

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} f''(x_0) + \dots \qquad (40.18)$$

Нам нужно найти f(x_0), $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, т.е. значения производных от частного решения при $x = x_0$. Но это можно сделать при помоши уравнения (40.15) и условий (40.16). Действительно, из условий (40.16) следует:

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y'_0;$$

из уравнения (40.15) получаем:

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = \mathrm{F}(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя обе части уравнения (40.15) по x

$$f''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\, y' + F'_{y'}(x, y, y')\, y'' \qquad (40.19)$$

и подставляя значение $x = x_0$ в правую часть, найдем:

$$f'''(x_0) = (y''')\,(y''')_{x\,=\,x_0}.$$

Дифференцируя соотношение (40.19) еще раз, найдем:

$$f^{\mathrm{IV}}(x_0) = (y^{IV})_{x\,=\,x_0}$$

и т.д. Найденные значения производных подставляем в равенство (40.18). Для тех значений x, для которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

Пример. Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка y'' - xy = 0 при начальных условиях $y_{|x=0} = 0$, $y'_{|x=0} = 1$.

Решение. Решение ищем в виде ряда, расположенного по степеням x:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Коэффициенты a_0 и a_1 находим из начальных условий:

$$a_0 = y_{|x=0} = 0, \; a_1 = y'_{|x=0} = 1.$$

Дважды дифференцируем ряд:

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_0 x + \ldots + n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставляя в уравнение вместо y и y'' их разложения, получаем тождество

$$2a_2 + 3\cdot 2a_0 x + \ldots + n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \ldots = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_{n-3} x^{n-2} + \ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$a_2 = 0,\; a_3 = 0,\; 4\cdot 3a_4 = 1,\; \ldots,\; n(n-1)\, a_n = a_{n-3}.$$

Поэтому $a_4 = \frac{1}{3\cdot 4}$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $a_8 = 0$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$

и вообще $a_{3m-1} = a_{3m} = 0$, $a_{3m+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots 3m(3m+1)}$.

Значит,

$$y = x+\frac{1}{3\cdot4}x+\frac{1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\ldots+\frac{1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot\ldots3m(3m+1)}x^{3m+1}+\cdots$$

С помощью признака Даламбера легко убедиться в том ,что этот ряд сходится на всей оси Ox и, следовательно, представляет искомое решение при всех x.

Контрольные вопросы

1. Напишите ряд Тейлора.
2. Ряд Маклорена.
3. Биномиальный ряд.
4. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Лекция №41. Ряды Фурье и коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле. Разложение в ряд Фурье функции с периодом 2π

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots, \quad (41.1)$$

членами которого являются синусы и косинусы от целых кратных значений аргумента x, называется тригонометрическим рядом. Постоянные a_0 , a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_n , b_n …называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Коротко тригонометрический ряд будем записывать так:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Если ряд (41.1) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом 2π, так как $sinnx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π. Таким образом,

$$f(x) = f(x+2\pi).$$

Пусть периодическая с периодом 2π функция f(x) такова, что она представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi,\pi)$, т.е. является суммой этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (41.2)$$

Пусть коэффициенты этого ряда таковы, что ряд, составленный из абсолютных величин этих коэффициентов, сходится

$$\frac{a_0}{2}|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\ldots+|+|a_n|+|b_n|+ \quad (41.3)$$

но члены ряда (1) и (3) удовлетворяют неравенствам

$$|a_n cosnx| \le |a_n|, \quad |b_n sinnx| \le |b_n|$$

Тогда ряд (41.1) мажорируем и, следовательно, его можно почленно интегрировать. Проинтегрируем обе части равенства (41.2) в пределах от $-\pi$ до $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cosnx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_0 sinnx\, dx\right).$$

Вычислим отдельно каждый интеграл, встречающийся в правой части:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 cosnx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosnx\, dx = \frac{a_0 \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 sinnx\, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} sinnx\, dx = \frac{a_0 \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (41.4)$$

Для вычисления остальных коэффициентов ряда нам потребуются некоторые определенные интегралы, которые мы и рассмотрим предварительно.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = 0,$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx\, dx = 0.$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} cosnx\, coskxdx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq k \\ \pi & \text{при } n = k \end{cases}$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} cosnx\, sinkxdx = 0;$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx\, sinkxdx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq k \\ \pi & \text{при } n = k \end{cases}$

Доказательство.

1) $\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = \frac{1}{n}\,\mathrm{sinnx}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\mathrm{sinn}\pi + \mathrm{sinn}\pi) = 0.$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx\, dx = -\frac{1}{n}\,\mathrm{cosnx}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(\mathrm{cosn}\pi - \mathrm{cosn}\pi) = 0.$

При доказательстве 3,4,5 используются формулы:

$$\mathrm{cosnx}\cdot \mathrm{coskx} = \frac{1}{2}\left[\cos(\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{x} + \cos(\mathrm{n}+\mathrm{k})\mathrm{x}\right]$$

$$\mathrm{sinnx}\cdot \mathrm{sinkx} = \frac{1}{2}\left[\cos(\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{x} - \cos(\mathrm{n}+\mathrm{k})\mathrm{x}\right]$$

$$\mathrm{sinnx}\cdot \mathrm{coskx} = \frac{1}{2}\left[\sin(\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{x} + \sin(\mathrm{n}+\mathrm{k})\mathrm{x}\right]$$

Вычислим, например, $\int_{-\pi}^{\pi} sinnx\, sinkxdx$.

При $n \neq k$ $\int_{-\pi}^{\pi} sinnxsinkxdx$=$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(\text{n}-\text{k})\text{x} - \cos(\text{n}+\text{k})\text{x}\right]\text{dx}$=

$= \frac{1}{2}\frac{1}{n-k}$sin(n-k)x$|_{-\pi}^{\pi}$ - $\frac{1}{2}\frac{1}{n+k}$sin(n+k)x$|_{-\pi}^{\pi}$ = 0.

при $n = k$ $\int_{-\pi}^{\pi} sin^2 kx$dx = $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-cos2kx}{2}dx$ = $\frac{1}{2}x|_{-\pi}^{\pi}$ - $\frac{1}{4}sin2kx|_{-\pi}^{\pi}$ = π.

Подобным образом можно получить и остальные формулы.Теперь можем вычислить коэффициенты a_n и b_n ряда (41.2). Для разыскания коэффициента a_n при каком-либо определенном значении k≠0 умножим обе части равенства (41.2) на coskx:

f(x)coskx=$\frac{a_0}{2}$coskx+$\sum_{n=1}^{\infty}$($a_n$cosnxcoskx+$b_n$sinnxcoskx) (41.5)

Ряд, получившийся в правой части равенства, мажорируем, так как его члены не превосходят по абсолютной величине членов сходящегося положительного ряда (41.3). Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке. Проинтегрируем равенство (41.5) в пределах от –π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{f(x)coskx dx} = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\text{coskx dx} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\text{cos}nx\text{coskx dx} + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\text{sin}nx\text{coskxdx}\right).$$

Принимая во внимание формулы 1) и 4), видим, что все интегралы в правой части равны нулю, кроме интеграла с коэффициентом a_k. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\text{f(x)coskx dx}=a_k\int_{-\pi}^{\pi}cos^2 kxdx=\text{a}_\text{k}\pi.$$

Откуда

$$\text{a}_\text{k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{f(x)coskx dx} \qquad (41.6)$$

Умножая обе части равенства (41.2) на sinkx и снова интегрируя от - π до π, найдем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\text{f(x)sinkx dx} = b_k\int_{-\pi}^{\pi}sin^2 kxdx = \text{b}_\text{k}\pi,$$

откуда

$$b_\text{k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{f(x)sinkx dx}\ . \qquad (41.7)$$

Коэффициенты, определенные по формулам (41.4), (41.6) и (41.7), называются коэффициентами Фурье функции f(x), а тригонометрический ряд (41.1) с такими коэффициентами называется рядом Фурье функции f(x).

Теперь рассмотрим задачу: какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Определение. Функция f(x) называется кусочно-монотонной на отрезке [a,b], если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на интервалы (a, x_1), (x_1, x_2), … (x_{n-1} , b) так, что на каждом из интервалов функция монотонна, т.е. либо невозрастающая, либо неубывающая.

Из определения следует, что если функция f(x) – кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке [a,b] , то она может иметь только точки разрыва первого рода.

Сформулируем теперь следующую теорему.

Теорема.(теорема Дирихле) Если периодическая функция f(x) с периодом 2π- кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[\pi, -\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда S(x) равна значению функции f(x) в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции f(x) сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции f(x) справа и слева, т.е. если x=c – точка разрыва функции f(x) , то

$$S(x)_{x=c}=\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$$

Пример: Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x) с периодом 2π , которая на интервале (-π,π) задается равенством f(x)=2x+3

Решение. По формуле (41.4) имеем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)dx=\frac{1}{\pi}(x^2+3x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}6\pi=6$$

Применяя формулу интегрирования по частям, по формуле (41.6) получаем:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)coskxdx=\left|\begin{matrix} u=2x+3, du=2dx \\ dv=coskxdx, v=\frac{1}{k}sinkx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi k}(2x+3)\text{sinkx}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}sinkxdx=\frac{1}{\pi k^2}cos\text{kx}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi k^2}(cos k\pi-$$
$$-\cos(-k\pi))=0$$

Аналогично по формуле (41.7) имеем:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+3)sinkxdx = \begin{vmatrix} u=2x+3, du=2dx \\ dv=sinkxdx, v=-\frac{1}{k}coskx \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{\pi k}(2x+3)\text{coskx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}coskxdx=-\frac{1}{\pi k}[(2\pi+3)cos\text{k}\pi-$$

$$(-2\pi++3)\cos(-k\pi)]=-\frac{4\pi}{\pi k}(-1)^k=\frac{4}{k}(-1)^{k+1}$$

Таким образом, получаем ряд в виде:

$$\text{f(x)} = 2x+3 = 3+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{sinkx}{k}$$

Лекция № 42. Ряды Фурье для четных и нечетных функции. Ряды Фурье для функции с периодом $2l$

Допустим, что разлагаемая в ряд Фурье функция φ(x) – четная. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = 2\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$$

Для доказательства этого равенства данный интеграла разобьем на два интеграла $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$

В первом интеграле переменную x заменим на $-x$. Учитывая, что $\varphi(-x)=\varphi(x)$и dx=$-dx$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)dx=$$
$$=\int_0^{\pi}\varphi(-x)dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)dx=2\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$$

Аналогично можно доказать, что если φ(x) – нечетная функция, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_0^{\pi}\varphi(-x)dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)dx=-\int_0^{\pi}\varphi(x)dx+\int_0^{\pi}\varphi(x)dx=0.$$

Если в ряд Фурье разлагается четная функция f(x), то произведение f(x)sinkx есть функция нечетная, а f(x)coskx – четная и, следовательно,

$$\begin{cases} a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx \\ a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{f(x)coskx dx} \\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{f(x)sinkx dx}=0, \end{cases} \qquad (42.1)$$

т.е. ряд Фурье четной функции разлагается по косинусам.

$$\text{f(x)} = \frac{a_0}{2}+\int_{k=1}^{\infty}a_k\text{cos}kx$$

Если в ряд Фурье разлагается нечетная функция f(x), то произведение f(x)coskx есть функция нечетная, а f(x)sinkx – четная и, следовательно,

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{f(x)coskx dx} = 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{f(x)sinkx dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{f(x)sinkx dx}, \end{cases} \qquad (42.2)$$

т.е. ряд Фурье нечетной функции разлагается по синусам.

$$\text{f(x)} = \int_{k=1}^{\infty} b_k \text{sink}x$$

Полученные формулы позволяют упрощать вычисления при разыскании коэффициентов Фурье в тех случаях, когда заданная функция является четной или нечетной.

Пример 1. Разложить функцию f(x) в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

$$\text{f}(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Решение: Эта функция удовлетворяет условиям теоремы о разложении. Поскольку она нечетная, все коэффициенты $a_k = 0$. Найдем коэффициенты b_k. По формуле (42.2) имеем

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot sinkxdx = -\frac{2}{\pi k}coskx\,)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}(cosk\pi - 1),$$

или $b_k = \frac{2}{\pi k}(1 - coskx)$. Так как $cosk\pi = (-1)^k$, то, полагая последовательно k=1,2,3,…, найдем $b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{4}{5\pi}$ и т. д. Таким образом,

$$\text{f(x)} = \frac{4}{\pi}(\text{sinx} + \frac{1}{3}\text{sin3x} + \frac{1}{5}\text{sin5x} + \ldots).$$

Ряды Фурье для функции с периодом $2l$. Пусть f(x) есть периодическая функция с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от 2π. Разложим ее в ряд Фурье. Сделаем замену переменной по формуле x = $\frac{l}{\pi}$t. Тогда функция f($\frac{l}{\pi}$t) будет периодической функцией от t с периодом 2π. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$:

$$\text{f}(\frac{l}{\pi}\text{t}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\text{coskt} + b_k\text{sinkt}), \qquad (42.3)$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi}\text{t})\,dt$, $\text{a}_\text{k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{f}(\frac{l}{\pi}\text{t})\text{ coskt dt}$,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{f}(\frac{l}{\pi}\text{t})\text{ sinkt dt}.$$

Возвратимся теперь к старой переменной x: $x = \frac{l}{\pi}$t, t = $x\frac{\pi}{l}$, dt = $\frac{\pi}{l}dx$. Тогда будем иметь:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx \qquad (42.4)$$

Формула (42.3) получит вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \qquad (42.5)$$

где коэффициенты a_0, a_k, b_k, вычисляются по формулам (42.4). Это и есть ряд Фурье для периодической функции с периодом $2l$.

Заметим, что все теоремы, которые имели место для рядов Фурье от периодических функций с периодом 2π, сохраняются и для рядов Фурье от периодических функций с каким-либо другим периодом $2l$.

Пример 2. Найти разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом 4:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ \ \ 2, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Решение: В нашем примере $2l=4$, отсюда $l = 2$. Находим коэффициенты ряда:

$$a_o = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)dx + \int_{o}^{2} 2dx\right) = \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{o} + 2x\Big|_{o}^{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(-2+4) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx + \int_{0}^{2} 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{0}^{2}\right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{2} 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Big|_{-2}^{0} -\right.$$
$$\left.-\frac{4}{\pi n}(\cos\pi n - 1)\right) = \frac{3}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \frac{3}{\pi n}((-1)^n - 1)\,.$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (42.5), получим.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot x\right).$$

Контрольные вопросы

1. Тригонометрический ряд.
2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье.
3. Сформулируйте теорему Дирихле о разложении функции в ряд Фурье.

Модуль 15. Кратные интегралы и их приложения

Лекция № 43. Двойной интеграл. Свойства, вычисление двойного интеграла

1.**Объем цилиндрического бруса**. Рассмотрим на плоскости 0xy замкнутую область D, ограниченную линией L, и функцию $z = f(x, y) \geq 0$, определенную на этой области D.

Определение. Цилиндрическим брусом называется тело, ограниченное снизу областью D, заданной на плоскости 0xy, сверху поверхностью – графиком функции $z = f(x, y)$, с боковых сторон образующими, параллельными оси 0z, пересекающие линию L.

Вычислим объем цилиндрического бруса. Для этого область D разобьём на n частей какими-нибудь линиями. Полученные маленькие области обозначим $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$. На этих областях выберем по одной точке $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ соответственно (точку можно взять на границе или внутри, не имеет значение). На этих точках вычислим значение функции $z = f(P_i)$ и умножая на свои площадки, суммируем, в итоге получим выражение, близкое по значению объему цилиндрического бруса:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$$

Последнее выражение называется **интегральной суммой.** Перейдя к пределу при стремлении к нулю $maxdiam\Delta s_i \to 0$, можем получить объем цилиндрического бруса.

2.**Определение двойного интеграла**.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то существует конечный предел интегральной суммы V_n при стремлении к нулю максимального диаметра Δs_i, а $n \to 0$. Предел не зависит ни от способов разбиения области, ни от выбора точки P_i внутри Δs_i.

Этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается так:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{maxdiam\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i-1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$$

D называется областью интегрирования.

3.**Свойства двойного интеграла.**

1.Двойной интеграл от алгебраической суммы двух функций

$$f_1(x,y) \pm f_2(x,y)$$

по области D равен алгебраической сумме двух двукратных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности.

$$\iint\limits_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (f_1(x,y))dxdy \pm \iint\limits_D (f_2(x,y))dxdy$$

2.Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

3.Если область D разбита на две области D_1 и D_2, что $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4.Если m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D и S - площадь области D, тогда

$$mS \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS$$

5.(**Теорема о среднем**) Если функция $f(x,y)$ непрерывная на области D, то найдется такая точка $P\epsilon D$, что двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D равен произведению площади S на значение функции в точке P.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = Sf(P)$$

4.**Вычисление двойного интеграла. (Кратные интегралы)**

Пусть теперь область такова, что она ограничена линиями

$$y = \varphi_1(x), \qquad y = \varphi_1(x), x = a, y = b,$$

причем

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), a < b$$

и пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на этой области. Такая область называется правильной, в направлении *оси* $0y$.

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен так называемому двукратному интегралу:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

где сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причем интегрирование производится по y, а x считается постоянным. Затем полученная непрерывная функция от x интегрируется по x в пределах от a до b.

Пример. Вычислить интеграл по области $D - \quad y = \sqrt{x} y = \frac{x}{2}$

$$\iint_D xy^3 dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy^3 dy \right) dx = \int_0^4 \left(x\frac{y^4}{4} \quad |_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{64} \right) dx = 9\frac{1}{3}.$$

Если область D правильная в направлении оси $0x$, тогда она ограничена линиями

$$x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y), \qquad y = c, \; y = d,$$

причем

$$\psi_1(y) \le \psi_2(y), \; c < d$$

тогда двойной интеграл приводится к кратному:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл по области $D -\ y = xy = 1, x = 1$

$$\iint\limits_D (3x + y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y (3x + y)dx = \frac{5}{6}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение двойному интегралу.
2. Условие существования двойного интеграла.
3. Свойства двойного интеграла.
4. Что такое двухкратный интеграл?
5. Правильная область по направлению.

Лекция № 44. Замена переменных в двойном интеграле. Приложение двойных интегралов

Замена переменных в двойном интеграле. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную и непрерывную в некоторой ограниченной области D. Для этой функции существует двойной интеграл по области D.

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

предположим, что с помощью формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

мы переходим к новым переменным u и v, которые однозначно определяются

$$u = u(x, y), \ \ v = v(x, y)$$

Таким образом, с помощью формул каждой точке $M(x, y)$ из области D ставится в соответствие некоторая точка $P(u, v)$ на координатной плоскости с прямоугольными координатами u и v.

Пусть множество всех точек $P(u, v)$ образует ограниченную замкнутую область G.

При условии непрерывности функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, а также при существовании частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

в области G можно доказать, что если определить

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в области G, то для двойного интеграла справедлива формула замены переменных

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))|I|dudv$$

Определитель I называется функциональным определителем, или Якобианом (по имени немецкого ученого Якоби), функций $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ по переменным u и v. Сформулируем теперь это утверждение в виде теоремы, которую приводим без доказательств:

Теорема: Если преобразования $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ переводит замкнутую, ограниченную область D в замкнутую, ограниченную область G и является взаимно однозначным, и если функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля Якобиан I, а функция $f(x,y)$ является непрерывной в области D, то справедлива формула замены переменных

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))|I|dudv$$

Двойной интеграл в полярной системе координат. Известно, что прямоугольные декартовые координаты (x,y) и полярные координаты (ρ,φ) связаны между собой следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases} \quad \text{где} \quad \rho \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

В двойном интеграле перейдем от прямоугольных координат к полярным. Получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)|I|d\rho d\varphi$$

Вычислим Якобиан

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\varphi & -\rho sin\varphi\\ sin\varphi & \rho cos\varphi\end{vmatrix}=\rho cos^2\varphi+\rho sin^2\varphi=\rho$$

Итак, окончательно получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(\rho cos\varphi,\rho sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

В обобщенных полярных координатах, для которых

$$x=a\rho cos\varphi,\qquad y=b\rho sin\varphi$$

имеет место формула

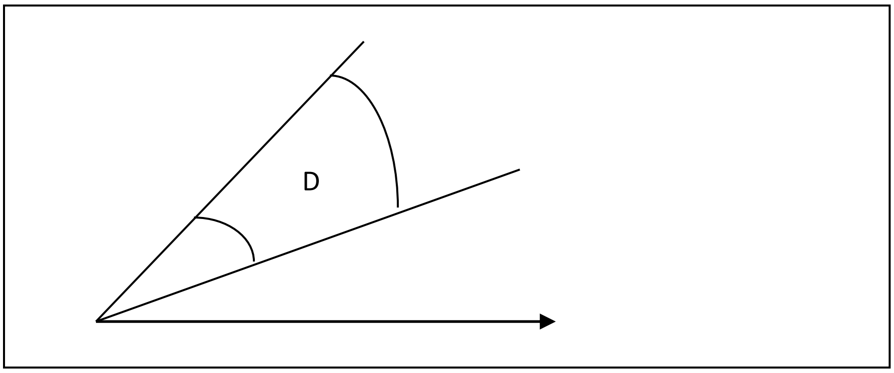
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(a\rho cos\varphi,b\rho sin\varphi)ab\rho d\rho d\varphi$$

Якобиан для обобщенных полярных координат предложим найти студенту самостоятельно.

В зависимости от расположения полюса полярной системы координат (вне, внутри или на границе области D) представление двойных интегралов в виде повторных, приводит к разным пределам интегрирования.

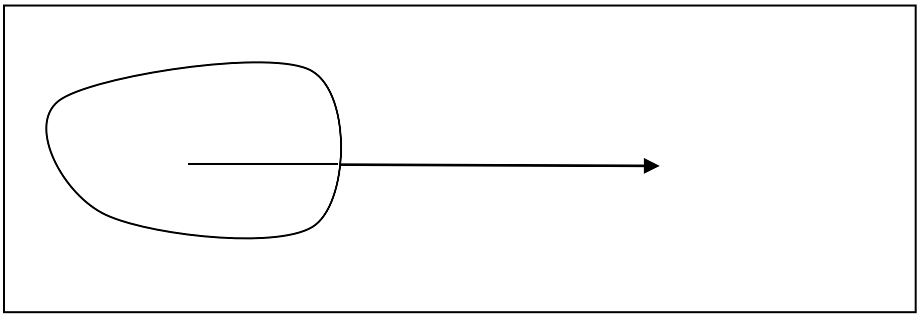
1. Если полюс полярной системы координат находится вне области D, ограниченной лучами $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta,\ \alpha<\beta$ и линиями $\rho=\rho_1(\varphi),\ \rho=\rho_2(\varphi)$, то двойной интеграл можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho cos\varphi,\rho sin\varphi)\rho d\rho$$



3. Если полюс находится внутри области D и уравнение границы области D в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то получим формулу

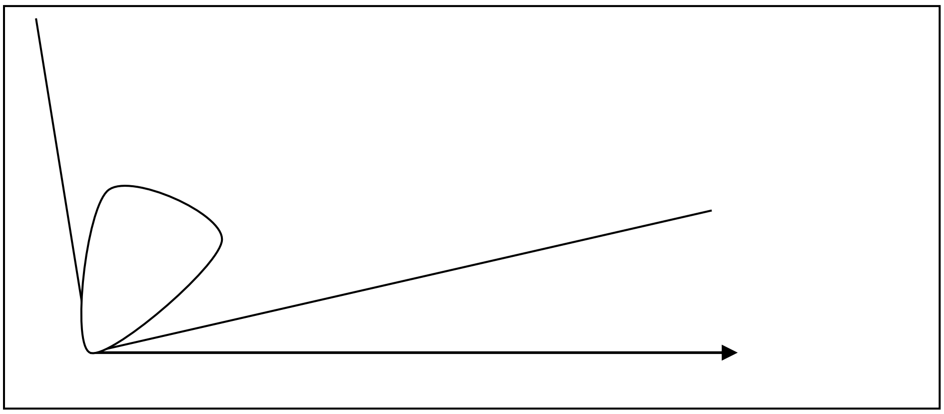
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)\rho d\rho$$



3. Если полюс находится на границе области D и уравнение её границы в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то формула вычисления двойного интеграла примет вид

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)\rho d\rho$$

где α, β могут принимать различные значения.



Приложения двойных интегралов

1. Вычисление площади плоской фигуры. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad x=4$$

В случае плоской фигуры $f(x,y)=1$ по свойству двойного интеграла

$$S=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy=\frac{16}{3}.$$

2.Вычисление объемов тел. Геометрическим истолкованием двойного интеграла является объем тела, ограниченного сверху графиком функции $z=f\,(x,y)$, с боковых сторон образующими цилиндрической поверхности, параллельными оси $0z$ и снизу областью D в плоскости $0xy$. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0,\ z=x+y+10$

$$V=\iint\limits_D (x+y+10)dxdy,$$

где D: $x^2+y^2=4$

Переходим в двойном интеграле к полярным координатам:

$x=\rho cos\varphi,\ \ y=\rho sin\varphi,\quad D\text{: }(\rho cos\varphi)^2+(\rho sin\varphi)^2=4,\qquad \rho=2$

т.е. ρ меняется от 0 до 2, а φ меняется от 0 до 2π. Тогда имеем

$$V=\iint\limits_D (x+y+10)dxdy=\int\limits_0^{2\varphi} d\varphi\int\limits_0^2(\rho cos\varphi+\rho sin\varphi+10)\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\varphi}\left(\frac{\rho^3}{3}(cos\varphi+sin\varphi)+5\rho^2\right)\Big|_0^2 d\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\varphi}\left(\frac{8}{3}(cos\varphi+sin\varphi)+20\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{8}{3}(sin\varphi-cos\varphi)+20\right)\Big|_0^{2\pi}=40\pi$$

3. Вычисление площадей поверхностей. С помощью двойных интегралов можно вычислить площадь поверхности, ограниченной замкнутой линией. Пусть в области D_z плоскости $0xy$ задана непрерывная функция $z = f\,(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные. Понятно, что область D_z является проекцией рассматриваемой поверхности на плоскость $0xy$.

Площадь поверхности $z = f\,(x, y)$, $(x, y) \in D_z$ вычисляется по формуле

$$S_z = \iint\limits_{D_z} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

4. Вычисление массы материальной пластинки. По свойству двойного интеграла, для того чтобы найти массу материальной пластинки, нам нужно знать её поверхностную плотность. Тогда

$$m = \iint\limits_{D} \mu(x, y) dxdy$$

5. Вычисление статистических моментов и координат центра масс материальной пластинки. Пусть на плоскости $0xy$ дана материальная пластинка D с непрерывной поверхностной плотностью $\mu(x, y)$, тогда координаты центра масс пластинки можно определить по формулам:

$$x_c = \frac{\iint_D x\mu(x, y)dxdy}{\iint_D \mu(x, y)dxdy}$$

$$y_c = \frac{\iint_D y\mu(x, y)dxdy}{\iint_D \mu(x, y)dxdy}$$

Величина $M_x = \iint_D y\mu(x, y)dxdy$ статистический момент пластинки D относительно оси $0x$, а величина $M_y = \iint_D x\mu(x, y)dxdy$ статистический момент пластинки D относительно оси $0y$.

6. Вычисление момента инерции материальной пластинки. Пусть материальная пластинка D лежит в плоскости $0xy$ и пусть поверхностная плотность $\mu\,(x, y)$ пластинки распределена непрерывно, тогда моменты инерции относительно начала координат, относительно оси $0x$, и оси $0y$ материальной пластинки можно вычислить по следующим формулам.

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, \mu(x, y) dxdy$$

$$I_y = \iint\limits_D y^2\, \mu(x, y) dxdy$$

Контрольные вопросы

1. Что такое Якобиан?
2. Полярная система координат.
3. Как вычисляется площадь поверхности?
4. Как вычисляется инерционные моменты?
5. Как вычисляется координаты центра масс?

Лекция № 45. Тройной интеграл, свойства, вычисление

Определение тройного интеграла. Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в области V и на ее границе определена некоторая непрерывная функция $f(x, y, z)$ Разобьем область V произвольным образом на n частей Δv_i, обозначая символом Δv_i не только саму область, но и ее объем. В каждой частичной области Δv_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta v_i$$

для функции $f(x, y, z)$ по области V.

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая элементарная область Δv_i стягивается в точку, то есть диаметр области стремится к нулю, то его называют тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначают

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ maxdiam\Delta v_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta v_i$$

Теорема. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta v_i$ при $n\to\infty$ и $maxdiam\Delta v_i \to 0$ существует и не зависит от способа разбиения области V на части и от выбора точек $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в них.

Свойства тройного интеграла. Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл:

1. $$\iiint_V C\cdot f(x,y,z)dxdydz$$

$$= C\cdot\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \quad \text{где } C - const$$

2. $$\iiint_V (f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z))dxdydz$$

$$= \iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz \pm \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

3. $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Если $V = V_1 \cup V_2$, а пересечение $V_1 \cap V_2$ состоит из границы, их разделяющей.

4. $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \ge 0$, если в области V функция $f(x,y,z) \ge 0$, если в области интегрирования $f_1(x,y,z) \ge f_2(x,y,z)$, то и

$$\iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz \ge \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

5. $\iiint_V dxdydz = V$, так как если $f(x,y,z) = 1$, то интеграл представляет объем области V.

6. Оценка тройного интеграла

$$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \le MV,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области V.

7. (**Теорема о среднем**). Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0;y_0;z_0)\cdot V$$

где V – объем тела.

Вычисление тройного интеграла. (Кратные интегралы). Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть теперь область V такова, что она ограничена поверхностями снизу $z = z_1(x,y)$, сверху $z = z_1(x,y)$ причем $z = z_1(x,y)$ и $z = z_1(x,y)$ $(z = z_1(x,y) \le z = z_1(x,y))$ непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость $0xy$. А в своей очереди область D ограничена линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_1(x), x = a, y = b$, причем $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x), a < b$ и пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на области V. Такая область называется **правильной, в направлении оси 0z**.

Теорема. Тройной интеграл от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по правильной области V равен так называемому трехкратному интегралу:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

где сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, при чем интегрирование производится по z, а x, y считается постоянным. Затем по y, а x считается постоянным. Затем полученная непрерывная функция от x интегрируется по x в пределах от a до b.

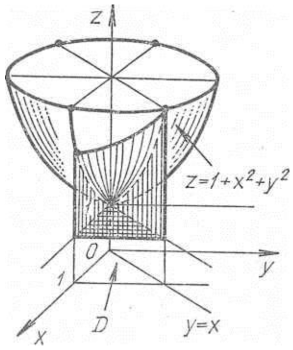
Если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее следует разбить на конечное число правильных областей, к которым можно применить последнюю формулу. При определенных условиях порядок интегрирования может быть иным.

Пример. Вычислить

$$\iiint\limits_V (2x+y)dxdydz,$$

где область V- ограничена поверхностями:

$$y=x, y=0, x=1, z=1, z=1+x^2+y^2$$



Решение. Найдем границы области V:

$$0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x, \qquad 1\leq z\leq 1+x^2+y^2.$$

Тогда

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_1^{1+x^2+y^2}(2x+y)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (2x+y)\,z|_1^{1+x^2+y^2}dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (2x^3+y^3+2xy^2+x^2y)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 (2x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{4}y^4)|_0^x dx=\int\limits_0^1\frac{41}{12}x^4dx=\frac{41}{60}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение тройному интегралу.

2. Условие существования тройного интеграла.
3. Свойства тройного интеграла.
4. Что такое трехкратный интеграл?

Лекция № 46. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть в пространстве задана область V. предположим, что координаты x, y, z являются функциями новых переменных u, v, w:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

Причем эти функции однозначные, непрерывные и имеют непрерывные производные в некоторой области V', которая является однозначным отображением области V в декартовых координатах x, y, z в криволинейные координаты u, v, w.

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(\,x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|I|dudvdw,$$

где I - называется Якобианом, подобно тому как это делалось для двойных интегралов, можно доказать, что Якобиан численно равен определителю третьего порядка

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Цилиндрическая система координат – это

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

где при проекции на $0xy$ можно сопоставить полярными координатами.

Тогда вычислим Якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = cos\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho sin\theta \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho cos\theta \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$I = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta & 0 \\ sin\theta & \rho cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho cos^2\theta + \rho sin^2\theta = \rho.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

Пример. Определить массу M полушара радиуса R с центром в начале координат, если плотность F его вещества в каждой точке (x,y,z) пропорциональна расстоянию от этой точки до основания, т.е. $F = k \cdot z$, где k– коэффициент пропорциональности.

Решение. Уравнение верхней части полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, основание $z = 0$, переход в цилиндрическую систему координат: $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kzdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \left(\frac{kz^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \right) =$$

$$= \frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\rho d\rho = \frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(R^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^2}{4}\right)\Big|_0^R d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) d\theta = k\frac{R^4}{8}\theta|_0^{2\pi} = k\frac{R^4\pi}{4}$$

Сферическая система координат – это

$$\begin{cases} x = r sin\varphi cos\theta \\ y = r sin\varphi sin\theta \\ z = r cos\varphi \end{cases}$$

где r – расстояние от точки до начала координат или радиус-вектор точки, φ - угол между радиус-вектором и осью $0z$, - угол между проекцией радиус-вектора на плоскость $0xy$ и осью $0x$, отсчитываемый от этой оси в положительном направлении.

Тогда вычислим Якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = sin\varphi cos\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = r cos\varphi cos\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r sin\varphi sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sin\varphi sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r cos\varphi sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r sin\varphi cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = cos\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r sin\varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

$$I = \begin{vmatrix} sin\varphi cos\theta & r cos\varphi cos\theta & -r sin\varphi sin\theta \\ sin\varphi sin\theta & r cos\varphi sin\theta & r sin\varphi cos\theta \\ cos\varphi & -r sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 sin\varphi$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} F(\theta,\rho,\varphi)r^2 sin\varphi dr d\theta d\varphi.$$

Контрольные вопросы

1. Замена переменных в тройном интеграле.
2. Цилиндрическая система координат.
3. Сферическая система координат.

Модуль 16. Криволинейные интегралы и их приложения

Лекция № 47. Криволинейные интегралы первого рода

Криволинейный интеграл – это более общая форма определенного интеграла, в котором область интегрирования есть некоторая кривая в пространстве.

Криволинейные интегралы широко используются при решении физических, механических и геометрических задач.

Криволинейные интегралы подразделяются на два тура: первый и второй.

Криволинейные интегралы первого рода. Пусть на координатной плоскости Oxy задана гладкая или кусочно-гладкая кривая AB длины l.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x,y)$, определенную в точках этой кривой. Разобьем кривую $f(x,y)$ точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i $(i = 1,2,\dots,n)$. Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i \qquad (47.1)$$

Её называют интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по кривой AB.

Пусть $\lambda = {}_{0\le i\le n}^{\max}\Delta l_i$ наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм (47.1), то его называют **криволинейным интегралом от функции $f(x,y)$ по длине кривой AB (или I рода)** и обозначают

$$\int_{AB} f(x,y)dl$$

или

$$\int_{L} f(x,y)dl$$

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i} \qquad (47.2)$$

Условие существования криволинейного интеграла I рода (существования предела интегральной суммы (47.1) представляет следующая теорема, которую мы приводим здесь без доказательства.

Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл I рода существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x;y;\ z)$ по пространственной кривой L.

Приведем основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги (I рода).

1. $\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl,$ т.е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. Линейность.

$$\int\limits_{L} (C_1 f_1(x,y) \pm C_2 f_2(x,y))dl = C_1 \int\limits_{L} f_1(x,y)dl \pm C_2 \int\limits_{L} f_2(x,y)dl$$

3. Аддитивность.

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl,$$

если путь интегрирования L разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

4. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, то

$$\int\limits_L f_1(x,y)dl \le \int\limits_L f_2(x,y)dl$$

5. $\int_L \ dl = l,$ где l - длина кривой AB.

6. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой найдется точка $(x_C;y_C)$ такая, что $\int_{AB} f(x,y)dl = (x_C;y_C)\cdot l$ (теорема о среднем).

Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла I рода в случаях, если кривая L задана параметрическим и явным образом.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, точке B - значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{x_t^{2'} + y_t^{2'}}dt. \qquad (47.3)$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой AB, задаваемой уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha,\beta]$,

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{x_t^{2'} + y_t^{2'} + z_t^{2'}}dt. \quad (48.4)$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x),\ x \in [a,b]$, где $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+y_x^{2'}}dx. \tag{47.5}$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы (47.5) получается заменой в левой части $y = y(x)$ и $dl = \sqrt{1+y_x^{2'}}dx$.

Примеры. 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} y^2 dl,$$

где AB: $x = acost,\quad y = asint,\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Решение. По условию

$$y^2 = a^2sin^2t,\ \ dl = \sqrt{x_t^{2'} + y_t^{2'}}dt = \sqrt{a^2sin^2t + a^2cos^2t}dt = adt$$

Используя формулу (47.3) найдем:

$$\int_{AB} y^2dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2sin^2tadt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{sin2t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4}.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} ydl,$$

где AB: дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0,0)$ до $(2,2)$

Решение. По условию

$$y = \sqrt{2x},\quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}},\quad dl = \sqrt{1+y_x^{2'}}dx = \sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx$$

Используя формулу (47.5) найдем:

$$\int\limits_{AB} ydl = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx \int\limits_{0}^{2} \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 =$$

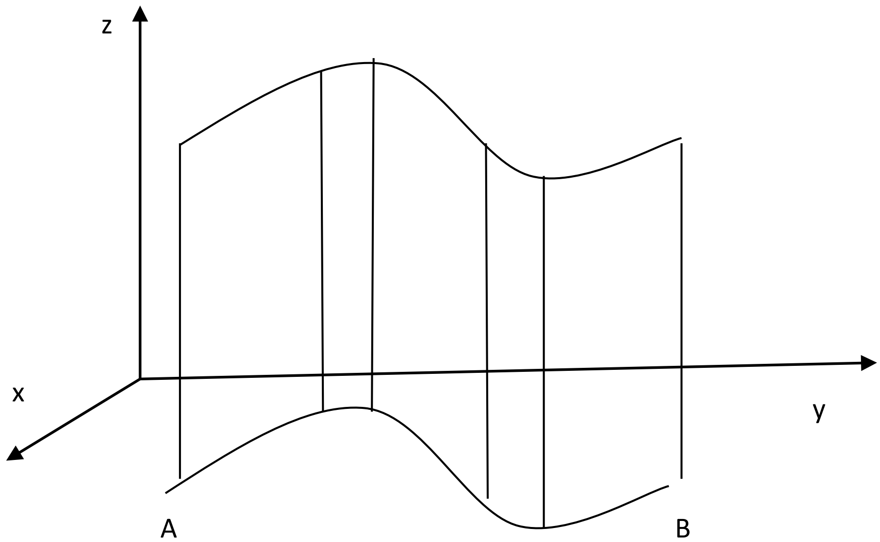
$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Криволинейный интеграл I рода имеет разнообразные приложения в математике и механике.

Длина кривой. Длина l кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле $l = \int_{AB} dl$.

Площадь цилиндрической поверхности. Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая на плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz, то площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f(x,y)$, находится по формуле $S = \int_{AB} f(x,y)dl$.



Масса кривой. Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос и т.д.) определяется формулой

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(M)dl = \int\limits_{AB} \gamma(x,y)dl,$$

где $\gamma(M) = \gamma(x, y)$ плотность кривой в точке M.

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейный интеграл?
2. Какие свойства имеет криволинейный интеграл?
3. Как вычисляется длина дуги?
4. Применение криволинейного интеграла.

Лекция № 48. Криволинейные интегралы второго рода

Криволинейные интегралы второго рода. Решение задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой приводит к понятию криволинейного интеграла II рода. Криволинейный интеграл II рода определяется почти так же, как и интеграл I рода.

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) и функция $P(x; y)$, определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую AB точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ с длинами Δl_i, $i = 1,2, \ldots, n$).

На каждой элементарной дуге $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ возьмем точку M_i^* и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\Delta x_i, \tag{48.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Ox. Сумму (48.1) называют **интегральной суммой** для функции $P(x; y)$ по переменной x.

Пусть $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n} \Delta l_i$ наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от выбора точек M_i^*, то его называют **криволинейным интегралом по координате $\boldsymbol{x}$ (или II рода) от функции $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ по кривой $\boldsymbol{AB}$** и обозначают

$$\int_{AB} P(x, y)dx \qquad \text{или} \qquad \int_{L} P(x, y)dx$$

Итак,

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta x_i} \tag{48.2}$$

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x;y)$ по координате y.

$$\boxed{\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta y_i} \tag{48.3}$$

где Δy_i - проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Oy.

Криволинейный интеграл II рода общего вида

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

определяется равенством

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

по пространственной кривой AB определяется аналогично.

Теорема. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывные в каждой точке гладкой кривой, то криволинейный интеграл II рода существует.

Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла II рода.

1.При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$$

(проекция дуги $\widetilde{M_{\iota-1}M_\iota}$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления)

2.Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по её частям, т.е.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} .$$

3.Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = 0 \qquad \text{(все } \Delta x_i = 0)$$

аналогично для кривой, лежащей на плоскости, перпендикулярной оси Oy.

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = 0 \qquad \text{(все } \Delta y_i = 0)$$

4.Криволинейный интеграл по замкнутой кривой (обозначается $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определенного интеграла. Приведем без доказательства правила вычисления криволинейного интеграла II рода в случаях, если кривая L задана параметрическим и явным образом.

Если кривая AB задана **параметрическими уравнениями** $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции параметра t со своими производными, причем точке A соответствует $t=\alpha$, точке B - значение $t=\beta$, и пусть функция $P(x;y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда по определению,

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta x_i$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$ где $c_i \in (t_{i-1};t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Выберем точку M_i^* так, чтобы $M_i^* = (x(c_i);y(c_i))$. Тогда преобразованная интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} P(x(c_i);y(c_i)) \cdot x'(c_i)\Delta t_i$$

будет интегральной суммой для функции одной переменной

$P(x(t);y(t)) \cdot x'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(x(t);y(t)\big) \cdot x'(t)dt. \qquad (48.4)$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q\big(x(t);y(t)\big) \cdot y'(t)dt. \qquad (48.5)$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt. \quad (48.6)$$

Если кривая AB задана **уравнением** $y = y(x),\ x \in [a,b]$, где $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция вместе с непрерывным производным, то из формулы (48.6), приняв x за параметр, имеем параметрическое уравнение кривой AB: $x = x,\ y = y(x),\ x \in [a,b],$ откуда получим

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x;y(x)\big) + Q\big(x;y(x)\big)\cdot y'(x)\Big)\,dx. \quad (48.7)$$

В частности,

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\big(x;y(x)\big)dx. \quad (48.8)$$

Если AB – гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$ функциями $x = x(t)$, $y = y(t),\ \ z = z(t)$, то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

вычисляется по формуле

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))\cdot y'(t)$$

$$+ R(x(t);y(t);z(t))x'(t)\big)dt. \quad (48.9)$$

Замечание. Криволинейные интегралы I и II рода связаны соотношением

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} (Pcos\alpha + Qsin\beta)dl,$$

где α и β углы, образованные касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ с осями Ox и Oy соответственно.

Примеры. 1. Вычислить

$$I = \int\limits_{L} (x-y)^2dx + (x+y)^2dy$$

где L ломаная OAB, где $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

Решение: Так как $L = OAB = OA + AB,$ то

$$I = \int\limits_{L} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}$$

Уравнение отрезка OA есть $y = 0, 0 \le x \le 2;$ уравнение отрезка AB: $y = x - 2,\ 2 \le x \le 4;$ Согласно формуле (48.7) имеем

$$I = \int\limits_0^2 ((x-0)^2 - 0)dx + \int\limits_2^4 (2^2 + (2x-2)^2 \cdot 1)dx =$$

$$= \frac{8}{3} + (16-8) + \frac{1}{6}(216-8) = \frac{136}{3}.$$

2. Вычислить

$$I = \int\limits_{L} y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz,$$

где L отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ или в параметрической форме: $x = 2t+1,$ $y = t,\ z = 2t+2.$

При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (48.9) находим, что

$$I = \int\limits_0^1 (t^2 \cdot 2 + ((2t+1)^2 + 2t + 2) \cdot 1 + (2t + 1 + t + (2t+2)^2) \cdot 2)dt = \frac{95}{3}.$$

Формула Грина

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области устанавливает формула Грина, которая широко применяется в математическом анализе.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т.е. область D - правильная.

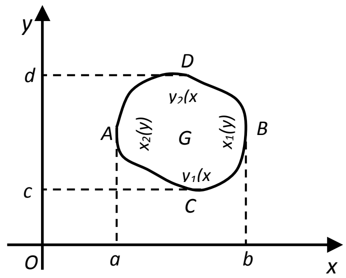
Теорема. Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \qquad (48.10)$$

где L граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Формула (48.10) называется формулой Грина.

Доказательство. Пусть $y = y_1(x)$ уравнение дуги ACB, а $y = y_2(x)$ уравнение дуги ADB. Найдем сначала



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

По правилу вычисления двойного интеграла имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \Big(P\big(x;y_2(x)\big) - P\big(x;y_1(x)\big)\Big) dx$$

$$= \int_a^b P\big(x;y_2(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x;y_1(x)\big)dx$$

Или согласно по формуле (48.8)

$$\int_a^b P(x; y_2(x))dx = \int_{ADB} P(x; y)dx,$$

$$\int_a^b P(x; y_1(x))dx = \int_{ACB} P(x; y)dx.$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{ADB} P(x; y)dx - \int_{ACB} P(x; y)dx$$

$$= - \int_{BDA} P(x; y)dx - \int_{ACB} P(x; y)dx =$$

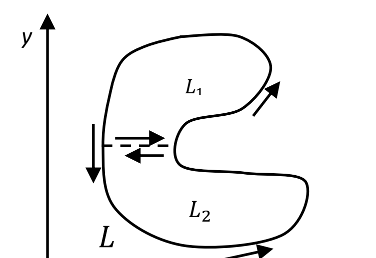
$$= - \oint_L P(x; y)dx.$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \oint_L P(x; y)dx. \qquad (48.11)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy = \oint_L Q(x; y)dy. \qquad (48.12)$$

Если из равенства (48.12) вычесть равенство (48.11), то получим формулу (48.10).



Замечание. Формула (48.10) справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей. Рассмотрим область D, ограниченный кривой L, показанный на рисунке. Мы её разобьем на две правильные области L_1, L_2. Для каждой из этих областей верна формула (48.10). Если складывать почленно формулу Грина, тогда в левой стороне получим двойной интеграл по области D, а в правой – криволинейный интеграл по замкнутой кривой L, криволинейные интегралы по вспомогательной линии сокращаются.

Примеры. 1. С помощью формулы Грина вычислить

$$I=\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y\cdot\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$$

где L – контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x}=y\cdot\left(\frac{y\cdot\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, по формуле (48.10) имеем:

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{y(y\sqrt{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$$

$$=\int\limits_3^6 dx\int\limits_2^4 y^2dy=56.$$

2. С помощью формулы Грина вычислить

$$\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy,$$

где $L-$ $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$; $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, по формуле (48.10) имеем:

$$I=\iint\limits_D(1-(-1))dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2\pi R^2.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейный интеграл второго рода?
2. Как вычисляется работа переменной силы?
3. Свойства криволинейного интеграла второго рода.
4. Докажите формулу Грина.

Лекция № 49. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $\mathrm{B}(x_2; y_2)$ две произвольные точки односвязной области D плоскости Oxy (область D называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит D)

Точки A и B можно соединить различными линиями L_1, L_2, L_3. По каждой из этих кривых интеграл

$$I = \int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy.$$

имеет, вообще говоря, свое значение.

Если же его значения по всевозможным кривым AB одинаковы, то говорят, что интеграл I не зависит от пути интегрирования. В этом случае для интеграла I достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1; y_1)$ и его конечную точку $\mathrm{B}(x_2; y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x;y)dx + Q(x;y)dy. \qquad (49.1)$$

Каковы же условия, при которых криволинейный интеграл II рода не зависел от пути интегрирования?

Теорема. Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными и пусть в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (49.2)$$

Тогда:

1) Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой заданной на односвязной замкнутой области

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

2) Подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ являестя полным дифференциалом функции $F(x;y)$ на области D, т.е. $dF = Pdx + Qdy$.

3) Для любых лежащих на области D двух точек A и B интеграл

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

не зависит от пути интегрирования.

Доказательство. 1). По формуле Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

По условию двойной интеграл равен нулю. Значить и

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

2). Смешанные производные равны, поэтому

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Если приравнять $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x;y),$ $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y)$. Значит,

$$dF = Pdx + Qdy.$$

3). Из второго следует, что

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{\text{AB}} dF = F(B) - F(A)$$

Из первого следует

$$0 = \oint_L Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy = 0.$$

Значит,

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy,$$

Приложение криволинейного интеграла II рода

Рассмотрим некоторые применения криволинейного интеграла II рода: площадь плоской фигуры, работа переменной силы и т.д.

Площадь плоской фигуры. Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx, \qquad (49.3)$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки. Действительно, положив в формуле Грина $P(x;y) = 0,\quad Q(x;y) = x,$ получим:

$$\iint_D (1-0)dxdy = \oint_L 0dx + xdy.$$

или

$$S = \oint_L xdy. \qquad (49.4)$$

Аналогично, полагая $P(x;y) - y,\quad Q(x;y) = 0,$ получим:

$$S = -\oint_L ydx. \qquad (49.5)$$

Сложив почленно равенства (49.4) и (49.5) и разделив на два, получим:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx.$$

Пример. Вычислить площадь эллипса.

$$x = acost, \qquad y = bsint, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Найдем $dx = -asintdt,\quad dy = bcostdt.$

$$S = \frac{1}{2}\oint_0^{2\pi} acostbcostdt - bsint(-asint)dt = \frac{ab}{2}\oint_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

Работа переменной силы. Переменная сила $\vec{F}(P(x,y,z);Q(x,y,z)R(x;y,z))$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz. \qquad (49.6)$$

Пример. Найти работу переменной силы $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ на криволинейном участке AB где $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$.

Решение. Составим параметрическое уравнение прямой AB:

$$x = t + 1, \qquad y = 2t + 1, \quad z = 3t + 1, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

$$A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_0^1 [(2t + 1)(3t + 1) + 2(3t + 1)(t + 1) + 3(t + 1)(2t + 1)]dt =$$

$$= \int_0^1 (18t^2 + 22t + 6)dt = 23.$$

Контрольные вопросы.

1. Теорема о независимости от пути интегрирования.
2. Применение криволинейного интеграла второго рода.

Модуль 17. Поверхностные интегралы и их приложения

Лекция № 50. Поверхностные интегралы I рода

Обобщением двойного интеграла является так называемый поверхностный интеграл.

Здесь мы рассмотрим интегралы от функций заданные на некоторой поверхности.

Теория поверхностных интегралов похожа на теорию криволинейных интегралов, и также рассматриваются поверхностные интегралы первого и второго родов.

1. Поверхностный интеграл I рода. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ (т.е. в пространстве) задана гладкая или кусочно-гладкая поверхность S с площадью S.

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y, z)$ определенную в точках этой поверхности. Разобьем поверхность на n произвольных частей, и их площади обозначим через Δs_i $(i = 1,2, \ldots, n)$. Выберем на каждой части произвольную точку M_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \tag{50.1}$$

Её называют интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S.

Пусть $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n} \Delta s_i$ наибольшая из площадей Δs_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм (50.1), то его называют **поверхностным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S (или I рода)** и обозначают

$$\iint\limits_{S} f(M)ds = \iint\limits_{S} f(x, y, z)ds = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

Данное определение схоже определению двойного интеграла и поэтому свойства двойных интегралов и условия существования можно использовать без изменений для поверхностного интеграла.

Свойства

1. $$\iint\limits_S \left(C_1 f_1(x,y,z) \pm C_2 f_2(x,y,z)\right)ds =$$

$$= C_1 \iint\limits_S f_1(x,y,z)ds \pm C_2 \iint\limits_S f_2(x,y,z)ds$$

2. Если поверхность S разбита на части S_1 и S_2 так, что $S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)ds$$

3. Если $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_S f_1(x,y,z)ds \le \le \iint\limits_S f_2(x,y,z)ds$$

4. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то на этой поверхности найдется такая точка (x_o, y_0, z_0) так, что

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = f(x_o, y_0, z_0) \cdot S$$

5. В частности, если $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iint\limits_S ds = S$$

S есть площадь поверхности. Т.е. можно вычислить площадь поверхности с помощью поверхностного интеграла I рода.

С помощью поверхностного интеграла I рода ещё можно вычислить массу, статистические и инерционные моменты, центры тяжести и т.д.

Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхностного интеграла I рода может быть сведено к вычислению двойного интеграла. Приводим без доказательства правила вычисления поверхностного интеграла I рода в случаях, если поверхность задана параметрическим и явным образом.

Предположим, что задана поверхность S функцией $z = z(x, y)$ непрерывная вместе с частными производными $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ на проекции D поверхности S на плоскость Oxy. А функция $f(x, y, z)$ непрерывна и интегрируема на поверхности S.

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$$

где область D - есть проекция поверхности S на плоскость Oxy.

А если поверхность задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то получим:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_D f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz,$$

где область D - есть проекция поверхности S на плоскость Oxz или

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_D f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz,$$

где область D - есть проекция поверхности S на плоскость Oyz.

Примеры. 1.

$$\iint\limits_S (x - 3y + 2z)ds,$$

где S: $4x + 3y + 2z - 4 = 0$ (I октант).

2.

$$\iint\limits_S x(y + z)ds,$$

где S: $x = \sqrt{1 - y^2}$ $z = 0$, $z = 2$.

Применение поверхностного интеграла I рода

Площадь поверхности. Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$ непрерывная вместе с частными производными $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ на проекции D поверхности S на плоскость Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{S} ds$$

или

$$S=\iint\limits_{D} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$$

где область D - есть проекция поверхности S на плоскость Oxy.

Масса поверхности. Если известна плотность распределения массы $\gamma=\gamma(x,y,z)$, тогда для нахождения массы используется:

$$m=\iint\limits_{S} \gamma(x,y,z)ds$$

Моменты и центры тяжести. Статистические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции материальной поверхности S находятся по соответствующим формулам:

$$S_{xy}=\iint\limits_{S} z\gamma(x,y,z)ds, \qquad M_x=\iint\limits_{S}(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)ds$$

$$S_{yz}=\iint\limits_{S} x\gamma(x,y,z)ds, \qquad M_y=\iint\limits_{S}(x^2+z^2)\gamma(x,y,z)ds$$

$$S_{xz}=\iint\limits_{S} y\gamma(x,y,z)ds, \qquad M_z=\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)ds$$

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m}, y_c=\frac{S_{xz}}{m}, z_c=\frac{S_{xy}}{m}, \qquad M_0=\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)ds$$

Контрольные вопросы.

1. Что такое поверхностный интеграл?
2. Свойства поверхностного интеграла.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
4. Применение поверхностного интеграла первого рода.

Лекция № 51. Поверхностные интегралы II рода

1. Поверхностный интеграл II рода. Поверхностный интеграл II рода строится по образцу криволинейного интеграла II рода, где направление кривой имело смысл. Для начала должны выбрать сторону поверхности (в таком случае говорят, что поверхность ориентирована). Выбранную сторону поверхности разобьем на n произвольных частей S_i $(i = 1,2,\dots,n)$, и их проектируем на координатную плоскость Oxy. При этом площадь проекции обозначим $(\Delta s_i)_{0xy}$ $(i = 1,2,\dots,n)$ и составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)(\Delta s_i)_{0xy}$$

Если перейдем к пределу, то получим:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \lim_{\substack{(\Delta s_i)_{0xy}\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)(\Delta s_i)_{0xy}$$

Точно так же можно определить:

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dxdz \quad \text{и} \quad \iint\limits_S P(x,y,z)dydz$$

Вообще говоря, общий вид **поверхностного интеграла II рода**:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Если поверхность S замкнутый, то поверхностный интеграл II рода по внешней стороне обозначается: $\oiint_{+S}$, по внутренней – $\oiint_{-S}$.

Свойства. 1. Поверхностный интеграл II рода изменяет знак при перемене стороны поверхности. Остальные свойства совпадают свойствам в поверхностном интеграле I рода.

Вычисление поверхностного интеграла II рода

Пусть дан интеграл:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Каждый интеграл рассмотрим отдельно.

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$

Здесь D_{yz} - проекция поверхности S на плоскость $0yz$. Если угол между положительным направлением оси $0x$ и нормальным вектором поверхности S острый, то берем со знаком «плюс», если тупой – со заком «минус».

Также вычисляются остальные интегралы.

Вообще говоря

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

Связь между поверхностным интегралом I и II рода

Можно доказать, что

$$dxdy = cos\gamma ds,\ dxdz = cos\beta ds,\quad dydz = cos\alpha ds,$$

где ds - площадь элементарного куска поверхности, а $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$ поверхности. Тогда поверхностные интегралы I и II рода связаны соотношением:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$$

Формула Остроградского-Гаусса

А связь между поверхностным интегралом II рода и тройным интегралом дает формула Остроградского-Гаусса.

Теорема. Пусть задана замкнутая поверхность S и на нем непрерывно определены функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вместе со своими частными производными. А V - тело, ограниченное поверхностью S. Тогда имеет место

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

по внешней нормали.

Формула Стокса

Связь между криволинейным интегралом II рода и поверхностным интегралом II рода дает формула Стокса.

Теорема. Пусть задана замкнутая поверхность S и на нем непрерывно определены функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вместе со своими частными производными. Тогда имеет место

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz$$

$$= \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

где L - граница поверхности S, направление против часовой стрелки.

Контрольные вопросы.

1. Что такое поверхностный интеграл второго рода?
2. Свойства поверхностного интеграла.
3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.
4. Применение поверхностного интеграла второго рода.
5. Связь между поверхностными интегралами.
6. Формула Гаусса-Остроградского.
7. Формула Стокса.

Модуль 18. Элементы теории поля

Лекция № 52. Понятия скалярного и векторного полей. Производная по направлению, градиент

1. Скалярное поле. Предположим, что в каждой точке P некоторой области D нам задано значение скалярной физической величины u. Например, это может быть температура точек неравномерно нагретого тела, плотность распределения электрических зарядов в изолированном теле, потенциал электрического поля и т.д. При этом u называется скалярной функцией точки, и если D пространственная область, то записывается это так:

$$u = u(P) = u(x, y, z).$$

Определение. Если в области D задана скалярная функция точки $u(P)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле.

Скалярное поле называется стационарным, если $u(P)$ не зависит от времени t.

Скалярное поле $u(x, y, z, t)$ называется не стационарным, если оно зависит от времени t.

Если область D задана на плоскости, то скалярная функция $u(x, y)$ называется плоским скалярным полем.

Поверхностью уровня скалярного поля называются геометрические места точек, в которых функция $u(P)$ принимает постоянное значение, т.е. $u(x, y, z) = C$. Если скалярное поле плоское, то $u(x, y) = C$ называется линиями уровня. Уравнение поверхности уровня, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, записывается так: $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$

Пример. $u(x, y) = xy$.

$$xy = 1, \ \ xy = 2, \dots$$

Производная по направлению. Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения поля в данном направлении.

Пусть задано скалярное поле $u = u(x, y, z)$. Возьмём точку Р(x, y, z) и направление l. Направление l определяется углами α, β, γ, которые образуются осями $0x, 0y, 0z$, соответственно. Берем единичный вектор по этому направлению $\overrightarrow{l^0} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$. Отметим точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Приращение функции u, возникающее при переходе от точки P_0 к некоторой P в направлении l определяется

$$\Delta u = u(P) - u(P_0) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x, y, z)$$

Тогда $\Delta l = |P_0P| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

Определение. Производной от функции $u = u(P)$ в точке P_0 по направлению l называется предел

$$\frac{du}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{P \to P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{|PP_0|}$$

Производная по направлению l характеризует скорость изменения функции (поля) в точке P_0 по этому направлению. Если $\frac{du}{dl} > 0$, то функция u возрастает по направлению l, если $\frac{du}{dl} < 0$, то функция u убывает по направлению l. Величина $\left|\frac{du}{dl}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции u в направлении l в точке P_0; чем больше $\left|\frac{du}{dl}\right|$, тем быстрее изменяется функция u. Это и есть физический смысл производной по направлению.

Выведем формулу для вычисления производного по направлению. Считаем, что функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в точке P_0. Тогда

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z$$

где, ξ_1, ξ_2, ξ_3 – бесконечно малые, при $\Delta l \to 0$.

$$\Delta x = \Delta l cos\alpha, \qquad \Delta y = \Delta l cos\beta, \qquad \Delta z = \Delta l cos\gamma \implies$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l cos\gamma + \xi_1 \Delta l cos\alpha + \xi_2 \Delta l cos\beta + \xi_3 \Delta l cos\gamma$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma + \xi_1 cos\alpha + \xi_2 cos\beta + \xi_3 cos\gamma$$

Переходим к пределу при $\Delta l \to 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma$$

В случае плоского поля

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta$$

Замечание. Понятия производной по направлению является обобщением понятия частных производных. Их можно рассматривать как производные от функции u по направлениям координатных осей.

Рассмотрим, в каком направлении l производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет наибольшее значение. Это направление указывает вектор, называемый *градиентом* скалярного поля. Производная по направлению представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\vec{l} = \{cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma\}$, и некоторого вектора $\vec{g} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

Определение. Вектор, координатами которого являются значения частных производных $u(x, y, z)$ в точке P_0, называют градиентом функции и обозначают

$$grad u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} grad u = \left|\vec{l}\right| |grad u| cos\varphi = |grad u| cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad \max$$

при $cos\varphi = 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$. т.е. направление, совпадающее с направлением градиента, та, которая имеет наибольшее значение. Наибольшая скорость изменения функции $u(x, y, z)$ в точке P_0 равна

$$|grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Свойства градиента: 1) Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

2) $grad(u + v) = grad u + grad v$

3) $grad(Cu) = C grad u,$ где $C - const.$

4) $grad(uv) = u grad v + v grad u$

5) $grad\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v grad u - u grad v}{v^2}$

6) $grad F(u) = \frac{\partial F}{\partial u} grad u.$

Контрольные вопросы.

1. Что такое скалярное поле?

2. Приведите физический пример скалярного поля.
3. Производная по направлению.
4. Дать определение градиента и перечислить свойства.

Лекция № 53. Векторное поле. Векторные линии. Поток по поверхности векторного поля. Свойства, физический смысл. Дивергенция

1. Векторное поле. Определение. Если каждой точке M в области D соответствует некоторый вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле.

Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

Если функция не зависит от времени, то поле называется стационарным.

Вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$ можно записать в виде $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}$, где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ - проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат.

Если P,Q,R не зависит от x,y,z, то есть постоянные величины, то поле называется однородным. Например: поле тяжести, где $P=0$, $Q=0$, $R=-mg$. m- масса, g - ускорение силы тяжести.

Векторными линиями поля $\vec{a}(M)$ называются линии, касательные к которой в каждой их точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, в котором движутся частицы жидкости. Для магнитного поля векторными линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном. Совокупность всех векторных линии поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется векторной трубкой.

Векторные линии поля $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}$ описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

3. Поток поля. Пусть задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и некоторая поверхность S, находящейся в этом поле. Выберем определенную сторону поверхности S. Пусть $\vec{n} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$ единичный вектор нормали к рассматриваемой стороне поверхности S . Разобьем поверхность на элементарные площадки $S_1, S_2, \dots, S_n$. Выберем на каждой площадке точку M_i $(i = \overline{1, n})$ и вычислим значения вектора $\vec{a}(M)$: $\vec{a}(M_1), \vec{a}(M_2), \dots, \vec{a}(M_n)$ будем приближенно считать каждую площадку плоской, вектор $\vec{a}$ постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки.Тогда

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{a}(M), \vec{n}) ds$$

называется потоком векторного поля через поверхность S, где, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S.

Так как $\vec{n} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$, $\vec{a} = \{P, Q, R\}$

$$\Pi = \iint\limits_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + R\,cos\gamma) ds.$$

Свойство векторного поля.

1. $$\iint\limits_{S^+} (\vec{a}, \vec{n}) ds = -\iint\limits_{S^-} (\vec{a}, \vec{n}) ds\,,$$

где S^+ и S^- разные стороны поверхности.

2. $$\Pi = \iint\limits_S Pdydx + Qdxdz + Rdxdy.$$

Дивергенция поля. Формула Остроградского-Гаусса

Важной характеристикой векторного поля является так называемая дивергенция, характеризующая распределение и интенсивность источников и стоков поля.

Определение. Дивергенцией или расходимостью векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

в точке M называется скаляр вида $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ и обозначается символом

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Свойства дивергенции.

1.Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $div\vec{a}=0$.

2.$div(c\cdot\vec{a})=c\cdot div\vec{a},$ где $c=const$.

3.$div\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=div\vec{a}+div\vec{b},$ т.е. дивергенция суммы двух векторных функции равна сумме дивергенции слагаемых.

4.Если U - скалярная функция, $\vec{a}$ - вектор, то $div(U\cdot\vec{a})=U\cdot div\vec{a}+\vec{a}gradU$.

Эти свойства легко проверить, используя формулу определения дивергенции.

Например,

докажем свойство 4. Так как $U\cdot\vec{a}=U\cdot P\vec{i}+U\cdot Q\vec{j}+U\cdot R\vec{k},$ то

$$div(U\cdot\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}(U\cdot P)+\frac{\partial}{\partial y}(U\cdot Q)+\frac{\partial}{\partial z}(U\cdot R)=$$

$$=U\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial U}{\partial y}+U\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial U}{\partial z}=$$

$$=U\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+P\frac{\partial U}{\partial x}+Q\frac{\partial U}{\partial y}+R\frac{\partial U}{\partial z}=U\cdot div\vec{a}+\vec{a}gradU.$$

Используя понятия потока и дивергенции векторного поля, можно записать формулу Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_S Pdydx+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_V div\vec{a}dv$$

в так называемой векторной форме.

Рассматривая область V, ограниченную замкнутой поверхностью S в векторном поле, можно утверждать, что левая часть формулы есть поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S. Подынтегральная функция правой части формулы есть дивергенция вектора $\vec{a}$. Следовательно, формулу можно записать в виде

$$\oiint\limits_S a_n ds=\iiint\limits_V div\vec{a}dv.$$

Формула Остроградского-Гаусса означает, что поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному данной поверхностью.

Используя формулу, можно дать определение дивергенции векторного поля $\vec{a}$ в точке M.

По теореме о среднем для тройного интеграла имеем:

$$\iiint\limits_V div\vec{a}(M)dv = V \cdot div\vec{a}(M_0),$$

где M_0 - некоторая точка области V. Тогда

$$\oiint\limits_S a_n ds = V \cdot div\vec{a}(M_0)$$

отсюда

$$div\vec{a}(M_0) = \frac{1}{V}\oiint\limits_S a_n ds$$

Пусть поверхность S стягивается в точку. Тогда $V \to \infty, M_0 \to M$ и мы получаем выражение для $div\vec{a}(M)$ в точке M.

$$div\vec{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint\limits_S a_n ds$$

Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку M $(V \to 0)$.

Как видно из определения, дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Исходя из физического смысла потока, можно сказать, что: при $div\vec{a}(M) > 0$ точка M представляет собой источник, откуда жидкость вытекает, при $div\vec{a}(M) < 0$ точка M есть сток, поглощающий жидкость.

Понятно, что если в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, нет ни источников, ни стоков, то $div\vec{a}(M) = 0$.

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, т.е. $div\vec{a}(M) = 0$, называется соленоидальным (или трубчатым).

Контрольные вопросы.

1. Что такое векторное поле?
2. Векторные линии.
3. Поток по поверхности векторного поля.
4. Свойства, физический смысл векторного поля.
5. Дивергенция.

Лекция № 54. Циркуляция и ротор векторного поля. Потенциальное поле. Оператор Гамильтона, Лапласа. Гармоническое поле

Циркуляция поля. Пусть задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Возьмем в этом поле некоторую замкнутую кривую L и выберем на ней определенное направление.

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки M на контуре L. Известно, что вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ направлен по касательной к кривой в направлении её обхода и $|d\vec{r}| = dl,$ где dl - дифференциал дуги кривой $\left(dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}\right)$.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $d\vec{r}$, касательной к контуру L называется циркуляцией вектора $\vec{a}$ вдоль L, т.е.

$$C = \oint_L \vec{a} d\vec{r}$$

Рассмотрим различные формы записи циркуляции. Так как

$$\vec{a} d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot \text{пр}_{d\vec{r}}\vec{a} = a_\tau \cdot dl = Pdx + Qdy + Rdz$$

где a_τ - проекция вектора $\vec{a}$ на касательную τ, проведенную в направлении обхода кривой L , то равенство можно записать в виде

$$C = \oint_L a_\tau \cdot dl$$

или

$$C = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Ротор поля. Формула Стокса. Ротором или вихрем векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

называется вектор, обозначаемый $rot\vec{a}(M)$ и определяемой формулой

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + v\vec{k}$$

эту формулу можно записать в виде, удобном для запоминания

$$rot\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Свойства ротора:

1.Если $\vec{a}$ - постоянный вектор, то $rot\vec{a} = 0$
2.v, где $c - const$.
3.$rot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = rot\vec{a} + rot\vec{b}$
4.Если U - скалярная функция, а $\vec{a}(M)$ - векторная, то

$$rot(U \cdot \vec{a}) = U \cdot rot\vec{a} + gradU \times \vec{a}$$

Используя понятия ротора и циркуляции векторного поля, запишем известную в математическом анализе формулу Стокса:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Левая часть представляет собой циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру L, а правая часть представляет собой поток вектора $rot\vec{a}$ через поверхность S, ограниченную контуром L, т.е.

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_S rot_n \vec{a} ds$$

Следовательно, формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint_L a_\tau \cdot dl = \iint_S rot_n \vec{a} ds$$

Такое представление формулы Стокса называют её векторной формой.

Формула показывает, что циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\vec{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\vec{a}$ и ограниченную контуром L.

Используя вышеизложенную формулу, можно дать другое определение ротора поля, эквивалентное первому и не зависящее от выбора координатной системы.

Для этого применим формулу Стокса для достаточно малой плоской площадки S с контуром L, содержащей точку м.

По теореме о среднем для поверхностного интеграла имеем

$$\iint_S rot_n \vec{a} ds = rot_n \vec{a}(M_0) \cdot S,$$

где M_0 - некоторая точка площадки S. Тогда

$$\oint_L a_\tau \cdot dl = rot_n \vec{a}(P) \cdot S$$

Отсюда

$$rot_n \vec{a}(P) = \frac{1}{S} \oint_L a_\tau \cdot dl$$

Пусть контур L стягивается в точку M. Тогда

$$rot_n \vec{a}(M) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_L a_\tau \cdot dl$$

Ротором вектора $\vec{a}$ в точке M называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора $\vec{a}$ по контуру L плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки.

Как видно из определения, ротор вектора есть векторная величина, образующая собственное поле.

Дадим физическое истолкование понятия ротора векторного поля. Найдем ротор поля линейных скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси $0z$ с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, т.е. ротор вектора $\vec{V} = -\omega \cdot y \cdot \vec{i} + \omega \cdot x \cdot \vec{j}$

По определению ротора

$$rot\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\omega}.$$

Ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

Из определения ротора вытекает, что направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке S. Так что связь между ротором и циркуляцией аналогично связи между градиентом и производной по направлению.

Оператор Гамильтона

Основными дифференциальными операциями над скалярным полем U и векторным полем $\vec{a}$ являются $gradU,\ div\,\vec{a}, rot\,\vec{a}$. Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называют векторными операциями первого порядка (в них участвуют только первые производные). Эти операции удобно записывать с помощью так называемого оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Этот символический вектор называют также оператором (Набла). Он приобретает определенный смысл лишь в комбинации со скалярными или векторными функциями.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = grad\ U.$

2. $\nabla \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$

3. $= div\ \vec{a}$

4. $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\vec{a}$

Оператор Лапласа

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получаются дифференциальные операции второго порядка. Имеются следующие виды дифференциальных операций второго порядка:

$div\ grad\ U,\ \ rot\ grad\ U,\ \ grad\ div\ \vec{a},\ \ div\ rot\ \vec{a},\ \ rot\ rot\ \vec{a}.$

Понятно, что операция, например, $divdiv\vec{a}$, не имеет смысла. Рассмотрим эти пять дифференциальных операции второго порядка:

1) $div\ grad\ U = \nabla(\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla)U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot U =$
$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Правая часть этого равенства называется оператором Лапласа скалярной функции U и обозначается ΔU: $\nabla \cdot \nabla = \Delta$

$$div\ grad\ U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ играет важную роль в области математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые гармонические функции.

2) $rot\ grad\ U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla)U = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю. Это означает, что поле градиента есть поле безвихревое.

3) $grad\ div\ \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(div\vec{a}) \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}(div\vec{a}) \cdot \vec{\jmath} +$
$+\frac{\partial}{\partial z}(div\vec{a}) \cdot \vec{k} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\right)\vec{\jmath} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

4) $div\ rot\ \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$, так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря – соленоидальное.

5) $rot\ rot\ \vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - (\nabla\nabla)\vec{a} =$
$grad\ div\ \vec{a} - \Delta\vec{a}$ так как двойное векторное произведение обладает свойством

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Соленоидальное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток и другие.

Приведем некоторые свойства соленоидального поля.

1.В соленоидальном поле $\vec{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

2.Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т.е., если $div\ \vec{a} = 0$, то существует такое поле $\vec{a}$, что $\vec{a} = rot\ \vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{a}$.

3.В соленоидальном поле $\vec{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (интенсивность трубки).

Потенциальное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным (или безвихревым, или градиентным), если во всех точках поля ротор равен нулю, т.е. $rot\,\vec{a} = 0$. Примером потенциального поля является электрическое поле напряженности точечного заряда и другие.

Приведем основные свойства потенциального поля.

1.Циркуляция потенциального поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю, в поле скоростей текущей жидкости равенство $\text{C} = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т.е. нет водоворотов.

2.В потенциальном поле $\vec{a}$ криволинейный интеграл $\oint_L \; Pdx + Qdy + Rdz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2, и не зависит от формы кривой.

3.Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x, y, z)$, т.е., если $rot\,\vec{a} = 0$, то существует функция $U(x, y, z)$ такая, что $\vec{a} = grad\,U$.

Гармоническое поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется гармоническим (или лапласовым) если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т.е. $rot\,\vec{a} = 0$ и $div\,\vec{a} = 0$.

Примером гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного, безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Так как поле $\vec{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\vec{a} = grad\,U$, где $U = U(x, y, z)$ - потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то $div\,\vec{a} = divgradU = 0$, или, что то же самое

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. потенциальная функция U гармонического поля $\vec{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция называется, как уже упоминали, гармонической.

Контрольные вопросы.

1. Что такое циркуляция векторного поля?
2. Что такое ротор векторного поля?
3. Потенциальное поле.
4. Оператор Гамильтона, Лапласа.
5. Соленоидальное поле.
6. Гармоническое поле.

Литература

Учебники и учебные пособия

1.Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 кисм. –Т.: Узбекистон, 2006.

2.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.280 с.

3.Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2005. – 288 с.

4.Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2009. – 570 с.

5.Шипачев В.С. Основы высшей математики: учебное пособие для втузов – Москва: Юрайт, 2009. – 478 с.

6.Луканин Г.Л. и другие. Высшая математика. Учебник для студентов высших технических учебных заведений – М. Высшая школа, 2009. – 583 с.

7.Gerd Bauman, Mathematics for Engineers II. 2010. Munchen

8.Claudio Canute, Anita Tabacco, Mathematical Analysis I. Milan, 2008

Сборники задач и упражнений

1.Хуррамов Ш.Р. Олий математика. Мисол ва масалалар, назорат топшириклари. 1,2,3-кисмлар. –Тошкент: Фан ва технологиялар, 2015.

2.Лунгу К.Н., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Из-во: Айрис-Пресс, 2017. – 576 с.

3.Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике. – М. Из-во: Ozon; 2008. – 240 с.

4.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд.перераб. – М.: Лань, 2008. – 432 с.

5.Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях. 6-е издание. – М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. – 368 с.

6.Зимина О.В., Кириллов А.И. Решебник. Высшая математика. 2005. – 365 с.

7.Смирнов Ю.М. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М:, Логос, 2005. – 372 с.

Оглавление

Редактор Ахметжанова Г.М.

Для заметок