ISSN: 2542-0348

ИНТЕРНАУКА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ЧАСТЬ 1

5(87)

internauka.org

г. Москва

ИНТЕРНАУКА
internauka.org

«ИНТЕРНАУКА»

Научный журнал

№ 5(87)
Февраль 2019 г.

Часть 1

Издается с ноября 2016 года

Москва
2019

УДК 08
ББК 94
И73

И73 **«Интернаука»:** научный журнал – № 5(87). Часть 1. – М., Изд. «Интернаука», 2019. – 64 с.

ББК 94

ISSN 2542-0348

Содержание

МАТЕМАТИКА

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НАСЛЕДСТВЕННО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Абдукаримов Абдали
канд. физ.-мат. наук, Кафедра "Высшая Математика",
Ташкентский государственный технический университет им. И.А.Каримова,
Республика Узбекистан, г. Ташкент

Халдыбаева Ибодат Турабековна
старший преподаватель, Кафедра "Высшая Математика",
Ташкентский государственный технический университет им. И.А.Каримова,
Республика Узбекистан, г. Ташкент

ВАҚТ БЎЙИЧА ДЕФОРМАЦИЯЛАНУВЧИ ТИЗИМЛАРНИНГ ТАСОДИФИЙ ТЕБРАНИШЛАРИ МАСАЛАСИНИНГ СОНЛИ ЕЧИЛМАСИ

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF RANDOM VIBRATIONS HEREDITARILY-DEFORMABLE SYSTEMS

Поғанали бирлик функция ва импулсли ўтиш функцияси ёрдамида вақт бўйича деформацияланувчи тизимларнинг тасодифий тебранишлари масаласини сонли ечиш алгоритми берилган.

The impulse transition function was deduced. Using it, the numerical solution was received of the problem of random vibrations hereditarily-deformable systems.

Среди большого многообразия динамических статистических задач механики твердых деформируемых тел важную роль играют, в частности, задачи и реакции наследственно- деформируемых систем на динамические случайные внешние воздействия. Целью этой работы является изложение численно-аналитического подхода для исследования динамической реакции наследственно-деформируемой системы на нестационарные входные воздействия.

Как известно [1,2], реакция физической системы на единичную ступенчатую функцию называется переходной проводимостью системы *A(t)*. Найдем реакцию линейной наследственно-деформируемой системы на единичную ступенчатую функцию. Рассмотрим интегро-дифференциональное уравнение (ИДУ)

$$\ddot{y}(t) + p^2(1 - R^*)y(t) = I(t) \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$y = \dot{y}(t) = 0 \;\text{ при }\; t = 0 \qquad (2)$$

Здесь

$$R^* y(t) = \int_0^t R(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

где $R(t)$ - слабо- сингулярное ядро наследственности типа Абеля, то есть

$$R(t-\tau) = c\,e^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-1}$$
$$c > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

Согласно метода фундаментальных системы решений [3] общее решение ИДУ (1) имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{p^2} + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad (3)$$

Здесь

$$y_1(t) = \cos pt + c\phi\, pt, \qquad y_2(t) = \sin pt + s\phi\, pt$$

где $c\phi\, pt$ и $s\phi\, pt$ -соответственно функции косинуса и синуса дробного порядка [4],

$$y_2(t) = p\int_0^t y_1(\tau)\,d\tau \qquad (4)$$

Используя начальные условия (2) получим

$$A(t) = y(t) = \frac{1}{p^2}\left[\Pi(t) - \frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)\,y_1(\tau)\,d\tau\right] I(t) \qquad (5)$$

где $\Pi(t)=1+\int_0^t K(\tau)d\tau$ - есть функция ползучести. В частности для идеально- упругой системы $K(t)=0,\ c\phi\, pt=0$ и формула (5) принимает вид

$$A(t)=y(t)=\frac{1}{p^2}(1-\cos pt)I(t) \qquad (6)$$

При статическом приложении нагрузки смещение идеально- упругой системы равно $1/p^2$, при $\cos pt=-1$ (см. рис. 1) т. е. при $t=\pi/p$, смешение от приложения ступенчатой нагрузки равно $2/p^2$.

$$\frac{1}{p^2}\left[\Pi(t)-\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)y_1(\tau)d\tau\right]$$

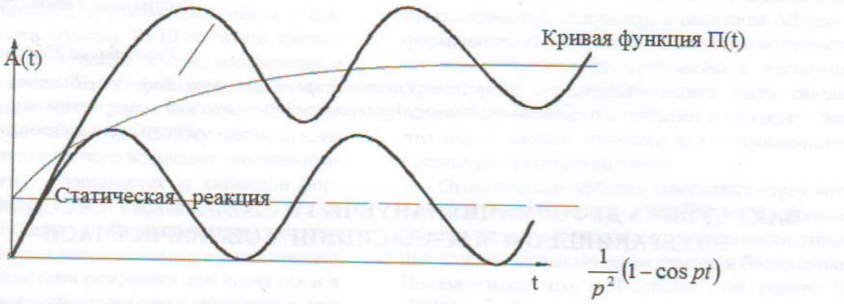

Рисунок 1. Кривая переходной проводимости линейной системы с одной степенью свободы

Таким образом, единичная ступенчатая функция вызывает заброс, равный двум, т. е. коэффициент динамичности в упругом случае равно $\lambda=2$.

Большое значение в анализе колебательных систем имеет реакция системы на δ-функцию, которую можно рассматривать как производную от единичной ступенчатой функции. Реакция системы на δ-функцию называется импульсной переходной функцией $h(t)$. Для примера рассмотрим уравнение вида

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{y}+p^2(1-R^*)y=\delta(t),\\ &y=\dot{y}=0 \ при\ t\le-\varepsilon(\varepsilon>0).\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) в пределах от –ε до ε, где ε-малое число, получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d^2y}{dt^2}dt+p^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-R^*)ydt=1. \qquad (8)$$

Первый интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{dy}{dt}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=\varepsilon},$$

так как $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=-\varepsilon}=0.$

Второй интеграл (8) стремится к нулю, так как в окрестности $t=0$ y является конечной величиной, т. е. $|y|<M$ ($M>0$ – постоянная величина) и интеграл ограничен величиной $2M\varepsilon$, которая в пределе при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю. Следовательно, в пределе соотношение (8) примет вид

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=\varepsilon}=1.$$

Поэтому исходное уравнение (7) будет эквивалентно системе уравнений

$$\ddot{y}+p^2(1-R^*)y=0,\ \ t>0, \qquad (9)$$

$$y=0,\ \dot{y}=1,\ t=(0+), \qquad (10)$$

решение которой имеет вид

$$h(t)=y(t)=\frac{1}{p}(\sin pt+s\phi\, pt) \qquad (11)$$

В частности идеально- упругой системы

$$h(t)=y(t)=\frac{1}{p}\sin pt$$

Между переходной проводимостью системы и импульсной переходной функцией имеет место соотношение

$$h(t)=\frac{dA}{dt}.$$

Если учесть внешние трения, при свободных колебаниях, пропорциональные скорости перемещения то уравнение (9) принимает вид

$$\ddot{y}+2\eta\dot{y}+p^2(1-R^*)y=0 \qquad (12)$$

где η – коэффициент внешнего демпфирования.

Тогда согласно [3,4] решение ИДУ (12) при начальных условиях (10) можно записать в виде

$$h(t)=y(t)=\frac{1}{\omega_\eta}e^{-\eta t}\left[\sin\omega_\eta t+s\phi\omega_\eta t\right] \quad (13)$$

где через ω_η обозначена частота собственных колебаний идеально- упругой системы, вычисленная с поправкой на силу внешнего трения,

$$\omega_\eta=\sqrt{p^2-\eta^2}$$

Отметим, что с помощью импульсных переходных функции (11) и (13) можно проводить анализ реакции как упругих так и наследственно-деформируемых систем на случайные возмущения. При этом реакцию конструкции на произвольную форму случайного возмущения $q(t)$ можно представить в виде интеграла Дюамеля [2,5]:

$$y(t)=\int_0^t q(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t h(\tau)q(t-\tau)d\tau \quad (14)$$

где $q(t)=0$ при $t<0$

$h(\tau)-$ импульсная переходная функция

$h(\tau)=0$ при $\tau\le 0$.

Таким образом, с помощью импульсных переходных функции, можно определить; математическое ожидание и моменты выходного процесса; корреляционных функций; спектральных плотностей и т. п. Одним словом, все методы для решения задачи статистической динамики рассчитаны именно на этот способ вероятного описания.

Если случайная вектор-функция $q(t)$ допускает спектральное представление т. е. может быть представлена в виде конечного или бесконечного ряда

$$q(t)=\sum_k a_k\varphi_k(t) \quad (15)$$

где $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots$ некоторая система неслучайных функции; $Q_1,Q_2,\ldots-$ случайные величины, то согласно формуле (14) имеем

$$y(t)=\sum_k Q_k\int_0^t h(\tau)\varphi_k(t-\tau)d\tau \quad (16)$$

Вычисляя этот интеграл по методу трапеции и используя дискретные представления переходных импульсных функции, полученные из численного решения ИДУ (12) по методом исключения слабо-сингулярных особенности интегральных и ИДУ [3,4] т. е.

$$h_i=\frac{1}{(1+\eta\Delta t)}\left\{t_\eta-\sum_{j=0}^{i-1}A_j\left[2\eta h_j+p^2\left(t_i-t_j\right)\left(h_j-\frac{c}{\alpha}\sum_{n=0}^{j}B_n e^{-\beta t_n}h_{j-n}\right)\right]\right\} \quad i=1,2\ldots \quad (17)$$

где

$h(t_i)=h_i,\;\; t_i=\Delta t i,\;\; A_0=A_i=\dfrac{\Delta t}{2},\;\; A_j=\Delta t,\;\; j=\overline{1,\,i-1}$

$$B_0=\frac{(\Delta t)^\alpha}{2},\;\; B_n=\frac{(\Delta t)^\alpha}{2}\left[(n+1)^\alpha-(n-1)^\alpha\right],$$

$$n=\overline{1,\,j-1},\;\; B_j=\frac{(\Delta t)^\alpha}{2}\left[j^\alpha-(j-1)^\alpha\right],$$

можно найти численные решения задачи о случайных колебаний наследственно-деформируемых систем по формулам.

$$y_n=\sum_k Q_k\sum_{i=0}^{n}A_i h_i\varphi_{k,\,n-i} \quad (18)$$

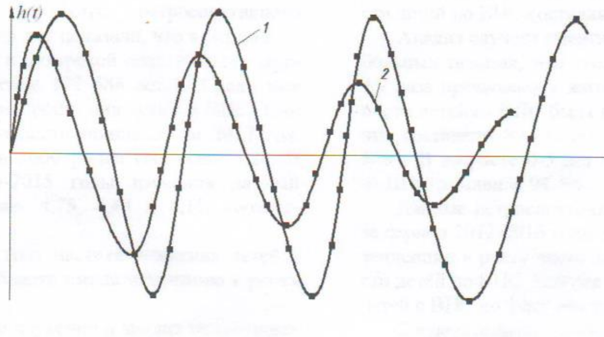

Рисунок 2. Закон изменения импульсной переходной функции во времени при η=0,05, α=0,25 – точное решение по формулам (13), … - приближенное решение вычисленные по формулам (17)

На рис. 2. приведен закон изменения во времени импульсной переходной функции для идеально-упругой (кривая 1) ε =0 и вязкой упругой (кривая 2) ε =0,1 случаев

Таким образом, если случайная нагрузка допускает спектральные представления, то предлагаемая выше методика позволяет численные решения задачи о случайных колебаниях наследственно-деформируемых систем.

Список литературы:

1. Макаревский А.И. Прочность самолета М.: Машиностроения. 1975.С. 277.
2. Николаенко Н.А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкции. М.//Машиностроение .1967.365 с.
3. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, Мехнат. 1987. 269 с...
4. Бадалов Ф. Б., Абдукаримов А. Функции синуса и косинуса дробного порядка и их приложение к решению динамических задач наследственно-деформируемых систем. Ташкент.: ФАН. 2004. 155 с.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука. 1979. 331 с.