

G'X.DJUMABAYEV

OLIY
MATEMATIKA

TOSHKENT – 2018

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

G‘.X.DJUMABAYEV

OLIY MATEMATIKA

YENGIL SANOAT SOHASI TALABALARI
UCHUN DARSLIK

TOSHKENT – 2018

Ushbu darslik Yengil sanoat sohasida tahsil oladigan talabalarga “Oliy matematika” fanini o‘zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi. Darslikka bakalavriyat talabalari uchun rejalashtirilgan o‘quv soatiga mos mavzular kiritilgan. Har bir mavzu bo‘yicha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan.

Muallif: **G‘.X.Djumabayev**

Taqrizchilar: 1. N.M.Jabborov-O‘zMU dotsenti, f.-m.f.d.

2. A.Z.Mamatov-TTYeSI professori, t.f.d.

Toshkent to‘qimachilik va yengil sanoat instituti o‘quv uslubiy kengashining 2018 yil _____dagi ____-son bayonnomasi qarori bilan tavsiya qilingan.

© G‘.X.Djumabayev

© Toshkent to‘qimachilik va yengil sanoat instituti, 2018 y

SO‘Z BOSHI

Oliy ta’lim muassalarida Oliy matematika turli hajmda tayyorlanadigan mutaxassislikka qarab, ma’lum dastur asosida o’qitiladi.

Oliy matematikani o’qitishdan ko’zlangan maqsad quyidagilardan iboratdir: talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo’llashga jumladan, to’qimachilik va yengil sanoat, iqtisodiy va mexanik masalalarning matematik modellarini qurishga o’rgatishdan iborat; talabalarni matematik ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirish, uning turli uslublarini o’rganish, ular orasidagi bog’lanishlarni bildirish.

Ravshanki, o’quv jarayonida darsliklar, o’quv qo’llanmalari, shuningdek darslik shaklida yozilgan kitoblarning ahamiyati katta.

Oliy matematikadan turli hajmda, turli sohalarga mo’ljallab yozilgan kitoblar bor. Ayni paytda, jamiyatda barcha sohalarning shiddat bilan rivojlanayotganligi ularga mos keladigan kitoblarning yozilishini taqozo etmoqda.

Shuni e’tiborga olib, muallif oliy matematikadan bilimlariga, shuningdek oliy ta’lim muassasalarida “Oliy matematika” dan o’tkazilgan darslardan hosil bo’lgan tajribaga tayangan holda ushbu kitobni yozdi.

Mazkur kitob to’qimachilik va yengil sanoat sohasiga mo’ljallangan. Kitobning birinchi bobi keyingi boblarini o’qish va o’zlashtirishni yengillashtirish maqsadida “Dastlabki ma’lumotlar” deb nomlanib, unda matematikani o’rganish uchun zarur bo’lgan ma’lumotlar keltirilgan.

Kitobda mavzularning muayyan ketma-ketlikda va o’zaro uzviy bog’lanishda bo’lishiga, ma’lumotlarni qisqa va ravon bayon etilishiga, amaliy masalalarni yechishda matematik usullardan unumli foydalanishga alohida e’tibor qaratilgan.

1-BOB

DASTLABKI MA'LUMOTLAR

Ma'lumki, matematikaning dastlabki, ayni paytda muhim bo'lgan qismlari o'rta maktab matematika darsida, litsey hamda kollejlarda o'qitiladigan matematika darslarida keltiriladi. Ularda bayon etilgan tushuncha va ma'lumotlardan kitobxon habardor. Bu tushuncha va ma'lumotlardan oliy ta'lim matematikasining bayonida muttasil foydalanib boriladi. Shuni e'tiborga olib, ushbu bobda asosiy tushunchalarni qisqacha keltiramiz.

1-§. To'plam. To'plamlar ustida amallar

1⁰. To'plam tushunchasi. To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri. Uni misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, shkafdagi kitoblar, bog'dagi mevali daraxtlar, auditoriyadagi talabalar, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami deyilishi mumkin.

Demak, to'plamni ixtiyoriy xususiyatli narsalarning (predmedlarning, ob'ektlarning) ma'lum belgilari bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushiniladi.

To'plamni tashkil etgan narsalar (ob'ektlar) uning elementlari deyiladi. Odatda to'plamlar bosh harflar bilan, uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi.

Masalan, A, B, C –to'plamlar, a, b, c –to'plamning elementlari. Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan ham yoziladi.

Masalan, 4, 7, 10, 13, 16 sonlardan tashkil topgan A uchun

$$A = \{4, 7, 10, 13, 16\}$$

bo'ladi.

Odatda, barcha natural sonlar

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

dan tashkil topgan to'plam N harfi bilan belgilanadi:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Agar to‘plamni tashkil etgan elementlar soni chekli bo‘lsa, u chekli to‘plam deyiladi, aks holda cheksiz to‘plam deyiladi.

Masalan,

$$A = \{4, 7, 10, 13, 16\}$$

chekli to‘plam,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n \dots\}$$

cheksiz to‘plam bo‘ladi.

Aytaylik, B biror to‘plam bo‘lib, b esa uning elementi bo‘lsin. Uni $b \in B$ kabi yoziladi va “ b element B to‘plamga tegishli” deb o‘qiladi. Agar b shu B to‘plamning elementi bo‘lmasa, uni $b \notin B$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$A = \{4, 7, 10, 13, 16\}$$

to‘plamda

$$10 \in A, \quad 11 \notin A$$

bo‘ladi.

Biror B to‘plamning elementlari orasida ma’lum xususiyatga (bu xususiyatni P bilan belgilaylik) ega bo‘ladiganlari (x -lar) bo‘lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tashkil topgan to‘plam quyidagicha

$$B = \{x | P\}$$

belgilanadi. Masalan

$$x^2 - 4 = 0$$

tenglamaning ildizlaridan tuzilgan to‘plam

$$B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$$

kabi yoziladi. Ravshanki, $B = \{-2, 2\}$.

Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, ikkita A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning ham elementi bo‘lsa, B to‘plam A to‘plamning qismi yoki qisman to‘plami deyiladi hamda

$$B \subset A \text{ yoki } A \supset B$$

kabi belgilanadi.

Masalan, yuqorida keltirilgan A va N to'plamlar uchun

$$A \subset N$$

bo'ladi.

Agar A va B to'plamlar uchun bir vaqtda

$$A \subset B, B \subset A$$

bo'lsa, A va B bir-biriga teng to'plamlar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

1-Eslatma. A to'plamning o'zi va bo'sh to'plam shu A to'plamning qismi bo'ladi deb olinadi:

$$A \subset A, \emptyset \subset A.$$

Agar A va B to'plamlar uchun $A \subset B, B \subset A$, bo'lsa, A va B bir-biriga teng to'plamlar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

2-Eslatma. A to'plamda aynan bir-biriga teng bo'lgan (bir hil) elementlar to'plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi.

2^o. To'plamlar ustida amallar. Ikkita A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlar yig'indisi (birlashmasi) deyiladi va

$$A \cup B$$

kabi belgilanadi.

Bu ta'rifdan

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup A = A.$$

Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda

$$A \cup B = B$$

bo'lishi kelib chiqadi.

A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi) deyiladi va

$$A \cap B$$

kabi belgilanadi.

Bu ta'rifdan

$$A \cap B = B \cap A, A \cap A = A.$$

Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda

$$A \cap B = A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ikki to'plam ko'patmasi bo'sh to'plam, ya'ni,

$$A \cap B = \emptyset$$

bo'lsa, u holda A va B kesishmaydigan to'plamlar deyiladi.

A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deyiladi va

$$A \setminus B$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{1, 3\}$$

to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\},$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\},$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\},$$

$$B \setminus A = \{8\},$$

$$B \cap C = \emptyset,$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap C = \{1, 3\}$$

bo'ladi.

Eslatma Yuqoridagi kiritilgan amallar ixtiyoriy to'plamlar uchun, to'plamning tabiatiga hech qanday shart qo'yilmasdan ta'riflanadi. Ammo bunday "umumiylik" ba'zan konkret hollarda ma'noning yo'qolishiga ham olib kelishi mumkin. Masalan, A to'plam sifatida 2, 4, 6, 8, 10 sonlar to'plamini

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

B to‘plam sifatida Quyosh sistemasidagi sayyoralar to‘plamini olsak, ularning yig‘indisi va ko‘payitmasi formula ko‘rinishida aytila olinsa ham, muayyan g‘ayritabiiylikka olib kelishi ravshan. Bunday ma’nosizlik hollarini istisno qilish uchun, odatda barcha amallar biror universal to‘plam deb ataluvchi to‘plamning qismaniy to‘plamlari ustida bajariladi deb hisoblanadi.

Oliy matematikada ko‘pincha sonli to‘plamlar qaraladi. Odatda elementlari sonlar bo‘lgan to‘plamlar sonli to‘plamlar deyiladi.

2-§. Sonlar. Haqiqiy sonlar to‘plami va uning xossalari

Son matematikaning asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Dastlab odamlar sanash taqozosi bilan natural sonlarni qo‘llaganlar. So‘ng turli qarama-qarshi xolatlarni, masalan, havo harorati 10^0 sovuq holatlarni ifodalash zaruriyati tufayli natural sonlarga qarama-qarshi sonlarni-manfiy sonlarni ishlatganlar. Keyinchalik ratsional va nihoyat, haqiqiy sonlar tushunchalari kiritilgan va o‘rganilgan.

Demak, sonlar:

1) natural sonlar: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$,

2) butun sonlar: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

3) ratsional sonlar: $\frac{p}{q}$ kasr ko‘rinishida ifodalanadigan sonlar, (bunda

p –butun, q –natural son, hamda p va q lar o‘zaro qisqarmaydigan sonlar, ya’ni $(p, q) = 1$)

4) haqiqiy sonlar: ratsional va irrasional sonlar bo‘ladi.

Yuqorida barcha natural sonlar to‘plamini N harfi bilan belgilanishini aytgan edik:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Odatda barcha butun sonlar to‘plami Z bilan:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

barcha ratsional sonlar to‘plami Q bilan:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p - \text{butun}, q - \text{natural va } (p, q) = 1 \right\}$$

barcha haqiqiy sonlar to'plami R bilan belgilanadi. Ravshanki,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

bo'ladi.

Haqiqiy sonlar oliy matematikada muhimligini, bu sonlar ratsional va irratsional sonlardan iborat ekanligini e'tiborga olib, irratsional son haqidagi ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

1⁰. Ratsional bo'lmagan sonning mavjudligi

Ma'lumki, tamoni 1 ga teng bo'gan kvadratning diagonali Pifagor teoremasiga ko'ra

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

ya'ni

$$d = \sqrt{2}$$

bo'ladi. Bu son ratsional son bo'lmaydi. Shuni isbotlaymiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $\sqrt{2}$ ratsional son bo'lsin:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

bunda $\frac{p}{q}$ qisqarmaydigan kasr.

Bu tenglikdan

$$2 = \left(\frac{p}{q} \right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan p^2 sonning xususan p sonning juft son bo'lishini topamiz:

$$p = 2k.$$

Unda

$$p^2 = (2k)^2 = 2q^2,$$

$$4k^2 = 2q^2,$$

$$q^2 = 2k^2$$

bo'lib, q^2 -juft. Demak, q ham juft bo'lishi kelib chiqadi.

Madomiki, p va q juft sonlar ekan, unda $\frac{p}{q}$ qisqaradigan (2 ga qisqaradigan) kasr bo'ladi. Bu esa yuqorida qilingan farazga ziddir. Zid natija kelib chiqishiga sabab $\sqrt{2}$ ratsional son deyilishidir. Demak, $\sqrt{2}$ ratsional son emas.

2⁰. Ratsional son va o'nli kasrlar

Aytaylik,

$$\frac{p}{q} \quad (p \in Z, q \in N, (p, q) = 1)$$

ratsional son-oddiy kasr berilgan bo'lsin. Agar bu kasrning maxraji

10, 100, 1000, 10000 va hokazo

bo'lsa, unda oddiy kasr o'nli kasr deyiladi.

Masalan,

$$\frac{7}{10} = 0,7, \quad \frac{112}{10} = 11,2, \quad \frac{17}{100} = 0,17, \quad \frac{1}{1000} = 0,001$$

bo'ladi.

Biror

$$\frac{p}{q} \quad (p \in Z, q \in N, (p, q) = 1)$$

ratsional son-oddiy kasr berilgan bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p sonni q natural songa bo'lamiz:

1) Agar bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, unda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ oddiy kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda bunday o'nli kasrlar chekli o'nli kasrlar deyiladi.

2) Agar p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrasa, so'ng oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Bunda ham oddiy kasr o'nli kasrga aylanadi va u cheksiz davomiy o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$$\frac{53}{36} = 1,47222 = 1,47(2)$$

Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) oʻnli kasrning davri deyiladi.

Ayni paytda chekli oʻnli kasrlarni va cheksiz davriy oʻnli kasrlarni ham oddiy kasrlarga keltirish mumkin. Masalan,

$$1,07 = 1 \frac{7}{100} = \frac{107}{100},$$

$$0,(3) = 0,333 \dots = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

Xulosa. Har qanday ratsional son chekli oʻnli kasr yoki cheksiz davriy oʻnli kasr orqali ifodalanadi, aksincha har qanday chekli oʻnli kasr yoki cheksiz davriy oʻnli kasr $\frac{p}{q}$ koʻrinishida ifodalanadi.

3⁰. Irratsional son. Haqiqiy son

Cheksiz davriy boʻlmagan oʻnli kasrlar ham boʻladi. Masalan, bunday oʻnli kasrlar kesmalarni oʻlchash jarayonida yuzaga kelishi mumkin. Shuni koʻrsatamiz.

Aytaylik, biror J kesma hamda oʻlchov birligi, masalan metr berilgan boʻlsin, J kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr J kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning J_1 qismi ortib qolsin. Ravshanki, J_1 ning uzunligi 1 m dan kam boʻladi. Bu holda J kesmani uzunligiga taxminan 5m ga teng deb olish mumkin:

$$J_{uzunlik} \approx 5 m.$$

Agar bu aniqlik etarli boʻlmasa, oʻlchovning $\frac{1}{10}$ qismini, yaʼni 1 dm ni olib, uni J_1 kesmaga joylashtiramiz. Aytaylik, 1 dm J_1 kesmada 7 marta butun joylashib, J_1 kesmaning J_2 qismi ortib qolsin. Bunda J_2 kesmaning uzunligi 1 dm dan kichik boʻladi. Bu holda J kesmaning uzunligi taxminan 5,7 m ga teng deb olinishi mumkin:

$$J_{uzunlik} \approx 5,7 m$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) Biror qadamdan keyin, masalan $n+1$ qadamdan keyin o'lchov birligining $\frac{1}{10^n}$ qismi J_n kesmada α_n marta butun joylashadi. Bu holda o'lchash jarayoni to'xtab,

$$J_{uzunlik} = 5,7 \dots \alpha_n$$

bo'lishi topiladi.

2) O'lchash jarayoni toxtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda J kesmaning uzunligi aniq qiymati deb ushbu

$$5,7 \dots \alpha_n \dots$$

cheksiz o'nli kasr olinadi.

Demak, cheksiz o'nli kasrlar:

- 1) Cheksiz davriy o'nli kasrlar,
 - 2) Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar
- bo'ladi.

Biz yuqorida har qanday cheksiz davriy o'nli kasrlar ratsional sonni ifodalashini aytdik. Ravshanki, cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ratsional son bo'lmaydi.

Ta'rif. Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr orqali ifodalanadigan son irratsional son deyiladi.

Masalan,

$$1,4142135 \dots = \sqrt{2},$$

$$3,141583 \dots = \pi,$$

$$2,718281 \dots = e$$

irratsional sonlardir.

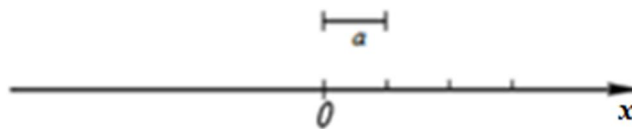
Ratsional hamda irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.

Yuqorida ayganimizdek, barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam R harfi bilan belgilanadi.

Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, va h.k.), amallarning bajarilish qoidalari kiritilgan.

4⁰. Sonlar o‘qi. Sonlarni geometrik tasvirlash

To‘g‘ri chiziq va bu to‘g‘ri chiziqda biror nuqta olib, uni O harfi bilan belgilaymiz (1-chizma)



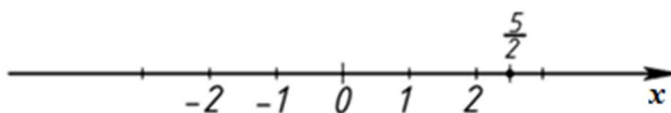
1-chizma

Bu O nuqta nol sonining geometrik tasviri deyiladi. O nuqta to‘g‘ri chiziqni ikki nurga ajratadi. O nuqtadan o‘ng tamondagi nurning yo‘nalishini musbat, chap tamondagisining yo‘nalishini manfiy deb qaraymiz. So‘ng o‘lchov birligi (uzunligi a ga teng bo‘lgan kesma) ni olamiz.

Natijada yo‘nalishga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq, O nuqta va o‘lchov birliklaridan iborat sistema hosil bo‘ladi. Uni sonlar o‘qi deyiladi.

O‘lchov birligi deb qabil qilingan a kesmani O nuqtadan boshlab, sonlar o‘qining o‘ng tamoniga joylashtirib boramiz. Uni bir marta joylashtirilganda bir uchi O nuqtada bo‘lib, ikkinchi uchini aniqlangan nuqta 1 sonning geometrik tasviri bo‘ladi. Shu tarzda birlik kesmani ikki marta, uch marta va h.k. marta joylashtirib sonlar o‘qida 2, 3 va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari topiladi.

Xuddi shu usul bilan birlik kesmani O nuqtadan chap tomondagi nurga joylashtira borib, -1, -2, -3 va h.k. sonlarning geometrik tasviri aniqlanadi (2-chizma).



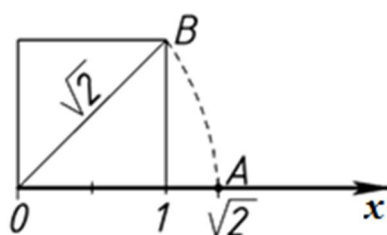
2-chizma

Aytaylik, qaralayotgan son ratsional son bo‘lsin, masalan, $\frac{5}{2}$. Bu sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avvalo o‘lchov birligini O nuqtadan o‘ng

tomonga ikki marta joylashtirib, ikki sonini tasvirlovchi nuqta topiladi, so'ngra bu nuqtadan boshlab o'lchov birligining $\frac{1}{2}$ qismini qo'yib $\frac{5}{2}$ sonning geometrik tasvirlovchi nuqta topiladi. (2-chizma).

Umuman ratsional sonlar to'plami Q dan olingan har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta mos keladi. Biroq sonlar o'qida shunday nuqtalar borki, ular birorta ham ratsional sonning tasviri bo'lmaydi.

Masalan, $\sqrt{2}$ sonini olaylik (uning ratsional son emasligi ko'rsatilgan). Tomoni 1 ga teng bo'lgan kvadratni qaraylik (3-chizma).



3-chizma

Bu kvadratning OB diagonali $OB = \sqrt{2}$ bo'ladi. Sirkulning uchini O nuqtaga qo'yib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizilsa, bu aylana sonlar o'qini A nuqtada kesadi. Ravshanki,

$$OB = OA = \sqrt{2}$$

Demak $\sqrt{2}$ sonning geometrik tasviri A nuqta bo'ladi.

Sonlar o'qida shu kabi nuqtalar cheksiz ko'p bo'lib, ular irratsional sonlarning tasvirlari bo'ladi.

Ma'lumki, barcha ratsional hamda barcha irratsional sonlardan (ya'ni barcha haqiqiy sonlardan) tashkil topgan to'plam R bilan belgilangan edi.

Ko'rsatish mumkinki (u maxsus adabiyotlarda keltiriladi [9]) har bir haqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta va aksincha sonlar o'qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi.

Keyinchalik to'g'ri chiziqning nuqtasi deganda haqiqiy sonni, haqiqiy son deganda to'g'ri chiziqning nuqtasini tushunamiz va zaruriyat tug'ilganda ularning biri o'rniga ikkinchisini ishlatamiz.

5⁰. Haqiqiy sonlar to'plamining xossalari

Haqiqiy sonlar to'plami R quyidagi xossalarga ega:

1) Haqiqiy sonlar to'plami tartiblangan, ya'ni ixtiyoriy turli a va b haqiqiy sonlar uchun

$$a < b \text{ yoki } a > b$$

bo'ladi;

2) Haqiqiy sonlar to'plami zich to'plam ya'ni ixtiyoriy turli a va b haqiqiy sonlar $a < b$ yoki $a > b$ olinganda ham, ular orasida cheksiz ko'p x haqiqiy sonlar mavjud:

$$a < x < b \quad (a > x > b)$$

Masalan a va b ($a < b$) sonlar uchun

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

bo'ladi. Haqiqatan ham

$$a < b,$$

$$2a < a + b,$$

$$a + b < 2b$$

$$2a < a + b < 2b,$$

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

3) Haqiqiy sonlar to'plami uzliksiz to'plam, ya'ni har bir haqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta mos keladi va sonlar o'qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi.

6⁰. Muhim to'plamlar

Ba'zi-bir sonlar to'plamlarini keltiramiz. Ulardan kelgusida ko'p foydalaniladi.

Aytaylik, a va b haqiqiy sonlar berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin. a , b va ular orasidagi barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam segment deyiladi va $[a, b]$ kabi belgilanadi:

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}.$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ to'plamlar ta'riflanadi:

$$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\} - \text{interval},$$

$$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\} - \text{ya'rim interval},$$

$$(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\} - \text{yarim interval}$$

Bunda a va b sonlar $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ va $(a, b]$ to'plamlarning chegaralari deyiladi.

Shuningdek,

$$[a, +\infty) = \{x \in R: x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in R: x < a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = R$$

deb qaraladi.

7⁰. Sonning absolyut qiymati va uning xossalari

Biror x haqiqiy sonni ($x \in R$) qaraylik. Bu son musbat ($x > 0$), manfiy ($x < 0$) yoki $x = 0$ bo'lishi mumkin.

Agar $x > 0$ bo'lganda shu x ga teng, $x < 0$ bo'lganda shu songa qarama-qarshi $-x$ ga, $x = 0$ bo'lganda 0 ga teng bo'gan son x ning absolyut qiymati deyiladi va $|x|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \\ -x, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

Masalan, $|5| = 5$, $|-7| = -(-7) = 7$, $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) Ixtiyoriy $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

bo'ladi.

2) Agar $x \in R$ son uchun

$$|x| \leq a, \quad (a > 0)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$-a \leq x \leq a$$

tengsizlikni ham qanoatlantiradi va aksincha.

3) Agar $x \in R$ son $|x| > a$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $x > a$, $x < -a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

4) Ikki x va y haqiqiy sonlar uchun

$$a) |x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$b) |x - y| \geq |x| - |y|$$

$$c) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$d) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$$

bo'ladi.

5) Ushbu $\sqrt{x^2} = |x|$ munosabat o'rinli.

6) Agar x va y lar sonlar o'qining turli nuqtalari bo'lsa, bu nuqtalar orasidagi masofa $d = |x - y|$ bo'ladi.

3-§. Tekislikda Dekart hamda qutb koordinalar sistemasi

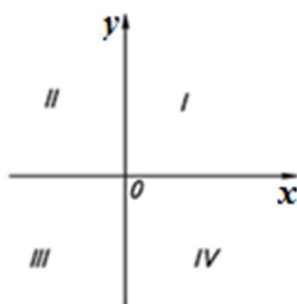
1⁰. Dekart koordinatalar sistemasi

Odatda tekislikda berilgan nuqtaning holatini aniqlaydigan usul ma'lum bo'lsa, tekislikda koordinatalar sistemasi berilgan deyiladi.

Biz quyida sodda, ayni paytda keng qo'llaniladigan Dekart koordinatalari sistemasini keltiramiz.

Tekislikda ikkita o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlarni olaylik. Bu to'g'ri chiziqlardan birinchisi gorizontal, ikkinchisi esa vertikal joylashgan. To'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini O harfi bilan belgilaymiz. O nuqta koordinatalar boshi deyiladi. Gorizontal to'g'ri chiziq OX o'qi yoki absissalar o'qi deyiladi. Vertikal to'g'ri chiziq esa OY o'qi yoki ordinatalar o'qi deyiladi. OX va OY o'qlarini koordinata o'qlari deyiladi.

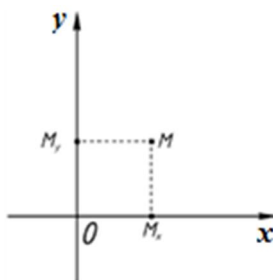
Koordinatalar boshi OX va OY o'qlarining har birini ikki qismga-ikki yarim o'qlarga ajratadi. Yarim o'qlarning birini musbat, ikkinchisini esa manfiy yo'nalishli deb hisoblanadi. Musbat yarim o'qlar 4-chizmada strelkalar bilan ko'rsatilgan.



4-chizma

Koordinata o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. (4 ta chorakka ajratadi). Ular 4-chizmada ko'rsatilganidek belgilanadi.

M –tekislikdagi biror nuqta bo'lsin. Bu nuqtadan OX va OY o'qlarga perpendikulyarlar tushirib, ularning OX va OY o'qlar bilan kesishgan nuqtalarini M_x va M_y lar bilan belgilaylik.



5-chizma

Ikkala o'q uchun bir xil bo'lgan o'lchov birligi-masshtab birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni olamiz.

Bu o'lchov birligi bo'yicha

$$OM_x = x, OM_y = y$$

kesmalarning uzunliklari M nuqtaning koordinatalari deyiladi. Bunda M_x nuqta O nuqtadan o'ngda joylashsa, OM_x kesmaning uzunligi musbat ishora bilan, chapda bo'lsa, OM_x manfiy ishora bilan olinadi. Xuddi shunga o'xshash, M_y nuqta O nuqtadan yuqorida joylashsa, OM_y musbat, pastda joylashsa, manfiy ishora bilan olinadi.

x son M nuqtaning birinchi koordinatasi yoki abssissasi, y son esa M nuqtaning ikkinchi koordinatasi yoki ordinatasi deyiladi. M nuqta koordinatalari orqali quyidagicha yoziladi

$$M = M(x, y)$$

Demak, tekislikdagi har bir nuqta x va y sonlardan tashkil topgan (x, y) juftlikni aniqlaydi.

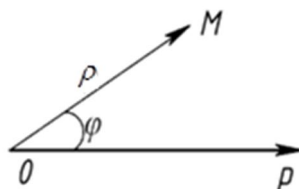
Aksincha ikkita x va y sonlardan iborat (x, y) juftlik berilgan bo'lsin. Dekart koordinatalar sistemasini olib, OX o'qda x songa mos keladigan A_x nuqtani (agar x musbat bo'lsa, bu nuqta O nuqtadan o'ngda, x manfiy bo'lsa, O nuqtadan chapda joylashgan bo'ladi) topamiz. Xuddi shunga o'xshash, OY o'qida y songa mos keladigan A_y nuqtani (agar y musbat bo'lsa, O nuqtadan yuqorida, manfiy bo'lsa, O nuqtadan pastda joylashgan bo'ladi) topamiz. Song A_x nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar, A_y nuqtadan OY o'qiga perpendikulyarlar chiqaramiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasining koordinatalari x va y lar bo'ladi.

Shunday qilib, (x, y) juftlik tekislikda bitta nuqtani ifodalaydi.

Demak, tekislikda nuqta berilgan deganda uning koordinatalari x va y lardan tuzilgan (x, y) juftlik tushuniladi va aksincha (x, y) juftlik berilganda koordinatalari x va y bo'lgan tekislik nuqtasi tushiniladi.

2^o. Qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda tayin O nuqta va bu nuqtadan chiqqan tayin OP nurni olamiz. So'ng masshtab birligini tayinlaymiz. Odatda, O nuqta qutb, OP nur esa qutb o'qi deyiladi (6-chizma).



6-chizma

Tekislikda biror M nuqta (O nuqtadan farqli) olib, uni O nuqta bilan birlashtiramiz. Natijada OM kesma hosil bo‘ladi. Bu kesmaning uzunligi ρ bo‘lsin.

$$OM = \rho$$

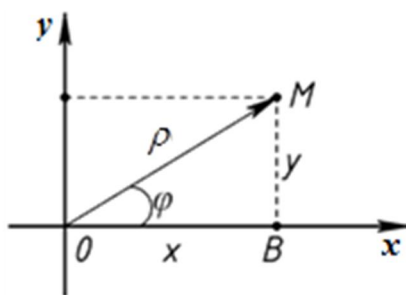
Qutb o‘qi OP bilan OM nur tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

Odatda ρ qutb radiusi, φ esa qutb burchagi deyiladi. Ular nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi. M nuqta qutb koordinatalari orqali quyidagicha yoziladi:

$$M = M(\rho, \varphi). \text{ Bunda, } 0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ deb olinadi.}$$

Tekislikda nuqtaning Dekart hamda qutb koordinatalari orasida bog‘lanish mavjud.

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olib, qutbni O nuqtada, OP qutb o‘qini esa OX o‘qiga joylashtiramiz (7-chizma).



7-chizma

Aytaylik, M tekislikda joylashgan biror nuqta bo‘lsin. Bu nuqtaning Dekart koordinatalari (x, y) , qutb koordinatalari (ρ, φ) bo‘lsin:

$$M = M(x, y), \quad M = M(\rho, \varphi)$$

Keltirilgan chizmadan ko‘rinadiki,

$$OB = x, \quad MB = y, \quad OM = \rho, \quad \angle BOM = \varphi$$

va OBM – to‘g‘ri burchakli uchburchak.

$\triangle OBM$ dan topamiz:

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

Bu formulalar nuqtaning Dekart koordinatalarini uning qutb koordinatalari orqali ifodalanishini ko‘rsatadi.

Shuningdek $\triangle OBM$ dan topamiz:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (2)$$

Bu formulalar nuqtaning qutb koordinatalarini uning Dekart koordinatalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

Masalan, M nuqtaning Dekart koordinatalari $x = 1, y = \sqrt{3}$ bo'lsa $(M(1, \sqrt{3}))$, uning qutb koordinatalari (2) formulaga ko'ra

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

bo'ladi.

Agar B nuqtaning qutb koordinatalari $\rho = 3, \varphi = \frac{\pi}{2}$ $(B(3, \frac{\pi}{2}))$

bo'lsa, uning Dekart koordinatalari (1) formulaga ko'ra

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad y = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 3$$

bo'ladi.

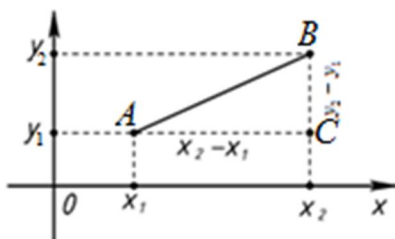
3⁰. Ikki nuqta orasidagi masofa

Tekislikda ikkita

$$A = A(x_1; y_1), \quad B = B(x_2, y_2)$$

berilgan bo'lib, bu nuqtalarni to'g'ri chiziq yordamida birlashtirish natijasida AB kesma hosil qilingan. Bu kesmaning uzunligi d ga shu nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.

Berilgan nuqtalarning koordinatalariga ko'ra d ni topish mumkin (8-chizma).



8-chizma

Bu chizmadan ko'rinadiki, ABC -to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib,

$$AC = x_2 - x_1,$$

$$BC = y_2 - y_1,$$

$$AB = d$$

bo'ladi. Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

ya'ni

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

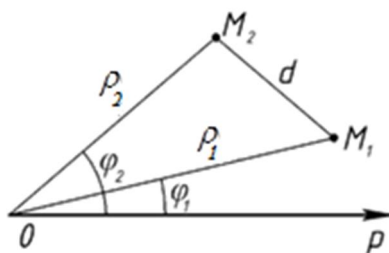
Bu tekislikda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.

Misol. Qutb koordinatalarida berilgan

$$M_1(\rho_1, \varphi_1) \text{ va } M_2(\rho_2, \varphi_2)$$

nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

◁ Aytaylik, bu nuqtalar 9-chizmada ko'rsatilganidek tasvirlansin.



9-chizma

Keltirilgan chizmadan

$$M_1 M_2 = d, OM_1 = \rho_1, OM_2 = \rho_2,$$

$$\angle POM_1 = \varphi_1, \quad \angle POM_2 = \varphi_2,$$

$$\angle M_1 OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Uchburchak $M_1 OM_2$ da kosinuslar teoremasini qo'llab topamiz:

$$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

ya'ni

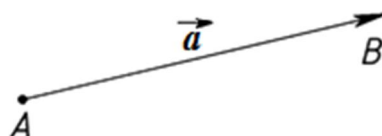
$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

4-§. Vektorlar

1⁰. Asosiy tushunchalar

Tabiatda uchraydigan ko'pgina miqdorlar, masalan, kuch, tezlik, tezlanishlar son qiymati bilan barcha yo'nalishi ma'lum bo'lgandagina aniqlangan hisoblanadi. Odatda ular vektor miqdorlar deyiladi.

Yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi vektor deyiladi (10-chizma).



10-chizma

A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi, vektorning o'zi $\overline{AB}$ kabi belgilanadi. Vektorlar bitta harf bilan ham belgilanadi, bunda harf ustiga strelka qo'yiladi: $\vec{a}$.

Kesmaning uzunligi vektorning uzunligi yoki moduli deyilib u $|\overline{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqda yotsa, ular kollinear vektorlar deyiladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lib, bir xil yo'nalishga ega va bir xil uzunlikka ega bo'lsa, $\vec{a}$, $\vec{b}$ teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi.

Xulosa. $\vec{a}$ vektorni o'ziga parallel ravishda tekislikning ixtiyoriy O nuqtasiga vektorning boshini joylashtirib ko'chirish mumkin.

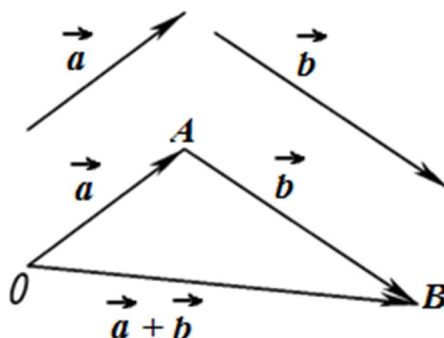
2⁰. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Odatda vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorni songa ko'paytirish amallari vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar deyiladi.

a) Ikki vektorning yig'indisi

Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ –ikkita ixtiyoriy vektorlar bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta olib, $\overline{OA} = \vec{a}$ vektorni hosil qilamiz. A nuqtadan $\overline{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Natijada

boshi O nuqtada oxiri B nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{OB}$ vektor hosil bo'ladi. Shu vektorga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi deyiladi va $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi: $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (11-chizma).



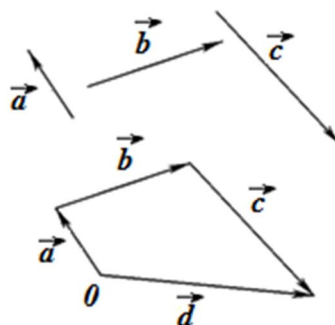
11-chizma

Odatda, ikki vektorlarning yig'indisini ifodalovchi bu qoida, uchburchak qoidasi deyiladi.

Aytaylik, 12-chizmada ko'rsatilganidek uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning yig'indisi

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

12-chizmada ko'rsatilganidek topiladi:



12-chizma

b) ikki vektorning ayirmasi

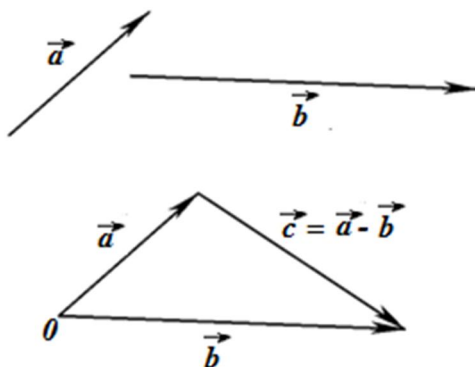
Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorning ayirmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki,

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

bo'ladi. Vektorlar ayirmasi

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

kabi yoziladi (13-chizma).



13-chizma

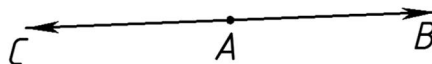
Eslatma. Har qanday

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

vektor uchun unga qarama-qarshi

$$-\vec{a} = \overrightarrow{AC}$$

vektor mavjud bo'lib, ular bir hil uzunlikga ega, yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi (14-chizma).



14-chizma

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ayirmasini ushbu

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

qoida bilan ham hisoblash mumkin.

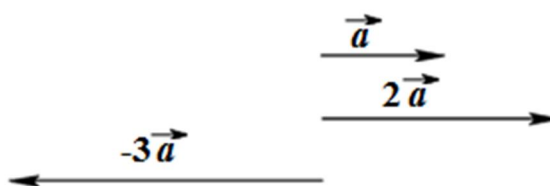
c) Vektorlarni songa ko'paytirish

Aytaylik, $\vec{a}$ biror vektor, k esa biror son bo'lsin. Uzunligi $|k| \cdot \vec{a}$ ga teng, yo'nalishi esa $k > 0$ bo'lgandi $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi bilan bir xil, $k < 0$ bo'lganda esa $\vec{a}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan vektor k son bilan $\vec{a}$ vektor ko'paytmasi deyiladi va $k \cdot \vec{a}$ kabi yoziladi.

Masalan, $\vec{a}$ vektor berilganda

$$2\vec{a}, \quad -3\vec{a} = (-3) \cdot \vec{a}$$

vektorlar 15-chizmada tasvirlangan:



15-chizma

Eslatma. Agar $\vec{a}$ vektorning uzunligi 1 ga teng:

$$|\vec{a}| = 1$$

bo'lsa, u birlik vektor deyiladi. Odatda birlik vektor $\vec{e}$ kabi belgilanadi ($|\vec{e}| = 1$).

Agar vektorning boshi va oxiri ustma-ust tushsa (ya'ni uning uzunligi 0 ga teng bo'lsa), u nol vektor deyiladi va $\vec{0}$ kabi belgilanadi.

Ravshanki, $|\vec{0}| = 0$.

Nol vektorning yo'nalishi aniq emas.

Aytaylik, $\vec{a}$ biror vektor bo'lib, nol vektor bo'lmasin. Bu vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ ga bo'lib

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$$

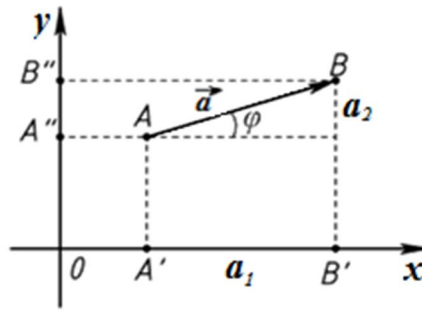
vektorni hosil qilamiz. Ravshanki, $\vec{e}$ birlik vektor bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e} \quad (3)$$

Demak, har qanday vektor, uning uzunligi bilan birlik vektor ko'paytmasi sifatida ifodalanadi.

3⁰. Vektorlarning koordinatalari

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi va unda biror $\vec{a}$ vektorni olamiz: $\vec{a} = \overline{AB}$



16-chizma

A va B nuqtalardan OX o'qiga perpendikulyarlar tushiramiz. Ularning OX o'qidagi asoslarini A' va B' nuqtalar bilan belgilaymiz. Shuningdek A va B nuqtalardan OY o'qiga perpendikulyarlar tushirib, ularning OY o'qidagi asoslarini A'' va B'' deymiz (16- chizma).

Odatda $A'B'$ kesma $\vec{a}$ vektorning OX o'qidagi $A''B''$ kesma esa $\vec{a}$ vektorning OY o'qidagi proeksiyalari deyiladi:

$$|A'B'| = np_{ox}\vec{a}, \quad |A''B''| = np_{oy}\vec{a}.$$

Ular a_1 va a_2 orqali belgilanadi:

$$a_1 = A'B', \quad a_2 = A''B''.$$

Agar φ – burchak (16-chizma) o'tkir burchak bo'lsa, proeksiya musbat ishora bilan, φ – o'tmas bo'lsa, manfiy ishora bilan olinadi.

a_1 va a_2 lar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari deyiladi va quyidagi yoziladi:

$$\vec{a}(a_1, a_2) \text{ yoki } \vec{a} = \{a_1, a_2\}.$$

Agar OX o'qidagi birlik vektorni $\vec{i}$, OY o'qidagi birlik vektorni $\vec{j}$ deyilsa, u holda

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad (4)$$

bo'ladi.

Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$AB^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Endi vektorlarning koordinatalari orqali ularning yig'indisi, ayirmasi, vektorni songa ko'paytirishlarning ifodalarini keltiramiz:

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = \{a_1, a_2\}, \vec{b} = \{b_1, b_2\}$$

U holda

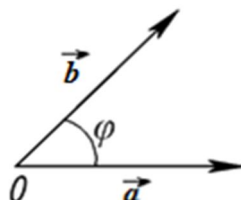
$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2\},$$

$$k \vec{a} = \{ka_1, ka_2\}.$$

4⁰. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lib, bu vektorlarning boshlarini bir nuqtaga keltirib, ular orasidagi burchakni φ deylik.



Ushbu

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

miqdor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi va $(\vec{a}, \vec{b})$ kabi belgilanadi:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega

$$1) (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}),$$

$$2) \vec{a}, \vec{b} \text{ va } \vec{c} \text{ vektorlar uchun}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}),$$

$$3) (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \text{ bo'lib,}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$$

bo'ladi.

$$4) k \text{ son uchun}$$

$$(k \cdot \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, k \vec{b}) = k \cdot (\vec{a}, \vec{b}).$$

Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2\}$$

Ravshanki, $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \vec{j}$, $\vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \vec{j}$.

Skalyar ko'paytmaning xossalariidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \vec{j}, b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \vec{j}) = \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot (\vec{i}, \vec{i}) + a_2 b_1 \cdot (\vec{j}, \vec{i}) + \\ &+ a_1 b_2 (\vec{i}, \vec{j}) + a_2 b_2 (\vec{j}, \vec{j}) = a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

Demak,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$$\vec{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2\}$$

vektorlarning uzunliklari

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

5⁰. Skalyar ko'paytmaning ba'zi tadbirlari

a) Ikki vektor orasidagi burchak.

Aytaylik, nol vektor bo'lmagan ikki

$$\vec{a} = \{a_1, a_2\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2\}$$

vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

bo'lib, unda

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}, \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ ya'ni } \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

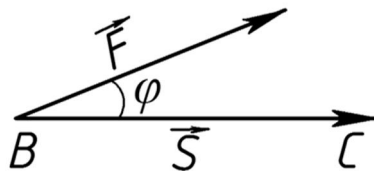
bo'ladi. Ravshanki, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos \varphi = 0$ bo'lib,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \quad (5)$$

bo'ladi. (5) tenglik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

b) O'zgaras kuchning bajargan ishi.

Aytaylik, moddiy nuqta o'zgaras $\vec{F}$ kuch tasirida tog'ri chiziq bo'ylab, B nuqtadan C nuqtaga surilgan bo'lsin. Bunda $\vec{F}$ kuch $\overrightarrow{BC} = \vec{S}$ surilish bilan φ burchak tashkil etsin (17-chizma).



17-chizma

Fizika kursidan ma'lumki, $\vec{F}$ kuchning bajargan ishi

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi = F \cdot S \cdot \cos\varphi$$

ya'ni

$$A = (\vec{F}, \vec{S})$$

bo'ladi. Demak, bajarilgan ish kuch vektori $\vec{F}$ bilan siljish vektor $\vec{S}$ larning skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi.

6^o. Vektorlarning vektor ko'paytmasi

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ bektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi quyidagicha

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ yoki } [\vec{a}, \vec{b}]$$

belgilanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektorning uzunligi va yonalishi quyidagicha bo'ladi:

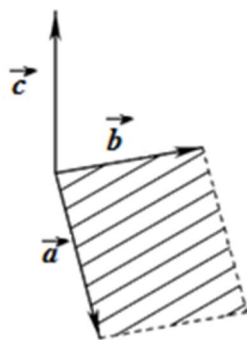
1) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}),$$

2) $\vec{c}$ vektor shu parallelogramm tekisligiga perpendikulyar, ya'ni u ham $\vec{a}$ vektorga, ham $\vec{b}$ vektorga perpendikulyar:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = 0, (\vec{b}, \vec{c}) = 0,$$

3) $\vec{c}$ vektor shunday tomonga yo'nalganki, uning uchidan qaralganda $\vec{c}$ vektor atrofida $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng kichik burchak bilan aylanish soat strelkasiga qarama-qarshi bo'ladi (18-chima).



18-chizma

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

- 1). $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,
- 2). $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$,
- 3). $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$,
- 4). Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ bo'ladi.

5-§. Kompleks sonlar

1⁰. Kompleks son tushunchasi

a va b haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$a + ib$$

ifoda kompleks son deyiladi, bunda i – mavhum birlik deyilib, $i^2 = -1$.

Agar $a = 0$ bo'lsa

$$0 + ib = ib$$

bo'lib, u sof mavhum son, agar $b = 0$ bo'sa

$$a + i0 = a$$

bo'lib, u haqiqiy son bo'ladi.

Odatda kompleks son bitta harf bilan, ko'pincha z harfi bilan belgilanadi:

$$z = a + ib$$

bunda a son z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va $Re\ z$ kabi belgilanadi:

$$a = Re\ z$$

b son esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $Im\ z$ kabi belgilanadi:

$$b = Im\ z$$

Ushbu

$$\bar{z} = a - ib$$

kompleks son, ya'ni z kompleks sondan mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi son, z kompleks sonning qo'shmasi deyiladi.

Ikki kompleks son

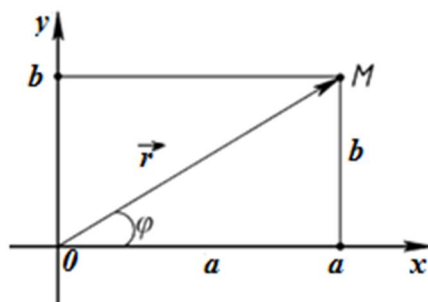
$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

berilgan bo'lsin.

Agar $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bo'lsa, z_1 va z_2 kompleks sonlar bir-biriga teng deyiladi va $z_1 = z_2$ kabi yoziladi.

2⁰. Kompleks sonning geometrik tasviri

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi hamda $z = a + ib$ kompleks son berilgan bo'lsin. (19-chizma).



19-chizma

Tekislikda koordinatalari (a, b) bo'lgan M nuqta $z = a + ib$ kompleks sonning geometrik tasviri bo'ladi. Bu kompleks son $\overline{OM} = \vec{r}$ radius-vektor bilan ham tasvirlanadi. $\vec{r}$ vektorning uzunligi z kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ kabi belgilanadi. $\vec{r}$ vektor bilan OX o'qining musbat yo'nalishi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va $arg\ z$ kabi belgilanadi.

Odatda, OX o'qi haqiqiy o'q deyiladi, chunki bu o'qda haqiqiy sonlar $z = a + 0 \cdot i = a$ joylashgan. OY o'qi mavhum o'q deyiladi, chunki bu o'qda sof mavhum sonlar $z = 0 + ib$ sonlar joylashgan.

Ravshanki,

$$z = a + ib$$

kompleks sonning moduli

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

bo'lib, argumenti

$$\varphi = \operatorname{arg} z$$

$2k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) aniqlikda ($z = 0$ dan tashqari) bo'lib, uni

$$0 \leq \operatorname{arg} z < 2\pi$$

munosabatda qoraladi.

Yuqorida keltirilgan 19 chizmadan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (6)$$

bunda, r , $\vec{r}$ –radius vektorning uzunligi.

Masalan,

$$z = 1 + i$$

kompleks sonning moduli

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

argumenti esa

$$\operatorname{tg} \varphi = 1, \quad \varphi = 45^\circ; \quad \operatorname{arg} z = 45^\circ$$

bo'ladi.

Yuqoridagi munosabatdan

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

bo'lishini topamiz.

Demak,

$$z = a + ib$$

kompleks sonni ushbu

$$z = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Kompleks sonning bu ko‘rinishi uning trigonometrik ko‘rinishi (shakli) deyiladi.

3⁰. Kompleks sonlar ustida amallar

a) kompleks sonlar yig‘indisi. Ikkita

$$z_1 = a_1 + i b_1, z_2 = a_2 + i b_2$$

kompleks sonlar berilgan bo‘sin. Ushbu

$$(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

kompleks son z_1 va z_2 sonlarning yig‘indisi deyiladi va $z_1 + z_2$ kabi belgilanadi:

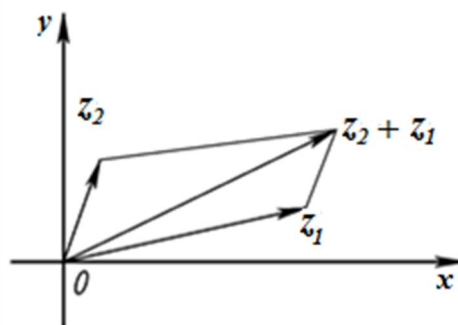
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Yig‘indi quyidagi xossalarga ega:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Geometrik nuqtai nazardan, kompleks sonlar yigindisi, vektorlar yig‘indisi sifatida ekanligi ko‘rinadi (20-chizma).



20-chizma

b) Kompleks sonlar ayirmasi. Ushbu

$$(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

kompleks son

$$z_1 = a_1 + i b_1, z_2 = a_2 + i b_2$$

kompleks sonlar ayirmasi deyiladi va $z_1 - z_2$ kabi yoziladi:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Masalan,

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib$$

kompleks sonlar ayirmasi

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (a + ib) - (a - ib) = \\ &= (a - a) + i[b - (-b)] = 2bi \end{aligned}$$

bo'ladi.

c) Kompleks sonlar ko'paytmasi

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$$

kompleks sonlar ko'paytmasi deb ushbu

$$(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

kompleks songa aytiladi va u $z_1 \cdot z_2$ kabi yoziladi.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Aytaylik, z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda ifodalangan bo'sin:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ularni ko'paytmasini topamiz:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

bu tenglikdan

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikkita kompleks sonlar ko'paytirilganda ko'paytmaning moduli modular ko'paytmasiga, argumentlari esa argumentlar yig'indisiga teng bo'ladi.

d) Kompleks sonlar bo'linmasi (nisbati)

Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar berilgan bo'lsin:

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

Ushbu

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_1b_1 - a_2b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Kompleks son z_1 va z_2 ($z_2 \neq 0$) kompleks sonlar nisbati (bo'linmasi) deyiladi va $\frac{z_1}{z_2}$ kabi belgilanadi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad (z_2 \neq 0)$$

Amaliyotda z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbati, $\frac{z_1}{z_2}$ kasrning surat va maxrajini maxrajda turgan kompleks sonning qo'shmasiga ko'paytirish bilan topiladi.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \end{aligned}$$

Aytaylik, z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bolsin:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Bu kompleks sonlarning nisbatini topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Bu tenglikdan

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib ikki kompleks sonning nisbati olinganda nisbatning moduli surat moduli bo'lingan maxraj moduliga teng, nisbatining argumenti surat argumentidan maxraj argumentini ayirganiga teng bo'ladi.

e) Kompleks sonning n –darajasi ($n \in \mathbb{N}$)

Biror z kompleks sonni olaylik. Odatda, z^n quyidagicha ta'riflanadi:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ ta}}$$

Aytaylik, z kompleks son trigonometrik ko'rinishda yozilgan bo'lsin:

$$z^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Unda

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ ta}} = \\ &= \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_{n \text{ ta}} \left[\cos \left(\underbrace{\varphi + \varphi + \varphi + \dots + \varphi}_{n \text{ ta}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left(\underbrace{\varphi + \varphi + \varphi + \dots + \varphi}_{n \text{ ta}} \right) \right] \end{aligned}$$

ya'ni

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

bo'ladi.

f) Kompleks sondan olingan n –darajali ildiz

Aytaylik, z kompleks son va n natural son berilgan bo'lsin. n –darajasi shu z kompleks songa teng bo'lgan w kompleks son:

$$w^n = z,$$

z kompleks sondan olingan n –darajali ildiz deyiladi va $\sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi:

$$w = \sqrt[n]{z}$$

Aytaylik,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

bo'lsin. U holda

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bo'lib, undan

$$\rho^n = r$$

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ya'ni

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ko'rsatish mumkinki

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar orasida faqat n tasigina turlicha bo'lib, ular k ning

$$k = 0; 1; 2; \dots; n - 1$$

qiymatlarida hosil bo'ladi.

Demak, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sondan olingan n – darajali ildizning n ta qiymati bo'lib, ular

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \\ k = 0; 1; 2; \dots; n - 1$$

formulalardan topiladi. Bu formulalarga Muavr formulalari deyiladi.

2-BOB

MATRISALAR VA DETERMENANTLAR

1-§. Matrisa haqida asosiy tushunchalar

Amaliy masalalarni yechishda maxsus matematik ifodalardan-matrisalardan foydalaniladi $m \cdot n$ ta ($m \in N, n \in N$) sonlarning yo'l va ustun tarzida to'g'ri to'rtburchak ko'rinishida (shaklida) ifodalangan ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jadval $[m \times n]$ o'lchovli matrisa deyiladi. Matrisani tashkil etgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matrisaning elementlari ikki indeks bilan yozilib, birinchi indeks shu element turgan (joylashgan) yo'lning, ikkinchi indeks esa ustun nomerini bildiradi.

Odatda matrisalar bosh harflar bilan belgilanadi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Masalan ushbu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisa $[3 \times 4]$ o'lchovli matrisa bo'ladi.

Ikkita $[m \times n]$ o'lchovli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisalar berilgan bo'lsin.

Agar A matrisaning har bir elementi B matrisaning mos elementiga teng bo'lsa, A va B o'zaro teng matrisalar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Agar matrisaning yo'llar soni ustunlar soniga teng, $m = n$ bo'lsa, uni n –tartibli kvadrat matrisa deyiladi.

Agar matrisaning barcha elementlari nol bo'lsa, uni nol matrisa deyiladi:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Aytaylik, biror n –tartibli kvadrat matrisa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

berilgan bo'lsin. Bu matrisaning

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

elementlari matrisa bosh diagonal elementlar deyiladi.

Agar (1) kvadrat matrisaning bosh diagonallarida turgan elementlaridan boshqa barcha elementlar nol bo'lsa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unda diagonal matrisa deyiladi. Xususan,

$$a_{11} = a_{22} \dots = a_{nn} = 1$$

bo'lsa

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

uni birlik matrisa deyiladi.

Agar matrisa bitta ustundan iborat bo'lsa,

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

uni ustun matrisa, bitta yoʻldan iborat boʻlsa,

$$D=(b_1 \ b_2 \ . \ . \ . \ b_n.)$$

uni yoʻl matrisa deyiladi.

Eslatma. Agar matrisa $[1 \times 1]$ tartibli matrisa yaʼni matrisa bitta sondan iborat, uni shu son bilan tenglashtirilsa, masalan: (7) boʻlsa, uni 7 deb olinadi.

2-§. Matrisalar ustida amallar

a) matrisalarning yigʻindisi va ayirmasi. Matrisalarning yigʻindisi va ayirmasi amallari faqat bir xil tartibdagi matrisalar ustida bajariladi.

$[m \times n]$ tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisalarning mos elementlari yigʻindilaridan tashkil topgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa A va B matrisalar yigʻindisi deyiladi va $A + B$ kabi belgilanadi.

A va B matrisalarning mos elementlari ayirmasidan tashkil topgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa A matrisadan B matrisaning ayirmasi deyiladi va $A - B$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) matrisani songa ko'paytirish

Biror k son va

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin. Bu matrisaning har bir elementini k songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa k son bilan A matrisa ko'paytmasi deyiladi va $k \cdot A$ kabi belgilanadi.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Eslatma: A matrisaga qarama-qarshi bo'lgan $-A$ matrisa uchun

$$-A = (-1) \cdot A$$

bo'ladi.

A va B matrisalar ayirmasini quyidagicha

$$A - B = A + (-B)$$

ham ta'riflash mumkin.

Matrisalarning yig'indisi ayirmasi, matrisani songa ko'paytirish ushbu xossalarga ega.

1). $A + B = B + A$

2). $A + (B + C) = (A + B) + C$

3). $A + 0 = A,$

4). $A - A = 0,$

5). $1 \cdot A = A,$

$$6). \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

$$7). (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$8). \alpha \cdot (\beta A) = (\alpha \cdot \beta)A,$$

bunda A, B, C – matrisalar, α va β – sonlar.

3-§. Matrisalarda elementar almashtirishlar

Biror

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin.

Bu matrisada

1). Ikki yo'lini (ustunini) o'zaro almashtirish.

2). Biror yo'lini (ustunini) o'zgarmas songa ko'paytirish.

3). Biror yo'lga (ustuniga) boshda yo'lni (ustunini) o'zgarmas songa ko'paytirib qo'shish A matrisaning elementar almashtirishlar deyiladi.

A kvadrat matrisaning har bir yo'lini mos ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matrisa A matrisaning transponirlangan matrisasi deyiladi va A^T kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrisalar uchun

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^T = (1, 0)$$

bo'ladi

Ikki A va B matrisalar berilgan bo'lsin.

Agar bu matrisalarning biridan uning elementlari ustida elementar almashtirishlar yordamida ikkinchisi hosil bo'lsa, A va B ekvivalent matrisalar deyiladi va $A \sim B$ kabi belgilanadi.

4-§. Matrisalar ko‘paytmasi

Ikki matrisalar ko‘paytmasi tushunchasini kiritishda ko‘paytiriladigan matrisalarning birinchisining ustunlar soni ikkinchisining yo‘llar soniga teng bo‘lishi talab qilinadi.

Aytaylik, $[m \times n]$ tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa bilan, $[n \times k]$ –tartibli

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo‘lsin.

A matrisaning i –yo‘l elementlari

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ni mos ravishda B matrisaning j –ustun elementlari

$$b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}, \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

ga ko‘paytirib ushbu

$$d_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

yig‘indilarni hosil qilamiz. Bu sonlardan tuzilgan $[m \times k]$ tartibli

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mk} \end{pmatrix}$$

matrisa A va B matrisalar ko‘paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

matrisalar ko'paytmasi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

bo'ladi

Misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisalar ko'paytmasi

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

5-§. Determinantlar

Aytaylik, ikkinchi va uchunchi tartibli kvadrat matrisalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Bu matrisalarga mos ravishda

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{va}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

sonlarni mos qo'yamiz. Odatda ular ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar deyiladi va quydagicha belgilanadi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu ifodalar mos ravishda $\det A$, $\det B$ kabi ham belgilanadi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 + 15 = 27.$$

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Uchinchi tartibli determinantning qiymati 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan uchta musbat ishorali, qolgan uchta esa manfiy ishorali bo'ldai.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = \\ = -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

Eslatma. Yuqoridagidek, n – tartibli ($n > 3$) determinant.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tushunchasi kiritiladi.

Aytaylik, uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

berilgan bo'lsin. Bu determinantning biror

$$a_{ik} \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3)$$

elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Uni a_{ik} element minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantning $a_{12} = 5$ elementning minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant 9 ta minorga ega bo'ladi.

Ushbu

$$(-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor (2) determinant a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi va A_{ik} orqali belgilanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}.$$

Masalan.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{13} = 3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -6$$

bo'ladi.

6-§. Determinantning xossalari

Determinant qator xossalarga ega. Quyida ularni keltiramiz.

1). Determinantning yo'llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2). Determinantning ixtiyoriy ikki yo'lini (ikki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati o'zgarmasdan, uni ishorasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi.

3). Determinantning ikki yo'li (ustuni) bir xil bo'lsa, determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

4). Determinantning ixtiyoriy yo'lida (ustunida) turgan barcha elementlari o'zgaras k songa ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k soniga ko'payadi.

5). Determinantning biror yo'li (ustuni) da turgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bevosita ta'rifga ko'ra hisoblanadi.

Masalan

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 10.$$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda shuningdek ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabatdan foydalanish mumkin.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash birmuncha murakkab bo‘ladi. Ularni hisoblashda yuqorida keltirilgan hossalardan foydalaniladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Bu determinantni hisoblashda yuqorida keltirilgan 5) xossadan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3[7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1] - \\ &- 1[5 \cdot 3 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 \cdot 8] + \\ &+ 0[5 \cdot 0 \cdot 4 + 7 \cdot 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 7 \cdot 8] + \\ &+ [5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8] = 3 \cdot 119 - 326 - 203 = \\ &= 357 - 529 = 172. \end{aligned}$$

7-§. Xosmas matrisalar. Teskari matrisa

Aytaylik, A — n — tartibli kvadrat matrisa bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Agar A kvadrat matrisaning determinanti 0 dan farqli

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa, u holda A xosmas matrisa deyiladi. Aks holda A xos matrisa deyiladi.

A matrisa

$$a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

elementining algebraik to'ldiruvchisini (u ham determinant elementining algebraik to'ldiruvchisi kabi ta'riflanadi)

$$A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

deb belgilaymiz. Bu A_{ij} lardan tuzilgan matrisani A^* orqali belgilaymiz:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

berilgan A matrisa bilan birga ushbu

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matrisani qaraymiz.

Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

matrisalar uchun

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

bo'lsa, B matrisa A matrisaga teskari matrisa deyiladi va u A^{-1} kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari matrisa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

bo'ladi, chunki

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Endi berilgan matrisaga teskari matrisaning mavjudligi haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Har qanday xosmas matrisaning teskari matrisasi mavjud bo'ladi.

Soddalik uchun teoremani uchinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

matrisaga nisbatan isbotlaymiz.

Aytaylik, (3) matrisaning determinanti noldan farqli bo'lsin.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bu matrisa uchun A^* matrisani tuzamiz:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Endi A va A^* matrisalarning ko'paytmasini qaraymiz.

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \det A \cdot E,$$

ya'ni

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E.$$

Xuddi shunga o'xshash.

$$A^* A = \det A \cdot E$$

bo'ladi.

Keyingi tengliklardan

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{va} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E$$

bo'lib, uladan

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

ya'ni

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Teskari matrisa quyidagi xossalarga ega:

$$1). \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

$$2). (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},$$

$$3). (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Misol. Agar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, uning teskarisi A^{-1} topilsin.

Bu misolni quyidagicha yechamiz:

1). A matrisaning determinantini topamiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0.$$

2). A^* matrisani topamiz:

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = -3, \quad A_{12} = -(-1) = 1, \quad A_{22} = 2.$$

Demak,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3). A matrisaning teskari matrisasi A^{-1} ni topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

8-§. Matrisaning rangi.

$[m \times n]$ –tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilgan bo'lsin. Bu matrisaning k ta yo'lini va k ta ustunini olib, ($k \leq \min(m, n)$) $[k \times k]$ –tartibli kvadrat matrisani tuzamiz. Bu kvadrat matrisaning determinanti A matrisaning k –tartibli minori deyiladi.

A matrisaning noldan farqli minorlarining eng yuqori (katta) tartibi uning rangi deyiladi va $\text{rank} A$ kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisaning rangi topilsin.

Berilgan matrisaning ikkinchi tartibli minorlari bir nechta bo'lib, ulardan biri

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

bo'ladi. Shu matrisaning uchinchi tartibli minori esa

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ga teng.

Shunday qilib, A matrisaning noldan farqli minorlarining eng katta tartibi 2 ga teng. Demak, berilgan matrisaning rangi 2 teng:

$$\text{rank } A = 2.$$

3- BOB

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1-§. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi

1⁰. Ikki noma'lumli ikki chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

sistema ikki x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$$

sonlar (1) sistemasining koeffitsientlari,

$$b_1, b_2$$

lar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar (1) sistemadagi x noma'lumning o'rniga x_0 sonni, y noma'lumining o'rniga y_0 soni qo'yganda tenglamalarning har biri bajarilsa, (x_0, y_0) juftlik (1) sistemaning yechimi deyiladi.

(1) sistema koeffitsientlaridan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ng bu determinantning birinchi va ikkinchi ustun elementlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantlarni hosil qilamiz.

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

sistemada:

1). $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (1) sistema yagona yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2). $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, yoki $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa (1) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3). $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ bo'lsa, (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

(1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned}a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= a_{22}b_1 \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y &= -a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x &= a_{22}b_1 - a_{12}b_2\end{aligned}$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

ko'rinishga ega bo'lib, undan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (1) sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga ikkinchi tenglamasini a_{12} ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab ko'shib topamiz.

$$\begin{aligned}-a_{11} \cdot a_{21}x - a_{12} \cdot a_{21}y &= -b_1a_{21} \\ a_{12}a_{21}x + a_{12} \cdot a_{22}y &= b_2a_{12} \\ (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot y &= a_{12}b_2 - a_{21}b_1\end{aligned}$$

keyingi tenglik ushbu

$$\Delta \cdot y = \Delta_y$$

ko'rinishga ega bo'lib, undan

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunga o'xshash

$$\Delta = 0, \quad \Delta_x \neq 0, \quad \text{yoki} \quad \Delta_y \neq 0$$

bo'lganda sistemaning yechimi mavjud bo'lmasligi,

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$$

bo'lganda sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lishi ko'rsatiladi.

Misol: Ushbu

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-5) \cdot 4 = 9 + 20 = 29,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 11 \cdot (-5) = 58$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 1 \cdot 4 = 29$$

bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan sistemaning yechimi (2; 1) bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

sistemaning yechimi mavjudmi?

Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

bo'ladi. Demak qaralayotgan sistema yechimga ega emas.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

sistemani qaraylik. Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

bo'ldi. Demak, bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Bu yechimlar o'zaro $2x + 3y = 1$ tenglik yordamida bog'langan. Masalan, $(0; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}; 0)$ va hokazo.

2⁰. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalardan tuzilgan sistema va uni yechish.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

sistema uch x, y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$$

sonlar (2) sistemaning koeffitsientlari,

$$b_1, b_2, b_3$$

sonlar esa sistemaning ozod hadlari deyiladi.

Agar x_0, y_0, z_0 sonlarni mos ravishda (2) sistemadagi: x, y, z larning o'rniga qo'yilganda (2) sistemadagi tengliklar bajarilsa, (x_0, y_0, z_0) uchlik (2) sistemaning yechimi deyiladi.

(2) sistema koeffitsientlari hamda ozod hadlardan foydalanib quyidagi determinantlarni hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Teorema. Agar

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

sistemada:

1). $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yagona (x, y, z) yechimga ega bo'lib.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi.

2). $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$ yoki $\Delta_y \neq 0$ yoki $\Delta_z \neq 0$ bo'lsa, (2) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

3). $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ bo'lsa, (2) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Misol. Ushbu sistema yechilsin

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 4z = -9. \\ 5x - 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

Bu sistema uchun Δ , Δ_x , Δ_y , Δ_z determinantlarni tuzib, ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 + 60 - 10 - 32 + 18 = 56,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -60 + 36 + 60 - 10 - \\ -162 + 80 = -56,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -108 + 100 + 5 + 45 + \\ +30 + 40 = 112,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 20 + 135 + 50 + \\ +15 - 72 = 168.$$

Demak,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-56}{56} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,$$

sistemani qaraymiz.

Bu sistemaning koeffitsientlaridan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisani, noma'lum $x_1, x_2, \dots, x_n$ lardan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ustun matrisani, sistemaning ozod hadlari $b_1, b_2, \dots, b_n$ lardan

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ustun matrisaning hosil qilamiz.

Matrisalarni ko'paytirish hamda matrisalar tengligi qoidalaridan foydalanib topamiz

$$\begin{aligned} A \cdot X &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demak,

$$A \cdot X = B \quad (4')$$

(4') tenglama (4) tenglamalar sistemasining matrisa formasida (ko'rinishida) yozilishi bo'ladi.

Aytaylik, A matrisaning determinanti

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsin. Unda A matrisaning teskari A^{-1} matrisasi mavjud bo'ladi.

(4') tenglikning ikki tomonini A^{-1} matrisaga ko'paytiramiz:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Ma'lumki,

$$A^{-1} \cdot A = E \quad (\text{birlik matrisa})$$

$$E \cdot X = X.$$

Demak,

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (5)$$

(5) qaralayotgan (4') tenglamaning yechimi bo'ladi.

Berilgan (4) tenglamalar sistemasining (5) formula bo'yicha yechimini topish sistemaning yechimini matrisa usulida topish deyiladi.

Matrisa orqali ifodalangan

$$X = A^{-1} \cdot B$$

tenglikni quydagicha yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ya'ni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}$$

bu tenglikdan

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$$

ifoda ushbu

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantning birinchi ustuni bo'yicha yoyilmasi ekanligini e'tiborga olsak unda

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$$

bo'lishini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

.....

$$x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

bo'ladi demak,

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

(6) Kramer formulari deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 5y + 7z = 19, \\ 6x + 3y + 4z = 16, \\ 5x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimi topilsin.

Quydagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Unda berilgan tenglamalar sistemasi quydagi ko'rinishga keladi:

$$A \cdot X = B.$$

A matrisaning determinantlarini hisoblaymiz

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1 \\ \det A &\neq 0 \end{aligned}$$

yuqoridagi formulalardan foydalanib A matrisalarning teskari matrisasini topamiz.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Unda

$$X = A^{-1} \cdot B$$

shunga ko'ra

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak berilgan sistemaning yechimi $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ ya'ni, $(1; 2; 1)$ boladi.

4-BOB

TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ

Tekislikda geometrik shakllar, jumladan to'g'ri chiziq tekislik nuqtalari to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) sifatida qaraladi.

Ma'lumki tekislikdagi nuqta uning koordinatalari x va y lar orqali (ya'ni (x, y) juftlik bilan to'liq aniqlanadi. Agar bu o'zgaruvchi (x, y) nuqtaning koordinatalari o'zaro bog'lanishda bo'lsa, ular biror shaklni tasvirlashi mumkin. Bunda bog'lanishni ifodalovchi tenglik geometrik shaklning tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziq tushunchasi sodda, ayni paytda muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

To'g'ri chiziqni tekislikdagi ikki nuqtadan baravar masofada joylashgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) deb qarash mumkin.

Ushbu bobda to'g'ri chiziq, uning turli tenglamalari, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati, to'g'ri chiziqqa oid masalalar bayon etiladi.

1-§. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

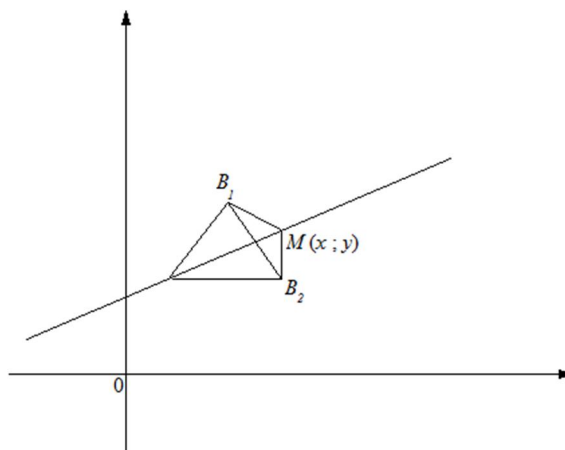
Tekislikda ikkita

$$B_1 = B_1(x_1; y_1) \quad \text{va} \quad B_2 = B_2(x_2; y_2)$$

nuqtani olib, bu nuqtalardan baravar uzoqlikda (masofada) joylashgan nuqtalardan birini

$$M = M(x; y)$$

deymiz (1- chizma).



1-chizma

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan topamiz.

$$B_1M = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

$$B_2M = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2},$$

yuqorida aytilgan shart

$$B_1M = B_2M$$

ga ko'ra

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'taramiz. Natijada

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

bo'lib undan

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= \\ = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \end{aligned}$$

ya'ni

$$-2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 + 2xx_2 - x_2^2 + 2yy_2 - y_2^2 = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tenglikni quydagicha

$$2(x_2 - x_1) \cdot x + 2(y_2 - y_1) \cdot y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$$

yo'zib, so'ng

$$A = 2(x_2 - x_1),$$

$$B = 2(y_2 - y_1),$$

$$C = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$$

belgilashlarni bajarib, ushbu

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

tenglikka kelimiz. Bu x va y larga nisbatan birinchi darajali tenglamadir.

Demak, to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtasining koordinatalari (1) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

tenglama to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi A, B, C sonlarga (koeffitsientlarga) bog'liq. Bu sonlar turli qiymatlarga ega bo'lganda turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Binobarin, to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi vaziyati ham shu koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi.

Endi (1) tenglamaning ba'zi xususiy hollarini qaraymiz:

1⁰. (1) tenglamada $C = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama.

$$Ax + By = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshi $(0; 0)$ nuqtadan o'tadi.

2⁰. (1) tenglamada $B = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax + C = 0, \text{ ya'ni } x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'ladi.

3⁰. (1) tenglamada $A = 0$ bo'lsin. Bu haqda (1) tenglama

$$By + C = 0 \text{ ya'ni } y = -\frac{C}{B}$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel bo'ladi.

4⁰. (1) tenglamada $A = C = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) chiziq

$$By = 0, \text{ yani } y = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OX o'qi bo'ladi.

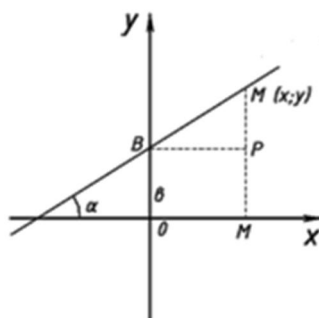
5⁰. (1) tenglamada $B = C = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax = 0, \text{ ya'ni } x = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziq OY o'qi bo'ladi.

2-§. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror to'g'ri chiziqni qaraylik. Bu to'g'ri chiziq OY o'qining $B(0; b)$ nuqtasi orqali o'tib, OX o'qining musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin (2-chizma).



2-chizma

Bu to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x; y)$ nuqtani olib, bu nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar tushiramiz. Perpendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz. Ravshanki,

$$OM_1 = x, \quad MM_1 = y$$

bo'ladi.

B nuqtadan OX o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Uning MM_1 perpendikulyar bilan kesishgan nuqtasini P deylik.

Natijada to'g'ri burchakli BMP uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchakda

$$\angle MBP = \alpha, \quad BP = OM_1 = x, \quad MP = MM_1 - PM_1 = y - b$$

bo'lib,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{BP} = \frac{y - b}{x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x, \text{ ya'ni } y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, to'g'ri chiziqning OX o'qi bilan tashkil etgan burchakning tangensi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi va ko'pincha k bilan belgilanadi:

$$tg\alpha = k.$$

Demak,

$$y = kx + b \quad (2)$$

To'g'ri chiziqning (2) ko'rinishdagi tenglamasi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

Bu holda to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati k hamda b lar bilan to'liq aniqlanadi.

3-§. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi

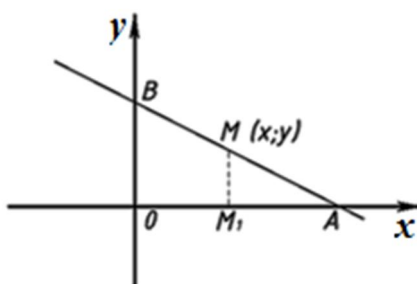
Tekislikda biror to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmasdan, u OX o'qidan

$$a = OA$$

kesmani, OY o'qidan esa

$$b = OB$$

kesmani ajratsin (3-chizma).



3-chizma

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x; y)$ nuqtani olib bu nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar tushiramiz. Perpendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz.

Ravshanki,

$$OM_1 = x, \quad MM_1 = y.$$

Endi OAB va M_1AM to'g'ri burchakli uchburchaklarni qaraymiz. Bu uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib

$$\frac{MM_1}{OB} = \frac{M_1A}{OA}$$

bo'lishini topamiz.

Ravshanki,

$$M_1A = OA - OM_1 = a - x$$

unda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

ya'ni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3)$$

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari x va b lar (3) tenglama bilan bog'langan. (3) tenglama to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.

4-§. To'g'ri chiziq haqidagi asosiy masalalar

1⁰. Berilgan nuqtadan (berilgan yo'nalish bo'yicha) o'tuvchi to'g'ri chiziq. Tekislikda, tayin $M(x_1, y_1)$ nuqta berilgan. Shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini topish talab etilsin. Uni

$$y = kx + b \quad (1)$$

ko'rinishda izlaymiz .

Madomiki, to'g'ri chiziq $M(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tar ekan, unda bu nuqtaning x_1 va y_1 koordinatalari $y = kx + b$ tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_1 = kx_1 + b \quad (2)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan (2) tenglikni hadlab ayirib

$$y - y_1 = kx + b - (kx_1 + b)$$

quyidagi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (3)$$

tenglamaga kelamiz. Bu berilgan $M(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M = M(3; 2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - 2 = k(x - 3),$$

ya'ni

$$y = k(x - 3) + 2$$

bo'ladi. Ravshanki, bu tenglama, ya'ni to'g'ri chiziq k ning qiymatlariga bog'liq. k ning turli qiymatlarida $M(3; 2)$ nuqtada o'tuvchi turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi.

2⁰. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq

Tekislikda $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ ikkita tayin nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni (to'g'ri chiziq tenglamasini) topish talab etilsin.

Ma'lumki, $M(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $N(x_2; y_2)$ nuqtadan ham o'tsin deylik. Unda $N(x_2; y_2)$ nuqtaning koordinatalari x_2 va y_2 lar keying tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1).$$

Bu tenglikdan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

bo'lib, undan

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(4) tenglama $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2; y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M(2,1)$ va $N(1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{2-1},$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1},$$

$$x+y-3=0$$

bo'lad.

3^o Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikda ikkita

$$y = k_1x + b_1 \text{ va } y = k_2x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish talab etilsin.

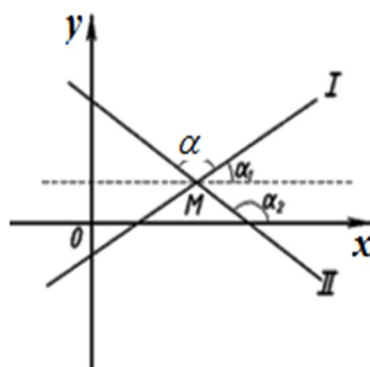
Ma'lumki,

$$k_1 = tg\alpha_1$$

birinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti,

$$k_2 = tg\alpha_2$$

ikkinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti (4-chizma).



4-chizma

Odatda, I to'g'ri chiziqni M nuqta atrofida soat strelkasiga teskari tomonga uni II to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha burish natijasida hosil bo'lgan α burchak ($0 \leq \alpha < \pi$) ikki I va II to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi.

Chizmadan ko'rinadiki,

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

bo'ladi.

Agar

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

$$\text{va } tg\alpha_1 = k_1, \quad tg\alpha_2 = k_2$$

bo'lishni e'tiborga olsak unda

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \quad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning teglamlasini aniqlab beradi.

Demak, (5) formula yordamida ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak topiladi.

Masalan, ushbu

$$y = -\frac{1}{7}x + 2, \quad y = \frac{3}{4}x + 3$$

to'g'ri chiziqlar uchun

$$k_1 = -\frac{1}{7}, \quad k_2 = \frac{3}{4}$$

bo'lib ular orasidagi burchak α ning tangensi

$$tg\alpha = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21 + 4}{28 - 3} = 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.

$$\alpha = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi.

4⁰ Ikki to‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Tekislikda ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, birinchisining tenglamasi

$$y = k_1x + b_1$$

ikkichisining tenglamasi esa

$$y = k_2x + b_2$$

bo‘lsin.

Ravshanki, bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi α burchak (burchakning tangensi) uchun

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

bo‘ladi.

- 1) Aytaaylik, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak nolga teng bo‘lsin:

$$\alpha = 0^\circ$$

bu holda berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib,

$$tg\alpha = tg0^\circ = 0$$

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,$$

$$k_2 - k_1 = 0,$$

$$k_1 = k_2$$

bo‘ladi. Demak,

$$k_1 = k_2$$

tenglik ikki to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro parallellik shartini ifodalaydi.

- 2) Aytaaylik, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak 90° ga teng bo‘lsin:

$$\alpha = 90^\circ.$$

bu holda berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib,

$$tg\alpha = tg90^\circ \quad (= \infty),$$

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot (= \infty),$$

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0,$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad \left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$$

bo'ladi.

Demak,

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

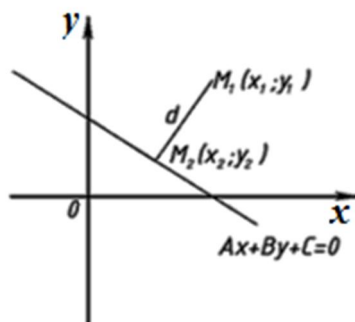
tenglik ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

5⁰. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa

Tekislikda biror to'g'ri chiziq ushbu

$$Ax + By + C = 0.$$

Tenglama bilan berilgan bo'lib, $M_1(x_1, y_1)$ nuqta esa shu to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta bo'lsin M_1 nuqtada berilgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi M_1 nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa deyiladi (5-chizma).



5-chizma

Aytaylik, $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to'g'ri chiziq bilan kesimini nuqtasi $M_2(x_2, y_2)$ bo'lsin.

Demak, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa M_1M_2 kesmaning uzunligi bo'ladi. Uni d bilan belgilaymiz. Bu d masofa quydagi

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formula bilan topiladi.

Masalan, $M = M(3; -4)$ nuqtadan

$$6x - 8y + 31 = 0$$

to'g'ri chiziqqacha masofa

$$d = \frac{|6 \cdot 3 - 8 \cdot (-4) + 31|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{81}{10} = 8,1$$

bo'ladi.

6⁰. Ikki to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi

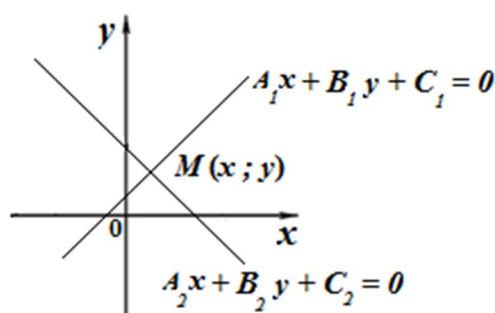
Tekislikda ikki to'g'ri chiziqlar ushbu

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lib, ular o'zaro parallel bo'lmasin. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish talab etilsin.

Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini $M = M(x; y)$ bilan belgilaylik (6-chizma)



6-chizma

Modomiki, izlanayotgan nuqta bir vaqtda ikkala to'g'ri chiziqda yotar ekan, unda nuqtaning koordinatalari x va y lar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalarni qanoatlantiradi shuning uchun bu x va y lar ushbu

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Demak, ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

Misol. Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi hamda

$$3x - 2y - 6 = 0$$

to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Berilgan $M(0,5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi formulasiga ko'ra

$$y - 5 = k(x - 0)$$

ya'ni

$$y = kx + 5$$

bo'ladi. Endi berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$3x - 2y - 6 = 0$$

ni y ga nisbatan yechib topamiz.

$$-2y = 6 - 3x,$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

Bu $y = kx + 5$, $y = \frac{3}{2}x - 3$ to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi shartidan

$$k \cdot \frac{3}{2} = -1, \quad \text{ya'ni} \quad k = -\frac{2}{3}$$

bo'lishini topamiz. Topilgan k ning o'rniga qo'ysak, unda

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

5 BOB.

TEKISLIKDA IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Tekislikda to'g'ri chiziq x va y larga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan ifodalanishi 4-bobda bayon etildi.

Endi tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarning (ma'lum ko'rinishdagi egri chiziqlarni) ifodalarini topib, ularni o'rganamiz.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y larga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ularning umumiy ko'rinishi quyidagicha

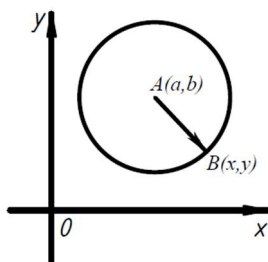
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

bo'ladi. Bu tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziklardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida egri chiziqlarning xossalarini o'rganamiz.

1-§. Aylana

Tekislikda tayin $A = A(a; b)$ nuqtani olaylik. Bu nuqtadan barobar masofada joylashgan tekislik nuqtalaridan iborat to'plam (nuqtalarning geometrik o'rni) aylana deyiladi (1-chizma).



1-chizma

Bu aylananing tenglamasini topamiz.

Aylanada yotuvchi ixtiyoriy $B = B(x, y)$ nuqtani olib, A va B nuqtalar orasidagi masofani R bilan belgilaymiz.

Aylana ta'rifiga ko'ra

$$AB = R$$

bo'ladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$AB = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

bo'lib,

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarib quyidagi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1)$$

tenglamaga kelamiz.

Demak, aylanadagi o'zgaruvchi $B(x, y)$ nuqtaning koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiradi.

(1) tenglama aylana tenglamasi bo'ladi. Bunda $A(a, b)$ nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deyiladi.

Masalan, markazi $A(1; 2)$, radiusi $R = 3$ bo'lgan aylana tenglamasi.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

ya'ni

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

bo'ladi.

Agar aylana markazining koordinatalaridan birinchisi nolga teng ($a = 0$) bo'lsa, aylana markazi OX o'qida, ikkinchisi nolga teng ($b = 0$) bo'lsa, aylana markazi OY o'qida, ikkalasi nolga teng bo'lsa, aylana markazi koordinatalar boshida bo'lib, ularning tenglamalari mos ravishda

$$x^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2,$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

bo'ladi.

Aylana bilan umumiy bitta nuqta $M(x; y)$ ga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan urinma deyiladi.

Ushbu

$$x^2 + y^2 = R^2$$

aylananing (x_1, y_1) nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi quyidagi

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y - R^2 = 0$$

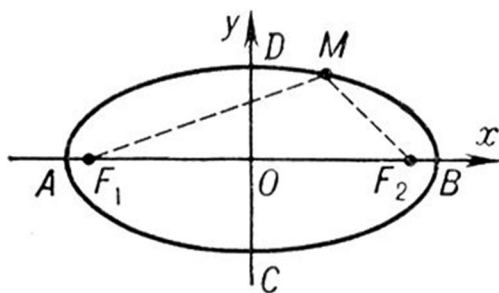
ko'rinishda bo'ladi.

2-§. Ellips

Tekislikda ikkita F_1 va F_2 tayin nuqtalarni olaylik. So'ng tekislikda shunday nuqtalar to'plamini qaraylikki, bu to'plamning har bir nuqtasidan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi har doim bir xil o'zgarmas songa teng bo'lsin. Odatda, bunday nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) **ellips** deyiladi.

Ellipsning tenglamasini topish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz:

Berilgan F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi, $F_1 F_2$ kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa, o'qiga perpendekulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi deb qaraymiz (2-chizma).



(2-chizma)

Agar $OF_2 = c$ ($c > 0$) deyilsa, yuqorida aytilganga ko'ra

$$F_1 = F_1(-c; 0), \quad F_2 = F_2(c; 0)$$

bo'ladi.

Ellipsda ixtiyoriy nuqta (o'zgaruvchi nuqta) olib, uni $M = M(x; y)$ deylik.

Ellips ta'rifiga ko'ra F_1M va F_2M masofalar yig'indisi o'zgarmas. Uni $2a$ ($a > 0$) bilan belgilaymiz.

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \\ &= \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$F_2M = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Demak,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

keyingi tenglikni quyidagicha

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

yozib, so'ng uning har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz.

$$\begin{aligned} (x + c)^2 + y^2 &= \\ &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \end{aligned}$$

natijada

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 &= \\ &= -4a \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

bo'lib,

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

ya'ni

$$a^2 - cx = a \cdot \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

bo'ladi. Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarib topamiz:

$$\begin{aligned} (a^2 - cx)^2 &= a^2 \cdot ((x - c)^2 + y^2), \\ a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2), \\ a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= \\ &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \end{aligned}$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Ravshanki, $2a > 2c$, ya'ni $a > c$. Demak $a^2 - c^2 > 0$. Uni b^2 bilan belgilaymiz:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

natijada

$$x^2 \cdot b^2 + y^2 \cdot a^2 = a^2b^2$$

bo'lib undan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ellipsdagi o'zgaruvchi $M(x: y)$ nuqtaning koordinatalari (2) tenglik bilan bog'langanligini topdik. Bu tenglama ellips tenglamasi deyiladi. Bunda F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. Ravshanki, fokuslar orasidagi masofa

$$F_1F_2 = 2c$$

ga teng.

Endi ushbu

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib

$$y^2 = b^2, \quad x^2 = a^2,$$

$$y = \pm b, \quad x = \pm a.$$

bo'lishini topamiz.

Demak, ellips OY o'q bilan

$$D(0, b), \quad C(0; -b)$$

nuqtalarda, OX o'q bilan esa

$$A(-a, 0), \quad B(a, 0)$$

nuqtalarda kesishadi.

Odatda a ellipsning katta yarim o'qi, b esa kichik yarim o'qi deyiladi.

Ellips fokuslari orasidagi masofa $2c$ ning katta o'qi $2a$ ga nisbati ellipsning eksentrisiteti deyiladi va ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Agar

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ ya'ni } c^2 = a^2 - b^2, c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak unda

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (3)$$

bo'ladi.

Ellipsning eksentrisiteti uning shaklini xarakterlaydigan miqdor bo'lib, $c < a$ bo'lganligi sababli ε har doim 1 dan kichik bo'ladi

$$\varepsilon \leq 1.$$

Agar b ortib borsa, unda ε kichiklashib boradi va ellips shakli aylana shakliga o'xshash bo'ladi.

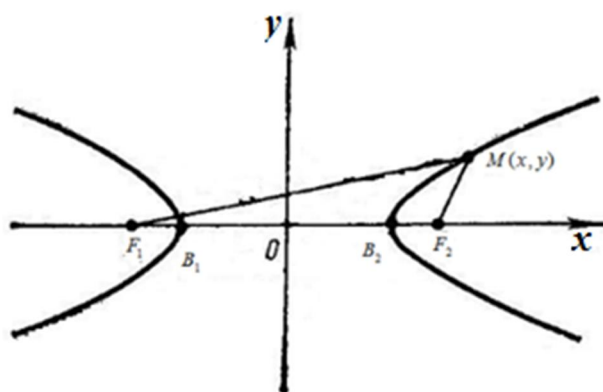
Agar $a = b$ bo'lsa unda $\varepsilon = 0$ bo'lib, ellips aylanadan iborat bo'lib qoladi.

3-§. Giperbola

Tekislikda ikkita tayin F_1 va F_2 nuqtalarni olaylik. Tekislikda shunday nuqtalar to'plamini qaraymiz, bu to'plamning har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lsin. Bunday nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) giperbola deyiladi.

Giperbolaning tenglamasini tuzish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quydagicha olamiz.

Berilgan F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi, F_1F_2 kesmaning o'rtasidagi o'tuvchi hamda abssissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi deb olamiz.



3-chizma

Agar $OF_2 = c$ ($c > 0$) deyilsa, unda yuqorida aytilganlarga ko'ra

$$F_1 = F_1(-c; 0), F_2 = F_2(c; 0)$$

bo'ladi.

Giperbolada ixtiyoriy $M = M(x; y)$ nuqta olamiz. Giperbola ta'rifiga ko'ra F_1M va F_2M masofalar ayirmasi o'zgarmas bo'lishi lozim. Bu o'zgarmasni $2a$ bilan belgilaymiz:

$$F_1M - F_2M = \pm 2a \quad (a > 0).$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} F_1M &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \\ &= \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$F_2M = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

natijada

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $F_1M > F_2M$ deb uni quydagicha

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - 2a$$

yozib so'ng bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'taramiz.

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + y^2 &= \\ &= (x + c)^2 + y^2 - 4a \cdot \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 4a^2. \end{aligned}$$

Bundan

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= \\
 &= x^2 + 2cx + c^2 + 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

ya'ni

$$-4a^2 - 4cx = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan

$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikni ikki tomonini kvadratga ko'tarib topamiz:

$$\begin{aligned}
 (a^2 + cx)^2 &= \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
 a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) \\
 a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 &= \\
 &= a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 a^4 + c^2x^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Ma'lumki, $F_2M - F_1M < F_1F_2$.

Demak, $2a < 2c$ ya'ni

$$a^2 < c^2.$$

Bundan $a^2 - c^2 < 0$ bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, (4) tenglikning ikki tomonini $a^2(a^2 - c^2)$ ga bo'lamiz.

Natijada ushbu

$$\frac{(a^2 - c^2)x^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = 1$$

ya'ni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

tenglikka kelamiz. Agar keyingi tenglikda

$$a^2 - c^2 = -b^2$$

deyilsa unda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, giperboladagi o'zgaruvchi $M(x; y)$ nuqtaning kordinatalari x va y lar (4) tenglama bilan bog'langan. Uni giperbolaning tenglamasi deyiladi.

Bunda F_1 va F_2 nuqtalar giperbolaning fokuslari deyiladi. Ravshanki, fokuslar orasidagi masofa $2c$ ga teng.

Endi ushbu

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sistemalarni yechib, giperbolaning koordinatalar o'qlari OX va OY bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki $x = 0$ da $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ bo'lib, manfiy son 1 ga teng bo'ladigan ma'nosiz munosabat hosil bo'ladi. Demak, giperbola OY o'qi bilan kesishmaydi.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sistemani yechib

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad x^2 = a^2, \quad x = \pm a$$

bo'lishini topamiz. Demak, giperbola OX o'qi bilan

$$B_1 = B_1(-a, 0), B_2 = B_2(a, 0)$$

nuqtalarda kesishadi

OX o'q giperbolaning haqiqiy o'qi, OY o'q esa mavhum o'qi deyiladi.

Endi (5) tenglamani y ga nisbatan yechib topamiz:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, x yetarli darajada katta bo‘lganda $\frac{a^2}{x^2}$ nisbat 0 ga yaqin bo‘lib, $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ esa 1 ga yaqin bo‘ladi:

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx 1.$$

Unda

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx \pm \frac{b}{a} x$$

bo‘ladi.

Demak, x yetarli darajada katta bo‘lganda giperbola nuqtalarining ordinatalari

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

to‘g‘ri chiziqli nuqtalarining ordinatalariga yetarlicha yaqin bo‘ladi.

Bu

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Giperbola fokuslari orasidagi masofa $2c$ ning $2a$ ga nisbati giperbolaning eksentrisiteti deyiladi va ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Ma’lumki,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Unda giperbolaning ekscentrisiteti

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

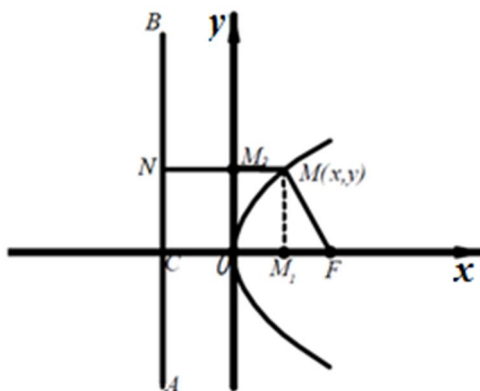
bo'ladi.

4-§. Parabola

Tekislikda tayin bir to'g'ri chiziqni va bu to'g'ri chiziqda yotmagan tayin bitta nuqtani olaylik. Berilgan to'g'ri chiziqdan va berilgan nuqtadan baravar masofada joylashgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) parabola deyiladi. Berilgan to'g'ri chiziqni AB , berilgan nuqtani F bilan belgilaymiz.

Parabolaning tenglamasini topish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz.

Berilgan F nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan AB to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni absissa o'qi deb olamiz. AB to'g'ri va F nuqta orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda absissalar o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni OY o'qi deb olamiz (4-chizma).



4-chizma

Parabolada ixtiyoriy nuqta olib, uni $M(x; y)$ bilan belgilaymiz. Berilgan AB to'g'ri chiziqdan berilgan F nuqtagacha bo'lgan masofani p deylik. ($p > 0$). Unda F nuqtaning koordinatalari $\frac{p}{2}$ va 0 bo'ladi:

$$F = F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Ranshanki,

$$OM_1 = x, OM_2 = MM_1 = y, C = C\left(-\frac{p}{2}, 0\right), N = \left(-\frac{p}{2}; y\right),$$

shuningdek

$$MN = x + \frac{p}{2}$$

bo'ldi.

Endi parabola tenglamasi tuzamiz.

Parabola ta'rifiga binoan

$$MN = MF$$

ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Natijada

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

tenglik hosil bo'ldi. Bu tenglikni ikki tomonini kvadratga ko'tarsak, unda

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

hosil bo'ldi. Bu tenglikni soddalashtirish natijasida

$$y^2 = 2px \quad (6)$$

tenglama yuzaga keladi.

Shunday qilib, paraboladagi o'zgaruvchi $M(x; y)$ nuqtaning koordinatalari (6) tenglama bilan bog'langanligini ko'ramiz. (6) tenglama parabola tenglamasi deyiladi.

F nuqta parabolaning fokusi, AB to'g'ri chiziq parabolaning direktrissasi deyiladi.

Demak,

$$F = F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$$

parabola direktrissasi tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'ladi.

Parabola tenglamasida y o'zgaruvchi juft darajada qatnashadi. Demak, parabola OX o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. Parabola tenglamasi

$$y^2 = 2px$$

dan

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = -\sqrt{2px}$$

bo'lishini topamiz.

Demak, parabolaning yuqori yarim tekislikdagi tenglamasi

$$y = \sqrt{2px},$$

quyi yarim tekislikdagi tenglamasi

$$y = -\sqrt{2px}$$

bo'ladi.

Ushbu

$$x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py$$

tenglama ham parabolalarni ifodalaydi. Bu parabolalar OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

6-BOB

FUNKSIYA

Funksiya matematikaning muhim, ayni paytda asosiy tushunchalaridan hisoblanadi. U o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi vosita sifatida tushuniladi. Funksiya yordamida ko'pincha hodisa va jarayonlar ifodalanib o'rganiladi.

1-§. Funksiya tushunchasi

1^o. Funksiyaning ta'rifi

Biz tabiatni kuzatish va o'rganish jarayonida, shuningdek fan va texnikaning turli sohalarida turli (har xil) miqdorlarga (masalan, uzunlik, vaqt, harorat, massa, uchburchaklarning perimetrlari, uchburchak burchaklari va h.k.) duch kelamiz. Bunda ayrim miqdor (vaziyatga qarab) turli sonlar qiymatlarini qabul qilsa, ayrimlari esa faqat bitta son qiymatga teng bo'ladi.

Masalan, uchburchaklarning perimetrlari turli son qiymatlarga teng bo'lib, perimetr turli miqdorlarni qabul qilaoladigan miqdor, uchburchak ichki burchaklar yig'indisini ifodalovchi miqdor esa faqat bitta o'zgarmas songa (u 180^0) teng bo'ladi. Birinchi holda, yani uchburchak perimetri o'zgaruvchi miqdor ikkinchi holda, ya'ni uchburchak ichki burchaklar yig'indisini ifodalovchi miqdor esa o'zgarmas miqdor bo'ladi.

Odatda, o'zgaruvchi miqdorlar harflar bilan belgilanadi. Masalan, x, y, z . Bu o'zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi.

Agar o'zgaruvchining qabul qila oladigan qiymatlari to'plami ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan hisoblanadi.

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar bo'lib, ularning o'zgarish sohalari (to'plamlari) mos ravishta X va Y bo'lsin: $x \in X, y \in Y$.

Ta'rif. Agar X to'plamdan olingan har bir x songa ($x \in X$) biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan olingan bitta y son ($y \in Y$) mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya aniqlangan (berilgan) deyiladi.

Bunda: X to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi, x — erkli o'zgaruvchi funksiya argumenti, y — erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi, f — har bir x ga bitta y ni mos qo'yuvchi qoida deyiladi.

Ta'rifdagi x , y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyilishini

$$y = f(x)$$

kabi yoziladi va “igrik teng ef iks” deb o'qiladi.

Odatda

$$y = f(x)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ kabi, har bir $x \in D(f)$ ga mos qo'yilgan y ning qiymatlaridan iborat to'plam $E(f)$ kabi belgilanib, y funksiya qiymatlari to'plami (sohasi) deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga y o'zgaruvchining bitta qiymatini mos qo'yadigan muayyan qoida berilishi muhim. Ko'pincha, amaliyotda funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ ham shu qoidaga ko'ra, ya'ni funksional bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi.

Ushbu munosabatlar

$$y = 3x + 5, \quad y = \sqrt{x - 2}, \quad y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

funksiyalarga misollar bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

funksiyaning aniqlash sohasi topilsin.

⇐ Ravshanki, berilgan ifoda (tenglik) ma'noga ega bo'lishi uchun

$$4 - x^2 \geq 0$$

bo'lishi kerak. Keyingi tengsizlikni yechib topamiz:

$$x^2 - 4 \leq 0,$$

$$(x - 2)(x + 2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 2.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = [-2, 2]$ bo'ladi. ▷

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning aniqlash va o'zgarish sohalarini toping.

◁ Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(f) = (-\infty, +\infty) = R$$

bo'ladi, chunki ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ifoda ma'noga ega.

Ravshanki, $y = 0$ da $x = 0$ bo'ladi.

Endi $y \neq 0$ deb $y = f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ tenglikni quyidagicha yozib olimiz:

$$y \cdot (1 + x^2) = x \text{ yoki } yx^2 - x + y = 0$$

keyingi tenglama x ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib, uning yechimlari

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

bo'ladi. Berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi ushbu

$$1 - 4y^2 \geq 0$$

tengsizlikni yechish bilan topiladi:

$$(2y + 1)(2y - 1) \leq 0,$$

$$4\left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Demak, funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ bo'ladi. ▷

2⁰. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Analitik usul. Bu usulda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati muayyan formulalar, tenglamalar yordamida topiladi.

Masalan,

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

Funksiyaning analitik usulda berilishida funksiya bir necha formulalar yordamida ham aniqlanishi mumkin. Masalan,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{agar } x < 0. \end{cases}$$

b) Jadval usuli. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi. Bu holda funksiya argumenti x ning bir necha tayin

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

jadval shaklida ifodalanadi.

v) Grafik usul. Bu usulda bog'lanish egri chiziq (grafik) yordamida bo'ladi. Funksiyaning grafik usulidan ko'pincha tajriba bilan bog'liq ishlarda, ayniqsa o'zi yozar apparatlardan foydalanishda qo'llaniladi.

Aytaylik,

$$y = f(x)$$

funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bu to'plamdan biror x_0 sonni (elementni) olamiz: $x_0 \in X$. Modomiki $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan ekan, unda x_0 ga f qoida bo'yicha bitta y_0 son mos qo'yiladi.

$$f: x_0 \rightarrow y_0.$$

Bu y_0 son $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va

$$f(x_0) = y_0$$

kabi yoziladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$

funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1^2 + 1}{1^4 + 1} = 1$$

bo'ladi.

3^o. Funksiyaning grafigi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) aniqlangan bo'lib, argument x ning X to'plamdan olingan har bir qiymatiga mos keladigan funksiya qiymati y ($f(x) = y$) bo'lsin. Bu x va y lar (x, y) juftlikni tashkil etadi. Ma'lumki, (x, y) juftlik tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikning bunday nuqtalari to'plami

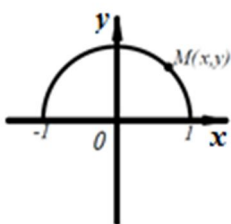
$$\Gamma = \{(x, y): x \in X, y = f(x)\}$$

(nuqtalarning geometrik o'rni) $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiyaning grafigi, markazi $(0, 0)$ nuqtada, radiusi $R = 1$ bo'lgan yuqori yarim aylana bo'ladi. (1-chizma).



1-chizma

Dastlab funksiya grafigini “nuqtalar” bo'yicha tasvirlashni keltiramiz. Keyinchanik funksiya grafigini batafsil o'rganamiz.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda (sohada) aniqlangan bo'lsin. x argumentining X to'plamdan bir nechta bir-biriga yaqinroq bo'lgan

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

qiymatlarini olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

$$(y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots, y_n = f(x_n)).$$

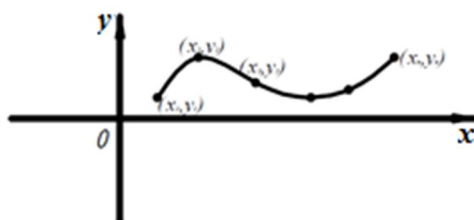
Natijada

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

jadval hosil bo'ladi. Bu jadvaldan foydalanib

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

juftliklarni tuzamiz. So'ng bu juftliklarni tekislikda nuqtalar sifatida tasvirlaymiz.



2-chizma

Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirishdan hosil bo'lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (taxminiy grafigi) bo'ladi.

2-§. Turli xususiyatli funksiyalar

1⁰. Funksiyaning chegaralanganligi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarmas M soni topilsinki, X to'plamdagi har bir x son uchun

$$f(x) \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi.

Agar shunday o'zgarmas m son topilsaki, X to'plamdagi har bir x son uchun

$$f(x) \geq m$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya X to'plamda chegaralangan deyiladi.

Funksiya chegaralanganligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Agar shunday $M > 0$ topilsaki, X to'plamning har bir x soni uchun

$$|f(x)| \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyani $E = [0, +\infty)$ to'plamda qaraylik. Bu funksiyaning E to'plamda chegaralanganligini ko'rsatamiz.

◁ Ixtiyoriy $x \in E$ son uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \geq 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya E da quyidan chegaralangan.

Ravshanki,

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$2x \leq 1 + x^2,$$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

bo'lib, undan funksiyaning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan funksiya $E = [0, +\infty)$ da ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan. Demak, berilgan funksiya $E = [0, +\infty)$ da chegaralangan. ▷

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

funksiyaning $E = R \setminus \{0\}$ to'plamda quyidan chegaralanganligini isbotlaymiz.

Ma'lumki, $a > 0$ va $b > 0$ sonlari uchun

$$\frac{a+b}{2} - \text{o'rta arifmetik qiymati,}$$

$$\sqrt{ab} - \text{o'rta geometrik qiymati}$$

deyilib, ular uchun

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shu ma'lumotdan foydalanib topamiz:

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2.$$

Demak, barcha $x \in R \setminus \{0\}$ uchun

$$f(x) \geq 2$$

bo'ladi. Bu esa berilgan funksiyaning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2⁰. Monoton funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar argument x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

Agar argument x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi. O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning $X = [1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

$\triangleleft X = [1, +\infty)$ to'plamda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 \cdot x_2^2 - x_2 - x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \quad 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini etiborga olib

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

ya'ni

$$f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya $[1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi.

3⁰. Juft va toq funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar X to'plamning ixtiyoriy x ($x \in X$) soni uchun

$$1) \quad -x \in X,$$

$$2) \quad f(-x) = f(x)$$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

juft funksiyalar bo'ladi. Chunki bu funksiyalar uchun $X = (-\infty, +\infty)$ to'plamning ixtiyoriy $x \in X$ soni uchun, $-x \in X$ bo'lib,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = g(x)$$

bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi, chunki bunday funksiyalar uchun $(x; f(x))$ nuqta funksiya grafigida yotsa, $(-x, f(x))$ nuqta ham funksiya grafigida yotadi.

Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi, chunki bunday funksiya uchun $(x, f(x))$ nuqta bilan birga har doim $(-x; -f(x))$ nuqta ham shu grafikda yotadi.

4⁰. Davriy funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarmas T ($T > 0$) son topilsaki, X to'plamdan olingan ixtiyoriy x son ($x \in X$) uchun $x + T \in X$ bo'lib,

$$f(x + T) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya deyilib, T son $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi.

Agar T son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, unda

$$n \cdot T \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

Demak, davriy funksiyaning davrlari ko'p bo'ladi. Ular ichida eng kichik musbat bo'lgani (agar y mavjud bo'lsa) funksiyaning asosiy davri deyiladi.

5⁰. Teskari funksiya

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lib, uning qiymatlari to'plami Y bo'lsin.

$$Y = \{y: y = f(x), x \in X\}$$

Agar Y to'plamdan olingan har bir y qiymatga X to'plamdagi yagona x ($x \in X$) qiymat mos qo'yilsa unda

$$x = \varphi(y)$$

funksiya yuzaga keladi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) Y bo'lib, qiymatlar to'plami esa X bo'ladi.

Odatda $\varphi(y)$ funksiya $f(x)$ funksiya nisbatan teskari funksiya deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

$y = f(x)$ funksiya nisbatan teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiyani, ko'pincha

$$f(x) = y$$

tenglamani x ga nisbatan yechish bilan topiladi.

Masalan, $y = 2x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x = \frac{1}{2}y$ bo'lagi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

6^o. Murakkab funksiya

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X ($X \subset R$) to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)$ bo'lsin:

$$F(f) = \{y; f(x) = y, x \in X\}.$$

Endi $F(f)$ to'plamda

$$u = \varphi(y)$$

funksiya berilgan bo'lsin. Unda X to'plamdan olingan har bir x songa ($x \in X$) bitta y son (f –qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunday y songa bitta u son (φ –qoidaga ko'ra) mos qo'yilib funksiya aniqlanadi:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} u$$

uni murakkab funksiya deyilib

$$u = \varphi(f(x))$$

kabi belgilanadi.

Demak, murakkab funksiya funksiyalar yordamida hosil bo'ladi.

Masalan,

$$u = \sqrt{x^2 + 1}$$

murakkab funksiya bo'lib, u

$$u = \sqrt{y}, y = x^2 + 1$$

funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.

7-BOB

FUNKSIYA LIMITI

Funksiya limiti oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Bu tushuncha yordamida matematika va uning tadbirlarida ko'p foydalaniladigan funksiya hosilasi tushunchasi kiritiladi.

Avvalo, soddalik uchun natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limitini keltiramiz. Keyinchalik ixtiyoriy argumentli funksiya limitini bayon etamiz.

1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, barcha natural sonlar to'plami

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \{n\}$$

ning har bir n elementiga (natural songa) biror f qoidaga ko'ra bitta tayin x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin. Bu holda argumentli n bo'lgan funksiya hosil bo'ladi. Uni natural argumentli funksiya deyiladi. Demak,

$$x_n = f(n).$$

Bu funksiya qiymatlari

$$x_1 = f(1), \quad x_2 = f(2), \dots, \quad x_n = f(n), \dots$$

lardan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi.

(1) ketma-ketlikni tashkil etgan

$$x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sonlar ketma-ketlik hadlari deyiladi: x_1 —birinchi had, x_2 —ikkinchi had va hokazo, x_n — n —had (yoki umumiy had). (1) ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ko'pincha ketma-ketliklar umumiy hadlari orqali belgilanadi. Masalan:

$$1). x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$2). x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} : 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$$

$$3). x_n = (-1)^n : -1, +1, -1, +1, \dots$$

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar bu (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots)$$

qanoatlantirsa, ya'ni

ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari quyidagi tengsizliklarni

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots)$$

qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \geq x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = n: 1, 2, 3, \dots$$

qat'iy o'suvchi,

$$x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

qat'iy kamayuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi, (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas M sonidan kichik yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \leq M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2} : \frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta o'zgarmas m sonidan katta yoki teng, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \geq m$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

ketma-ketlik quyidan chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegalangan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$m \leq x_n \leq M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ chegalangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{4 + n^2} : \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{13}, \dots$$

ketma-ketlik chegalangan bo'ladi, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4 + n^2} > 0$$

bo'ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning quyidan chegalanganligini bildiradi.

Ma'lumki,

$$0 \leq (n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bo'lib, undan $4n \leq n^2 + 4$, ya'ni

$$\frac{n}{4+n^2} \leq \frac{1}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegalanganligini bildiradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik chegalangan.

2⁰. Ketma-ketliklar ustida amallar

Aytaylik, ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin:

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$\{y_n\}: y_1, y_2, y_2, \dots, y_n, \dots$$

Quyidagi

$$\begin{aligned} & x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots, \\ & x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, \quad x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots, \\ & x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, \quad x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots, \\ & \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots, \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati deyiladi va ular

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\}, \quad \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

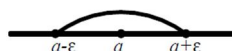
kabi belgilanadi.

3⁰. Ketma-ketlikning limiti

Biror a nuqta (haqiqiy son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in R: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

interval a nuqtaning atrofi (ε –atrofi) deyiladi (1-chizma).



1-chizma

Ravshanki, ε soni turli qiymatlarga teng bo'lganda a nuqtaning turli atroflari hosil bo'ladi.

Masalan, $a = 1$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{3}$ atrofi

$$\left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right), \text{ ya'ni } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

intervalidan;

$$a = 0 \text{ nuqtaning } \varepsilon = \frac{1}{10} \text{ atrofi}$$

$$\left(0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10}\right) \text{ ya'ni } \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

intervalidan iborat bo'ladi.

Biror

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik hamda a son (nuqta) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

atrofi (ε – ixtiyoriy musbat son) olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi " $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ atrofiga tegishli" deyilishini quyidagicha aytish mumkin.

Ixtiyoriy musbat ε son olinganda ham, shunday natural n_0 topilib, barcha $n > n_0$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

yoki

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \text{ ya'ni } |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu mulohazalarga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflash mumkin bo'ladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural son n_0 topilsaki barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo‘ladi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni olib, unga ko‘ra $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ni topib, so‘ng

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

deyilsa, unda barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ushbu

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

ketma-ketlik limitga ega bo‘lmaydi, chunki har qanday a son, jumladan $a = \frac{1}{2}$ deyilsa, unda, ravshanki berilgan ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari $a = \frac{1}{2}$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{2}$ atrofiga tegishli bo‘lmaydi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ — cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Tasdiq. $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo‘lishi uchun

$$\alpha_n = x_n - a$$

ning cheksiz kichik miqdor bo‘lishi zarur va yetarli.

Bu tasdiqning isboti yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limiti hamda cheksiz kichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Keltirilgan tasdiqdan

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

bo'lib,

$$x_n = \frac{1}{n+1}.$$

Cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bo'ladi.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday n_0 natural son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > M$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti " ∞ " deyiladi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Aytaylik,

$$x_n = n; \quad 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

bo'lsin. Bu ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Biror $\{x_n\}$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik:

- 1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin,
- 2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin,
- 3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

2) va 3) hollarda ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

4⁰. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

- 1). Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona bo'ladi.
- 2). Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.
- 3). O'zgarmas sonning limiti o'ziga teng.
- 4). Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

bo'lsa, u holda

$$\{c \cdot x_n\}, \{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, (y_n \neq 0)$$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$a). \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \pm y_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b,$$

$$b). \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{c \cdot x_n\} = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot a \quad (c - \text{const})$$

$$c). \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, y_n \neq 0)$$

bo'ladi.

5) Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy n natural son uchun

$$x_n \leq y_n \quad (x_n \geq y_n)$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right)$$

bo‘ladi.

6). Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

bo‘lib, ixtiyoriy n natural son uchun

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

bo‘lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

bo‘ladi. Bu xossaga “ikki mirshab haqidagi teorema” ham deb ataladi.

5⁰. Ketma-ketlik limitining mavjudligi

***e* –soni**

Biz yuqorida yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qator xossalarini keltirdik. Bu xossalar ketma-ketliklarning chekli limitga ega bo‘lishi bilan bog‘liq.

Ketma-ketlikning qachon chekli limitga ega bo‘lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan hisoblanadi.

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalovchi teoremlar maxsus adabiyotlarda keltiriladi.

Biz quyida mavjudlik teoremlarining ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik o‘svuvchi bo‘lib, yuqoridan chegaralangan bo‘lsa. $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega (ya’ni yaqinlashuvchi) bo‘ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik kamayuvchi bo‘lib, quyidan chegaralangan bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega (ya’ni yaqinlashuvchi) bo‘ladi.

***e* –soni.** Matematikada *e* deb ataluvchi son muhim ro‘l o‘ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti sifatida ta’riflanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $\alpha > -1$ va ixtiyoriy natural $n \geq 2$ sonlar uchun

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n \cdot \alpha \quad (*)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Uni Bernulli tengsizligi deyiladi.

Ehdi ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \\ 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Sonlar ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlikning o'suvchi hamda yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

a). Ketma-ketlikning o'suvchiligi

Qaralayotgan

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi bo'lishini korsatish uchun uning

$$x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n-1}} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n : \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Bu tenglikdagi

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{-1}{n^2}\right)^{n-1}$$

ifodaga Bernulli tengsizlikni qo'llab topamiz:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} &> 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Natijada

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 + \frac{-1}{n^2}\right)^{n-1} > \\ &> \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n^3} > 1\end{aligned}$$

bo'lad. Demak,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$$

keyingi tengsizlikdan $x_{n-1} < x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

b). Ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi

Qaratilayotgan ketma-ketlikning umumiy hadi

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ni bohalaymiz:

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \left(\frac{2n+2}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+1}\right)^n = \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^n} < \\ < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}.$$

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{2n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{-1}{2n} = \\ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Natijada

$$x_n < \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

bo‘lib, undan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

ketma-ketlik o‘svuvchi va yuqoridan chegaralangan.

Unda 1-teoremaga ko‘ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi.

Ta’rif. *Ushbu*

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bunda e lotincha exponentis - “ko‘rsatkich” so‘zining dastlabki harfini ifodalaydi.

e - irratsional son bo‘lib uning taqribiy qiymati $e \approx 2,7182$ ga teng.

Odatda asosi e bolgan logarifm natural logarifm deyilib $\ln A = \log_e A$ kabi belgilanadi.

2-§. Funksiya limiti

1⁰. Sonlar to'plamining limit nuqtasi

Aytaylik, biror haqiqiy sonlar to'plami X va x_0 nuqta (haqiqiy son) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan:

1). $X = [0, 1]$ to'plamning (segmentining) har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2). $X = (0, 1)$ to'plamning (intervalning) har bir nuqtasi va $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3). $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

Tasdiq. Agar x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki:

1). Ixtiyoriy natural n da

$$x_n \in X, \quad x_n \neq x_0,$$

2). $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, tasdiqning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar istalgancha bo'ladi.

2⁰. Funksiya limitining ta'riflari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plam nuqtalaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi (yaqinlashuvchi) har qanday

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan iborat

$$\{f(x_n)\}: f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

ketma-ketlik yagona A ga (chekli yoki cheksiz) intilsa shu A ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi (x ning x_0 ga intilgandagi) limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = 2x - 1$$

funksiyaning $x_0 = 3$ nuqtadagi limitini topamiz.

Har bir hadi 3 dan farqli bo'lgan, 3 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \quad (x_n \neq 3, n = 1, 2, 3, \dots).$$

U holda berilgan funksiyaning qiymatlari

$$f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

bo'lib ulardan tuzulgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n)\} = \{2x_n - 1\}$$

bo'ladi. Bu sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{x_n \rightarrow 3} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 3} (2x_n - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra $f(x_n) = 2x - 1$ funksiyaning $x \rightarrow 3$ dagi limiti 5 ga teng bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

Ikkita $\varepsilon > 0$ va $\delta > 0$ (yetarlicha kichik) sonlarni olaylik.

Ma'lumki, x_0 nuqtaning δ -atrofi

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

intervalidan, A sonining ε -atrofi

$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

intervalidan iborat bo'ladi.

$f(x)$ funksiya argumenti x ning $x \neq x_0$ bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofga tegishli ekanligini, ya'ni

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x \neq x_0, \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Shuningdek, $f(x)$ funksiya mos qiymatlarining $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ atrofga tegishliligi, ya'ni

$$f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

bo'lishi quyidagicha ifodalanadi:

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

u holda bu ifodalardan foydalanib, funksiya limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ($x \rightarrow x_0$ dagi) limiti deyiladi va yuqoridagidek

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Odatda, $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallar ($\delta > 0$) x_0 nuqtaning mos ravishda chap va o'ng atrofi deyiladi.

Agar funksiya limiti ta'rifida funksiya argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning chap atrofida bo'lsa, funksiya limiti chap limit deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiya limiti ta'rifida argumenti x ning qiymatlari x_0 nuqtaning o'ng atrofida bo'lsa, funksiyaning limiti o'ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari uning bir tamonli limitlari deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{agar } x > 0 \\ x^3, & \text{agar } x \leq 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x + 2) = 2,$$

chap limiti

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^3 = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $M > 0$ son topilsinki,

$$|x| > M$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

3⁰. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lib, x_0 shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti cheksiz:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

Funksiya $x \rightarrow 2$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti 0 ga teng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2$$

funksiya $x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya ($\alpha(x) \neq 0$) bo'lsa, u holda $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Agar $\beta(x)$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'lsa u holda $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Tasdiq. Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A ga teng,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

bo'lsa, u holda

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya ($x \rightarrow x_0$) va aksicha.

Tasdiq. Agar $x \rightarrow x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiylar bo'lsa, u holda

$$\alpha(x) + \beta(x), \quad \alpha(x) - \beta(x), \quad \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

funksiylar cheksiz kichik funksiylar bo'ladi.

3-§. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalari

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega. Keyinchalik bu xossalar ko'p, ayniqsa funksiyalarning limitlarini hisoblashda foydalaniladi. Xossalarning asosiylarini teoremlar sifatida keltiramiz.

Teoremlarda keltiriladigan funksiyalar:

a). X to'plamda ($X \subset R$) aniqlangan, x_0 nuqta esa shu to'plamning limit nuqtasi.

b). $x \rightarrow x_0$ da chekli limitga ega deb qaraladi.

1-teorema. Ikki funksiya yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining yig'indisiga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

⇐ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

bo'lsin. Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'lib, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar ($x \rightarrow x_0$) da bo'ladi. Bu tengliklardan

$$f(x) + g(x) = A + B + [\alpha(x) + \beta(x)]$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $x \rightarrow x_0$ da $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$f(x) + g(x) = A + B + \gamma(x).$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = [A + B]$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

bo'lishini bildiradi. ⇐

Xuddi shunga o'xshash

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Natija. Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti A bo'lsa, u yagona bo'ladi.

⇐ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti ikkita bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$$

U holda bir tomondan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0,$$

ikkinchi tomondan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A - B$$

bo'ladi. Keyingi ikki tenglikdan

$$A - B = 0, \text{ ya'ni } A = B$$

bo'lishi kelib chiqadi.▷

2-teorema. Ikki funksiya ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

⇐ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B.$$

bo'sin. Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar ($x \rightarrow x_0$ da) cheksiz kichik funksiyalar.

Ravshanli,

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = \\ &= AB + [A \cdot \alpha(x) + B \cdot \beta(x)] + \alpha(x) \cdot \beta(x). \end{aligned}$$

Ayni paytda

$$\gamma(x) = [A \cdot \alpha(x) + B \cdot \beta(x)] + \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

ifoda $x \rightarrow x_0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Demak,

$$f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + \gamma(x).$$

Bundan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Natija. O'zgarmas (son) ko'payuvchini limit ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad c = \text{const.}$$

3-Teorema. Ikki funksiya nisbatining limiti surat limitini maxraj limitiga bo'linganiga teng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right)$$

⇐ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \quad B \neq 0$$

bo'lsin.

Unda

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'lib,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \left[\frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} \right] = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B^2 + B \cdot \beta(x)}$$

bo'ladi. Ravshanki, $x \rightarrow x_0$ da

$$\frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B^2 + B \cdot \beta(x)}$$

cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{ya'ni} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

bo'ladi. ▷

Misollar

1. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6)$$

limit hisoblansin.

◁ Yuqorida keltirilgan teoremlardan ifodalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 6 = 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = \\ &= 2. \triangleright \end{aligned}$$

2. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10x + 21}$$

limit hisoblansin.

◁ Ravshanki,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= (x - 3)(x + 1), \\ x^2 - 10x + 21 &= (x - 3)(x - 7). \end{aligned}$$

Unda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10x + 21} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x - 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 7)} = \frac{3 + 1}{3 - 7} = -\frac{4}{4} = -1 \end{aligned}$$

bo'ladi. ▷

4-§. Funksiya limitining mavjudligi

Har qanday funksiya ham limitga ega bo'lavermaydi. Masalan,

$$y = x^2 + 1$$

funksiya $x \rightarrow 0$ da limitga ega bo'lsa,

$$y = \sin x$$

funksiya $x \rightarrow \infty$ da limitga ega bo'lmaydi.

Tabiiy ravishda savol tug'uladi. Qachon funksiyaning limiti mavjud bo'ladi?

Funksiyaning limitini mavjud bo'lishi haqida teoremlar bor. Ular asosan maxsus adabiyotlarda bayon etilgan.

Ushbu paragrafda funksiya limiti mavjudligi haqidagi dastlabki ma'lumotlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-teorema. Aytaylik, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar X to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar bu funksiyalar uchun:

1). x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofida ($\delta > 0$)

$$f(x) \leq g(x) \leq \varphi(x),$$

2). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$

bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ da $g(x)$ funksiya ham limitga ega bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$$

bo'ladi.

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan, x_0 nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0 - b, x_0) \subset X \quad (b > 0)$$

bo'lsin. Agar

1) $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi,

2) $f(x)$ funksiya X da yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0 - 0$ (ya'ni $x \rightarrow x_0$, $x < x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.

3-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda ($X \subset R$) berilgan, x_0 nuqta X ning limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0, x_0 + b) \subset X \quad (b > 0)$$

bo'lsin. Agar

- 1) $f(x)$ X to'plamda kamayuvchi,
- 2) $f(x)$ funksiya X da quyidagi chegaralangan bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0 - 0$, ($x \rightarrow x_0$, $x > x_0$) da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'ladi.

5-§. Muhim limitlar

Funksiyaning limitlarini hisoblashda quyida keltiriladigan limitlardan ko'p foydalaniladi. Odatda ular muhim limitlar deyiladi.

1⁰. Ushbu

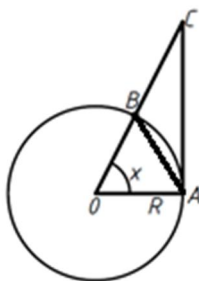
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

munosabat o'rinli. Shuni isbotlaymiz.

Avvalo x o'zgaruvchining $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (1)$$

tengsizliklarning bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislikda markazi $(0; 0)$ nuqtada, radiusi R ga teng bo'lgan doirani olamiz (1-chizma).



1-chizma

Bu chizmadan ko'rinadiki, $\triangle AOB$ yuzi

$$S_1 = \frac{1}{2} R^2 \sin x ,$$

AOB sektorining yuzi

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 x ,$$

$\triangle AOC$ ning yuzi

$$S_3 = \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x,$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$S_1 < S_2 < S_3.$$

Demak,

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\frac{1}{2}R^2$ ga bo'lib topamiz:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Keyingi tengsizliklarning hamma tomonlarini $\sin x$ ga ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

bo'lish natijasida

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni, avvalo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ko'rinishida, so'ng

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

ko'rinishida yozib. Agar

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

munosabatni e'tiborga olsak, unda

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni (uni olingan $\varepsilon > 0$ va $\frac{\pi}{2}$ sonlardan kichik qilib) olinsa, u holda

$$|x - 0| = |x| < \delta$$

bo'lganda

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x| < \varepsilon$$

boʻladi. Bu esa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

boʻlishini bildiradi.

2^0 . Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

tenglik isbotlansin.

◁ Maʼlumki

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlik limitga ega boʻlib, uning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Endi

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti e , yaʼni

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

boʻlishini koʻrsatamiz.

Aytaylik, $x > 1$ boʻlsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda

$$n \leq x < n + 1$$

boʻlib,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

boʻladi. Keyingi ikki munosabatdan

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

boʻlishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \\
 &= e \cdot 1 = e \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.
 \end{aligned}$$

Unda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x < -1$ bo'lsin. Agar $x = -t$ deyilsa, $x \rightarrow -\infty$ da $t \rightarrow +\infty$ bo'lib,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \right] = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = \\
 &= e \cdot 1 = e
 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. $\triangleright$

8-BOB

FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Funksiya limiti tushunchasi bilan uzviy bog'langan funksiyaning uzluksizligini qaraymiz.

1-§. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan va x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0 \in (a, b)$.

Ta'rif. Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligining bu ta'rifi quyidagi ikki shartning biryo'la bajarilishini taqozo etadi:

- 1). $x = x_0$ da $f(x)$ funksiya limitining chekli bo'lishini,
- 2). bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini

Masalan,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki birinchidan $x \rightarrow 2$ da

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

funksiyaning limiti chekli:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = 3$$

ikkinchidan, bu limit berilgan funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi qiymatiga teng:

$$f(2) = \sqrt{2^2 + 5} = 3,$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada uzluksiz bo‘maydi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

bo‘lib, berilgan funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi qiymati $f(x_0) = f(0) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Funksiya limiti ta’rifidagi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabatni quyidagicha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

yo‘zish mumkin.

Odatda $x - x_0$ ayirma argument orttirmasi,

$$f(x) - f(x_0)$$

ayirma esa x_0 nuqtadagi funksiya orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

keyingi tengliklardan

$$x = x_0 + \Delta x, \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

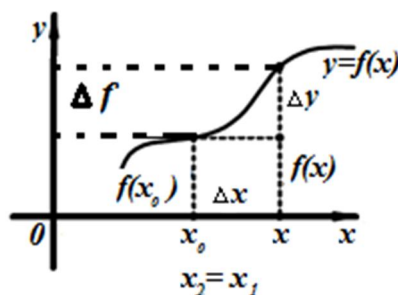
munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \quad (2)$$

ko‘rinishga keladi.

Demak, (2) munosabat funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta’rifi sifatida qabul qilinishi mumkin, ya’ni agar argument x ning x_0 nuqtadagi

orttirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning orttirmasi Δf ham nolga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi (1-chizma).



1-chizma

Masalan, $y = f(x) = c$ (c – o‘zgarmas son) funksiya ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi, chunki bu funksiya uchun

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$$

bo‘lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan bo‘lsin.

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, funksiya (a, b) intervalda uzluksiz deyiladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo‘lsin.

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzluksiz bo‘lib,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz deyiladi.

2-§. Funksiyaning uzilishi

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lmasa, ya’ni funksiya shu nuqtada uzluksiz bo‘lish shartlarini bajarmasa, funksiya x_0 nuqtada uziladi (uzilishga ega) deyiladi. Bunda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

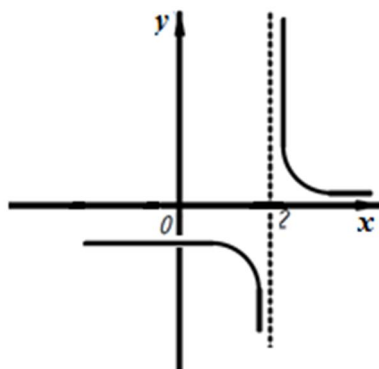
Agar x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsa, unda bu nuqtada funksiya uzluksizlik ta'rifidagi shartlarni bajarmaydi. Ular quyidagicha bo'lishi mumkin:

1⁰. Funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'ladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan (2-chizma)



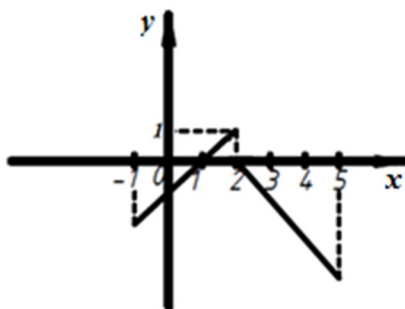
2-chizma

2⁰. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan, biroq $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{agar } -1 \leq x < 2 \\ 2-x, & \text{agar } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlangan ($f(2) = 0$) ammo bu funksiya $x \rightarrow x_0 = 2$ da limitga ega emas. (3-chizma)



3-chizma

3⁰. Funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan hamda $x \rightarrow x_0$ da funksiya limitga ega

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

ammo bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0, \\ 2, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

Bunda $x_0 = 0$ nuqta bu funksiyaning uzilish nuqtasi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ammo $f(x_0) = f(0) = 2$.

3-§. Uzlüksiz funksiyalar haqida asosiy teoremlar. Sodda funksiyalarning uzlüksizligi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqta shu intervalga tegishli nuqta bo'lsin: $x_0 \in (a, b)$.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzlüksiz bo'lsa, u holda

a). $c \cdot f(x)$, $c = \text{const}$,

b). $f(x) \pm g(x)$,

c). $f(x) \cdot g(x)$,

d). $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzlüksiz bo'ladi.

⇐ Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzlüksiz. Unda ta'rifga binoan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

bo'ladi.

Shu munosabatlardan hamda limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalardan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot f(x_0),$$

$c - \text{const}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0), \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Keyingi munosabatlardan

$$c \cdot f(x), \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalarning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.▷

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada ($y_0 = f(x_0)$) uzluksiz bo'lsa,

$$u = f(\varphi(x))$$

murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◁ Shartga ko'ra $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Unda ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y$$

bo'ladi. Shuningdek, $u = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0) = \varphi(f(x_0)).$$

Bu esa $\varphi(f(x))$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi. $\triangleright$

Mazkur kitobda sodda funksiyalar va ularning xossalari bayon etilgan edi. Endi bu funksiyalarning uzluksizlik haqidagi tasdiqlarni keltiramiz.

3-teorema. *Barcha sodda funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida (to'plamlarida) uzluksiz bo'ladi.*

$\triangleleft$ Bu teoremani isbotlashda funksiya uzluksizligi ta'rifi hamda yuqorida keltirilgan teoremlardan foydalaniladi.

Quyida sodda funksiyalarining ayrimlarining uzluksizligini isbotlash bilangina kifoyalanamiz.

1) Aytaylik, $y = f(x) = x$ bo'lsin. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu oraliqda ixtiyoriy x nuqtani olamiz $x \in (-\infty, +\infty)$,

Unga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz.

2) Aytaylik, $y = f(x) = x^n$ (n - natural son). Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Ma'lumki,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ ta}}$$

Unda uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$y = x^n$$

funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

4-§. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plamda shunday x^* nuqta topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$f(x) \leq f(x^*)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x^* nuqtada eng katta qiymatga erishadi deyiladi va uning eng katta qiymati

$$f(x^*) = \max_x f(x)$$

kabi belgilanadi.

Agar X to'plamda shunday x_* nuqta topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$f(x) \geq f(x_*)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_* nuqtada eng kichik qiymatga erishadi deyiladi va uning eng kichik qiymati

$$f(x_*) = \min_x f(x)$$

kabi belgilanadi.

Endi segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz. Ular teoremlar orqali ifodalanadi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan bo'lib, segmentning chetki nuqtalari a va b larda turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa u holda (a, b) da shunday c nuqta topiladiki, $(a < c < b)$

$$f(c) = 0$$

bo'ladi.

9 - BOB

FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI

1 §. Funksiya hosilasining ta'riflari. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan va x_0 nuqta shu intervalning biror nuqtasi bo'lsin ($x_0 \in (a, b)$).

Quyidagi amallarni bajaramiz:

1) funksiya argumenti x_0 ga Δx orttirma beramiz, bunda $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ va $\Delta x \neq 0$ bo'lsin.

2) bu orttirmaga mos funksiya orttirmasi Δf (Δy) ni topamiz:

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

3) funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \neq 0).$$

Ravshanki, bu nisbat muayyan $f(x)$ va muayyan Δx ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad y'_{x_0}$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli, (1) limit cheksiz bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lsa, bu $f'(x)$ hosila x ning funksiyasi bo'ladi.

Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi sonni ifodalaydi.

Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning ixtiyoriy nuqtasida chekli hosilaga ega bo’lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differensiallanuvi deyiladi.

Odatda funksiyaning hosilasini topish amali, differensiallash amali deyiladi.

Agar,

$$x_0 + \Delta x = x$$

deyilsa, unda

$$\Delta x = x - x_0$$

bo’lib,

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } x \rightarrow x_0 \text{ bo'ladi.}$$

Natijada yuqoridagi (1) ifoda quyidagicha ifodalanadi

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Demak, funksiya hosilasini quyidagicha ham ta’riflash mumkin.

Ta’rif. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Funksiyaning x_0 nuqtadagi o’ng va chap hosilalari quyidagicha ta’riflanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$
$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Misol. Ushbu

$$y = f(x) = x^2$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

1) argument x ga Δx orttirma beramiz:

$$x + \Delta x;$$

2) funksiyaning mos orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2;\end{aligned}$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

4) bu nisbatni $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x.$$

Demak, berilgan funksiyaning hosilasi

$$y' = (x^2)' = 2x$$

bo'ladi. $\triangleright$

2-§. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari

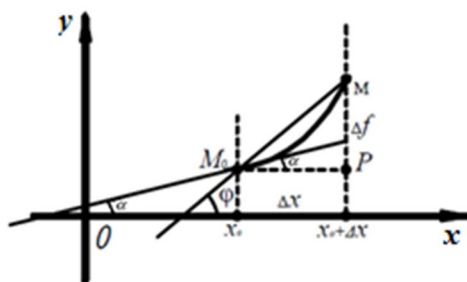
Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu intervalning x_0 nuqtasida $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin.

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning grafigi Γ chiziqni (egri chiziqni) tasvirlasin (1-chizma).



1-chizma

Endi Γ chiziqqa uning $M_0 = M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish masalasini qaraymiz. Γ chiziqda M_0 nuqtasidan farqli

$$M = M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

nuqtani olib, bu nuqtalar orqali l kesuvchini o'tkazamiz. l kesuvchining OX o'qi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq bo'ladi:

$$\varphi = \varphi(\Delta x).$$

Agar M nuqta Γ chiziq bo'ylab, M_0 ga intilganda (ya'ni $\Delta x \rightarrow 0$ da) kesuvchining limit holati mavjud bo'lsa, kesuvchining bu limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi. Urinma to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya grafigi M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

limitning mavjud bo'lishini ko'rsatish yetarli. Bunda α -urinmaning OX o'qi bilan tashkil etgan burchagi.

Uchburchak MM_0P dan

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

va undan

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta x \rightarrow 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limitini topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \operatorname{arctg} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0). \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x)$$

mavjud va y

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

ga teng bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

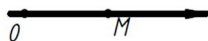
Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalydi. Urinmaning tenglamasi ushbu

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz.

Ataylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab (bu to'g'ri chiziqni OX o'qi deylik) harakat qilib, M nuqtaga kelganda bosib o'tilgan yo'l S bo'lsin: $OM=S$ (2-chizma).



2-chizma

Ravshanki, bu yo'l vaqtga bog'liq bo'lib, uning funksiyasi bo'ladi:

$$S = S(t). \quad (3)$$

Odatda (3) tenglama moddiy nuqtaning harakat qonuni deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig'ida $S(t)$ masofani, $t + \Delta t$ vaqt oralig'ida esa $S(t + \Delta t)$ masofani bosib o'tgan bo'lsa, unda Δt vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

nisbat esa moddiy nuqtaning t hamda $t + \Delta t$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa o'rtacha tezlik moddiy nuqtaning t paytdagi (momentdagi) oniy tezlikni aniqroq ifodalay boradi. Demak, t paytdagi tezlik

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$V(t) = S'(t) \quad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S = S(t)$ bo'lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ uning t paytdagi harakat (oniyl) tezligini ifodalaydi.

3-§. Funksiya hosilasini hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

1⁰. Ikki funksiya yig'indisi va ayirmasining hosilalari

Teorema. *Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yig'indisi va ayirmasining hosilalari bu funksiyalar hosilalarining mos ravishda yig'indisi va ayirmasiga teng bo'ladi:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

◁ Quyidagi belgilashni ko'ramiz:

$$F(x) = f(x) \pm g(x),$$

hosila ta'rifi va funksiya limiti haqidagi teoremlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)] - [f(x) \pm g(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$

Demak,

$$F'(x) = [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x). \triangleright$$

Masalan,

$$y = x^2 + x$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$$

bo'ladi.

2⁰. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

bo'ladi.

$\Leftarrow$ Aytaylik,

$$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$$

bo'lsin. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib topamiz.

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5)$$

Ma'lumki,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Bu munosabatlardan

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x),$$

$$g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

bo'lishi kelib chiqadi. Unda yuqoridagi (5) ifoda ushbu

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x) + \Delta f(x)] \cdot [g(x) + \Delta g(x)] - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x) g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \Delta g(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikdan

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \\ &+ f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \\ &= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Demak,

$$\Phi'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \triangleright$$

3⁰. Ikki funksiya nisbatining hosilasi

Teorema. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($g(x) \neq 0$) nisbatining hosilasi uchun

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

bo‘ladi.

◁ Aytaylik,

$$P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

bo‘lsin.

Funksiya hosilasi ta’rifi hamda limitlar haqidagi teoremlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned}P'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + \Delta f(x)}{g(x) + \Delta g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x[g(x) + \Delta g(x)] \cdot g(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \Delta f(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x[g^2(x) + g(x) \cdot \Delta g(x)]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x) + g(x) \cdot \Delta g(x)} =\end{aligned}$$

$$= \frac{g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x) + g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Demak,

$$P'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

4⁰. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $u = \varphi(x)$ va $y = f(u)$ funksiyalar berilgan bo'lib, ular yordamida

$$y = f(\varphi(x))$$

murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin.

Teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u' = \varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $y=f(u)$ funksiya u nuqtada ($u = \varphi(x)$) $f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va $y'_x = f'(u) \cdot u'_x$, ya'ni $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ bo'ladi.

⇐ Aytaylik, $\varphi(x) \neq \text{const}$ bo'lsin. Bu holda, $\Delta x \neq 0$ bo'lganda

$$\Delta u = \Delta \varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \neq 0$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$\Delta y = \Delta f(u) = f(u + \Delta u) - f(u)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da (bunda Δu ham nolga intiladi) limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Demak,

$$f' = \left(f(\varphi(x)) \right)' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Masalan,

$$y = (x^2 - 3x + 2)^3$$

funksiya uchun

$$u(x) = x^2 - 3x + 2, \quad f(u) = u^3$$

bo'lib, teoreмага ko'ra

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

ya'ni

$$[(x^2 - 3x + 2)^3]' = 3 \cdot (x^2 - 3x + 2)^2 \cdot (2x - 3)$$

bo'ladi.

5⁰. Teskari funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan, qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) va $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x) \neq 0$ bo'lsin.

Teorema. $y = f(x)$ funksiya $x = \varphi(y)$ teskari funksiya ega bo'lib,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

bo'ladi.

◁ Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya teskari bo'lgan funksiya $x = \varphi(y)$ bo'lsin.

$x = \varphi(y)$ funksiya argumentiga $\Delta y (\Delta y \neq 0)$ orttirma beramiz. Unda $x = \varphi(y)$ funksiya ham Δx orttirmaga ega bo'lib, $y = f(x)$ funksiya qat'iy monoton bo'lganligi uchun $\Delta x \neq 0$ bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Agar $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lsa, unda Δx ham nolga intiladi. $\Delta x \rightarrow 0$ (funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun).

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad (f'(x) \neq 0).$$

Bu munosabatdan foydalanib yopamiz:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demak,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Masalan,

$$y = \sqrt{x}$$

funksiyaga teskari funksiya $x = y^2$ bo'lib

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bo'ladi.

4-§. Sodda funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali

Funksiya hosilasi ta'rifi hamda hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib sodda funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1⁰. Darajali, $y = x^n$ ($n \in N$) funksiyaning hosilasi.

$y = x^n$ funksiya argumenti x ga Δx ortirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = \\ &= \left(x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n \right) - x^n = \\ &= nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n \end{aligned}$$

bo'ladi.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

So'ng $\Delta x \rightarrow 0$ bu nisbatning limitini

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] =$$

$$= n \cdot x^{n-1}.$$

Demak,

$$y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

2⁰. Ko'rsatkichli funksiya $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) ning hosilasi

Avvalo $y = e^x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Funksiya argument x ga Δx orttirma berib funksiya orttirmasini

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1),$$

so'ng uni Δx ga bo'lib, ushbu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

nisbatni topamiz. Endi,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

limitni hisoblaymiz. Bu limitni hisoblashda $\Delta x \rightarrow 0$ da

$e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ bo'lishidan foydalanamiz.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x, \text{ ya'ni } y' = (e^x)' = e^x$$

Endi $y = a^x$ funksiyani qaraymiz. Ma'lumki,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasidan foydalanib topamiz.

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} (\ln a) = (e^{\ln a})^x \cdot \ln a$$

$$= a^x \cdot \ln a.$$

Demak,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

3⁰. Logarifmik funksiya $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) ning hosilasi

Avvalo $y = \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz: Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Ma'lumki, $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Demak,

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Endi

$$y = \log_a x$$

funksiyani qaraymiz. Ravshanki,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Unda

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

bo'ladi. Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

4⁰. Trigonometrik funksiyalar

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$$

larni hosilalari.

Ushbu

$$y = \sin x$$

funksiya argument x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

ning Δx ga nisbatini qaraymiz:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

So'ng $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tib, bunda

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= 1 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Demak,

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y = \cos x$ funksiyaning hosilasi

$$y' = (\cos x)' = -\sin x$$

bo'lishi topiladi.

Endi $y = \operatorname{tg} x$ va $y = \operatorname{ctg} x$ funksiylarning hosilalarini topamiz. Bunda ikki funksiya nisbatining hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} y' = (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Demak,

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shuningdek,

$$y' = (ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

bo'ladi.

Demak,

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5⁰. Teskari trigonometrik funksiyalar

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccotg} x$
ning hosilalari.

Aytaylik,

$$y = \arcsin x$$

bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ da

$$x' = \cos y \quad (\cos y \neq 0)$$

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Demak,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y = \arccos x$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Endi

$$y = \arctg x$$

funksiyaning hosilasini topamiz.

Ma'lumki, $y = \arctg x$ funksiya

$$x = \operatorname{tg} y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Demak,

$$y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$y = \operatorname{arctg} x$$

funksiyaning hosilasi

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

Sodda funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz (bunda $u=u(x)$).

1. $(c)' = 0, \quad c = \text{const},$
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u',$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',$
4. $(e^x)' = e^x, \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u';$
6. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u';$
7. $(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

5-§. Funksiyaning differensiali. Differensial hisobning asosiy teoremlari

1⁰. Funksiya differensiali

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, x_0 nuqtada ($x_0 \in (a, b)$) differensiallanuvchi, ya'ni chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin.

Hosila ta'rifi ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bunda Δx -argument orttirmasi, $\Delta f(x_0)$ esa funksiya orttirmasi.

Limitning xossaligidan foydalanib bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. Keyingi tenglikdan

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega ($f'(x_0) \neq 0$) bo'lsa, bu funksiyaning orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ikki qo'shiluvchidan iborat bo'ladi.

Qo'shiluvchilardan birinchisi Δx ga nisbatan chiziqli ($f'(x_0) \Delta x$) bo'lib, $\Delta x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, qo'shiluvchilardan ikkinchisi $\alpha(\Delta x) \Delta x$ esa, $\Delta x \rightarrow 0$ da yuqori tartibli cheksiz kichik bo'ladi.

Ta’rif. (6) ifodadagi $f'(x_0) \Delta x$ ko‘paytma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, ta’rifga ko‘ra

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, unda

$$df(x) = f'(x) \Delta x$$

deb olinadi, bunda Δx funksiya argumentining ixtiyoriy x nuqtadagi orttirmasi.

Xususan, $f(x) = x$ bo‘lganda bu funksiyaning differensial

$$df(x) = f'(x) \Delta x = (x)' \Delta x = 1 \Delta x = \Delta x$$

bo‘lib,

$$dx = \Delta x$$

bo‘ladi. Bu hol o‘zgaruvchi (argument) x ning orttirmasi Δx ni uning differensial dx bilan almashtirilish mumkinligini ko‘rsatadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensialini

$$df(x) = f'(x) dx$$

ko‘rinishida ifodalash mumkinligini bildiradi.

Funksiya differensialining bu ifodasi hamda hosilalar jadvalidan foydalanib sodda funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

$$1. d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx,$$

$$2. d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx,$$

$$3. d(e^x) = e^x \cdot dx,$$

$$4. d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \cdot dx,$$

$$5. d(\ln x) = \frac{1}{x} dx,$$

$$6. d(\sin x) = \cos x dx,$$

$$7. d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$8. d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

$$9. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx,$$

$$10. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$11. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$12. d(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} dx,$$

$$13. d(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

2°. Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyalarning differensiallari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f(x)$ da aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda

$$1) d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x), \quad c = \text{const},$$

$$2) d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x),$$

$$3) d[f(x) \cdot g(x)] = g(x) \cdot df(x) + f(x) \cdot dg(x),$$

$$4) d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$$

Bu qoidalar sodda isbotlanadi. Ulardan birini masalan 2)-ni isbotlaymiz.

Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.

Aytaylik, $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ bo'lsin. Unda

$$F'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikning ikki tomonini dx ga ko'paytirib

$$F'(x)dx = f'(x)dx + g'(x)dx$$

ya'ni

$$dF(x) = df(x) + dg(x)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x).$$

Aytaylik, $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ funksiyalar yordamida $y = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin. Bu $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar hosilalarga ega deylik. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$y' = (f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$y' dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Unda

$$dy = f'(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x)$$

$$(dy = f'(u) du)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiya murakkab bo‘lgan holda ham funksiya differensial funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensial ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi.

Ikkala holda:

$$1) y = f(x),$$

$$2) y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

ya’ni

$$y = f(\varphi(u))$$

funksiya differensial:

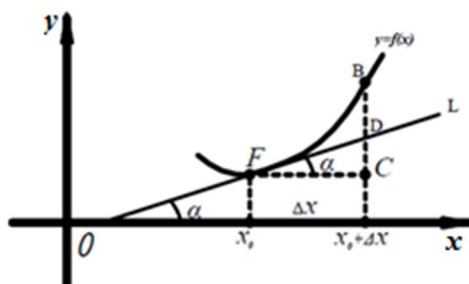
$$1) dy = f'(x) dx,$$

$$2) dy = f'(u) du$$

bir xil ko‘rinishga ega. Odatda, bu differensial ko‘rinishining invariantligi deyiladi.

3°. Funksiya differensialining geometrik ma’nosi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan bo‘lib $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning grafigi 3–chizmada ko‘rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



3-chizma

Endi egri chiziqning $(x, f(x))$ va $(x + \Delta x, f(x))$ nuqtalarni mos ravishda F va B bilan belgilaymiz. Unga

$$FC = \Delta x, \quad BC = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun u shu nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya grafigiga uning $F = F(x), f(x)$ nuqtasiga o'tkazilgan L urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$$

bo'ladi.

Urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik.

FDC uchburchakdan topamiz:

$$\frac{DC}{FC} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Keyingi tengliklardan

$$DC = \operatorname{tg} \alpha \cdot FC = f'(x) \cdot \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtasidagi differensial

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

funksiya grafigiga $F = F(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalaydi.

Bu funksiya differensialining geometrik ma'nosidir.

4°. Funksiya differensial va taqribiy formula

Nazariy va ayniqsa amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Ko'pincha, bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasi yuzaga keladi.

Funksiyalarning differensial esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega va $f'(x) \neq 0$ bo'lsin, u holda

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = df + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

bo'ladi.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) + \frac{\alpha(\Delta x)}{1}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x \rightarrow 0$ va $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$. Keyingi tenglikdan.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik ushbu

$$\Delta y \approx dy$$

munosabatga (taqribiy tenglikka) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning qancha kichik bo'lishi bu taqribiy tenglamaning aniqligini shuncha oshiradi.

Yuqoridagi taqribiy formulani quyidagicha

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \quad (7)$$

ko'rinishida yozsa ham bo'ladi. (7) formuladan taqribiy hisoblashlarda foydalaniladi.

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan va $x_0 \in (a, b)$ bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a, b) dagi eng katta (eng kichik) qiymati deyiladi.

Teorema. (Ferma teoremasi). Agar $y = f(x)$ funksiya c nuqtada ($c \in (a, b)$) o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishib, bu nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x) \leq f(c) \quad (8)$$

Endi c nuqtaga shunday orttirma beramizki, $c + \Delta x$ shu (a, b) intervalga tegishli bo'lsin:

$$c + \Delta x \in (a, b).$$

Unda (8)

$$f(c + \Delta x) \leq f(c)$$

bo'lib

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$$

bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x > 0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

bo'lib,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \quad (9)$$

bo'ladi.

Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa, unda

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad (10)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi (9) va (10) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

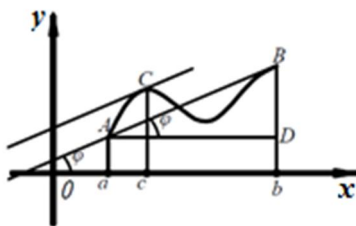
bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema. (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, (a, b) intervalda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda a bilan b orasida shunday c nuqta ($a < c < b$) topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning grafigi 1-chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ifodalasin.



1-chizma

A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini $tg\varphi$ bo'ladi.

AB egri chiziqdan shunday C nuqta bo'lishini tasavvur etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinma AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Bu L urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik. Uning ham burchak koeffitsienti $tg\alpha$ bo'ladi.

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosi

$$tg\alpha = f'(c) \quad (11)$$

bo'ladi, bunda C nuqta AB egri chiziqdagi C nuqtani absissasi.

AB to'ri chiziq bilan bu urinma parallel bo'lgani uchun

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \quad (12)$$

bo'ladi.

Chizmada keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburchakda

$$AD = b - a, \quad BD = f(b) - f(a), \quad \angle A = \varphi.$$

Shu uchburchakdan

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (13)$$

bo'lishini topamiz.

Yuqoridagi (11), (12), (13) munosabatlardan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi hosilasi nolga teng

$$f'(x) = 0, \quad x \in (a, b)$$

bo'lsa, u holda funksiya (a, b) da o'zgarmas bo'ladi:

$$f(x) = C, \quad C = \text{const.}$$

Natija. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya uchun Lagranj teoremasining shartlari bajarilib,

$$f(a) = f(b)$$

bo'lsin. U holda a va b lar orasida shunday c nuqta ($a < c < b$) topiladiki,

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar.

- 1) $[a, b]$ segmentda uzliksiz,
- 2) (a, b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega.
- 3) (a, b) da $g'(x) \neq 0$ bo'lsin.

U holda a bilan b lar orasida shunday c nuqta ($a < c < b$) topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

7-§. Yuqori tartibli hosilalar

1°. Funksiyaning yuqori tartibli hosilasi tushunchasi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) itervalda aniqlangan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasida ($x \in (a, b)$, $f'(x)$) hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ ni ($f'(x)$ ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi) $g(x)$ orqali belgilaylik:

$$g(x) = f'(x), \quad (x \in (a, b)),$$

Ta'rif. Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x_0)$ kabi belgilanadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uning birinchi tartibli hosilasining hosilasi bo'ladi:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning 3-tartibli, $f'''(x)$, 4-tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)$ dan olingan hosila $f(x)$ funksiyaning $(n + 1)$ -tartibli hosilasi deyiladi va $f^{(n+1)}(x)$ kabi belgilanadi:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning

$$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \dots$$

hosilalar uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Eslatma $f(x)$ funksiyaning x nuqtada ($x \in (a, b)$), n – tartibli hosilasining mavjud bo‘lishida bu funksiyaning shu nuqta atrofida $1, 2, \dots, (n-1)$ tartibli hosilalarining mavjud bo‘lishi talab etiladi.

Funksiyaning yuqori tartibli, masalan n -tartibli ($n \geq 2$) hosilasini topish uchun, hamma oldingi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo‘ladi.

Ayrim funksiylarining yuqori tartibli hosilalarini bir yo‘la topish mumkin.

Misol tariqasida ba’zi-bir sodda funksiylarning n – tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y = x^\alpha$ ($x > 0, \alpha \in R$). Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

$$y'' = (y')' = (\alpha \cdot x^{\alpha-1})' = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2},$$

$$y''' = (y'')' = (\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot x^{\alpha-3}.$$

Bu funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun ushbu

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha-n}$$

formula o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida ko‘rsatish qiyin emas.

Xususan, $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ funksiyaning n – tartibli hosilasi.

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1) \cdot (-2) \dots (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

bo‘ladi.

2. $y = \ln x$ ($x > 0$) funksiyaning n – tartibli hosilasini topamiz.

Ravshanki,

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Unda yuqoridagi munosabatlarga ko‘ra

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}, \quad (x > 0)$$

bo'ladi.

3. $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) bo'lsa. Bu funksiyaning hosilasini ketma-ket hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} y' &= a^x \ln a, \\ y'' &= (y')' = (a^x \cdot \ln a)' = \\ &= a^x \cdot \ln a \cdot \ln a = a^x \ln^2 a, \\ y''' &= (y'')' = (a^x \ln^2 a)' = a^x \ln^3 a. \end{aligned}$$

Bu munosabatlarga qarab $y = a^x$ funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun ushbu,

$$y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$$

formulani yozamiz. Uning to'g'riligi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi. Demak,

$$y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$$

xususan, $(e^x)^{(n)} = e^x$ bo'ladi.

4. $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki,

$$y' = \cos x$$

bo'ladi. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

So'ng $y = \sin x$ funksiyaning keying tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} y'' &= (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ y''' &= (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ y^{(IV)} &= (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Bu ifodadan esa $y = \sin x$ funksiyaning n -tartibli hosila uchun

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Demak,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

bo'ladi.

2°. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi

Aytaylik, moddiy nuqta M to'g'ri chiziq bo'ylab $s = f(t)$ qonun bilan harakatlansin, bunda t —vaqt, S esa o'tilgan yo'l.

Ma'lumki, bu harakat qonuning t vaqtdagi oniy tezligi

$$S'(t) = f'(t) = v(t)$$

bo'ladi.

Aytaylik, t vaqtda moddiy nuqtaning tezligi $t + \Delta t$ vaqtdagi tezlik esa

$$v(t) + \Delta v$$

bo'lsin, ya'ni moddiy nuqta tezligi Δt vaqt oralig'ida Δv ga o'zgarsin. Unda ushbu

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

nisbat Δt vaqt oralig'dagi o'rtacha tezlanishini ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

t vaqtdagi moddiy nuqta harakatining tezlanishi deyiladi va u a bilan belgilanadi.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a.$$

Ravshanki

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Agar $v = S'(t)$ ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$v'(t) = (S'(t))' = S''(t)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$a = S''(t),$$

ya'ni $S = S(t)$ harakat qonunining ikkinchi tartibli hosilasi harakatning tezlanishini ifodalaydi. Bu ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosidir.

3°. Sodda qoidalar. Leybnits formulasi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da aniqlangan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada n –tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$1. [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const},$$

$$2. [f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \cdot g'(x) + \\ + C_n^2 f^{(n-2)}(x) \cdot g''(x) + \dots + C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) + \dots + f(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

bo'ladi, bunda

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

10-BOB

FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI

1-§. Funksiyaning monotonlik oralig'ini aniqlash

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \in (a, b)$, ixtiyoriy $x_2 \in (a, b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi (qat'iy o'suvchi), $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

Odatda $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda monoton, (a, b) interval esa $f(x)$ funksiyaning monotonlik intervali deyiladi.

Endi funksiyaning hosilasidan foydalanib, uning berilgan intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini topamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \geq 0$$

bo'lsa, u holda funksiya (a, b) da o'suvchi bo'ladi.

⇐ Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) \geq 0$$

bo'lsin.

(a, b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtqlarni olib, $x_1 < x_2$ deylik. Ravshanki, $[x_1, x_2]$ segmenti (a, b) intervalga tegishli bo'ladi:

$$[x_1, x_2] \in (a, b).$$

Bu $[x_1, x_2]$ segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda shu teoremaga ko'ra shunday c nuqta ($x_1 < c < x_2$) nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ ya'ni}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{va} \quad x_2 - x_1 > 0$$

unda keying tenglikdan

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0, \text{ ya'ni } f(x_1) \leq f(x_2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) da o'suvchi bo'lishini bildiradi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(a; b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya $(a; b)$ intervalda o'suvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in (a; b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ bo'ladi.

$\Leftarrow$ (a, b) intervalda ixtiyoriy x nuqtani olib, unda shunday Δx orttirma beramizki, $x + \Delta x$ nuqta ham shu (a, b) ga tegishli bo'lsin. Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi. Unda $\Delta x > 0$ bo'lganda $f(x) \leq f(x + \Delta x)$ bo'lib,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\Delta x > 0 \quad \text{da} \quad f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$$

$$\Delta x < 0 \quad \text{da} \quad f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0.$$

Ikkala hol uchun

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

bo'ladi. Hosila ta'rifiga binoan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Keyingi ikki munosabatdan (a, b) da $f'(x) \geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi. $\triangleright$

Natijada (a, b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda o'suvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \geq 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqorida keltirilgan teoremlarga o'xshash quyidagi teoremlar ham isbotlanadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \leq 0$$

bo'lsa u holda funksiya (a, b) da kamayuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya (a, b) intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada

$$f'(x) \leq 0$$

bo'ladi.

Natijada, (a, b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning shu intervalda kamayuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \leq 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Funksiyaning ekstremumlari

1°. Funksiya ekstremumlari tushunchalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan $x_0 \in (a, b)$ va shu nuqtaning atrofi

$$\begin{aligned} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) &= \\ &= \{x \in R: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \end{aligned}$$

$(\delta > 0)$ ham (a, b) intervalga tegishli

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ bilan shu funksiyaning

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

atrofdagi qiymatlarini solishtirish funksiya ekstremumi tushunchasiga olib keladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga erishadi deyiladi, x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi, $f(x_0)$ esa funksiyaning maksimum qiymati deyiladi.

Funksiyaning maksimum qiymati

$$\max\{f(x)\}$$

kabi belgilanadi.

$$f(x_0) = \max\{f(x)\}$$

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga erishadi deyiladi, x_0 funksiyaning minimum nuqtasi, $f(x_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi. Funksiyaning minimum qiymati

$$\min\{f(x)\}$$

kabi belgilanadi:

$$f(x_0) = \min\{f(x)\}.$$

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumlari deyiladi.

Eslatma $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda bir nechta maksimum va minimumlarga ega bo‘lishi mumkin.

2°.Funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da aniqlangan bo‘lib, $x_0 \in (a, b)$ bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

$\triangleleft f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada maksimumga erishib, $f(x_0)$ mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga binoan ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in (a, b)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0)$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, bu holda, $f(x_0)$ qaralayorgan funksiyaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Unda ma'lum teorema binoan

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi. $\triangleright$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada minimumga erishib, $f'(x_0)$ mavjud bo'lganda ham

$$f'(x_0) = 0$$

bo'lishi isbotlanadi.

Eslatma. $f(x)$ funksiyaning biror $x^* \in (a, b)$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lib, $f'(x^*) = 0$ bo'lishidan uning x^* nuqtada ekstremumiga erishishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$f(x) = x^3$$

funksiya uchun

$$f'(x) = 3x^2$$

va $x = 0$ nuqtada

$$f'(x_0) = 0$$

bo'lsa ham bu funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi (ma'lumki, funksiya qat'iy o'suvchi).

Demak, yuqorida keltirilgan teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Eslatma. Hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham funksiya ekstremumiga erishishi mumkin. Masalan,

$$f(x) = |x|$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo u shu nuqtada minimumga erishadi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyasining statsionar nuqtalar deyiladi.

$f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalar:

1. Funksiyaning statsionar nuqtalar.
2. Funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar.

3°.Funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan, uning har bir nuqtasida hosilaga ega va $x_0 \in (a, b)$ nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng:

$$f'(x_0) = 0.$$

x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofini olamizki,

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

bo'lsin.

a) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani "o'sishida" ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning $(x_0 - \delta, x_0)$ da hosilasi musbat $f'(x) > 0$.

Demak, funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da o'suvchi. Unda

$$(x_0 - \delta, x_0) \text{ da}$$

$$f(x_0) \geq f(x)$$

tengsizlik bajariladi. $f(x)$ funksiyaning hosilasi $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da manfiy $f'(x) < 0$. Demak, funksiya $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da kamayuvchi. Unda

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f(x_0) \geq f(x)$$

tengsizlik bajariladi. Demak, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) \leq f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani “o‘shida” ishorasini “–” dan “+” ga o‘zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

$f(x)$ funksiyaning hosilasi $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$. Demak, funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da kamayuvchi.

Unda $(x_0 - \delta, x_0)$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tengsizlik bajariladi.

$f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$.

Demak, funksiya $(x_0, x_0 + \delta)$ da o‘svchi. Unda $[x_0, x_0 + \delta]$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tenglik bajariladi. Demak, ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) \geq f(x_0)$$

bo‘ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi.

c) Agar ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$, yoki ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$ bo‘lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan “o‘tishda” ishorasini o‘zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumiga erishmaydi. Chunki bu holda funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da o‘svchi yoki kamayuvchi bo‘ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishda quyidagi qoidaga kelamiz:

1) Funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi.

2) $f'(x) = 0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo‘lsin $f'(x_0) = 0$.

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0 - \delta, x_0)$ va o‘ng atrofi $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x)$ hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a) va b) tasdiqlar tadbiq etilib ekstremum topiladi.

$f'(x_0)$	$f'(x_0 - \delta)$	$f'(x_0 + \delta)$	$f(x_0)$
0 yoki mavjud emas	+	-	Maksimum
	-	+	Minimum
0 yoki mavjud emas	+	+	Ekstremum mavjud emas
	-	-	

4°. Funksiya ekstremumini topishda yuqori tartibli hosilalardan foydalanish. Yuqorida keltirilgan ekstremumning yetarli sharti sanaladigan nuqtaning o'ng va chap tomonlaridagi nuqtalarida funksiya hosilasi $f'(x)$ ning ishorasini aniqlash bilan bog'liq. Ko'pincha x_0 nuqtaning atrofida $f'(x)$ ning ishorasini aniqlash qiyin bo'ladi.

Qaralayotgan funksiya x_0 nuqtada yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lsa, hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatining ishorasiga qarab funksiyaning ekstremumini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x \in (a, b)$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofida $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b))$ birinchi va ikkinchi tartibli $f'(x), f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

$$1) f'(x_0) = 0$$

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin, u holda

a) $f''(x_0) > 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

b) $f''(x_0) < 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b))$ n -tartibli $f^{(n)}(x)$ hosilaga ega bo'lib,

1) $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lganda, n – juft son bo'lsa funksiya ekstremumga ega bo'ladi va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

2) n – toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

5°. Funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlanagan va u shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'ladi. Unda ma'lum teorema ko'ra funksiya $[a, b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni $[a, b]$ segmentning shunday qiymatlari topiladiki, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari eng katta (eng kichik) bo'ladi.

Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning barcha maksimum qiymatlari to'plami

$$\{\max f(x)\}$$

bo'lsin.

2) Funksiyaning $[a, b]$ segmenti chegaralaridagi, ya'ni $x = a, x = b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ hisoblanadi.

So'ngra

$$\{\max f(x)\}$$

to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida (orasida) eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi eng kichik qiymati topiladi.

6°. Hosilaning funksiya limitini topishga tadbirlari. Lopital qoidalari

Biz oldingi boblarda, ma'lum shartlar bajarishganda funksiyalarning limitini hisoblashni bayon etdik.

Bazi hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni.

1). $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{0}{0}$

ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi);

2). $x \rightarrow x_0$ da $f(x) = +\infty$, $g(x) = +\infty$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti (uni $\frac{\infty}{\infty}$

ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi) ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash mumkin bo'ladi.

Bunday usul bilan funksiya limitini topish Lopital qoidalari deyiladi.

1°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti

Teorema. Aytaylik, $f(x)$, va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

2). Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud.

3). Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$.

4). Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in \mathbb{R})$$

mavjud. U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

bo'ladi.

$f(x)$ hamda $g(x)$ funksiyalarning $x = a$ nuqtadagi qiymati nolga teng, ya'ni

$$f(a) = 0, g(a) = 0$$

deb olsak, natijada

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = g(a)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz bo'ladi. Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqta olib, $[a, x]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday $c(a < c < x)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki $x \rightarrow a$ da $c \rightarrow a$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

2°. $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$, da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti

Teorema. Aytaylik, $f(x)$, va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

2). Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da, $f'(x)$, va $g'(x)$ hosilalar mavjud va

$$g'(x) \neq 0.$$

3). $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

bo'ladi.

11-BOB

ANIQMAS INTEGRAL

Ma'lumki, harakat qonuniga ko'ra harakatdagi jismning tezligini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keladi.

Harakatdagi jismning tezligiga ko'ra harakat qonunini topish masalasi esa yuqorida aytilgan masalaga nisbatan teskari masala bo'lib, u funksiyaning aniqmas integrali tushunchasiga olib keladi.

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

$f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $F(x)$ esa shu (a, b) berilgan va differensiallanuvchi (ya'ni $F(x)$ hosilaga ega), $x \in (a, b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiyaning hosilasi $F'(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya teng $F'(x) = f(x)$ yoki $dF(x) = f(x)dx$ bo'lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2, \quad (x \in (-\infty; +\infty))$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkita $F(x)$ va $\varphi(x)$ boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$F'(x) = f(x), \quad \varphi'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Keyingi tengliklardan

$$F'(x) = \varphi'(x)$$

bo'lish kelib chiqadi. Unda $F(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad C = \text{const.}$$

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiyaning istalgan boshlang'ich funksiyasi

$$F(x) + C, \quad C = \text{const}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$F(x) + C$$

ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integral deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda deyiladi.

Masalan,

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

chunki

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

bo'ladi.

Odatda funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga shu funksiyaning integrallash amali deyiladi.

Teorema. (a, b) da uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya boshlang'ich funksiyaga, demak aniqmas integralga ega bo'ladi.

2-§. Aniqmas integralning xossalari

Aniqmas integral bir nechta xossalarga ega. Biz ularni keltiramiz:

1⁰. $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensial $f(x)dx$ ga teng:

$$d \left[\int f(x)dx \right] = f(x)dx.$$

2⁰. Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int d F(x) = F(x) + C.$$

3⁰. Ushbu munosabat o'rinli:

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k = \text{const}, k \neq 0).$$

4⁰. Ushbu formula o'rinli:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu xossalarning isboti bevosita aniqmas integral ta'rifidan kelib chiqadi. Biz ulardan birini, masalan, 2^o-xossaning isbotini keltiramiz.

$F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$F'(x) = f(x)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bo'ladi. Unda

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int d F(x)$$

bo'ladi. Keyingi tengliklardan

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa 2^o-xossani isbotlaydi.

3-§. Asosiy integrallar jadvali

1⁰. Sodda funksiyalarning aniqmas integrallari

Avval sodda funksiyalarning aniqmas integrallarini topamiz. Bunda boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

1) $f(x) = x^\alpha$ bo'lsin ($x > 0$, α — haqiqiy son, $\alpha \neq -1$).

Unda

$$\int f(x)dx = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right)' = (\alpha+1) \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha.$$

1). $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin ($x \neq 0$), unda

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

bo'ladi.

2). $f(x) = a^x$ bo'lsin ($a > 0$, $a \neq 1$). U holda

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x.$$

Xususiyl, $f(x) = e^x$ bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \int e^x \cdot dx = e^x + C$$

bo'ladi.

3). $f(x) = \sin x$ bo'ladi, unda

$$\int f(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

bo'ladi, chunki.

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x.$$

4). $f(x) = \cos x$ bo'lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

5) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ bo'lsin, unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ bo'lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(-\operatorname{ctg} x + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

7) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bo'lsin, u holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'lsin, unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\operatorname{arc} \sin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2⁰. Integrallar jadvali. Yuqorida keltirilgan formulalarni jamlab ushbu integrallar jadvalini hosil qilamiz:

$$1) \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctgx} + C,$$

$$8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tgx} + C,$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctgx} + C, \\ -\operatorname{arcctgx} + C. \end{cases}$$

4-§. Integrallash usullari

1⁰. Bevosita integrallash usuli. Bu usulda integral ostidagi funktsiyani (yoki ifodani) ayniy almashtirishlar yo'li bilan, yoki bevosita integralning xossalarini tadbqiq etish yo'li bilan jadval integraliga keltirib hisoblanadi.

Ko'p hollarda quyidagi almashtirishlardan foydalaniladi:

$$du = d(u + a), \quad a\text{-o'zgarmas son,}$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0$$

$$u du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u du = d(\sin u)$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u),$$

umuman

$$f'(u) du = d(f(u)).$$

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

2⁰. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli

Ushbu

$$\int f(x) dx$$

integralni hisoblash talab etilsin. Ba'zan x o'zgaruvchini boshqa o'zgaruvchiga almashtirish natijasida berilgan integral soddaroq, hisoblash uchun qulayiroq integralga keladi.

Aytaylik.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1)$$

bo'lsin. Bu integralda

$$x = \varphi(t)$$

almashtirish bajaramiz. ($f(x)$, $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ -uzluksiz funksiyalar).

Unda

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \quad (2)$$

bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

Ma'lumki,

$$F'(x) = f(x).$$

Unda

$$[F(\varphi(t)) + C]' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

bo'ladi. Bu esa (2) munosabatning to'g'riligini bildiradi. (1) va (2) tengliklardan topamiz:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Masalan,

$$\int (2 + 3x)^5 dx$$

integralni hisoblashda

$$2 + 3x = t$$

almashtirish bajarilsa, unda

$$x = \frac{t-2}{3}, \quad dx = \frac{1}{3}dt$$

bo'lib,

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{18} (2 + 3x)^6 + C$$

bo'ladi.

3⁰. Bo'laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar biror oraliqda aniqlangan uzluksiz hamda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki.

$$d(u \cdot v) = u dv + v du.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int d(u \cdot v) = \int u dv + \int v du.$$

Ravshanki,

$$\int d(u \cdot v) = u \cdot v$$

Unda

$$u \cdot v = \int u \, dv + \int v \, du$$

bo‘lib, quyidagi formula

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \quad (3)$$

hosil bo‘ladi.

Odatda (3) tenglik bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

(3) formula $\int u \, dv$ integralni $\int v \, du$ ni hisoblashga keltiradi.

Masalan, ushbu

$$\int x e^x \, dx$$

integralda

$$u = x, \quad dv = e^x \, dx$$

deyiladi, unda

$$du = dx,$$

$$\int dv = \int e^x \, dx, \quad v = \int e^x \, dx = e^x$$

bo‘lib, (3) formulaga ko‘ra

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx$$

bo‘ladi va berilgan integral

$$\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

ga tengligi topiladi.

Endi bo‘laklab integrallash usuli yordamida ushbu

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, j \text{ } a\text{-o‘zgarmas})$$

integralni (bu integraldan keyinchalik ko‘p foydalaniladi) hisoblaymiz.

Berilgan integralda

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx$$

deb olamiz. Unda

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \right)' \cdot dx = [(x^2 + a^2)^{-n}]' \cdot dx = \\ &= -n(x^2 + a^2)^{-n-1} \cdot 2x dx = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \cdot dx, \\ dv &= dx \end{aligned}$$

bo'lishidan esa,

$$v = x$$

bo'lishini topamiz.

Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = x \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \left(-\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right) dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - \\ &- a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = J_n - a^2 \cdot J_{n+1}. \end{aligned}$$

Demak,

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}.$$

Keyingi tenglikdan J_{n+1} ni topamiz:

$$\begin{aligned} 2na^2 \cdot J_{n+1} &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot J_n - J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1) \cdot J_n \\ J_{n+1} &= \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} \cdot J_n. \quad (4) \end{aligned}$$

Bu rekurrent formuladan foydalanib, J_1 ni bilgan holda birin-ketin $J_2, J_3, \dots$ larni topish mumkin.

Ravshanki, $n = 1$ bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

Masalan, (4) formuladan foydalanib,

$$J_2 = \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

integral quyidagicha hisoblanadi:

$$J_2 = \int \frac{x}{2a^2 \cdot (x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1 = \frac{x}{2a^2 \cdot (x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

5-§. Sodda kasrlar va ularning integrallari

Ushbu

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (m > 1)$$

Ko'rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deyiladi. Bunda A, B, C, a, p, q - o'zgarmas haqiqiy sonlar, m -natural son, $x^2 + px + q$ -kvadrati uch had haqiqiy ildizlarga ega emas.

1⁰. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$$

2⁰. $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx$ ($m > 1$) sodda kasrning aniqmas integrali.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^m} dx &= A \int \frac{dx}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ &= A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(x-a)^m \cdot (1-m)} + C. \end{aligned}$$

3⁰. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ sodda kasrning aniqmas integrali.

Avvalo sodda kasr maxrajidagi $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \\ &+ q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

U holda

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx$$

bo'ladi. Keyingi integralda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$x + \frac{p}{2} = t.$$

Pavshanki,

$$dx = dt, \quad x = t - \frac{p}{2}.$$

Natijada

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx = \int \frac{B\left(t - \frac{p}{2}\right) + C}{t^2 + a^2} dt = \\ &= \int \frac{Bt + C - \frac{p}{2}B}{t^2 + a^2} dt = B \int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{p}{2}B\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \\ &= \frac{B}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

4⁰. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx$ ($m > 1$) sodda kasrning integrali

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Bx + C}{[(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}]^m} dx = \\ \int \frac{B \cdot (t - \frac{p}{2}) + C}{(t^2 + a^2)^m} dt &= B \cdot \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^m} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{(1-m)(t^2 + a^2)^{m-1}} &+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}\end{aligned}$$

Bu integraldagi $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$ aniqmas integral yuqorida keltirilgan rekurrent formula yordamida hisoblanadi.

6-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

butun ratsional funksiyaning integrali oson hisoblanadi:

$$\begin{aligned}\int P_n(x) dx &= \int [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n] dx = \\ &= a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.\end{aligned}$$

Kasr ratsional funksiya

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

ni integrallash birmuncha murakkab bo'ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ noto'g'ri kasr ($n \geq m$) bo'lsa, uning butun qismi ajratilib,

butun ratsional funksiya va to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = R_n(x) + \frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}.$$

U holda

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int R_n(x) dx + \int \frac{\overline{R_n}(x)}{Q_m(x)}$$

bo'ladi.

To'g'ri kasrni integrallash uchun, avvalo bu kasrni sodda kasrlar yig'indisi sifatida yozib olinadi so'ng ularning integrallari topiladi.

Quyida ikkita integralning hisoblanishini ko'rsatamiz.

Ushbu

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x-2)^3}$$

integral hisoblansin.

◁ Bu integralni topish uchun integral ostidagi to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi shakilida yozib olamiz:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Bu tenglikni qanoatlantiruvchi A, B, C, D larni topish uchun tenglikning ikki tomonini

$$(x-1) \cdot (x-2)^3$$

ga ko'paytiramiz:

$$x = A(x-2)^3 + B \cdot (x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1)$$

Undan ushbu

$$x = A(x^3 - 6x^2 - 12x - 8) + B(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) + \\ + C(x^2 - 3x + 2) + D(x-1)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Endi x ning bir xil darajalari oldindagi koeffitsientlarini tenglashtirsak, unda ushbu sistema hosil bo'ladi:

$$A + B = 0$$

$$C - 6A - 5B = 0,$$

$$12A + 8B - 3C + D = 1,$$

$$2C - D - 8A - 4B = 0.$$

Bu sistemani yechib

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 2$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Natijada

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)(x-2)^3} &= - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} + 2 \int \frac{dx}{(x-2)^3} = \\ &= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

Ushbu

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

integral hisoblansin.

◁ Integral ostidagi ratsional funksiya (kasr) sodda kasrlarga quyidagicha yoyiladi.

$$\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Bundan

$$(Ax+B)(x^2+4) + (Dx+E)(x^2+1) = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A+B)x^3 + (B+E)x^2 + (4A+D)x + (4B+E) = 1.$$

Bu tenglikdagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ 4A + D = 0, \\ B + E = 0, \\ 4B + E = 1 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib topamiz:

$$A = 0, \quad D = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad E = -\frac{1}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 4}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

bo'ladi.

7-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz yuqorida ratsional funksiyalarning integrallari har doim hisoblanishini ko'rdik. Irratsional funksiyalarning integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya'ni irratsional funksiyalarning integrallari o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltirilib hisoblanadi.

Quyida ba'zi irratsional funksiyalarning integrallanishini keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-misol. Ushbu

$$J = \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

integral hisoblansin.

◁ Bu integralda

$$\sqrt{x} = t, \text{ ya'ni } x = t^2$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$dx = 2t dt$$

bo'lib,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{t}{1 + t} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{1 + t} dt$$

bo'ladi. Natijada irratsional funksiyani integrallash ratsional funksiyani integrallanishiga keladi.

Ravshanki,

$$\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

boʻladi.

Unda

$$\int \frac{t^2}{1+t} dt = \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dx = \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) + C$$

boʻladi.

$$\begin{aligned} J &= 2 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right] + C = t^2 - 2t + 2\ln(t+1) + C = \\ &= x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C \end{aligned}$$

boʻladi. ▸

2-misol. Ushbu

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$$

integral hisoblansin.

◁ Bu integralda

$$\sqrt[3]{2x-3} = t, \text{ ya'ni } 2x-3 = t^3$$

almashtirish bajaramiz. U holda

$$2x - t^3 = 3, \quad x = \frac{1}{2}(t^3 + 3),$$

$$dx = \frac{3}{2}t^2 dt$$

boʻladi. Demak,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1} &= \int \frac{\frac{3}{2}t^2 dt}{t+1} = \frac{3}{2} \int \frac{t^2 dt}{t+1} = \frac{3}{2} \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} \int t dt - \frac{3}{2} \int dt + \int \frac{dt}{t+1} = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \ln|t+1| + C = \\ &= \frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{3}} + \ln|\sqrt[3]{2x-3}+1| + C. \end{aligned}$$

8-§. Tirgonometrik funksiyalarni integrallash

Ma'lumki, integrallar jadvalida

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi.

Masalan,

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Shuningdek

$$y = \sin ax, \quad y = \cos ax, \quad y = \operatorname{tg} ax, \quad y = \operatorname{ctg} ax$$

hamda

$$y = \sin(x + a), \quad y = \cos(x + a), \quad y = \operatorname{tg}(x + a), \quad y = \operatorname{ctg}(x + a)$$

funksiyalarning integrallari ham oson hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{aligned} \int \sin(2x + 1) \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin(2x + 1) \, d(2x + 1) = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C. \end{aligned}$$

Ko'p hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

(ba'zan $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$) almashtirish natijasida qaralayotgan aniqmas integral ratsional funksiyalarni integrallashga keladi. Bunda

$$\begin{aligned} x &= 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \\ \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

bo'lishini e'tiborga olish kerak bo'ladi.

Masalan,

$$J = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

integralni hisoblashda

$$tg \frac{x}{2} = t$$

almashtirish bajarib hisoblanadi:

Ravshanki,

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Unda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1 + t^2} dx}{1 + \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \\ &= \int \frac{2}{1 + t^2} \cdot \frac{1 + t^2}{1 + t^2 + 2t + 1 - t^2} dt = \int \frac{dt}{1 + t} = \ln|1 + t| + c = \\ &= \ln \left| 1 + tg \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

bo'ladi. ▷

Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallashda trigonometriyada ma'lum bo'lgan ushbu

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Masalan,

$$\int \sin 3x \cdot \sin 4x \, dx$$

integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cdot \sin 4x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(3 - 4)x - \cos(3 + 4)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 7x \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + C. \end{aligned}$$

12-BOB

ANIQ INTEGRAL

1-§. Aniq integral tushunchasi

Aniq integral matematikaning muhim tushunchalaridan hisoblanadi. Bu tushunchani bayon etishdan avval, unga olib keladigan masalalardan birini keltiramiz.

1°. O'tilgan yo'l haqidagi masala

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab, $V = V(t)$ tezlik bilan harakat qilsin. Uning t_0 momentdan T momentgacha ketgan vaqtda bosib o'tgan yo'lini topish talab etilsin.

Ma'lumki, tezlik V o'zgarmas bo'lganda, o'tilgan yo'l

$$S = V \cdot (T - t_0)$$

bo'ladi.

Tezlik o'zgaruvchan bo'lganda, ya'ni u vaqtning funksiyasi ($V = V(t)$) bo'lganda, ravshanki, bu formula bilan moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini aniq hisoblab bo'lmaydi. O'tilgan yo'lni aniq hisoblash maqsadida $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \quad (t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Natijada $[t_0, T]$ ushbu

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, T]$$

bo'laklarda ajraladi. Har bir

$$[t_k, t_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

da ξ_k nuqta olib, so'ng shu $[t_k, t_{k+1}]$ da nuqtaning tezligi o'zgarmas $V(\xi_k)$ bo'lsin deb, o'tilgan yo'lni

$$V(\xi_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) = V(t_k) \cdot \Delta t_k$$

($\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$) bo'lishini topamiz. Bu ifoda albatta $[t_k, t_{k+1}]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'lni taqriban ifodalaydi. Unda $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l

$$S \approx V(\xi_0) \cdot \Delta t_0 + V(\xi_1) \cdot \Delta t_1 + \dots + V(\xi_k) \cdot \Delta t_k +$$

$$+ \dots + V(\xi_{n-1}) \cdot \Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k) \cdot \Delta t_k$$

bo'ladi.

Endi $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) segmentlar uzunliklari

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

ning eng kattasini

$$\lambda \quad (\lambda = \max_k \{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_{n-1}\})$$

deylik.

Unda λ nolga intilganda ($\lambda \rightarrow 0$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k) \Delta t_k$$

yig'indining limiti moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'lini ifodalaydi.

Demak, o'tilgan S yo'l $\lambda \rightarrow 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k) \cdot \Delta t_k$$

yig'indining limiti bo'ladi.

Umuman, ko'p masalalarning yechimi yuqoridagi kabi yig'indining limitini topish bilan hal etiladi. Bu aniq integral tushunchasiga olib keladi.

2⁰. Funksiyaning integral yig'indisi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin. $[a, b]$ segmentni

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

Har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

bo'lakchadan ixtiyoriy

$$\xi_k \quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1})$$

nuqtani olamiz. So'ng funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ga ko'paytirib quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k &= f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_k + \dots + \\ &+ f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}. \end{aligned}$$

Bu yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segment bo'yicha integral yig'indisi deyiladi va u σ orqali belgilanadi:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Masalan, $f(x) = x^2$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi integral yig'indisi (yuqoridagi bo'linishga nisbatan)

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi.

3⁰. Aniq integral ta'rifi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin.

Bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

ni qaraymiz.

Ta'rif. Agar $\lambda \rightarrow 0$ da (yoki $n \rightarrow \infty$ da) $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

chekli limitga ega bo'lsa, hamda bu limitning qiymati $[a, b]$ kesmaning bo'linish usuliga va ξ_k nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, unda bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi aniq integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sigma = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Bu holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi deyiladi, a – integralning quyi chegarasi, b integralning yuqori chegarasi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda deyiladi.

Endi aniq integralning mavjudligini ifodalaydigan teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentida uzluksiz bo'lsa, u holda.

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral mavjud bo'ladi.

Eslatma. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi sharti uning integrallanuvchi bo'lishining etarli sharti bo'ladi. Agar funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan bo'lib, u shu segmentning chekli sonidagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchi, ya'ni uning aniq integrali mavjud bo'ladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

deb qaraladi.

Misol. Ushbu

$$J = \int_0^1 x \, dx$$

aniq integral ta'rifga ko'ra topilsin.

◁ Integral ostidagi $f(x) = x$ funksiya $[0, 1]$ segmentda uzluksiz. Demak, qaralayotgan integral mavjud. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad (f(x) = x)$$

bo'ladi. Integral yig'indini quyidagicha tuzamiz:

1) $[0, 1]$ segmentni

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lamiz

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

Bu holda

$$\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$

bo'ladi.

2) Har bir $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) kesmadagi ξ_k nuqta sifatida $\frac{k+1}{n}$ ni olamiz:

$$\xi_k = \frac{k+1}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Berilgan $f(x) = x$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati

$$f(\xi_k) = \frac{k+1}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

bo'ladi. Unda $f(x) = x$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) =$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

bo'lib,

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}. \quad \triangleright$$

2-§. Aniq integralning xossalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lib, uning aniq integrali

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

mavjud bo'lsin.

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1⁰. Ushbu

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx \quad (c - \text{const})$$

munosabat o'rinli bo'ladi

$\triangleleft f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi. Unda ta'rifga binoan

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi. Ravshanki, $c \cdot f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi.

$$\sum_{k=0}^{n-1} c \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

bo'lib,

$$\sum_{k=0}^{n-1} c \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\lambda \rightarrow 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \triangleright$$

2⁰. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lsa u holda $f(x) \pm g(x)$ funksiyalar ham $[a, b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \\ \int_a^b g(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

Ravshanki, $f(x) \pm g(x)$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \Delta x_k$$

bo'lib,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(x) \pm g(x)] \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\lambda \rightarrow 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad \triangleright$$

Aniq integralning keyingi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

3⁰. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lib, c nuqta ixtiyoriy ($a < c < b$) bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

bo'ladi.

4⁰ Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x \in [a, b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

bo'ladi.

5⁰. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x \in [a, b]$ da

$$f(x) \leq g(x)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

bo'ladi.

3-§. Aniq integrallarni hisoblash usullari

1⁰. Nyuton-Leybnits formulasi va uning yordamida aniq integrallarni hisoblash. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo'lib, $F(x)$ esa uning boshlang'ich funksiyasi ($F'(x) = f(x)$) bo'lsin. U holda ushbu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

formula o'rinli bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

◁ $[a, b]$ segmentni

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

bo'laklarga ajratamiz.

So'ng quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + \\ &+ [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]. \end{aligned}$$

Mazkur kitobda Lagranj formulasi deb ataluvchi ushbu

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

formulani keltirgan edik. Shu formuladan foydalanib yuqoridagi tenglikning o'ng tomonidagi ayirmalarni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(\xi_k) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(\xi_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ &+ \dots + F'(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = \\ &= \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

Demak,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u $[a, b]$ da integrallanuvchi. Bunobarin $\lambda \rightarrow 0$ da

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

bo'ladi. Keyingi tenglamadan

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda (1) Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Aniq integrallarni sodda, ayni paytda qulay bo'lgan hisoblash yo'llaridan biri ularni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblashdir.

Agar quyidagi

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

belgilash kiritilsa, unda Nyuton-Leybnits formulasi ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

ko'rinishga keladi.

Nyuton-Leybnits formulasi yordamida

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral quyidagicha hisoblanadi:

Avvalo $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int f(x)dx$$

topiladi. Aytaylik, bu integral topilib, u $\Phi(x)$ ga teng bo'lsin:

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

So'ng bu funksiyaning a va b nuqtalardagi qiymatlari hisoblanib.

$$\Phi(b) - \Phi(a)$$

ayirma topiladi. Bu qiymat Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralning qiymati bo'ladi.

Masalan,

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

bo'ladi.

2⁰. O'zgaruvchilarni amashtirish usuli

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan va uzliksiz bo'lib, uning aniq integrali

$$\int_a^b f(x) dx$$

ni hisoblash talab etilsin. Bu integralda

$$x = \varphi(t)$$

almashtirish bajaramiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz;
- 2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;
- 3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega. U holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (2)$$

bo'ladi.

⇐ Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin.

Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dx &= (F(\varphi(t))) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

boʻladi. Bu (2) munosabatni isbotlaydi. $\triangleright$

Misol. Ushbu

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda x oʻzgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$x = 2 \sin t.$$

Bunda

$$dx = (2 \sin t)' \cdot dt = 2 \cos t dt$$

boʻlish, $x = 0$ boʻlganda $t = 0$, $x = 2$ boʻlganda, $t = \frac{\pi}{2}$ boʻladi. Unda (2) formuladan foydalanib topamiz.

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt.$$

Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cdot \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= 2 \left[t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi. \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi. \quad \triangleright$$

3⁰. Bo'laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan, uzuksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

Ravshanki,

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Demak, $u(x) + v(x)$ funksiya

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b$$

bo'ladi. Agar

$$\begin{aligned} \int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] dx &= \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx + \\ &+ \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \int_a^b v(x) \cdot du(x) + \int_a^b u(x) \cdot dv(x) \end{aligned}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\int_a^b v(x) \cdot du(x) + \int_a^b u(x) \cdot dv(x) = [u(x) \cdot v(x)]_a^b$$

bo'lib, bundan esa

$$\int_a^b u(x) \cdot dv(x) = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot du(x) \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik aniq integralning bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

U $u(x)dv(x)$ ni integrallashni $v(x)du(x)$ ni integrallashga olib keladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani $u(x)$ va $dv(x)$ lar ko'paytmasi ko'rinishida yozib olinadi, bunda,

albatta $v(x)du$ ifodalarning integralini oson hisoblana olinishi lozimligini e'tiborda tutish kerak.

Misol. Ushbu

$$\int_e^{e^2} x \ln x \, dx$$

integral hisoblaymiz.

◁ Bu integralda

$$u = \ln x, \quad dv = x \, dx$$

deyiladi. Unda

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasi (3) dan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} x \, dx = \frac{1}{2} \left[e^4 \cdot \ln e^2 - e^2 \ln e - \frac{x^2}{2} \Big|_e^{e^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(2e^4 - e^2 - \frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2} \right) = \frac{1}{4} (3e^2 - 1)e^2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

4-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Biz yuqorida integral ostidagi funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi ma'lum bo'lsa integralni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash mumkinligini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funktsiyani topish masalasi doim osongina hal bo'lavermaydi. Agar integral ostidagi funktsiya murakkab bo'lsa, tegishli aniq integralni hisoblashni taqribiy usullarini qo'llash lozim bo'ladi.

1⁰. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz, $[a, b]$ segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lamiz.

Bu holda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_k nuqtadagi qiymati $f(x_k)$ ni hisoblab, $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k) \cdot \Delta x_k = f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^{x_1} f(x)dx &\approx f(x_0) \cdot \frac{b-a}{n}, \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx &\approx f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n}, \\ \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx &\approx f(x_2) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\int_{x_{n-1}}^b f(x)dx \approx f(x_{n-1}) \cdot \frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})],$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \quad (4)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

2°. Trapetsiyalar formulasi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin $[a, b]$ segmentni yuqoridagidek n ta teng bo'lakka bo'lib, $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ segment bo'yicha olingan aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{2n} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + f(x_3)) +$$

$$+ \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] =$$

$$= \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]. \quad (5)$$

Bu aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulaga trapetsiyalar formulasi deyiladi.

3⁰. Parabolalar (Simpson) Formulasi

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. $[a, b]$ segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

nuqtalar yordamida $2n$ ta teng bo'lakka bo'lamiz.

$f(x)$ funksiyaning $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

taqribiy ifodalaymiz. Bu taqribiy formulani har bir

$$[x_{2k}, x_{2k+2}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \\ & \approx \frac{b-a}{6n} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \\ & + (f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)) + \dots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))] = \\ & = \frac{b-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{2n-1})) + \\ & + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)) + \dots + f(x_{2n-2}))]. \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})))]. \quad (6)$$

Bu (6) formula parabolalar (Simpson) formulasi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

aniq integral to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblansin.

◁ [0,1] segmentni 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz:

$$0 = x_0; \quad x_1 = 0,2; \quad x_2 = 0,4; \quad x_3 = 0,6; \quad x_4 = 0,8; \quad x_5 = 1.$$

Bu nuqtalarda $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0) = 1,00000,$$

$$f(x_1) = 0,96079,$$

$$f(x_2) = 0,85214,$$

$$f(x_3) = 0,69768,$$

$$f(x_4) = 0,52729,$$

$$f(x_5) = 0,36788.$$

Har bir bo'lakning o'rtasini ifodalovchi nuqtalar quyidagicha

$$x_{\frac{1}{2}} = 0,1; \quad x_{\frac{3}{2}} = 0,3; \quad x_{\frac{5}{2}} = 0,5; \quad x_{\frac{7}{2}} = 0,7; \quad x_{\frac{9}{2}} = 0,9$$

bo'lib, bu nuqtalardagi qiymatlari esa quyidagicha bo'ladi:

$$f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) = 0,99005,$$

$$f\left(x_{\frac{3}{2}}\right) = 0,91393,$$

$$f\left(x_{\frac{5}{2}}\right) = 0,77680,$$

$$f\left(x_{\frac{7}{2}}\right) = 0,61263,$$

$$f\left(x_{\frac{9}{2}}\right) = 0,44486.$$

a). To'g'ri tortburchaklar formulasi (4) bo'yicha.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \\ &\approx \frac{1}{5} (0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot 3,74027 \approx 0,74805. \end{aligned}$$

b). Trapetsiyalar formulasi (5) bo'yicha

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{5} \left(\frac{1,00000 + 0,36788}{2} + 0,96079 + 0,85214 + \right. \\ &\quad \left. + 0,69768 + 0,52729 \right) = \frac{1}{5} (0,68394 + 3,03790) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot 3,72184 \approx 0,74437. \end{aligned}$$

v) Simpson formulasi (6) bo'yicha

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{30} [(1,00000 + 0,36788) + \\ &\quad + 4(0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) + \\ &\quad + 2(0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729)] = \\ &\quad \frac{1}{30} (1,36788 + 4 \cdot 3,74027 + 2 \cdot 3,03790) = \\ &\quad \frac{1}{30} (1,36788 + 6,07580 + 14,96108) \approx 0,74682. \end{aligned}$$

Taqribiy formulalar yordamida hisoblab topilgan

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integralning qiymatini, uning

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,74685 \dots$$

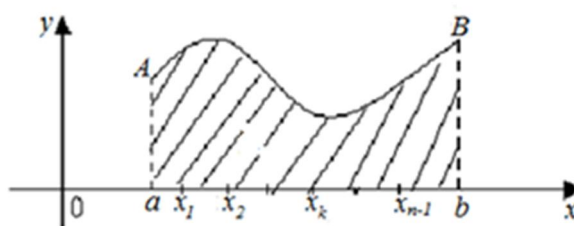
qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanini ko‘ramiz.

13-BOB

ANIQ INTEGRALNING BA'ZI BIR TADBIQLARI

1-§. Tekis shaklning yuzini hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan, uzliksiz hamda ixtiyoriy $x \in [a, b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan OX —absissa o'qi bilan chegaralangan shaklni qaraylik (1-chizma)



1-chizma

Odatda, bunday tekis shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Uni $aABb$ deylik.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zgarmas, ya'ni

$$f(x) = C = \text{const}$$

bo'lsa, u holda $aABb$ shakl to'g'ri to'rtburchak bo'lib, uning yuzi

$$S = C \cdot (b - a)$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa, unda $aABb$ shaklning yuzi quyidagicha topiladi:

$[a, b]$ segmentni

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \dots, x_{n-1}, \quad x_n = b$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

segmentda ixtiyoriy

$$\xi_k \quad (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$$

nuqta olamiz.

So'ng har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda $f(x)$ funksiyani o'zgarmas va uni $f(\xi_k)$ ga teng qilib olsak, u holda $x_k A_k B_k x_{k+1}$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini

$$f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

deb olish mumkin bo'lib, $aABb$ shaklning yuzini esa

$$S \approx f(\xi_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_1) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) + \dots + f(\xi_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

deyish mumkin. Demak,

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (1)$$

bunda $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

$aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalovchi formula taqribiy formuladir.

Endi $[a, b]$ segmentning bo'laklari sonini shunday ortira boraylikki, bunda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentning uzunligi Δx_k nolga intila borsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig'indining miqdori ham o'zgara boradi.

Ma'lumki, bu holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

bo'ladi.

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

aniq integral orqali topiladi.

Eslatma. Agar egri chiziqli trapetsiya OX o'qidan pastda joylashgan bo'lsa, ($f(x) < 0, x \in [a, b]$) unda bu shaklning yuzi ushbu

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

formula yordamida topiladi.

Masalan, yuqoridan $f(x) = x^2$ parabola, yon tomonlardan $x = 1$, $x = 3$ vertikal to'g'ri chiziqlar va pastdan OX o'qi bilan chegaralangan shaklning yuzi yuqorida keltirilgan formulaga ko'ra

$$S = \int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

bo'ladi.

Agar tekislikdagi shakl quyidagi

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

($f_1(x), f_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz va $f_1(x) > f_2(x)$) chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$Q = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

formula bilan topiladi.

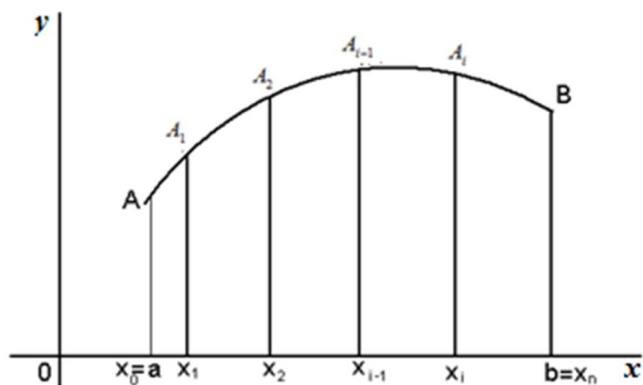
Demak, manfiy bo'lmagan uzluksiz funksiyaning aniq integral egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Bu aniq integralning geometrik ma'nosini ifodalaydi.

2-§. Yoy uzunligi.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Uning grafigi tekislikning

$$(a, f(a)) \text{ va } (b, f(b))$$

nuqtalari orasidagi egri chiziq-yoyni ifodalasin (1-chizma).



1-chizma

Shu yoy uzunligini topish talab etilsin.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda o'zgarmas, $f(x) = c$, $c = \text{const}$ bo'lsa, bu funksiyaning grafigi tekislikda (a, c) , (b, c) nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, uning uzunligi

$$l_1 = b - a$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chiziqli funksiya, ya'ni $f(x) = kx + b$ (k, b — o'zgarmas sonlar) bo'lsa, bu funksiyaning grafigi $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, uning uzunligi

$$l_2 = \sqrt{(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2} = (b - a) \cdot \sqrt{1 + k^2}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan egri chiziq yoyi bo'lsin.

Uni $\widetilde{AB}$ deb belgilaymiz. $[a, b]$ segmentda ixtiyoriy

$$a = x_0, \quad x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

nuqtalar olib, uni bu nuqtalar yordamida n ta bo'lakchalarga ajratamiz.

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

$[a, b]$ segmentni bo'luvchi nuqtalar

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$$

orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning $\widetilde{AB}$ yoy bilan kesishgan nuqtalari

$$A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$A_0 = A, A_n = B$ bo'ladi. $\overline{AB}$ yoyidagi bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, L_n siniq chiziqni hosil qilamiz. l_n siniq chiziq, $\overline{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq deyiladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, l_n perimetr $[a, b]$ oraliqning bo'linishiga, ya'ni $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ga bog'liq bo'ladi.

Avvalgidek, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ larning eng kattasini λ bilan belgilaymiz.

Ta'rif. Agar $\lambda \rightarrow 0$ da

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

perimetr chekli limitga ega bo'lsa, $\overline{AB}$ yoy uzunlikka ega deyiladi va

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} l_n = l$$

limit $\overline{AB}$ yoyining uzunligi deyiladi.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi grafigi $\overline{AB}$ yoyini tasvirlasin.

Ma'lumki, $\overline{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziqning perimetri

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasini qo'llaymiz. U holda shunday

$$\xi_k \quad (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$$

nuqta topiladiki,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

bo'ladi.

Demak,

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi.

Uning integral yig'indidan farqi shuki, integral yig'indidagi ξ_k nuqta ixtiyoriy bo'lgan holda, yuqoridagi yig'indida esa ξ_k nuqta $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiya integrallanuvchi bo'lganligi (chunki shartga ko'ra, $f'(x)$ uzluksiz) sababli buning ahamiyati yo'q. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Bu esa $\widetilde{AB}$ yoyga chizilgan perimetri $\lambda \rightarrow 0$ da chekli limitga ega bo'lishini va u limit

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

integralga teng ekanini bildiradi.

Demak $\widetilde{AB}$ yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

formula yordamida (ya'ni aniq integral yordamida) hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

funksiya tasvirlagan egri chiziqning uzunligi topilsin.

◁ Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

Undan

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{9}{4}x, \quad \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$$

bo'lib,

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

bo'ladi. Bu integralda

$$1 + \frac{9}{4}x = t, \quad dx = \frac{4}{9}dt, \quad 1 \leq t \leq 10$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx &= \frac{4}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{8}{27} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \\ &= \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, yoy uzunli

$$l = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

ga teng. ▷

3-§. O'zgaruvchi kuchning bajarilgan ishi

Aytaylik, biror jism OX o'qi bo'ylab F kuch ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Bunda F kuch jismning OX o'qidagi holatiga bog'liq, ya'ni $F = F(x)$ va uning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsin. Bu kuch ta'sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni topish masalasi yozaga keladi.

Ma'lumki, $F = F(x)$ kuch $[a, b]$ oraliqda

$$F(x) = c, \quad c - \text{const}$$

bo'lsa, jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish

$$A = c \cdot (b - a)$$

formula bilan ifodalanadi.

$F = F(x)$ kuch $[a, b]$ da x o'zgaruvchining ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi bo'lsin. U holda $[a, b]$ oraliqni ushbu nuqtalar yordamida

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

bo'laklarga ajratib, har bir bo'lakchada ixtiyoriy ξ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$)

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

nuqta olamiz.

Agar har bir $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) oraliqda jismga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchni o'zgarmas va $F(\xi_k)$ ga teng deb olinsa, u holda $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda bajarilgan ish taxminan

$$F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

formula bilan, $[a, b]$ oraliqda bajarilgan ish esa taxminan

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda \rightarrow 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig'indi chekli songa intilsa bu sonni $F(x)$ kuchning $[a, b]$ oraliqdagi bajargan ishi deyilishi mumkin. Demak,

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Ravshanki, qarayotgan yig'indi $F = F(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliq bo'yicha integral yig'indisi bo'ladi. $F = F(x)$ funksiya esa shartga ko'ra $[a, b]$ da uzluksiz. Demak, yig'indining limiti mavjud va u

$$\int_a^b F(x) dx$$

ga teng bo'ladi. Demak,

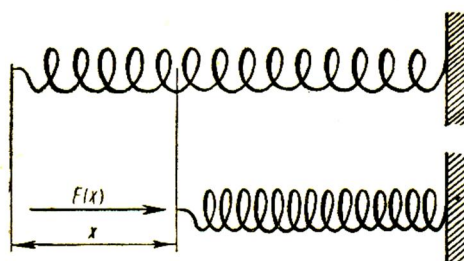
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Shunday qilib, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a, b]$ oraliqdagi bajargan ishi

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

bo'ladi.

Misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F = F(x)$ kuch ta'sir etib, prujina qisilgan. (1-chizma).



1-chizma

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proportsional bo'lsa, prujinani a birlik qisish uchun $F(x)$ kuchning bajargan ishi topilsin.

◁ Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilishi miqdorini x orqali belgilasak, u holda

$$F(x) = k \cdot x$$

bo'ladi, bunda k – proportsionallik koeffitsienti (qisilish koeffitsienti).

Yuqoridagi formuladan foydalanib bajarilgan ishni topamiz:

$$A = \int_0^a kx \, dx = k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{ka^2}{2}. \triangleright$$

14-BOB

XOSMAS INTEGRALLAR

1-§. Chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) xosmas integrallar

$f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu oraliqning istalgan chekli $[a, t]$ ($a < t < +\infty$) qismi bo'yicha

$$\int_a^t f(x)dx$$

integralni qaraylik. Ravshanki, bu integral t ga bog'liq bo'ladi:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

Shunday qilib, berilgan $f(x)$ funksiya yordamida $F(t)$ funksiya yuzaga keldi.

Ta'rif. Agar $t \rightarrow +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Odatda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral chegarasi cheksiz (yoki cheksiz oraliq bo'yicha) xosmas integral deb ham yuritiladi.

Agar $t \rightarrow +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $t \rightarrow +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz (yoki limit mavjud bo'lmasa) bo'lsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)$$

xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty, a]$ yoki $(-\infty, +\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lsin.

Bu funksiyaning $(-\infty, a]$ va $(-\infty, +\infty)$ oraliqlar bo'yicha xosmas integrallari ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi. Ya'ni,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx & (-\infty < t < a), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow +\infty}} \int_t^v f(x) dx & (-\infty < t < v < +\infty). \end{aligned}$$

Masalan,

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

integral uchun

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} \int_0^t e^{-2x} d(-2x) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2x} \Big|_0^t = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t} - e^0) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bo'ladi.

Demak, qaralayotgan xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

Misol. Ushbu

$$J = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0, a > 0)$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Aytaylik, $\alpha > 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)_a^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \frac{-1}{1-\alpha} a^{1-\alpha} \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, $\alpha > 1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha < 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t x^{-\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) \frac{1}{1-\alpha} = +\infty.$$

Demak, $\alpha < 1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

uzoqlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

bo'ladi. Demak, $\alpha = 1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

integral uzoqlashuvchi.

Shunday qilish,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0, a > 0)$$

xosmas integral $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

2°. Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalari

Xosmas integrallar ham aniq integrallarga o'xshash xossalarga ega. Biz ularni isbotsiz keltiramiz.

1) Agar $f(x)$ funksiyaning

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrali yaqinlashuvi bo'lsa, bu funksiyaning

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx \quad (a < b < +\infty)$$

xosmas integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi.

2). Agar

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi va k o'zgarmas son bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

3). Agar

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ va } \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va

$$\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

4). Agar

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lib, ixtiyoriy $x \in [a, +\infty)$ da

$$f(x) \geq 0$$

bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi.

5) Agar ixtiyoriy $x \in [a, +\infty)$ da

$$f(x) \leq g(x)$$

boʻlib,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ va } \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

integrallar yaqinlashuvchi boʻlsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

boʻladi.

Tasdiq. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz boʻlib, ixtiyoriy $x \in [a, +\infty)$ da

$$f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0, \quad f(x) \leq g(x)$$

boʻlsin. U holda

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi boʻlsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi boʻladi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Maʼlumki $x \geq 1$ da

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

boʻladi. Ravshanki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi. Unda yuqorida keltirilgan tasdiqqa ko'ra

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Avvaldan bilamizki,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

mavjud. Unda 1)-xossadan foydalanib

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

quyidagi

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

2-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

$f(x)$ funksiya $[a, b)$ yarim intervalda berilgan va uzluksiz bo'lib, (t, b) intervalda $(a < t < b)$ chegaralanmagan bo'lsin. Bu funksiyaning $[a, b)$ ning istalgan $[a, t]$ qismidagi $(a < t < b)$

$$\int_a^t f(x) dx$$

t ga bog'liq bo'ladi:

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x) dx$$

Ta’rif. Agar $t \rightarrow b - 0$ (ya’ni $t \rightarrow b$; $t < b$) da $\Phi(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo’lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a, b)$ oraliq bo’yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-0} \Phi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x)dx.$$

Agar $t \rightarrow b - 0$ da

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx,$$

ning limiti mavjud va chekli bo’lsa,

$$\int_a^b f(x)dx,$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $t \rightarrow b - 0$ da $\Phi(t)$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo’lmasa,

$$\int_a^b f(x)dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a, b]$ (yoki (a, b)) oraliq bo’yicha xosmas integrali ham yuqoridagidek ta’riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x)dx, \quad (a < t < b),$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx \lim_{\substack{n \rightarrow b-0 \\ v \rightarrow a+0}} \int_v^n f(x)dx \quad (a < v < n < b) \right).$$

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

integral yaqinlashuvchilikka tekishirilsin.

◁ $x = 1$ nuqta atrofida

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

funksiya chegaralanmagan.

Demak, berilgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali.

Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

bo'ladi. Agar

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= - \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} d(1-x) = - \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_0^t = \\ &= -2[(1-t)^{-\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}] = 2 - 2\sqrt{1-t} \end{aligned}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (2 - 2\sqrt{1-t}) = 2$$

bo'lib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$

ekanligini topamiz. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvi va u 2 ga teng.▷

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Ravshanki, $x = 0$ nuqta $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaning maxsus nuqtasi.

Xosmas integral ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+0} [\ln x]_t^1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+0} [\ln 1 - \ln t] = \infty \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi. ▷

Misol. Ushbu

$$A = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad B = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

integrallar yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◁ Aytaylik, $\alpha \neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \\ &= \lim_{t \rightarrow a+0} \left. \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_t^b = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{1}{1-\alpha} [(b-a)^{1-\alpha} - (t-a)^{1-\alpha}] \end{aligned}$$

bo'lib, bu limit $\alpha < 1$ bo'lganda chekli, $\alpha > 1$ bo'lganda esa cheksiz bo'ladi.

Aytaylik, $\alpha = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x-a} &= \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \\ &= \lim_{t \rightarrow a+0} [\ln(t-a)]_t^b = \infty \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak,

$$A = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

xosmas integral $\alpha < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash

$$B = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

xosmas integral $\alpha < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatiladi.

Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari ham 1 – § da bayon etilgan chegaralari cheksiz xosmas integralning xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi.

15-BOB

IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

1-§. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi

Tabiatda, fan va texnikaning turli tarmoqlarida uchraydigan ko'pchilik funksiyalar bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmay, ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi.

Masalan, tomonlari x va y ($x>0, y>0$) ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi

$$S = x \cdot y \quad (1)$$

bo'lib, u x va y o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi. Bu x va y o'zgaruvchilarning turli qiymatlariga ko'ra (1) formula yordamida ularga mos S ning qiymati topiladi.

Barcha haqiqiy sonlar to'plami R ni olib, bu to'plamning ixtiyoriy ikki x va y elementlari (haqiqiy sonlar) yordamida (x, y) juftlikni tuzamiz. Barcha shunday juftliklar to'plami

$$\{(x, y): x \in R, y \in R\}$$

ni R^2 orqali belgilaymiz:

$$R^2 = \{(x, y): x \in R, y \in R\}.$$

Odatda, R^2 to'plamning elementi (juftlik) shu to'plamning nuqtasi deyiladi.

Agar $(x_1, y_1) \in R^2$, $(x_2, y_2) \in R^2$ bo'lib, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ bo'lsa, u holda (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar ustma-ust tushadi deyiladi:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi OXY ni olib, OX o'qi bo'yicha x o'zgaruvchining qiymatlarini ($x \in R$), OY o'qi bo'yicha y o'zgaruvchining qiymatlarini ($y \in R$), joylashtiramiz. Unda (x, y) juftlik $(x, y) \in R^2$ tekislikda bitta

$$M = M(x, y)$$

nuqtani aniqlaydi. Bunda $x - M$ nuqtaning birinchi koordinatasi (abssissasi) $y - M$ nuqtaning ikkinchi koordinatasi (ordinatasi) bo'ladi. (Demak, barcha $(x, y): x \in R, y \in R$ nuqtalar (juftliklar) to'plami tekislikni ifodalaydi).

Aytaylik, $(x_1, y_1) \in R^2, (x_2, y_2) \in R^2$ bo'lsin. Ma'lumki ushbu

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar orasidagi masofa deyiladi. Uni $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ kabi belgilaymiz:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

- 1) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0$,
- 2) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d((x_2, y_2), (x_1, y_1))$,
- 3) $d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3))$

Endi R^2 to'plamning (tekislikning) ba'zi-bir qism to'plamlariga misollar keltiramiz.

1) R^2 tekislikning (a, b) nuqtasini hamda $r > 0$ sonni olaylik. Tekislikning shunday (x, y) nuqtalari to'plamini qaraymizki, x va y koordinatalar ushbu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami yopiq doira deyiladi va

$$\{(x, y) \in R^2: (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

kabi belgilanadi. Bunda (a, b) nuqta doira markazi, r esa radiusi deyiladi.

2) Tekislikning shunday (x, y) nuqtalari to'plamini qaraylikki x va y lar ushbu

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq doira deyiladi va

$$\{(x, y) \in R^2: (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$$

kabi belgilanadi.

3) Ushbu

$$\{(x, y) \in R^2: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

to'plam markazi (a, b) nuqtada, radiusi r ga teng aylana deyiladi.

4) Tekislikning shunday (x, y) nuqtalar to'plamini qaraymizki, ularning x va y koordinatalari ushbu $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ (a, b, c, d – haqiqiy sonlar) tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

kabi belgilanadi.

5) Tekislikning shunday (x, y) nuqtalar to'plamini qaraylikki, ularni x va y koordinatalari ushbu

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to'plami ochiq to'g'ri to'rtburchak deyiladi va

$$\{(x, y) \in R^2: a < x < b, c < y < d\}$$

kabi belgilanadi.

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar M to'plamdan olingan har bir (x, y) nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko'ra bitta haqiqiy z soni mos qo'yilgan bo'lsa, M to'plamda ikki o'zgaruvchili funksiya berilgan deyiladi va

$$z = f(x, y)$$

kabi yoziladi. Odatda M to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x va y (o'zgaruvchilar) funksiya argumentlari, z esa x va y ularning funksiyasi deyiladi.

Masalan, tekislikning har bir (x, y) nuqtasiga shu nuqta koordinatalari x va y larning ko'paytmasini mos qo'yish qoidasi berilsin. Unda

$$z = f(x, y) = x \cdot y$$

funksiya hosil bo'ladi.

Quyidagi funksiyalar

$$z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

ikki o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Aytaylik, M ($M \subset R^2$) to'plamda biror

$$z = f(x, y)$$

funksiya berilgan bo'lsin. M to'plamning (x_0, y_0) nuqtasini olamiz. Funksiya shu (x_0, y_0) nuqtaga bitta z_0 sonni mos qo'yadi. Bu z_0 son

$$z = f(x, y)$$

funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi qiymati deyiladi va

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

kabi yoziladi.

Ma'lumki, koordinatalari x, y, z bo'lgan (x, y, z) nuqta fazodagi nuqtani ifodalaydi.

Uning (x_0, y_0, z_0) nuqtasi fazo nuqtasi bo'ladi.

Barcha (x, y, z) nuqtalardan iborat (bunda $(x, y) \in M$, $z = f(x, y)$) to'plam $z = f(x, y)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Masalan,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1^2,$$

ya'ni markazi $(0, 0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng doiradan iborat bo'ladi.

Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilarning har biri (α, β) intervalda berilgan funksiyalar

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

bo'lsin. Bunda t o'zgaruvchi (α, β) oraliqda o'zgarganda mos x va y lardan tuzilgan (x, y) juftlik M to'plamga tegishli bo'lsin. Natijada ushbu

$$z = f(x, y) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

funksiya hosil bo'ladi. Bunda z funksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi.

2-§. Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti

Har bir natural n songa tekislikda bitta (x_n, y_n) nuqtani mos qo'yuvchi qoidaga ega bo'laylik:

Bu qoidaga binoan; $n \rightarrow (x_n, y_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

to'plamga ega bo'lamiz. Bu to'plam tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik deyiladi va $\{(x_n, y_n)\}$ kabi belgilanadi. Bunda har bir

$$(x_n, y_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

nuqta ketma-ketlikning hadi deyiladi.

Masalan,

$$(1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots;$$

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), \dots;$$

$$(1, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots$$

tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketliklar bo'ladi.

Aytaylik, biror $\{(x_n, y_n)\}$:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

ketma-ketlik hamda (a, b) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday notural son n_0 topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$d((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon \quad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, (a, b) nuqta $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

kabi yoziladi.

Ravshanki, bu ta'rifdagi (2) tengsizlikni quyidagicha

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

ham yozish mumkin.

Aytaylik, $\{(x_n, y_n)\}$:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

ketma-ketlikning limiti (a, b) bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun

$$d((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon, \text{ ya'ni}$$

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, bu tengsizlikdan quyidagi

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n, y_n)\}$: ketma-ketlikning limiti (a, b) bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikning koordinatalaridan iborat $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklari ham limitga ega bo'ladi. Ularning limiti (a, b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b):$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Aytaylik, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n, y_n)\}$: ketma-ketlik berilgan bo'lib, ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$\{x_n\} \text{ va } \{y_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sonlar ketma-ketliklari mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo'ladi.

Shuningdek, shunday natural n'_0 son topiladiki, barcha $n > n'_0$ uchun

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

bo'ladi.

Agar n_0 va n'_0 natural sonlarning kattasini n_0^* deyilsa, unda barcha $n > n^*$ uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Demak,

$$d((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikning koordinatalaridan tuzilgan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklarining limiti (a, b) nuqtaning mos koordinatalariga teng bo'lsa, u holda $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti (a, b) bo'ladi.

3-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti

Aytaylik, tekislikda biror M to'plam va (x_0, y_0) nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Markazi (x_0, y_0) nuqtada, radiusi ε ($\varepsilon > 0$) ga teng bo'lgan doira (ochiq doira) (x_0, y_0) nuqtaning atrofi (doiraviy atrofi) deyiladi va $U_\varepsilon((x_0, y_0))$ kabi belgilanadi:

$$U_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Agar (x_0, y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning (x_0, y_0) nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi mavjud bo'lsa, (x_0, y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$M = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

Agar (x_0, y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda

1) (x_0, y_0) nuqtaning har bir atrofida M to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

2) M to'plamning nuqtalaridan (x_0, y_0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlik $((x_n, y_n) \in M, (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0), n = 1, 2, \dots)$ ajratish mumkin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0).$$

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Shu to'plamda

$$z = f(x, y)$$

funksiya aniqlangan deylik.

Ta'rif. Agar M to'plamning nuqtalaridan tuzilgan (x_0, y_0) ga intiluvchi har qanday $\{(x_n, y_n)\}$ $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlik har doim bitta A songa intilsa, A son $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

kabi yoziladi.

Funksiya limitini quyidagicha ta'riflash ham bo'ladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib,

$$0 < d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x, y) \in M$ nuqtalar uchun.

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyaning $(0, 0)$ nuqtadagi limiti 0 bo'lishi quyidagicha ko'rsatiladi:

$(0, 0)$ nuqtaga intiluvchi $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0).$$

Yuqorida aytilganlariga ko'ra bu holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

bo'ladi. Berilgan funksiyaning (x_n, y_n) dagi qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{(x_n^2 + y_n^2)\}$$

bo'lib, $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ da $f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \rightarrow 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) = 0.$$

Limitga ega bo'lgan funksiylarning ba'zi-bir xossalarini keltiramiz:

1) Agar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chegaralangan bo'ladi.

2) Agar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = B$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) \pm g(x, y)] = A \pm B$$

bo'lad.

3) Agar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = B$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $f(x, y) \cdot g(x, y)$ funksiyaning ham limiti mavjud va

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = A \cdot B$$

bo'lad.

4) Agar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = B$$

bo'lib, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ funksiyaning limiti mavjud

bo'lib,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}$$

bo'lad.

4-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

Aytaylik $z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0) \in M$ nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti ta'rifini e'tiborga olib, funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x, y) \in M$ nuqtalar uchun

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya uzluksizligini uning orttirmasi yordamida ham ta’riflash mumkin.

M to‘plamda (x_0, y_0) nuqta bilan birga

$$(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

nuqtani ham olamiz. So‘ng ushbu

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma, $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi to‘liq orttirmasi deyiladi.

Ta’rif. Agar argument orttirmalari Δx va Δy nolga intilganda funksiyaning to‘liq orttirmasi $\Delta f(x_0, y_0)$ ham nolga intilsa

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

$f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar $f(x, y)$ funksiya M to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu M to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Eslatma. Agar yuqoridagi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

munosabat bajarilmasa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzlishga ega deyiladi.

M to‘plamda berilgan $f(x, y)$ funksiya to‘plamining bir necha nuqtasida yoki to‘plamdagi biror chiziqda uzilishga ega bo‘lishi mumkin.

Endi ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyaning ba’zi bir xossalarini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalarning har biri M to'plamda berilgan bo'lib, M to'plamning (x_0, y_0) nuqtasida uzluksiz bo'lsin.

U holda:

- 1) $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;
- 2) $f(x, y) \cdot g(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi;
- 3) $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ funksiya ($g(x, y) \neq 0$) (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi.

5-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiallari

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lsin. Bu M to'plamda (x_0, y_0) nuqta bilan birga $(x_0 + \Delta x, y_0)$ nuqtani olib ushbu

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va $\Delta_x f(x_0, y_0)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ayirma $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi (argument) bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $f(x, y) = x \cdot y$ funksiyaning xususiy orttirmalari

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

bo'ladi.

M to'plamda (x_0, y_0) nuqta bilan birga $(x_0 + \Delta x, y_0)$ va $(x_0, y_0 + \Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiyaning xususiy orttirmalarini topamiz:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) ,$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Ta'rif. Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \text{ yoki } f'_x(x_0, y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash $\Delta y \rightarrow 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \text{ yoki } f'_y(x_0, y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, $z = f(x, y)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda bu funksiyaning y o'zgaruvchini o'zgarmas, y bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashda esa x o'zgaruvchini o'zgarmas deb qarash kerak ekan.

Demak, $z = f(x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilalar jadvali hamda hosila hisoblashdagi mazkur qoidalardan foydalanish mumkin bo'ladi.

Masalan:

1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyaning xususiy hosilalari

$$f'_x(x, y) = (x^2 + y^2)'_x = 2x, \quad f'_y(x, y) = (x^2 + y^2)'_y = 2y,$$

2) $f(x, y) = x^y$, ($x > 0$) funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y) = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \cdot \ln x$$

3) $z = \arctg \frac{x}{y}$ funksiyaning xususiy hosilalari

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{\frac{x^2 + y^2}{y^2} \cdot y^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

bo'ladi.

6-§. Funksiyaning to'liq orttirmasi

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, to'plamning (x_0, y_0) nuqtasini belgilaymiz.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjud va ular (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Endi $z = f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi orttirmasi $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]. \quad (3)$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x,$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) \cdot \Delta y$$

($0 < \theta, \theta_1 < 1$). Natijada yuqoridagi (3) tenglik ushbu ko'rinishga keladi.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \cdot \Delta y) \cdot \Delta y. \quad (4)$$

Shartga ko'ra funksiyaning f'_x va f'_y xususiy hosilalari (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz. Demak,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \cdot \Delta y) = f'_x(x_0, y_0).$$

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} f'_x(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) &= f'_y(x_0, y_0) + \beta \end{aligned} \quad (5)$$

deb yozish mumkin. Bunda α va β lar Δx va Δy larga bog'liq hamda $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ (4) va (5) munosabatlardan

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= [f'_x(x_0, y_0) + \alpha] \cdot \Delta x + [f'_y(x_0, y_0) + \beta] \cdot \Delta y = \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \quad (6)$$

bu funksiya orttirmasini formulasi deyiladi.

Natija. Agar $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz f'_x, f'_y xususiy hosilalarga ega bo'lsa, funksiya shu (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'ladi.

7-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensial

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan. Bu M to'plamda (x_0, y_0) va $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nuqtalarni olib funksiya orttirmasini topamiz.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ta'rif. Agar $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi orttirmasi ushbu

$$\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

ko'rinishida ifodalansa, funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda A, B -o'zgarimas. α va β esa Δx va Δy ga bog'liq hamda $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ da α va β lar ham nolga intiladi.

Aytaylik, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra

$$\Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x \neq 0, \Delta y = 0$ deb topamiz.

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

keyingi tenglikning ikki tomonini Δx ga bo'lib,

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$$

tenglikka kelamiz. Bunda esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f'_x(x_0, y_0) = A.$$

Xuddi shunga o'xshash, (6) tenglikda $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$ deb,

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = B \cdot \Delta y + \beta \cdot \Delta y$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B + \beta,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (B + \beta) = B,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = B$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz. Agar $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, funksiya shu nuqtada f'_x va f'_y xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Funksiya orttirmasi esa ushbu

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

bo'ladi. Bu ifodadagi

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

yig'indi $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi differensial deyiladi va $df(x_0, y_0)$ yoki dz kabi belgilanadi:

$$df(x_0, y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Demak, funksiya differensial funksiya orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bosh qismi. Agar $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ deyilsa, u holda funksiya differensial ushbu ko'rinishni oladi.

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

$f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar M to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$f(x, y) \pm g(x, y),$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y),$$

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad (g(x, y) \neq 0)$$

funksiyalar ham shu (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi va

$$d[f(x, y) \pm g(x, y)] = df(x, y) \pm dg(x, y),$$

$$d[f(x, y) \cdot g(x, y)] = f(x, y) \cdot df(x, y) + g(x, y) \cdot dg(x, y),$$

$$d\left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right] = \frac{g(x, y)df(x, y) - f(x, y)dg(x, y)}{g^2(x, y)}$$

bo'ladi. Shuningdek,

$$d[c \cdot f(x, y)] = c \cdot df(x, y), \quad c = \text{const}$$

bo'ladi.

8-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari va differensial

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, $(x, y) \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, funksiya (x, y) nuqtada xususiy $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ hosilalariga ega bo'ladi.

Bu xususiy hosilalar o'z navbatida x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lishi mumkin.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiya xususiy hosilalari $f'_x(x, y)$ va $f'_y(x, y)$ larning xususiy hosilalari berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deyiladi va

$$f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2} \text{ yoki}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x(x, y))'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_x(x, y))'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_y(x, y))'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y(x, y))'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Eslatma. Odatda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ va $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ xususiy hosilalar aralash hosilalar deyiladi.

Bu aralash hosilalar (x, y) nuqtada uzluksiz bo'lsa, bir-biriga teng bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek, $z = f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli xususiy hosilalari ta'riflanadi.

Masalan,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + x^2 y^2) = 2x + 2xy^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + x^2 y^2) = 2y + 2x^2 y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 2xy^2) = 2 + 2y^2 = 2(1 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y + 2x^2 y) = 2 + 2x^2 = 2(1 + x^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + 2xy^2) = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2y + 2x^2 y) = 4xy$$

Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, $(x, y) \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ma'lumki, funksiyaning differensiali

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (7)$$

bo'ladi.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning (x, y) nuqtadagi differensial $df(x, y)$ ning differensial berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensial deyiladi va $d^2 f(x, y)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^2 f(x, y) = d(df(x, y)).$$

Endi $f(x, y)$ funksiya differensialining (7) ifodasidan foydalanib, $f(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensial ifodasini topamiz.

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d(df(x, y)) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy. \end{aligned}$$

Agar

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy, \\ d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \end{aligned}$$

va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\begin{aligned}
d^2 f(x, y) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) dy = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2
\end{aligned}$$

bo'ladi.

Demak,

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Xuddi yuqoridagidek, $z = f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli differensiallari ta'riflanadi va ularning ifodalari topiladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasini yozish mumkin. Quyida bunday formulani keltirish bilan kifoyalanamiz.

$z = f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning

$$U_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

atrofida berilgan bo'lib, unda funksiya birinchi, ikkinchi va hokazo $(n + 1)$ tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right] + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n} (x - x_0)^n + \right. \\
&\quad \left. + C_n^1 \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-1} \partial y} (x - x_0)^{n-1} (y - y_0) + \dots + \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n} (y - y_0)^n \right] + R_n
\end{aligned}$$

bo'ladi.

Bu formula ikki o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi deyiladi.

9-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremum qiymatlari

Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya $M \subset R^2$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0) \in M$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar (x_0, y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli shunday

$$U_\delta((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ uchun

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimum qiymatga erishadi deyiladi. (x_0, y_0) nuqta funksiya maksimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0, y_0)$ esa $f(x, y)$ funktsiyaning maksimum qiymati deyiladi. Uni

$$\max\{f(x, y), (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))\}$$

kabi belgilanadi. Demak

$$f(x_0, y_0) = \max\{f(x, y)\}$$

Ta'rif. Agar (x_0, y_0) nuqtaning M to'plamga tegishli bo'lgan shunday

$$U_\delta((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2: d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\}$$

atrofi topilsaki, ixtiyoriy $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ uchun

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya, (x_0, y_0) nuqtada minimum qiymatga erishadi deyiladi. (x_0, y_0) nuqta funksiya minimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0, y_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi. Uni

$$\min\{f(x, y), (x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))\}$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$f(x_0, y_0) = \min\{f(x, y)\}$$

funktsiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning ekstremumi deyiladi.

10-§. Funksiya ekstremumining zaruriy va etarli shartlari

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga, aytaylik maksimumga erishsin. Unda (x_0, y_0) nuqtaning shunday $U_\delta((x_0, y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy (x, y) nuqtalar uchun

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

bo'ladi. Jumladan

$$(x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$$

uchun ham

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

bo'ladi. Bu hol bir o'zgaruvchili $f(x, y_0)$ funksiyaning (bunda x argument) x_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x, y)$ funksiya, (x_0, y_0) nuqtada x o'zgaruvchi bo'yicha f'_x xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda Ferma teoremasiga ko'ra

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek, (x_0, y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0, y_0))$ atrofidagi ixtiyoriy nuqtada, jumladan

$$(x_0, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$$

uchun

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$$

bo'ladi. Bu esa bir o'zgaruvchili $f(x_0, y)$ funksiyaning (bunda y argument) y_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi.

Agar $f(x, y)$ funksiya $f(x_0, y_0)$ nuqtada y bo'yicha f'_y xususiy hosilaga ega bo'lsa, yana Ferma teoremasiga ko'ra $f'_y(x_0, y_0) = 0$ bo'ladi.

$z = f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada minimumga erishganda ham xuddi shunday hol yuz beradi. Shunday qilib, $z = f(x, y)$ funksiya $(x_0, y_0) \in M$ nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiya f'_x , f'_y xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

bo'ladi. Bu funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Funksiya xususiy hosilalarini nolga aylantiradigan nuqtalar uning statsionar (turg'un) nuqtalari deyiladi.

$z = f(x, y)$ funksiya M ($M \subset R^2$) to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqta va uning atrofi $U_\delta((x_0, y_0))$ shu to'plamga tegishli bo'lsin:

$$(x_0, y_0) \in M, U_\delta((x_0, y_0)) \subset M$$

Agar $(x, y) \in U_\delta((x_0, y_0))$ nuqtalarda

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

Demak, (x_0, y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0, y_0))$ atrofida (x, y) nuqtalarda

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

ayirmaning har doim musbat yoki manfiy bo'lishini aniqlash kerak bo'ladi. Uni hal etishda $f(x, y)$ funksiyaga ma'lum shartlar qo'yiladi $z = f(x, y)$ funksiya uchun:

1) (x_0, y_0) nuqtaning $U_\delta((x_0, y_0))$ atrofida f'_x, f'_y hamda $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ xususiy hosilalar mavjud va ular uzluksiz.

$$2) f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Taylor formulasidan foydalanib topamiz.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \\ + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right],$$

bunda ikkinchi tartibli xususiy hosilalar

$$(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2 \cdot (y - y_0))$$

nuqtada hisoblangan ($0 < \theta_1, \theta_2 < 1$).

Natijada,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right]$$

bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni bajaramiz:

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) = a_{11}, f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = a_{12}, f''_{y^2}(x_0, y_0) = a_{22}.$$

Shartga ko'ra ikkinchi tartibli xususiy hosilalar (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.

Demak,

$$f''_{x^2}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = f''_{x^2}(x_0, y_0) + \alpha_{11} = a_{11} + \alpha_{11},$$

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2 \cdot (y - y_0)) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha_{12} = \\ = a_{12} + \alpha_{12},$$

$$f''_{y^2}(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)) = f''_{y^2}(x_0, y_0) + \alpha_{22} = \\ = a_{22} + \alpha_{22}$$

Bunda $x - x_0 \rightarrow 0$, $y - y_0 \rightarrow 0$ da α_{11} , α_{12} , α_{22} larning har biri nolga intiladi.

Natijada

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} [a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + \\ + a_{22}(y - y_0)^2] + \\ + \frac{1}{2} [\alpha_{11}(x - x_0)^2 + 2\alpha_{12}(x - x_0)(y - y_0) + \alpha_{22}(y - y_0)^2]$$

bo'lib,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

ayirmaning ishorasi

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2$$

ifodaning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

1) Agar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ va $a_{11} > 0$ bo'lsa u holda

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$$

bo'lib, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada minimumga erishadi.

2) Agar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ va $a_{11} < 0$ bo'lsa u holda

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0$$

bo'lib, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

3) Agar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$ bo'lsa, u holda

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4) Agar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, erishmasligi ham mumkin. Uni qo'shimcha tekshirish bilan hal qilinadi.

Misol. Ushbu

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y + 10$$

funksiyaning ekstremumi topilsin.

◁ Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 4y + 6.$$

Bu xususiy hosilalarini nolga tenglab ushbu

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0, \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bu sistemaning yechimi $x = 1, y = -1$ ya'ni $(1, -1)$ bo'ladi. Demak, $(1, -1)$ berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topib, ularning statsionar $(1, -1)$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 2y - 4) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 4y + 6) = 4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y - 4) = -2.$$

Demak,

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = -2, \quad a_{22} = 4.$$

Endi $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ni hisoblaymiz:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Demak, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 > 0$ va $a_{11} = 2 > 0$. Yuqorida aytilganiga ko'ra berilgan funksiya $(1, -1)$ nuqtada minimumga erishadi.

Funksiyaning minimum qiymati

$$\min f(x, y) = \min(x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y) = 5$$

ga teng bo'ladi.▷

16-BOB

IKKI O'ZGARUVCHINI FUNKSIYANING INTEGRALI

1-§. Ikki karrali integral

1⁰. Ikki karrali integral ta'rifi va uning mavjudligi

Tekislikda biror chegaralangan yopiq (S) soha berilgan bo'lib, uning yuzi S bo'lsin. Bu (S) sohada $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan.

(S) sohani chiziqlar yordamida n ta

$$(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$$

sohalarga ajratamiz. Ularning yuzlari mos ravishda

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

bo'lsin. Endi

$$(S_k), (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

sohada ixtiyoriy $M_k = M_k(x_k, y_k)$ nuqta olib, bu nuqtada funksiyaning qiymatini hisoblaymiz $f(x_k, y_k)$. So'ng uni (S_k) sohaning yuziga ko'paytirib quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) S_k \quad (1)$$

yig'indini tuzamiz, $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi.

Odatdagidek (S_k) ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) sohalar diametrlarining eng kattasini λ deb olamiz.

Ta'rif. Agar $\lambda \rightarrow 0$ da (1) integral yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, hamda bu limitning qiymati (S) sohaning bo'linish usuli va (x_k, y_k) nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, unda $f(x, y)$ funksiya (S) soha bo'yicha integrallanuvchi deyilib, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (S) soha bo'yicha ikki karrali integrali deyiladi.

Uni

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) S_k.$$

Tasdiq. Agar $z = f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq (S) sohada uzluksiz bo'lsa,

$$\iint_{(S)} f(x, y) ds$$

integral mavjud bo'ladi.

2⁰. $z = f(x, y)$ funksiya $(S) \subset R^2$ sohada berilgan va uzluksiz bo'lsin.

1) Agar $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ va $(S_1 \cap S_2) = \emptyset$ bo'lsa, u holda

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS = \iint_{(S_1)} f(x, y) dS + \iint_{(S_2)} f(x, y) dS$$

bo'ladi.

2) Quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\iint_{(S)} kf(x, y) dS = k \iint_{(S)} f(x, y) dS \quad (k = \text{const}).$$

3) $f(x, y)$ funksiya bilan birga $g(x, y)$ funksiya ham (S) da uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\iint_{(S)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dS = \iint_{(S)} f(x, y) dS \pm \iint_{(S)} g(x, y) dS.$$

4) Agar (S) da $f(x, y) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS \geq 0$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x, y) \leq g(x, y)$ bo'lsa, u holda

$$\iint_{(S)} f(x, y) ds \leq \iint_{(S)} g(x, y) ds$$

bo'ladi.

6) $|f(x, y)|$ funksiya ham (S) da integrallanuvchi bo'lib,

$$\left| \iint_{(S)} f(x, y) dS \right| \leq \iint_{(S)} |f(x, y)| dS$$

bo'ladi.

7) (S) da shunday (ξ, η) nuqta topiladiki,

$$\iint_{(S)} f(x, y) ds = f(\xi, \eta)S$$

bo'ladi, bunda S — (S) sohaning yuzi.

3⁰. Ikki karrali integralni hisoblash. Tekislikda (S) soha ushbu

$$(S) = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

to'g'ri to'rtburchak sohadan iborat bo'lsin. Agar $z = f(x, y)$ funksiya (S) da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y) dS &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \\ \iint_{(S)} f(x, y) dS &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \end{aligned} \quad (2)$$

bo'ladi.

Demak, ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiyaning ko'rsatilgan (S) soha bo'yicha ikki karrali integrali, avval bir o'zgaruvchi bo'yicha, (bunda ikkinchi o'zgaruvchini o'zgarmas deb hisoblab) so'ng ikkinchi o'zgaruvchi bo'yicha olingan integrallarni hisoblash bilan ikki karrali integral hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$\iint_{(S)} \frac{x}{y} ds$$

ikki karrali integral hisoblansin.

Bunda

$$(S) = \{(x, y) \in R^2: 3 \leq x \leq 5; 1 \leq y \leq 2\}$$

to'g'ri to'rtburchak soha.

$$\iint_{(S)} \frac{x}{y} ds = \int_1^2 \left[\int_3^5 \frac{x}{y} dx \right] dy$$

avvalo

$$\int_3^5 \frac{x}{y} dx$$

integralni hisoblaymiz. Unda y ni o'zgarmas deb qaraymiz:

$$\int_3^5 \frac{x}{y} dx = \frac{1}{y} \int_3^5 x dx = \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \Big|_3^5 = \frac{1}{2y} (5^2 - 3^2) = \frac{8}{y},$$

natijada

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \frac{x}{y} ds &= \int_1^2 \left[\int_3^5 \frac{x}{y} dx \right] dy = \int_1^2 \frac{8}{y} dy = 8 \ln y \Big|_1^2 = 8(\ln 2 - \ln 1) = \\ &= 8 \ln 2 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak,

$$\iint_{(S)} \frac{x}{y} ds = 8 \ln 2.$$

Endi (S) soha yuqoridan $y = \varphi_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $y = \varphi_1(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a, x = b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lsin.

Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya shu (S) sohada uzluksiz bo'lib, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz bo'lsin. U holda $z = f(x, y)$ funksiyaning (S) soha bo'yicha ikki karrali integrali

$$\iint_{(S)} f(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\iint_{(S)} (x + y) ds$$

integral hisoblansin, bunda

$$(S) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

$$\iint_{(S)} (x + y) ds = \int_0^1 \left[\int_x^{2-x^2} (x + y) dy \right] dx$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\begin{aligned} \int_x^{2-x^2} (x + y) dy &= \int_x^{2-x^2} x dy + \int_x^{2-x^2} y dy = \\ &= x \int_x^{2-x^2} dy + \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2-x^2} = xy \Big|_x^{2-x^2} + \frac{1}{2} [(2 - x^2)^2 - x^2] = \\ &= x(2 - x^2 - x) + 2 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \\ &= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

U holda

$$\iint_{(S)} (x + y) dS = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2 \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 + 2 = \frac{101}{60}.
\end{aligned}$$

Demak,

$$\iint (x + y) dS = \frac{101}{60}$$

2-§. Egri chiziqli integrallar

1⁰. Birinchi tur egri chiziqli integral

Tekslilikda biror egri chiziq (yoy) berilgan bo'lsin. Uni $\widetilde{AB}$ yoki (L) bilan belgilaymiz. Bu egri chiziq uzunlikka ega va uning uzunligini L deylik. Shu $\widetilde{AB}$ egri chiziqda $z = f(x, y)$ funksiya berilgan (bunda $(x, y) \in (L)$) $\widetilde{AB}$ egri chiziqni $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, har bir

$$A_k \widetilde{A_{k+1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

bo'lakchada ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqta $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ olamiz. Bu nuqtalarda $f(x, y)$ funksiyaning qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni hisoblab, uni $A_k \widetilde{A_{k+1}}$ bo'lakchanning uzunligi ΔS_k ga ko'paytiramiz va nihoyat

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k$$

yig'indini topamiz. Bu ham integral yig'indi deyiladi.

Ta'rif. Agar

$$\lambda = \max_k \{\Delta S_k\} \rightarrow 0$$

da σ yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, hamda bu limitning qiymati $\widetilde{AB}$ yoyning bo'linish usuli va (ξ_k, η_k) nuqtalarning tenglanishiga bog'liq bo'lmasa, unda bu limit $f(x, y)$ funksiyaning $\widetilde{AB}$ egri chiziq bo'yicha birinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi va

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds.$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k.$$

Aytaylik, $\widetilde{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

sistema bilan berilgan bo'lib, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz hamda uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega ($\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$) bo'lsin.

$z = f(x, y)$ funksiya shu egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS$$

egri chizikli integral mavjud bo'lib,

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\widetilde{AB}$ egri chiziq ushbu $y = y(x)$ ($a \leq x \leq B$) tenglama bilan berilgan bo'lib, $y(a) = A$, $y(b) = B$ bo'lsin. $y = y(x)$ funksiya esa $[a, b]$ da uzluksiz va uzluksiz $y'(x)$ hosilaga ega.

Agar $f(x, y)$ funksiya $\widetilde{AB}$ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo'lsa, bu funksiyaning $\widetilde{AB}$ egri, chiziq bo'yicha egri chizikli integrali mavjud va

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

bo'lad.

Yuqorida keltirilgan formulalar shuni ko'rsatadiki, egri chiziqli integrallar aniq integralga keltiriladi. Aniq integralni hisoblash oldingi boblarda batafsil bayon etilgan.

Misol. Quyidagi birinchi tur

$$\int_{\widetilde{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

egri chiziqli integral hisoblansin, bunda $\widetilde{AB}$ -markazi $(0,0)$ nuqtada radiusi $r = 2$ bo'lgan aylananing birinchi kvadrantdagi qismidan iborat.

Ma'lumki, markazi $(0,0)$ nuqtada, radiusi $r = 2$ bo'lgan aylana tenglamasi

$$x^2 + y^2 = 4$$

bo'lib, bu aylananing birinchi kvadrantdagi qismi

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

bo'lad.

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{AB}} \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \int_0^2 \sqrt{x^2 + 4 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= \int_0^2 2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{\frac{4 - x^2 + x^2}{4 - x^2}} dx = 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4 \int_0^2 \frac{d\frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi. \end{aligned}$$

Egri chiziqli integrallar ham aniq integral xossalari kabi xossalarga ega. Ularning ba'zi birlarini keltirish bilan kifoyalanamiz.

$\widetilde{AB}$ egri chiziqda $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ funksiyalar berilgan va uzluksiz bo'lsin.

1) Agar $\widetilde{AB} = \widetilde{AC} + \widetilde{CB}$ bo'lsa u holda

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS = \int_{\widetilde{AC}} f(x, y) dS + \int_{\widetilde{CB}} f(x, y) dS$$

bo'ladi.

$$2) \int_{\widetilde{AB}} k \cdot f(x, y) dS = k \int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS \quad (k = \text{const})$$

$$3) \int_{\widetilde{AB}} [f(x, y) \pm g(x, y)] dS = \int_{\widetilde{AB}} f(x, y) dS \pm \int_{\widetilde{AB}} g(x, y) dS$$

bo'ladi.

2⁰. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar

Tekslilikda $\widetilde{AB}$ egri chiziq berilgan bo'lib, bu egri chiziqda $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

$\widetilde{AB}$ egri chiziqni

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, har bir $A_k \widetilde{A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) bo'lakchada ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqta olamiz. Bu nuqtadagi funksiyaning qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni $A_k \widetilde{A_{k+1}}$ yoyning OX o'qidagi proeksiyasi Δx_k ga, so'ng OY o'qidagi proeksiyasi Δy_k ga ko'paytirib ushbu yig'indilarni tuzamiz:

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k$$

Ta'rif. Agar $\lambda_1 = \max |\Delta x_k| \rightarrow 0$ da σ_1 yig'indi, $\lambda_2 = \max |\Delta y_k| \rightarrow 0$ da σ_2 yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, hamda bu limitning qiymati $\widetilde{AB}$ yoyning bo'linish usuli va (ξ_k, η_k) nuqtalarning tenglanishiga bog'liq bo'lmasa, unda $f(x, y)$ funksiya $\widetilde{AB}$ egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi, bu limitlar esa $f(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tur egri chiziqli integrallari deyiladi. Ular mos ravishda

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx, \quad \int_{\overline{AB}} f(x, y) dy$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sigma_2 = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta y_k.$$

Ushbu

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx + \int_{\overline{AB}} g(x, y) dy$$

yig‘indi ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning umumiy ko‘rinishi deyiladi va

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

kabi belgilanadi.

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx + \int_{\overline{AB}} g(x, y) dy.$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning mavjudligi, ularni hisoblash, integrallarning xossalari birinchi tur egri chiziqli integrallar kabi bo‘ladi.

17-BOB

QATORLAR

1-§. Sonli qatorlar

Biror

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, uning yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

ifodani hosil qilamiz.

Odatda (1) ifoda sonli qator deyiladi. Bunda a_n ($1, 2, 3, \dots$) sonlar qatorning hadlari (a_1 –birinchi had, a_2 –ikkinchi had,..., a_n – n –had yoki umumiy had) deyiladi.

(1) qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kabi yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Bu qator hadlari yordamida quyidagi yig'indilarni tuzamiz:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

.....

Ular (1) qatorning qisman yig'indilari deyiladi.

Natijada, (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat ushbu

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

sonlar ketma- ketligi hosil bo'ladi.

Ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligi chekli limitga ega,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi, S esa qatorning yig'indisi deyiladi:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligining limiti cheksiz yoki bu limit mavjud bo'lmasa, (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot n} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qatorning qisman yig'indisi

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

bo'lib, uning limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

ga teng.

Demak, qaralayotgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng.

Ushbu

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

qatorning qisman yig'indisi

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{agar } n - \text{toq bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } n - \text{juft bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib, ketma-ketlik limitga ega emas.

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

2-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Yaqinlashuvchi qatorlar bir nechta xossalarga ega.

1-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots \quad (2)$$

qator ham yaqinlashuvi bo'lib, uning yig'indisi $c \cdot S$ ga teng bo'ladi.

◁ Shartga ko'ra (1) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S.$$

Unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots.$$

Qator uchun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} c (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \cdot S \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, (2) qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi $c \cdot S$ bo'ladi.

Keyingi xossalarni isbotsiz keltiramiz.

Ikki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (3)$$

qator berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots +$$

$$+ (a_n + b_n) + \dots \quad (4)$$

qator (1) va (3) qatorlar yig'indisi deyiladi.

2- xossa. Agar (1) va (3) qatorlar yaqinlashuvi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S' va S'' bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

qator ham yaqinlashuvi va uning yig'indisi $S' + S''$ ga teng bo'ladi.

3-xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator yaqinlashuvi bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da bu qatorning umumiy hadi a_n nolga intiladi.

Eslatma. Qatorning umumiy hadi $n \rightarrow \infty$ da nolga intilishidan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

3-§. Qatorning yaqinlashuvchiligi

Aytaylik biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

qator berilgan bo'lsin. Agar bu qatorning har bir hadi manfiy bo'lmasa,

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) qator musbat hadli qator deyiladi.

Teorema. Agar musbat hadli (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvi bo'ladi.

⇐ (1) qatorning qisman yig'indilaridan iborat ketma-ketlik $\{S_n\}$ bo'lsin.

Bu ketma-ketlik shartga ko'ra yuqoridan chegaralangan:

$$S_n \leq P \quad (\text{ixtiyoriy } n \in N), \quad P = \text{const.}$$

Ikkinchi tomondan

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

bo'lib, undan $S_n \leq S_{n+1}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $\{S_n\}$ – o'suvchi ketma-ketlik bo'ladi.

Unda $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi. Demak, qator yaqinlashuvi.▷

Ikkita musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

qatorlar berilgan bo'lsin.

Teorema. Agar bu qatorlarga

$$a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar musbat hadli qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

da:

1) Ushbu

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q$$

tengsizlik biror nomerdan boshlab o‘rinli bo‘lib, $q < 1$ bo‘lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi;

2) Agar

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

bo‘lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

4-§. Hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi

Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots \quad (6)$$

qator, bunda $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) hadlarining ishorasi almashinib keladigan qator deyiladi.

Teorema. Agar (6) qatorda

$$1) \ a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots,$$

$$2) \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

bo‘lsa, u holda (6) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Masalan, ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

qator uchun:

$$1) \ 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots,$$

$$2) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bo‘ladi. Teoreмага ko‘ra bu qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ixtiyoriy hadli qatorlar Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lish. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (7)$$

qatorini qaraymiz. Ravshanki, (7) musbat hadli qator bo'ladi.

Teorema. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishidan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Ta'rif. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

qator yaqinlashuvi bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

5-§. Funksional qatorlar

Aytaylik X to'plamda ($X \subset R$) aniqlangan

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$$

funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (8)$$

qator funksional qator deyiladi.

X to'plamda x_0 nuqtani olib quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots$$

sonli qatorni qaraymiz.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo'lsa, berilgan funksional qator X to'plamda (sohada) yaqinlashuvchi deyiladi.

Ravshanki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]$$

limit olingan x ga bog'liq bo'ladi. Uni $S(x)$ bilan belgilaylik:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)].$$

Odatda $S(x)$ qaralayotgan funksional qatorning yig'indisi deyiladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun bir vaqtda

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Veyershtass alomati. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi X to'plamda ushbu

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qator X to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Masalan, Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

funksional qatorning har bir hadi $X = (-\infty, +\infty)$ to'plamda uzluksiz,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Demak Veyershtass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $X = (-\infty, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi.

Endi tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalarini keltiramiz.

1) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi X to'plamda uzluksiz bo'lib, qator X to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qatorning yig'indisi $S(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz bo'ladi.

2) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi $(n = 1, 2, 3, \dots)$ $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$\int_a^b S(x) dx$$

ga teng bo'ladi.

3) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi $[a, b]$ segmentda $f'_n(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qator yig'indisi $S(x)$ funksiya $[a, b]$ da $S'(x)$ hosilaga ega va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

6-§. Darajali qatorlar

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (9)$$

ko'rinishidagi qator darajali qator deyiladi, bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ lar o'zgarmas sonlar bo'lib ular darajali qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots$$

darajali qatordir.

Har qanday darajali qator $x = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki bu holda (9) ushbu

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 + \dots$$

ya'ni

$$a_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

ko'rinishdagi sonli qatorga aylanadi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + 0 + 0 + \dots + 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 = a_0$$

bo'ladi.

Teorema (Abel teoremasi). Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (9)$$

darajali qator x ning $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, x ning

$$|x| < |x_0| \quad (10)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (9) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, berilgan (9) darajali qator $x = x_0$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Ma'lumki, bu holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'lib, $\{a_n x_0^n\}$ ketma-ketlik chegeralangan bo'ladi.

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(M -o'zgarmas son).

Endi berilgan qatorni quyidagicha yozib

$$a_0 + a_1 \cdot x_0 \cdot \frac{x}{x_0} + a_1 x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots$$

uning hadlarining absolyut qiymatlaridan ushbu

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_1 x_0^2| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

qatorni tuzamiz. So'ng ushbu

$$M + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

geometrik qatorni ko'ramiz. Bu qator

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$$

bo'lganligi sababli, yaqinlashuvchi bo'ladi. Ayni paytda

$$|a_n \cdot x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

bo'lganligi sababli

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_1 x_0^2| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator x ning $|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruchi barcha qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Natija. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

darajali qator $x = x_1$ nuqtada esa uzoqlashuvchi bo'lsa, bu qator x ning $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

darajali qator $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) da esa yaqinlashuvchi, $x = x_1$ da esa uzoqlashuvchi bo'lsin. Ravshanki, $|x_0| < |x_1|$ bo'ladi. Unda yuqorida aytilganlarga ko'ra x ning $|x| < |x_0|$ tenglikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

yaqinlashuvchi, $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

(9) darajali qatorning yaqinlashadigan nuqtalaridan iborat to'plamni $\{x\}$ deylik. (ya'ni shu $\{x\}$ to'plamning har bir nuqtasida (9) qator yaqinlashuvchi). Bu $\{x\}$ to'plam yuqoridan chegaralangan. Uning yuqori aniq chegarasi mavjud. Uni r bilan belgilaylik. Ko'rsatish mumkinki, x ning $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (9) qator yaqinlashuvchi, x ning $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (9) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Odatda, $(-r, r)$ interval (9) darajali qatorning yaqinlashish intervali, r esa yaqinlashish radiusi deyiladi.

Eslatma. Agar darajali qator $x = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lib, boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning yaqinlashish radiusi $r = 0$ deb olinadi. Agar darajali qator barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lsa, $r = +\infty$ deb olinadi.

Eslatma. Darajali qator $x = -r$, $x = r$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Ko'pincha (9) darajali qatorning yaqinlashish radiusini ushbu

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

formula yordamida topiladi.

Endi darajali qator xossalarini keltiramiz:

1) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lsa, darajali qator $[-\alpha, \alpha]$ segmentda ($0 < \alpha < r$) tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lsa, darajali qator yig'indisi $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$(-r, r)$ integralda uzluksiz bo'ladi.

3) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lib,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

bo'lsa, u holda bu qatorni $[a, b] \subset (-r, r)$ da hadlab integrallash, mumkin ya'ni

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4) Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lib, yig'indisi

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

bo'lsa, u holda bu qatorni $(-r, r)$ da hadlab differensiallash mumkin, ya'ni

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n x^{n-1} + \dots$$

bo'ladi.

7-§. Funktsiyalarni darajali qatorlarga yoyish

1⁰. Makloren qatori

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $(-\delta, \delta)$ ($\delta > 0$) oraliqda berilgan bo'lib, u shu oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Ushbu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

darajali qatorni qaraylik. Bu darajali qatorning koeffitsientlari $f(x)$ funksiya va bu funksiya hosilalarining $x=0$ nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangan.

Endi $f(x)$ funksiyaning Teylor (Makloren) formulasini yozamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (10)$$

bunda $r_n(x)$ qoldiq had.

(9) darajali qatorning qisman yig'indisi

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

bo'lsa, unda (10) formula ushbu $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$ ko'rinishiga keladi.

(9) darajali qator $(-r, r)$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad (x \in (-r, r))$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aksincha, ixtiyoriy $x \in (-r, r)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

bo'lishi, demak, $(-r, r)$ da (9) darajali qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi $f(x)$ ga teng bo'lishi kelib chiqadi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Shunday qilib, munosabatning o‘rinli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x \in (-r, r)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar $f(x)$ funksiya uchun (10) munosabat o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya Makloren qatoriga yoyilgan deyiladi.

Agar $r_n(x)$ yetarli darajada kichik bo‘lsa, u holda yuqoridagi (10) munosabatdan ushbu

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formulaga ega bo‘lamiz.

Endi $f(x) = e^x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyamiz.

Ma’lumki, $f(x) = e^x$ funksiya ixtiyoriy $[-r, r]$ segmentda ($r > 0$) istalgan tartibli hosilaga ega bo‘lib,

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n$$

bo‘ladi. Qoldiq esa Lagranj ko‘rinishida quyidagicha bo‘ladi:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

Agar ixtiyoriy $x \in (-r, r)$ uchun

$$|r_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

va $n \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

bo'lishini topamiz. Bu $f(x) = e^x$ funksiyani Makloren qatoridir. Xuddi shunga o'xshash

$$f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \ln(1+x)$$

funksiyaning Makloren qatorlari topiladi.

Quyida ularni keltirish bilan kifoyalanamiz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots +$$

$$+ (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots.$$

Bu keltirilgan formulalar uchun taqribiy formulalar quyidagicha bo'ladi:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

18-BOB

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

1-§. Differensial tenglama tushunchasi

Erkli o'zgaruvchi x , noma'lum funksiya $y = y(x)$ va bu funksiya hosilalarini bog'lovchi tenglama differensial tenglama deyiladi.

Bunday tenglama umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

(1) tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilasining eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya va uning hosilalarini (1) tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantirsa, ya'ni

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

bo'lsa, $y = \varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi cheksiz, ko'p bo'ladi. Barcha yechimlarni o'z ichiga olgan yechim, differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$y'' - x = 0 \quad (2)$$

tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglama bolib, uning yechimi

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$$

bo'ladi, chunki

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x\right)' = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad \varphi''(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x$$

bo'lib,

$$\varphi''(x) - x = x - x = 0$$

boladi.

(2) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$$

boʻladi, bunda c_1, c_2 ixtiyoriy oʻzgarmas sonlar (Xususan $c_1 = 1, c_2 = 0$ boʻlganda umumiy yechimdan yuqoridagi yechim kelib chiqadi.).

2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy koʻrinishi quyidagicha

$$F(x, y, y') = 0$$

boladi. Agar bu tenglama y' ga nisbatan yechiladigan boʻlsa, unda

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

tenglamaga kelamiz. Odatda, (3) tenglama hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deyiladi.

Endi (3) tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz.

1⁰. (3) tenglamaning oʻng tomoni faqat x oʻzgaruvchiga teng boʻlsin

$$y' = f(x) \quad (4)$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$y = \int f(x)dx + c \quad (c - \text{oʻzgarmas son})$$

Demak, (4) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \int f(x)dx + c \quad (5)$$

boʻladi. Misol, ushbu

$$y' = 2x^2$$

tenglama yechilsin.

◁ Berilgan differensial tenglamaning yechimini (5) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$y = \int 2x^2 dx + c = \frac{2}{3}x^3 + c. \triangleright$$

2⁰. (3) tenglamaning oʻng tomoni faqat y ga bogʻliq boʻlsin

$$y' = f(y).$$

Avvalo,

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

ekanini etiborga olib, so'ng bu tenglamada y ni erkli o'zgaruvchi, x ni esa y ning funksiyasi bo'lsin deymiz. Unda

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

bo'lib, yuqoridagi 1^o-holga keladi. Keyingi tenglamaning yechimi

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$y' = 7y^2$$

tenglama yechilsin.

◁ Bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{7y^2}$$

keyingi tenglikdan esa,

$$dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{dy}{y^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Uni integrallab topamiz:

$$x = \int \frac{1}{7} \cdot \frac{dy}{y^2} + c = \frac{1}{7} \int y^{-2} dy + c = \frac{1}{7} \cdot \frac{-1}{y} + c = -\frac{1}{7y} + c.$$

Demak,

$$y = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{c - x}. \triangleright$$

3^o (3) tenglamaning o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchi hamda faqat y o'zgaruvchilar funksiyalarining ko'paytmasidan iborat bo'lsin:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Odatda bu o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Uni quyidagicha ham yozsa bo'ladi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

keyingi tenglamaning ikki tomonini dx ga ko'paytirib, so'ngra $g(y)$ ga bo'lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Uni itegrallab topamiz:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

Bu integrallar hisoblanib, so'ng y ni x orqali ifodalab berilgan tenglamaning yechimiga kelamiz.

Misol: Ushbu

$$y' = xy + x + y + 1$$

tenglama yechilsin.

◁ Berilgan tenglamaning o'ng tomonini quydagicha yozib olamiz:

$$xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1).$$

Demak,

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y + 1)$$

keyingi tenglikda,

$$\frac{dy}{y + 1} = (x + 1)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Integrallab topamiz:

$$\int \frac{dy}{y + 1} = \int (x + 1)dx + \ln c,$$

$$\ln(y + 1) = \frac{(x + 1)^2}{2} + \ln c,$$

$$\frac{y + 1}{c} = e^{\frac{(x+1)^2}{2}}$$

$$y = ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1.$$

3-§. Bir jinsli differensial tenglamalar

Ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiya uchun ixtiyoriy t da

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

tenglik bajarilsa, $f(x, y)$ bir jinsli (aniqrog'i, nolinch tartibli bir jinsli) funksiya deyiladi.

Agar

$$y' = f(x, y) \quad (6)$$

differensial tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x, y)$ bir jinsli funksiya bo'lsa, (6) bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Aytaylik, $f(x, y)$ bir jinsli funksiya bo'lsin:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Xususan, $t = \frac{1}{x}$ bo'lsa,

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

bo'ladi va (6) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7)$$

(7) tenglamani yechish uchun $\frac{y}{x} = u$ deb olamiz. Unda

$$y = ux, \quad y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u$$

bo'ladi. Bularni (7) tenglamaga qo'yib topamiz:

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$u'x = \varphi(u) - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

natijada o'zgaruvchilari ajraladigan ushbu

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

tenglamaga kelamiz. Uni integrallab topamiz:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + \ln c$$

$$\ln cx = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}.$$

Misol. Ushbu differensial tenglama yechilsin

$$y' = \frac{y}{x + y}.$$

◁ Bu tenglamaning o'ng tomonidagi

$$f(x, y) = \frac{y}{x + y}$$

bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx + ty} = \frac{ty}{t(x + y)} = \frac{y}{x + y}$$

berilgan tenglamani quyidagicha yozib

$$y' = \frac{y}{x + y} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{x + y}{x}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

so'ng,

$$\frac{y}{x} = u$$

deb olamiz u holda,

$$y = ux, y' = u'x + u$$

bo'lib, qaralayotgan tenglama ushbu ko'rinishga kelishini topamiz:

$$u'x + u = \frac{u}{1 + u}, \quad u'x = \frac{u}{1 + u} - u = -\frac{u^2}{1 + u}.$$

Natijada,

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 + u},$$

ya'ni

$$-\frac{1 + u}{u^2} du = \frac{dx}{x}$$

bo'ladi, bundan

$$\int \left(-\frac{1+u}{u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\frac{1}{u} - \ln u = \ln x + \ln c,$$

$$\frac{x}{y} - \ln \frac{y}{x} = \ln x + \ln c$$

$$x = y \ln c y$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan differensial tenglamani umumiy yechimi bo'ladi.

4-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Noma'lum funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan ushbu

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \quad (8)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Bunda $p(x)$ va $q(x)$ uzluksiz funksiyalar.

(8) tenglamaning yechimini

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

ko'rinishda izlaymiz. Demak,

$$y = u \cdot v, \quad y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

bo'lib,

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v + q(x) = 0. \quad (9)$$

Endi v ni shunday tanlaymizki,

$$v' + p \cdot v = 0$$

ya'ni

$$\frac{dv}{dx} + p \cdot v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

$$\ln v = - \int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

bo'lsin.

Bu topilgan v ni (9) tenglamaga qo'yib, hosil bo'lgan tenglamani yechamiz:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + q = 0, \quad \frac{du}{dx} = -q e^{-\int p(x)dx},$$
$$u = - \int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} dx + c.$$

Natijada,

$$y = u \cdot v = e^{-\int p(x)dx} \left(c - \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right) \quad (*)$$

bo'ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.

Misol. Ushbu

$$y' + xy - x^2 = 0$$

tenglama yechilsin.

◁ Bu tenglamaning yechimini topishda yuqorida keltirilgan (*) formuladan foydalanamiz. Misolning berilishiga ko'ra,

$$p(x) = x, \quad q(x) = -x^2$$

bo'ladi. Demak,

$$y = e^{-\int x dx} \left(c - \int (-x^2) e^{\int x dx} dx \right) =$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(c + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} \right) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$$

bo'ladi. ▷

5-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ushbu

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \quad (10)$$

ko'rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Bunda $p(x)$, $q(x)$ va $f(x)$ –uzluksiz funksiyalar.

Agar (10) tenglamada $f(x) = 0$ bo'lsa,

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

uni ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama deyiladi.

Avval chiziqli erkli hamda, chiziqli bog‘liq funksiyalar tushunchasini keltiramiz. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentga berilgan bo‘lsin.

Agar shunday o‘zgarmas α_1 va α_2 sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lib,

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$

bo‘lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq funksiyalar deyiladi.

Agar

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$

tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar deyiladi.

Masalan,

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = x$$

funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo‘ladi, chunki

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x = 0$$

tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina bajariladi.

Aytaylik,

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

bo‘ladi, bunda c_1, c_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

⇐ Shartga ko‘ra $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar tenglamaning xususiy yechimlari. Demak,

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y_1(x) \equiv 0,$$

$$y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x) \equiv 0.$$

Unda,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

funksiya ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]' = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x),$$

$$[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]'' = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)$$

bo'lgani uchun,

$$\begin{aligned} & c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + p(x)[c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)] + \\ & + q(x)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = \\ & = c_1 y_1'' + p(x)c_1 y_1'(x) + q(x)c_1 y_1(x) + \\ & + c_2 y_2''(x) + p(x)c_2 y_2'(x) + \\ & + q(x)c_2 y_2(x) = c_1 [y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + \\ & + c_2 [y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \end{aligned}$$

bo'lib, munosabatlarga ko'ra

$$\begin{aligned} & [c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]'' + p(x)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]' + \\ & + q(x)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = 0 \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu esa

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

funksiya qaralayotgan tenglamaning yechimi ekanligini bildiradi. ▸

Ko'rsatish mumkinki,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ikkinchi tartibli

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o'rinli.

Teorema. *Ushbu*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

tenglamaning umumiy yechimi shu tenglamaning xususiy yechimi bilan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

6-§. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar

Ushbu

$$y'' + py' + qy = 0$$

ko'rinishdagi tenglama (bunda, p va q o'zgarmas sonlar) o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar deyiladi.

Tenglamani yechish uchun

$$y = e^{kx}$$

deb olamiz, bunda k nolga teng bo'lmagan o'zgarmas son.

Ravshanki,

$$y' = e^{kx} \cdot k, \quad y'' = e^{kx} \cdot k^2.$$

Endi

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

larni tenglamaga qo'yib

$$k^2 e^{kx} + p \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0$$

ya'ni,

$$k^2 + pk + q = 0$$

kvadrat tenglamaga kelimiz.

Ravshanki, k yuqoridagi kvadrat tenglamaning yechimi bo'lsa, e^{kx} funksiya differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Odatda,

$$k^2 + pk + q = 0$$

kvadrat tenglama

$$y'' + py' + qy = 0$$

differensial tenglamaning xarakterislik tenglamasi deyiladi.

Ma'lumki,

$$k^2 + pk + q = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bo'ladi. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

- 1) k_1 va k_2 haqiqiy va bir biriga teng emas: $k_1 \neq k_2$
- 2) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng: $k_1 = k_2$
- 3) k_1 va k_2 kompleks sonlar: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Har bir holni alohida-alohida qarab chiqamiz.

a) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va bir-biriga teng emas ($k_1 \neq k_2$). Bu holda

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

funksiyalar berilgan tenglamaning xususiy yechimlari bo'lib, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

ko'rinishda bo'ladi, chunki

$$y' = c_1 k_1 e^{k_1 x} + c_2 k_2 e^{k_2 x}$$

$$y'' = c_1 k_1^2 e^{k_1 x} + c_2 k_2^2 e^{k_2 x}$$

va

$$\begin{aligned} & c_1 k_1^2 e^{k_1 x} + c_2 k_2^2 e^{k_2 x} + p(c_1 k_1 e^{k_1 x} + c_2 k_2 e^{k_2 x}) + \\ & + q(c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}) = 0 \\ & (c_1 k_1^2 e^{k_1 x} + p c_1 k_1 e^{k_1 x} + q c_1 e^{k_1 x}) + \\ & + (c_2 k_2^2 e^{k_2 x} + p c_2 k_2 e^{k_2 x} + q c_2 e^{k_2 x}) = 0 \end{aligned}$$

yoki

$$c_1 e^{k_1 x} (k_1^2 + p k_1 + q) + c_2 e^{k_2 x} (k_2^2 + p k_2 + q) = 0.$$

Masalan, ushbu

$$y'' - 8y' + 15y = 0$$

differensial tenglamani xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 8k + 15 = 0$$

bo'lib, y $k_1 = 5$, $k_2 = 3$ ildizlarga ega. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va ular bir-biriga teng ($k_1 = k_2$).

Bu holda xarakteristik tenglamaning ildizlari,

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

bo'lib,

$$2k_1 = -p$$

yoki,

$$2k_1 + p = 0$$

bo'ladi.

Differensial tenglamaning bitta xususiy yechimi

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimini

$$y_2 = u(x) \cdot e^{k_1 x}$$

ko'rinishida izlaymiz. Bunda noma'lum $u = u(x)$ funksiyani topish uchun y_1'' , y_2'' larni topamiz.

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + u k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + u k_1)$$

$$y_2'' = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Endi,

$$y_2 = u e^{k_1 x}, \quad y_2' = e^{k_1 x} (u' + u k_1)$$

$$y_2'' = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$$

larni

$$y'' + p y' + q y = 0$$

tenglamaga qo'yamiz:

$$e^{k_1 x} [(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u) + p e^{k_1 x} (u' + k_1 u) + q u e^{k_1 x}] = 0$$

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + k_1 p + q)u] = 0$$

k xarakteristik tenglamaning karrali ildizi va $2k_1 + p = 0$ bo'lgani uchun

$$e^{k_1 x} = 0 \text{ yoki } u'' = 0$$

bo'lishi lozim, uni integrallab topamiz:

$$u(x) = Ax + B$$

Xususiy holda, $B = 0$, $A = 1$ deb olsak, $u(x) = x$ bo'ladi.

Shunday qilib, ikkinchi xususiy yechim

$$y_2 = x e^{k_1 x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Demak, qaralayotgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (c_1 + c_2 x)$$

bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$4k^2 - 12k + 9 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$ bo'lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$$

bo'ladi.

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lib, $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ bo'lsin.

Bu holda qaralayotgan differensial tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbotlanadiki, agar haqiqiy koeffitsientli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimlari kompleks sonlardan iborat bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlari ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

Xususiy yechim,

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

bo'lgani uchun,

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

lar ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$y'' - 4y' + 7y = 0$$

differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 7 = 0$ ning ildizlari

$$k_1 = 2 + i\sqrt{3}, \quad k_2 = 2 - i\sqrt{3}$$

bo'lib, differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{2x} (c_1 \cos \sqrt{3} x + c_2 \sin \sqrt{3} x)$$

bo'ladi.

4. O'zgarmas koeffitsientli bir jinslimas chiziqli tenglamalar

Ushbu,

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

ko'rinishdagi differensial tenglama ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi. Bunda p, q haqiqiy sonlar.

Bu differensial tenglamaning yechimini $f(x)$ funksiyaning berilishiga qarab topamiz.

1^o. $y'' + py' + qy = f(x)$ tenglamaning o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya bilan ko'phad ko'paytmasidan

$$f(x) = p_m(x)e^{\alpha x}$$

iborat, bunda

$$p_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m.$$

Tasdiq. Agar

$$y'' + py' + qy = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ bo'lib, $u = u(x)$ esa

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

tenglamaning ixtiyoriy xususiy yechimi bo'lsa, u holda tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \bar{y} + u$$

bo'ladi.

Bizga bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$k^2 + pk + q = 0$$

xarakteristik tenglamaning ildizlari bilan bog'lab topilishi ma'lum. Xususiy yechimni esa quyidagi hollarga muvofiq topamiz.

a) α soni $k^2 + pk + q = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol.

Bu holda xususiy yechimni

$$y = (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m)e^{\alpha x} = Q_m(x)e^{\alpha x}$$

ko'rinishida izlaymiz, bunda $Q_m(x) - m$ -darajali ko'phad, u' , u'' larni topamiz:

$$u' = (a_0mx^{m-1} + a_1(m-1)x^{m-2} + \dots + a_{m-1})e^{\alpha x} + (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m)\alpha e^{\alpha x}.$$

$$\begin{aligned} u'' = & [a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1(m-1)(m-2)x^{m-3} + \dots + a_{m-2}]e^{\alpha x} + \\ & + [a_0x^{m-1} + a_1(m-1)x^{m-2} + \dots + a_{m-1}]\alpha e^{\alpha x} + \\ & + [a_0x^{m-1} + a_1(m-1)x^{m-2} + \dots + a_{m-1}]e^{\alpha x} + \\ & + (a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m)e^{\alpha x}\alpha^2 \end{aligned}$$

u' va u'' larning ifodalarini tenglamaga qo'yib, so'ng soddalashtirish natijasida ushbu

$$Q_m''(x) + (2\alpha + p)Q_m'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_m(x) = p_m(x)$$

tenglama hosil bo'ladi, bunda $Q_m'' - (m-2)$ darajali ko'phad, $Q_m' - (m-1)$ darajali ko'phad.

Tenglamaning chap va o'ng tomonlari m –darajali ko'phadlardan iborat. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglab, noma'lum $a_0, a_1, \dots, a_m$ koeffitsientlarni topamiz.

b) α soni $k^2 + pk + q = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lgan hol. Bu holda xususiy yechimi $u = xQ_m(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda izlaniladi.

c) α soni xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo'lgan hol. Bu holda

$$u = x^2 Q_m(x) e^{\alpha x}$$

ko'rinishda izlanadi.

19-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

1-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari va tasdiqlari

1⁰. Tasodifiy hodisa tushunchasi

Tabiatni, texnik jarayonlari kuzatganimizda turli hodisalar yuz berishini ko‘ramiz.

Masalan, Quyoshning chiqishi va botishi, otilgan o‘qning nishonga tegishi yoki tegmasligi, havo o‘zgarib, yomg‘ir yoki qor yog‘ishi, tangani tashlash natijasida raqamli yoki gerbli tamoni tushishi, ip yigirishda uzilish uzilmasligi hodisalari misol bo‘ladi.

Umuman aytganda hodisa deganda kuzatish yoki tajriba natijasida kelgan dalil (fakt) tushuniladi.

Odatda, hodisalar ma‘lum shartlar (shartlar majmuasi) bajarilganda yoki tajriba (sinov) o‘tkazish natijasida sodir bo‘ladi.

Masalan, tangani tashlashdan iborat tajribani qaraylik. Tanganing u yoki bu tomonini tushishini to‘la ishonch bilan oldindan aytib bo‘lmaydi, yoki ekilgan chigit urug‘ini unib chiqishini yoki chiqmasligini aytish qiyin. Bunga o‘xshash barcha hollarda tajribaning natijasi turli tasodiflarga bog‘liq deb hisoblanadi va uni tasodifiy hodisa sifatida qaraladi.

Tajriba natijasida (biror shartlar majmui bajarilganda) ro‘y berish ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida gerbli tomoni tushishi, yoki raqamli tomoni tushishi hodisasi tasodifiy hodisa bo‘ladi.

Tajriba natijasida albatta ro‘y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi.

Tajriba natijasida mutlaqo ro‘y bermaydigan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi.

Odatda hodisalar bosh harflar bilan belgilanadi. Muqarrar hodisa U harfi, mumkin bo‘lmagan hodisa esa V harfi bilan belgilanadi. Keyinchalik, tasodifiy hodisa deyish o‘rniga hodisa deb ketaveramiz.

Tajribaning har bir hodisasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deyiladi.

Masalan, tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada sodir bo'ladigan elementar hodisalar quyidagicha bo'ladi.

Agar G -tanganing gerb tomoni tushishi hodisasi, R -tanganing raqam tomoni tushishi hodisasi bo'lsa, birinchi tajribada (G, R) , ikkinchi tajribada (G, G) , (G, R) , (R, G) , (R, R) bo'ladi. Demak, tajriba natijasida to'rtta elementar hodisalar yuzaga keladi.

2⁰. Hodisalar ustida amallar (Hodisalar algebrasi)

Aytaylik, tajriba natijasida A va B hodisalar sodir bo'lishi mumkin deylik.

1-Ta'rif. Agar A hodisa sodir bo'lganda hamma vaqt B hodisa ham sodir bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, kubikni tashlash tajribasida A -ikki raqamli tomonini tushishi hodisasi, B esa juft raqamli tomonini tushishi hodisasi bo'lsa, $A \subset B$ bo'ladi.

Agar $A \subset B$, $B \subset A$ bolsa, A va B teng kuchli hodisalar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

2-Ta'rif. A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan C hodisa, A va B hodisalarning yig'indisi deyiladi va

$$C = A + B$$

kabi yoziladi.

Xuddi shunga o'xshash $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar yig'indisi ta'riflanadi.

Keltirilgan ta'rifdan $A + B = B + A$, $A + A = A$ bo'lishi kelib chiqadi.

3-Ta'rif. A va B hodisalarning (bir vaqtda) sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan D hodisa A va B hodisalarning ko'paytmasi deyiladi. Uni $D = A \cdot B$ kabi yoziladi. Xuddi shunga o'xshash $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ko'paytmasi ta'riflanadi. Bu ta'rifdan $A \cdot B = B \cdot A$, $A \cdot A = A$ bo'lishi kelib chiqadi.

4-Ta'rif. Agar A hodisaning sodir bo'lishi B hodisani ham sodir bo'lishini inkor etmasa, A va B birgalikda bo'lgan hodisalar deyiladi.

Masalan, kubikni bir marta tashlash tajribasida 3 raqamli tomon tushishi hodisasi toq raqamli tomonini tushish hodisasi birgalikda bo'lgan hodisalar bo'ladi.

5-Ta'rif. Agar A hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning sodir bo'lishini inkor etsa, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Bu holda $A \cdot B = V$ bo'ladi.

Masalan, tangani bir marta tashlash tajribasida G tomonini tushish hodisasi A , R tomonini tushish hodisasi B lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

Agar tajriba natijasida sodir bo'lishi mumkin bo'lgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hodisalar teng imkoniyatli hodisalar deyiladi.

Agar A va B hodisalar uchun

$$A + B = U, A \cdot B = V$$

bo'lsa, A va B o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\bar{A}$ kabi belgilanadi.

3⁰. Hodisa ehtimolining ta'rifi

Tajriba natijasida birqancha hodisalar (ko'pincha ularni sanash mumkin bo'ladi) yuzaga keladi. Bunda, ba'zan hodisalarning yuzaga kelishi imkoniyati boshqa hodisalarning yuzaga kelishi imkoniyatidan ko'proq yoki kamroq bo'lishi mumkin. Uni xarakterlaydigan miqdorni aniqlash hodisa ehtimoli tushunchasiga olib keladi.

Aytaylik, tajriba natijasida bir xil imkoniyat bilan $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar yuzaga kelgan deylik.

6-Ta'rif. Agar

$$1) e_1 + e_2 + \dots + e_n = U$$

$$2) e_i \cdot e_j = V, (i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j)$$

bo'lsa, $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar juft-jufti birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi deyiladi.

Masalan, kubikni tashlash tajribasida e_i -kubikning i raqamli ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) tomonini tushishi hodisasi deyilsa, unda $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi. Bunda $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ teng imkoniyatli elementar hodisalar.

Ikki A va B hodisalarni qaraylik.

Agar A hodisaning sodir bo'lishi o'z navbatida B hodisani ergashtirsa, A hodisa B hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi hodisa deyiladi. Masalan, A hodisa kubikni tashlash tajribasida uning juft raqamli tomonini tushishidan iborat bo'lsin. Bunda e_2, e_4, e_6 elementar hodisalar A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi.

Aytaylik, n ta hodisaning gruppasini tashkil etuvchi

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

elementar hodisalardan m tasi A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'dirsin.

7-Ta'rif. Ushbu

$$\frac{m}{n}$$

son A hodisaning ehtimoli deyiladi, va $P(A)$ kabi yoziladi:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Misol. Tajriba kubikni tashlash bo'lib, A hodisa uning juft raqamli tomonini tushishdan iborat bo'lsin. A hodisaning ehtimoli topilsin.

Ravshanki, bu holda elementar hodisalar

$$e_1 = \{1\}, e_2 = \{2\}, e_3 = \{3\}, e_4 = \{4\}, e_5 = \{5\}, e_6 = \{6\}$$

bo'lib,

$$e_2 = \{2\}, e_4 = \{4\}, e_6 = \{6\}$$

lar A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi. Demak, (1) formulaga ko'ra A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

4⁰. Ehtimolning sodda xossalari. Hodisa ehtimoli ta'rifidan uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi.

1) Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng bo'ladi.

$$P(U) = 1.$$

Bu holda hodisa ehtimoli ta'rifidagi n va m lar uchun $n = m$ bo'lib,

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

bo'ladi.

2) Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli 0 ga teng bo'ladi.

$$P(V) = 0$$

Bu holda $m = 0$ bo'lib,

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

bo'ladi.

3) Tasodifiy hodisa ehtimoli musbat son bo'lib, u 0 bilan 1 orasida bo'ladi:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Bu holda ta'rifdagi n va m lar uchun $0 \leq m \leq n$ bo'lib,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}$$

ya'ni

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

bo'ladi.

4) A hodisaga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisaning ehtimoli

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

bo'ladi.

Aytaylik, A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

bo'lsin. $\bar{A}$ hodisaga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni $n - m$ ga teng bo'ladi. Unda

$$P(\bar{A}) = \frac{n - m}{n}$$

bo‘lib, keyingi tenglikdan

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

5⁰. Ehtimolning statistik ta’rifi

Ko‘pincha elementar hodisalar soni chekli va ular teng imkoniyatli bo‘lavermaydi. Bunday holda hodisa ehtimolini (1) formula yordamida topib bo‘lmaydi.

Aytaylik, n marta tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, shu natijalaridan biri A hodisa bo‘lsin. Ravshanki, tajriba natijasida A hodisa bir necha bor sodir bo‘lishi mumkin.

Faraz qilaylik, A hodisa μ marta sodir bo‘lsin.

8-Ta’rif. A hodisaning sodir bo‘lishi soni μ ni tajribalar soni n ga nisbati A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi va u w_n kabi belgilanadi:

$$w_n = \frac{\mu}{n} \quad (2)$$

Ravshanki,

$$0 \leq w_n \leq 1$$

(2) tenglikdan

$$\mu = w_n \cdot n$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, n ta tajribada A hodisaning sodir bo‘lishi soni uning nisbiy chastotasini tajribalar soniga ko‘paytirilganiga teng bo‘ladi.

Ko‘p sondagi tajribalar va kuzatishlar natijasida n sonining o‘sib borishi bilan nisbiy chastota biror son atrofida tebranib turishi aniqlangan. Masalan, tangani tashlash tajribasini qaraylik. Bunda tanganing gerbli tomoni tushishi hodisasi A ning nisbiy chastotasi

1-odamda 0,501,

2-odamda 0,485,

3-odamda 0,509,

4-odamda 0,506,

5-odamda 0,485,

6-odamda 0,488,

7-odamda 0,500,

8-odamda 0,497,

9-odamda 0,494,

10-odamda 0,484

bo'ishi kuzatilgan. Keltirilgan ma'lumotlardan ko'rinadiki A hodisaning nisbiy chastotasi 0,5 soni atrofida tebranib turar ekan.

9-Ta'rif. Agar n sonining katta qiymatlarida A hodisaning nisbiy chastotasi p soni atrofida tebranib tursa, p soni A hodisaning ehtimoli deyiladi.

Hodisa ehtimolining bu statistik ta'rifi statistik masalalarni hal qilishda ko'p foydalaniladi.

6⁰. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

Faraz qilaylik, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib, $P(A)$, $P(B)$ ularning ehtimollari bo'lsin.

1-Teorema. A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Aytaylik,

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

bo'lsin. A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun A hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning sodir bo'lishini inkor etadi va aksincha. Demak, $A + B$ hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni $m_1 + m_2$ bo'ladi. (1) formulaga ko'ra

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n}$$

bo'lib, undan

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

2-Teorema. *A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli uchun*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Aytaylik, barcha n ta elementar hodisalardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi B hodisaga, m_3 tasi esa $A \cdot B$ hodisaga qulaylik tug'dirsın.

Ravshanki, $A + B$ hodisaga $m_1 + m_2 - m_3$ ta elementar hodisalar qulaylik tug'diradi. Unda

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{n}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$P(A + B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

10-Ta'rif. *A va B hodisalarning har birining sodir bo'lishi ehtimoli boshqasining sodir bo'lishi yoki bo'lmasligi ehtimoliga bog'liq bo'lmasa A va B hodisalar erkli hodisalar deyiladi. aks holda A va B hodisalar bog'liq hodisalar deyiladi.*

A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A + B) = P(A) \cdot P(B).$$

Aytaylik,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{i}{k}$$

bo'lsin. Ravshanki, barcha $n \cdot k$ ta elementar hodisalardan $m \cdot i$ tasi $A \cdot B$ hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi. Unda ta'rifga ko'ra

$$P(A \cdot B) = \frac{mi}{nk}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$P(A \cdot B) = \frac{mi}{nk} = \frac{m}{n} \cdot \frac{i}{k} = P(A) \cdot P(B)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, A va B bog'liq hodisalar bo'lsin.

11-Ta'rif. A hodisani sodir bo'lgan deb, topilgan B hodisaning ehtimoli shartli ehtimol deyiladi va $P_A(B)$ kabi yoziladi.

3-Teorema. A va B bog'liq hodisalar ko'paytmasining ehtimoli

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

bo'ladi.

Aytaylik, barcha n ta elementar hodisalardan m tasi A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'dirib, bu m ta elementar hodisalardan k tasi B hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'dirsin.

Ravshanki, $A \cdot B$ hodisaga k ta elementar hodisalar qulaylik tug'diradi. Hodisa ehtimoli ta'rifidan foydalanib

$$P(A \cdot B) = \frac{k}{n}$$

bo'lishini topamiz.

Ayni paytda

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P_A(B) = \frac{k}{m}$$

bo'ladi.

Keyingi tengliklardan

$$P(A \cdot B) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) \cdot P_A(B)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

7⁰. To'la ehtimol formulasi

Faraz qilaylik,

$$H_1, H_2, \dots, H_n \quad (4)$$

hodisalar:

- 1) O'zaro bir-biri bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib,

2) Ular hodisalarning to'la gruppasini tashkil etsin.

Aytaylik, A hodisasi (4) hodisalarning bittasi va faqat bittasi sodir bo'lganda sodir bo'lsin.

Odatda,

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

hodisaning gipotezalari deyiladi.

5-Teorema. A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) \quad (5)$$

bo'ladi.

A hodisa $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalarning bittasi va faqat bittasi sodir bo'lgandagina sodir bo'lgani uchun

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A$$

Modomiki, $H_1, H_2, \dots, H_n$ lar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar ekan, unda

$$H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$$

hodisalar ham o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi. Ehtimollarning qo'shish va ko'paytirish teoremlaridan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A) = \\ &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \end{aligned}$$

(5) formula to'la ehtimol formulasi deyiladi.

8⁰. Bayes formulasi

Aytaylik, $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmagan gipotezalarning to'la gruppasidan iborat bo'lib, tajriba o'tkazishga qadar ehtimollari $P(H_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ma'lum bo'lsin.

Tajriba natijasida A hodisani sodir bo'ldi degan shartda tajribadan so'ng H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hodisalarning ehtimollarini topish masalasini qaraylik. Ravshanki, bu masala

$$P_A(H_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ehtimolni topish bilan hal etiladi.

Ehtimollarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra

$$P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$$

bo'ladi, bundan

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

To'la ehtimol formulasidan foydalanib

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

bo'lishini topamiz. Bu formula Bayes formulasi deyiladi.

2-§. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi

Odatda, ma'lum shartlar bajarilishi natijasida ba'zi hodisalarning yuzaga kelishini tajriba deb tushiniladi.

1⁰. Bernulli sxemasi

Biror tajribalar ketma-ketligini qaraylik. Agar har bir tajriba natijasining (hodisaning) ehtimoli boshqa tajriba natijasining sodir bo'lmashligi yoki bo'lishiga bog'liq bo'lmasa, bunday tajribalar ketma-ketligi bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi deyiladi.

Aytaylik, n ta tajriba o'tkazilgan bo'lib, ular o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligini hosil qilsin. Har bir tajribada A hodisaning sodir bo'lishi ehtimoli p ga teng bo'lsin. Bunday tajribalar ketma-ketligi Bernulli sxemasi deyiladi.

Agar Bernulli sxemasida A hodisaning sodir bo'lmashligi, ($\bar{A}$ hodisaning sodir bo'lishi) ehtimolini q desak, unda $q=1-p$ bo'ladi.

Bernulli sxemasida asosiy masala yuqoridagi n ta tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lishi hodisasining ehtimoligini topishdan iborat. Bu ehtimolni $P_n(k)$ bilan belgilaymiz.

Aytaylik, n ta tajribada A hodisasi biror marta ham sodir bo'lsin. Bu holda har bir tajribada $\bar{A}$ hodisasi sodir bo'lib,

$$\underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{n \text{ ta}}$$

hodisaga ega bo'lamiz. Bu hodisaning ehtimoli

$$P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}) = \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n \text{ ta}} = q^n$$

bo'ladi. Demak, n ta tajribada A hodisaning biror marta ham sodir bo'lmashligi ehtimoli

$$P_n(0) = q^n$$

bo'ladi.

Aytaylik, n ta tajribada A hodisa faqat bir marta sodir bo'lsin. Bu holda quyidagi n ta

$$A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}, \bar{A} \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}, \dots, \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A} \cdot A$$

hodisalar hosil bo'lib, ularning har birining ehtimoli $p \cdot q^{n-1}$ bo'ladi.

Ehtimollarni qo'shish teoremasidan foydalanib

$$P_n(1) = P(A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) + P(\bar{A} \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) + \dots + P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A} \cdot A) = n \cdot p \cdot q^{n-1}$$

bo'lishini topamiz.

Ma'lumki,

$$C_n^1 = n.$$

Demak, n ta tajribada A hodisaning faqat bir marta sodir bo'lish ehtimoli

$$P_n(1) = C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$$

bo'ladi.

Aytaylik, n ta tajribada A hodisasi faqat 2 marta sodir bo'lsin. Bu holda

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

ta

$$A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}, A \cdot \bar{A} \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}, \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}, \dots, \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A} \cdot A \cdot A$$

hodisalar hosil bo'lib, ularning har birining ehtimoli $p^2 \cdot q^{n-2}$ ga teng bo'ladi.

Ehtimollarni qo'shish teoremasidan foydalanib

$$P_n(2) = P(A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) + P(A \cdot \bar{A} \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) + \\ P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot A \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) + \dots \\ + P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A} \cdot A \cdot A) = C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$$

Demak, n ta tajribada A hodisani ikki marta sodir bo'lish ehtimoli

$$P_n(2) = C_n^2 p^2 q^{n-2}$$

bo'ladi.

Xuddi shunday mulohaza asosida n ta tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1)$$

bo'lishi ko'rsatiladi.

(1) formula Bernulli formulasi deyiladi.

Misol. Tangani 10 marta tashlashda gerb tomoni 5 marta tushish ehtimoli topilsin.

Tangani bittalab tashlash hodisasida gerb tomonini tushish ehtimoli $p = \frac{1}{2}$

bo'ladi. Bundan $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Bernulli formulasidan foydalanib topamiz:

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024}.$$

Ravshanki,

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n) = \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1.$$

n ta tajriba o'tkazilgan bo'lsin. Quyidagi hodisalarni qaraylik:

1. Hodisaning k dan kam marta sodir bo'lish hodisasi:

$$(0 \leq \mu \leq k-1).$$

2. Hodisaning k dan ko'p marta sodir bo'lishi hodisasi:

$$(k+1 \leq \mu \leq n).$$

3. Hodisaning kamida k marta sodir bo'lishi hodisasi:

$$(k \leq \mu \leq n).$$

4. Hodisaning ko'pi bilan k marta sodir bo'lishi hodisasi

$$(0 \leq \mu \leq k).$$

Yuqorida keltirilgan hodisalarning ehtimollari quyidagicha bo'ladi:

$$P_n(0 \leq \mu \leq k-1) = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m);$$

$$P_n(k+1 \leq \mu \leq n) = \sum_{m=k+1}^n P_n(m);$$

$$P_n(k \leq \mu \leq n) = \sum_{m=k}^n P_n(m);$$

$$P_n(0 \leq \mu \leq k) = \sum_{m=0}^k P_n(m).$$

2⁰. Laplasning lokal teoremasi

Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda $P_n(k)$ ehtimolni Bernulli formulasiga ko'ra hisoblash katta qiyinchiliklar tug'diradi. Ravshanki, bunday holda $P_n(k)$ ehtimolni taqribiy hisoblash masalasi yuzaga keladi. Laplas teoremasi $P_n(k)$ ehtimolni taqribiy hisoblash imkonini beradigan formulani ifodalaydi.

1-Teorema (Laplas teoremasi). Bernulli sxemasida n ta tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lish ehtimoli uchun

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

bo'ladi, bunda

$$P(A) = p, \quad q = 1 - p, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Agar

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

deyilsa, (2) formula ushbu

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (3)$$

ko‘rinishga keladi.

Eslatma. $\varphi(x)$ juft funksiya ($\varphi(-x) = \varphi(x)$) bo‘lib, uning qiymatlarini aniqlaydigan jadval 1-ilovada keltirilgan.

Misol. Kubikni 800 marta tashlaganda uchga karrali bo‘lgan raqamlarning 267 marta tushish ehtimoli topilsin.

Bu holda

$$n = 800, k = 267, p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$$

bo‘lib, (3) formulaga ko‘ra

$$P_{800}(267) \approx \frac{1}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \varphi\left(\frac{267 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) = \frac{3}{10} \varphi\left(\frac{1}{40}\right)$$

bo‘ladi. Jadvalga binoan

$$\varphi\left(\frac{1}{40}\right) = \varphi(0.025) \approx 0,398812$$

bo‘lishini e‘tiborga olib

$$P_{800}(267) \approx 0,03$$

bo‘lishini topamiz.

3⁰. Laplasning integral toeremasi

Aytaylik, Bernulli sxemasida A hodisaning ehtimoli $P(A) = p$ ($0 < p < 1$) bo‘lib, tajribalar soni n yetarlicha katta bo‘lsin. Bu tajribada A hodisani k_1 martadan kam bo‘lmagan, k_2 martadan ortiq bo‘lmagan sonda sodir bo‘lishi ehtimolini qaraylik va uni

$$P_n(k_1, k_2)$$

deb belgilaylik.

Ehtimollarni qo‘shish teoremasidan foydalanib topamiz:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \quad (4).$$

Ravshanki, n va k lar yetarlicha katta sonlar bo‘lganda $P_n(k_1, k_2)$ ehtimolni (4) formula yordamida hisoblash qiyin bo‘ladi. Shu munosabat bilan $P_n(k_1, k_2)$ ehtimolni taqribiy hisoblash masalasi yuzaga keladi.

Avvalo, (4) formulada keltirilgan $P_n(k)$ ning taqribiy ifodasini (4) ga qo‘yib, ushbu

$$P_n(k_1, k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (5)$$

taqribiy formulaga kelimiz.

Agar $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ($k = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$) deyilsa, unda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1) - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

bo‘lib, (5) munosabat quyidagicha

$$P_n(k_1, k_2) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \varphi(x_k) \Delta x_k$$

ko‘rinishga keladi. Bu munosabatdagi yig‘indi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiyaning $[x_{k_1}, x_{k_2}]$ oraliqdagi integral yig‘indisi va $n \rightarrow \infty$ da

$\Delta x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}} \rightarrow 0$ bo‘lganligi sababli yig‘indining limiti ushbu

$$\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} \varphi(x) dx$$

aniq integral bo‘ladi. Binobarin, n ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \varphi(x_k) \Delta x_k = \int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} \varphi(x) dx$$

deb olish mumkin.

Natijada

$$P_n(k_1, k_2) \approx \int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

bo'ladi, bunda

$$x_{k_1} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_{k_2} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Shunday qilib quyidagi Laplas teoremasiga kelamiz.

2-Teorema (Laplasning integral teoremasi). Bernulli sxemasi bajarilganda $P_n(k_1, k_2)$ ehtimol uchun ushbu

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (6)$$

taqribiy formula o'rinli bo'ladi, bunda $0 < p < 1$.

Ushbu

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

funksiya Laplas funksiyasi yoki ehtimol integrali deyiladi. Bu funksiya yordamida yuqoridagi taqribiy quyidagicha yoziladi:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (7)$$

Odatda keyingi taqribiy formula Laplasning integral formulasi deyiladi.

$\Phi(x)$ funksiyaning qiymatlarini topish jadvali tuzilgan. U 2-ilovada keltirilgan. x ning $x > 5$ qiymatlari uchun $\Phi(x) = 0,5$.

Misol. Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsin. 400 ta mahsulotdan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo'lishi ehtimoli topilsin.

Masalaning shartiga ko'ra

$$n = 400, k_1 = 70, k_2 = 130, p = 0.2, q = 1 - p = 0.8.$$

Izlanayotgan ehtimolni (7) formulaga ko'ra taqribiy hisoblaymiz:

$$P_{400}(70, 130) \approx \Phi\left(\frac{130 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) - \Phi\left(\frac{70 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) = \Phi(6.25) - \Phi(-1.25)$$

Jadvalga ko'ra (2-ilova)

$$\Phi(-1.25) = -0.39435;$$

$$\Phi(6.25) = 0.5$$

bo'lib,

$$P_{400}(70, 130) \approx 0.5 - (-0.39435) = 0.89435$$

bo'ladi.

4.0. Puasson teoremasi

Biz yuqorida Bernulli sxemasiga doir masalani qaraganimizda A hodisaning sodir bo'lish ehtimoli o'zgarmas va p ga teng ($0 < p < 1$) deb qaraylik. Hodisaning ehtimoli tajribalar soni n ga bog'liq bo'lgan hollar ham uchraydi.

Aytaylik, Bernulli sxemasida A hodisaning ehtimoli $P(A) = p_n$ ($p_n > 0$) bo'lib, u n ga bog'liq va

1. $n \rightarrow \infty$ da $p_n \rightarrow 0$;
2. $p_n \cdot n = \lambda = \text{const}$, ya'ni $p_n = \frac{\lambda}{n}$ bo'lsin.

3-Teorema (Puasson teoremasi). Bernulli sxemasidagi $P_n(k)$ ehtimol uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

bo‘ladi.

Bernulli formulasiga binoan

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Demak,

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \quad (8).$$

Bu tengsizlikning o‘ng tomonidagi

$$C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k$$

ko‘paytuvchi uchun

$$\begin{aligned} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n - (k-1)]}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

bo‘lib, $n \rightarrow \infty$ da

$$C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}$$

bo‘ladi.

(8) formuladagi $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ ko‘paytuvchi uchun

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^{-\frac{1}{\lambda}} \right\}^{-\lambda} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

bo‘lib, $n \rightarrow \infty$ da

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}.$$

Natijada (8) munosabatdan $n \rightarrow \infty$ da

$$P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, n yetarlicha katta bo'lsa, $P_n(k)$ ehtimol o'z limitidan yetarlicha kam farq qiladi. Binobarin, n ning yetarlicha katta qiymatlarida ushbu

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (9)$$

taqribiy formula o'rinli bo'ladi. (9) formula Puasson formulasi deyiladi.

Misol. Zavodda 500 vagon ta'mirdan chiqarilgan. Agar vagonlarni nosoz ta'mirlanganligi ehtimoli 0,002 bo'lsa, ta'mirlangan vagonlardan 3 tasining nosoz ta'mirlanganligi ehtimoli topilsin.

Masalaning shartiga ko'ra

$$n = 500, p_n = 0,002, k = 3, \lambda = k \cdot p_n = 500 \cdot 0,002 = 1.$$

Unda (9) formulaga ko'ra

$$P_{500}(3) \approx \frac{1}{3!} e^{-1} \approx 0,06$$

ga teng bo'ladi.

3-§. Tasodifiy miqdorlar

1⁰. Tasodifiy miqdor tushunchasi

Ko'p holda tabiatda, fan va texnikada uchraydigan miqdorlarning qiymatlarini aniq aytib bo'lmaydi. Masalan, biror shaharda bir oy davomida tug'ilgan o'g'il bolalar sonini, bir yil davomida yer yuziga tushadigan meteoritlar sonini, mo'ljalga qarab otilgan o'qning mo'ljaldan o'q tekkan joygacha bo'lgan masofani aniq aytib bo'lmaydi.

Bunday vaziyatlar kelib, chiqishiga miqdorlarning turli tasodifiy holatlar ta'sirida bo'lishidadir.

Tasodifiy holatlar ta'sirida u yoki bu son qiymatlaridan birini qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdor tasodifiy miqdor deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan misollarda tug‘iladigan o‘g‘il bolalar soni, yerga tushadigan meteoritlar soni tasodifiy miqdorlar bo‘ladi.

Tasodifiy miqdorlar $\xi, \eta, \dots$ (yoki $x, y, \dots$) harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar asosan ikki xil bo‘ladi:

1. Diskret tasodifiy miqdorlar;
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Agar ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar soni chekli yoki sanoqli bo‘lsa, ξ diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Masalan, bir shaharda bir yil davomida tug‘iladigan o‘g‘il bolalar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari biror oraliqdagi barcha qiymatlardan iborat bo‘lsa, ξ uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Masalan, mo‘ljalga qarab otilgan o‘qning mo‘ljaldan o‘q tekkan joygacha bo‘lgan masofani ifodalovchi tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘ladi.

2^o. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni

Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

lar esa uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘lsin.

ξ tasodifiy miqdor to‘g‘risida to‘liq ma’lumotga ega bo‘lish u bilan bog‘liq bo‘lgan masalalarni sifatli va samarali hal qilishda yordam beradi.

Buning uchun ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarini bilishdan tashqari ularni qanday ehtimol bilan qabul qilishini bilish kerak bo‘ladi.

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlarni mos ravishda

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

ehtimollar bilan qabul qilsin:

$$p(\xi = x_1) = p_1, p(\xi = x_2) = p_2, \dots, p(\xi = x_n) = p_n.$$

Ravshanki,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

bo'ladi.

Diskret tasodifiy qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi munosabat tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.

Ko'p hollarda diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ushbu

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

jadval orqali belgilanadi.

3⁰. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va uning xossalari

Aytaylik, ξ biror diskret tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu tasodifiy miqdor taqsimot qonunining ma'lum bo'lishi tasodifiy miqdorni to'la xarakterlaydi, ya'ni u to'g'risida to'liq ma'lumotga ega bo'lish imkonini beradi.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni noma'lum bo'lgan holda uni tasodifiy miqdorning soni xarakteristikalarini (matematik kutilishi va dispersiyasi) yordamida o'rganiladi.

Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

bo'lsin. Tasodifiy miqdor bu qiymatlarni mos ravishda

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

ehtimollar bilan qabul qilsin:

$$p = p_1(\xi = x_1), p = p_2(\xi = x_2), \dots, p = p_n(\xi = x_n).$$

Ta’rif. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini ularning mos ehtimollariga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan ko‘paytmalar yig‘indisi ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deyiladi va $M(\xi)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k.$$

Quyidagi masalani qaraylik. Aytaylik, n ta tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, bunda ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlarni mos ravishda $m_1, m_2, \dots, m_k$ martadan qabul qilsin, bunda

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_k \cdot m_k}{n}$$

miqdor ξ tasodifiy miqdorning qabul qilgan qiymatlarini o‘rta arifmetik qiymatini ifodalaydi. Keyingi tenglikdan

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{m_k}{n}$$

kelib chiqadi. Ma’lumki,

$$\frac{m_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

son $\{\xi = x_i\}$ hodisaning nisbiy chastotasi

$$w_i = \frac{m_i}{n}$$

ni ifodalaydi. Bu nisbiy chatota $\{\xi = x_i\}$ hodisa ehtimoli $p_i = p\{\xi = x_i\}$ ga tahminan teng bo‘ladi, ya’ni shuni e’tiborga olib, topamiz

$$\bar{x} = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_k \cdot w_k \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = M(\xi).$$

Demak, ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi shu tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari o‘rta arifmetigiga teng bo‘lar ekan.

Endi tasodifiy miqdor kutilishining xossalarini keltiramiz:

1-xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu sonning o'ziga teng:

$$M(c) = c, (c = \text{const}).$$

Haqiqatan ham, c ni faqat bitta c qiymatni qabul qiladigan diskret tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Ravshanki,

$$p = p\{\xi = c\} = 1$$

bo'lib,

$$M(c) = c \cdot 1 = c$$

bo'ladi.

2-xossa. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor c o'zgarmas son bo'lsa, u holda

$$M(c \cdot \xi) = c \cdot M(\xi)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas miqdorni matematik kutilishi belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Ma'lumki,

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Unda

$$M(c \cdot \xi) = c \cdot x_1 \cdot p_1 + c \cdot x_2 \cdot p_2 + \dots + c \cdot x_n \cdot p_n$$

yoki

$$M(c \cdot \xi) = c \cdot (x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n) = c \cdot M(\xi)$$

bo'ladi.

Tasodifiy miqdor matematik kutilishining keyingi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Avvalo ba'zi tushunchalarni aytib o'tamiz.

Aytaylik, ξ_1 va ξ_2 diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari mos ravishda

$$x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$$

bo'lsin. Ushbu

$$z_{ij} = x_i + y_j, (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan η tasodifiy miqdor ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar yig'indisi deyiladi, bunda

$$p_{ij} = p\{\eta = z_{ij}\} = p\{\xi = x_i\} \cdot p_{\xi_1=x_i}\{\xi_2=y_j\}.$$

Shu kabi ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar ayirmasi $(\xi_1 - \xi_2)$ hamda ko'paytmasi $(\xi_1 \cdot \xi_2)$ tushunchalari kiritiladi.

Agar ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlarning har birini taqsimot qonuni, boshqasining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini qanday qabul qilishiga bog'liq bo'lmasa, ξ_1 va ξ_2 o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar deyiladi.

3-xossa. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar yig'indisi $\xi_1 + \xi_2$ ning matematik kutilishi, ularning matematik kutilishlari yig'indisiga teng.

ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari bilan berilgan bo'lsin:

ξ_1	x_1	x_2	ξ_2	y_1	y_2
p	p_1	p_2	q	q_1	q_2

$\xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdorning hamma mumkin bo'lgan qiymatlarini tuzamiz:

$$x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2.$$

Bu qiymatlarga mos ehtimollar mos ravishda

$$p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$$

bo'lsin. U holda $\xi_1 + \xi_2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

$$\begin{aligned} M(\xi_1 + \xi_2) &= (x_1 + y_1) \cdot p_{11} + (x_1 + y_2) \cdot p_{12} + (x_2 + y_1) \cdot p_{21} + (x_2 + y_2) \cdot p_{22} = \\ &= x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22}) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Endi $p_{11} + p_{12} = p_1$ bo'lishini ko'rsatamiz.

$\{\xi_1 = x_1\}$ hodisa $\{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + x_2\}$ va $\{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + y_1\}$ birgalikda bo'lmagan hodisalarning yig'indisidan iborat. Shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra

$$\begin{aligned} p_1 &= p\{\xi_1 = x_1\} = p(\{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + x_2\} + \{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + y_1\}) = \\ &= p(\{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + x_2\}) + p(\{\xi_1 + \xi_2 = x_1 + y_1\}) = p_{11} + p_{12} \end{aligned}$$

tenglikka kelamiz.

Shunga o'xshash

$$p_{21} + p_{22} = p_2, p_{11} + p_{21} = q_1, p_{12} + p_{21} = q_2$$

tengliklar isbotlanadi. Demak,

$$M(\xi_1 + \xi_2) = (x_1 p_1 + x_2 p_2) + (y_1 q_1 + y_2 q_2) = M(\xi_1) + M(\xi_2).$$

Natijada ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar ayirmasi $\xi_1 - \xi_2$ ning matematik kutilishi, ularning matematik kutilishlari ayirmasiga teng:

$$M(\xi_1 - \xi_2) = M(\xi_1) - M(\xi_2).$$

4-xossa. O'zaro bog'liq bo'lmagan ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi, ularning matematik kutilishlari ko'paytmasiga teng:

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2).$$

Misol. ξ diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $M(\xi)$ uning matematik kutilishi bo'lsin. Ushbu

$$\xi - M(\xi)$$

tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Tasodifiy miqdor matematik kutilishi xossaligidan foydalanib topamiz:

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Odatda,

$$\xi - M(\xi)$$

tasodifiy miqdorning matematik kutilishdan chetlanishi deyiladi.

4⁰. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

lar esa uning qabul qiladigan qiymatlari bo'lsin.

Ta'rif. Ushbu

$$M[(\xi - M\xi)^2]$$

miqdor ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deyiladi va $D(\xi)$ kabi belgilanadi:

$$D(\xi) = M[(\xi - M\xi)^2].$$

Agar $(\xi - M\xi)^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$(\xi - M\xi)^2$	$(x_1 - M\xi)^2$	$(x_2 - M\xi)^2$	...	$(x_n - M\xi)^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

bo'lsa, unda

$$D(\xi) = (x_1 - M\xi)^2 \cdot p_1 + (x_2 - M\xi)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - M\xi)^2 \cdot p_n$$

bo'ladi.

Misol. Taqsimot qonuni

ξ	-1	0	1
p	0,4	0,2	0,4

η	-10	0	10
p	0,3	0,4	0,3

bo'lgan tasodifiy miqdorlar ξ va η larning dispersiyasi topilsin.

Avvalo bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlarini topamiz.

$$M(\xi) = -1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 = 0,$$

$$M(\eta) = -10 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,3 = 0.$$

Unda $\xi - M\xi = \xi$, $\eta - M\eta = \eta$ bo'lib, ularning taqsimot qonunlari

$\xi - M\xi$	-1	0	1
p	0,4	0,2	0,4

$\eta - M\eta$	-10	0	10
p	0,3	0,4	0,3

bo‘ladi.

Endi $(\xi - M\xi)^2 = \xi^2$ va $(\eta - M\eta)^2 = \eta^2$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini topamiz:

$(\xi - M\xi)^2$	1	0	1
p	0,4	0,2	0,4

$(\eta - M\eta)^2$	100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Dispersiya ta’rifiga ko‘ra

$$D(\xi) = 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 = 0,8,$$

$$D(\eta) = 100 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,3 = 60.$$

Endi dispersiyaning xossalarini keltiramiz:

1-xossa. Tasodifiy miqdorning dispersiyasini quyidagicha yozsa ham bo‘ladi:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2.$$

Ma’lumki,

$$D(\xi) = M[(\xi - M\xi)^2].$$

Tasodifiy miqdorning matematik kutilishidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + (M(\xi))^2) = M(\xi^2) - 2M(\xi) \cdot M(\xi) + (M(\xi))^2 = \\ &= M(\xi^2) - 2(M(\xi))^2 + (M(\xi))^2 = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \end{aligned}$$

2-xossa. O'zgaras sonning dispersiyasi 0 ga teng.

$$D(C) = M(C^2) - (M(C))^2 = C^2 - C^2 = 0, (C = \text{const}).$$

3-xossa. Agar ξ tasodifiy miqdor va C o'zgaras son bo'lsa, u holda

$$D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$$

bo'ladi.

$$\begin{aligned} D(C \cdot \xi) &= M((C \cdot \xi)^2) - (M(C \cdot \xi))^2 = M(C^2 \cdot \xi^2) - (M(C) \cdot M(\xi))^2 = \\ &= M(C^2) \cdot M(\xi^2) - M(C^2) \cdot (M(\xi))^2 = C^2 \cdot M(\xi^2) - C^2 \cdot (M(\xi))^2 = \\ &= C^2 \cdot (M(\xi^2) - (M(\xi))^2) = C^2 \cdot D(\xi). \end{aligned}$$

4-xossa. Agar ξ va η lar bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$$

bo'ladi.

5-xossa. Agar ξ va η lar bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa,

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta)$$

bo'ladi.

Misol. Agar ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi 2 ga teng bo'lsa, $2\xi + 1$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Shartga ko'ra $D(\xi) = 2$. Dispersiya xossalaridan foydalanib topamiz.

$$D(2\xi + 1) = D(2\xi) + D(1) = 4D(\xi) + 0 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ta'rif. Ushbu

$$\sqrt{D(\xi)}$$

miqdor ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deyiladi va $\sigma(\xi)$ kabi belgilanadi:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 0, dispersiyasi 1, ya'ni

$$M(\xi) = 0, D(\xi) = 1$$

bo'lsa, ξ normallangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Aytaylik, η ixtiyoriy tasodifiy miqdor bo'lib, uning matematik kutilishi a , o'rtacha kvadratik chetlanishi esa σ bo'lsin. U holda

$$\xi = \frac{\eta - a}{\sigma}$$

normallanmagan tasodifiy miqdor bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda

$$M(\xi) = M\left(\frac{\eta - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(M(\eta) - a) = \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0,$$

$$D(\xi) = D\left(\frac{\eta - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}(D(\eta) - D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

bo'ladi.

5⁰. Diskret tasodifiy miqdorning asosiy taqsimot qonunlari

a) Binomial taqsimot qonuni.

Bog'liq bo'lmagan n ta tajriba o'tkazilgan bo'lib, har bir tajribada A hodisaning sodir bo'lish ehtimoli p ga teng bo'lsin. n ta tajribada A hodisaning sodir bo'lish soni tasodifiy miqdorini ξ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, tajribada A hodisa sodir bo'lmasligi mumkin, bir marta sodir bo'lishi mumkin va hakoza n marta sodir bo'lishi mumkin. Binobarin ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari

$$0, 1, 2, \dots, n$$

bo'ladi.

Ma'lumki, n ta tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lish ehtimoli Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ga teng bo'ladi. Shu formuladan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$P_n(0) = q^n, P_n(1) = C_n^1 p q^{n-1}, P_n(2) = C_n^2 p^2 q^{n-2}, \dots, P_n(n) = p^n.$$

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

ξ	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

ξ tasodifiy miqdorning taqsimotini ifodalovchi bu qonun binomial taqsimot qonuni deyiladi.

Endi bu qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz.

Har bir tajribada A hodisaning sodir bo'lishi soni ξ_i tasodifiy miqdor bo'lib, uning taqsimot qonuni

ξ_i	0	1
p_i	q	p

Demak,

$$M(\xi_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Ayni paytda $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ bo'lgani uchun

$$M(\xi) = n \cdot p$$

bo'ladi.

Ravshanki, ξ_i^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha

ξ_i^2	0	1
p_i	q	p

bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilishini topamiz:

$$M(\xi_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p.$$

Natijada ξ_i^2 tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(\xi) = M(\xi_i^2) - [M(\xi_i)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

bo'lib, undan

$$D(\xi) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n) = npq$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$D(\xi) = npq.$$

ξ tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma(\xi) = \sqrt{npq}$$

ga teng.

b) Puasson taqsimot qonuni

Ma'lumki, Bernulli sxemasida A hodisaning ehtimoli $P(A) = P_n$ bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da $P_n \rightarrow 0$ va $P_n = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = \text{const}$) bo'lganda

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (1)$$

bo'ladi. Soddalik uchun (1) formulada taqribiy tenglik o'rniga tenglik belgisi ishlatildi.

Tajriba natijasida A hodisaning sodir bo'lish soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Uni ξ bilan belgilaylik. Bunda ξ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

bo'ladi. (1) formuladan foydalanib bu miqdorlarga mos ehtimollarni topamiz:

$$P(\xi = 0) = e^{-\lambda},$$

$$P(\xi = 1) = \lambda e^{-\lambda},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda},$$

...

Natijada quyidagi jadvalga kelimiz:

ξ	0	1	2	...
p	$\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...

ξ tasodifiy miqdorning taqsimotini ifodalovchi bu qonun Puasson taqsimot qonuni deyiladi.

Endi Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz.

Matematik kutilish ta'rifi ko'ra

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}.$$

Demak,

$$M(\xi) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini topish uchun avvalo ξ^2 ning matematik kutilishini topamiz:

$$\begin{aligned} M(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} (k-1+1) = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \left[\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \\ &= \lambda \cdot e^{-\lambda} (\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Endi ξ tasodifiy dispersiyasini topamiz:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

6⁰. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Ma'lumki, uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qiymatlari biror (a, b) oraliqni butunlay to'ldiradi. Masalan, nishongacha bo'lgan masofa uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari biror intervalni butunlay to'ldiradi.

Ravshanki, bunday tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini jadval ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi.

Tasodifiy miqdor uzluksiz bo'lgan holda, taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi va u orqali tasodifiy miqdor o'rganiladi.

Aytaylik, ξ uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervaldan iborat bo'lsin.

Biror x haqiqiy sonni olib, ushbu tasodifiy miqdor x dan kichik bo'lgan qiymatlarni qabul qilishi hodisasini qaraymiz. Bu hodisani $\xi < x$ kabi belgilaymiz.

Uning ehtimoli

$$P\{\xi < x\}$$

olingan x ga bog'liq, ya'ni x ning funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Endi taqsimot funksiya $F(x)$ ning xossalarini keltiramiz:

1-xossa. Taqsimot funksiyasi $F(x)$ uchun

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

bo'ladi.

Bu xossa taqsimot funksiya ta'rifi va hodisa ehtimoli uchun $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'lishidan kelib chiqadi.

2-xossa. $F(x)$ o'suvchi funksiya bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $x_1 < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x_1, x_2 lar uchun $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'ladi.

Ravshanki, $\{\xi < x_2\}$ hodisa $\{\xi < x_2\}$ va $\{x_1 \leq \xi < x_2\}$ hodisalar yig'indisiga teng bo'lib, ularning ehtimollari uchun qo'shish teoremasiga ko'ra

$$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$$

bo'ladi.

Endi

$$F(x_2) = P\{\xi < x_2\}, F(x_1) = P\{\xi < x_1\}$$

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} \geq 0$$

bo'lishini e'tiborga olib keyingi tenglikdan

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \text{ ya'ni}$$

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

bo'lishini topamiz.

Natija. Tasodifiy miqdor ξ ning $[a, b]$ yarim intervalga tushish ehtimoli

$$P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a)$$

bo'ladi.

Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ uzluksiz bo'lsa, tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

3-xossa. Uzluksiz tasodifiy miqdorning avvaldan berilgan qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng bo'ladi:

$$P\{\xi = x_1\} = 0.$$

Yuqoridagi munosabatda $x_2 = x_1 + \Delta x$ deb olamiz. U holda

$$P\{x_1 \leq \xi < x_1 + \Delta x\} = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$$

tenglikdan, $\Delta x \rightarrow 0$ da

$$P\{\xi = x_1\} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4-xossa. Uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$$

oraliqlarga tushish ehtimoli bir xil bo'ladi:

$$P\{a < \xi < b\} = P\{a \leq \xi \leq b\} = P\{a \leq \xi < b\} = P\{a < \xi \leq b\}.$$

5-xossa. Agar ξ tasodifiy miqdorning barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$x \leq a \text{ bo'lganda } F(x) = 0,$$

$$x \geq b \text{ bo'lganda } F(x) = 1$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x_1 \leq a$ bo'lsin. Bu holda $\{\xi < x_1\}$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisa bo'lib,

$$P\{\xi < x_1\} = 0, \text{ ya'ni } F(x) = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x_2 \geq b$ bo'lsin. Bu holda $\{\xi < x_2\}$ muqarrar hodisa bo'lib, $P\{\xi < x_2\} = 1$, ya'ni $F(x) = 1$ bo'ladi.

Natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari sonlar o'qida joylashgan bo'lsa,

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

bo'ladi.

7⁰. Tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi va uning xossalari

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsin.

Ta'rif. $F(x)$ funksiyaning hosilasi ξ tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi deyiladi va $p(x)$ kabi belgilanadi:

$$p(x) = F'(x).$$

Endi tasodifiy miqdor ehtimol zichligining xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Ixtiyoriy x uchun $p(x) \geq 0$ bo'lib,

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $F(x)$ o'suvchi funksiya. Unda $F'(x) \geq 0$ bo'lib, $p(x) = F'(x)$ bo'lganligidan $p(x) \geq 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

bo'ladi. Ayni paytda taqsimot funksiyaning 4-xossasiga ko'ra

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

bo'ladi. Keyingi tengliklardan

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

2-xossa. Tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

bo'ladi.

Xosmas integral ta'rifi va $F(x)$ funksiyaning xossalaridan foydalanib topamiz.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= \lim_{\substack{v \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \int_v^u p(x)dx = \lim_{\substack{v \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow +\infty}} [F(u) - F(v)] = \\ &= F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$, ehtimol zichligi $p(x)$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$$

bo'ladi.

4-§. Matematik statistika elementlari

Ma'lumki, ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalar (tasodifiy miqdorlar) ularning o'zgarish qonuniyatlari o'rganildi. Bunda tasodifiy miqdorlarni bo'lishi yoki ularni topish bilan tasodifiy miqdorlar haqida to'la ma'lumotga ega bo'linadi. Bular nazariy ma'lumotlardir.

Tasodifiy hodisalarga bog'liq bo'lgan amaliy masalalarni hal etishda esa boshqacharoq yo'l tutiladi. Bu yo'l tasodifiy hodisalarni tajriba yoki sinov o'tkazish yordamida o'rganishdan iborat. Bunda tajriba yoki sinov natijalaridan foydalanib, tasodifiy hodisalarning ehtimollari, tasodifiy miqdorlar va ularning matematik kutilishi, dispersiya taqsimot qonunlari, taqsimot funksiyasi ehtimol zichliklari topiladi.

Tajriba natijalari kuzatish va hisoblash yordamida yuzaga keladi. Kuzatish va hisoblashlarda turli sabablarga ko'ra hatoliklarga yo'l qo'yiladi. Demak, yuqorida keltirilgan tasodifiy miqdorlarni barcha xarakteristikalari taqriban topiladi. Ayni paytda, bu ham miqdorni ham baholash lozim bo'ladi.

Matematik statistika (u ehtimollar nazariyasi bilan uzviy bog'langan) oliy matematikaning bo'limlaridan biri bo'lib, unda tajriba, sinov natijasida olingan ma'lumotlarga asoslangan holda ilmiy va ommaviy xulosalar chiqarishning matematik usullari bayon etiladi.

1⁰. Tanlanma usul

Odatda, korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqliligi sifat bo'yicha (masalan, detallarning standartga mos kelishi yoki kelmasligi) ham son belgilari (masalan, detallarning o'lchamlari) bo'yicha tekshiriladi.

Aslida ishlab chiqarilgan mahsulotlarning barchasini birma-bir tekshirish maqsadga muvofiq bo'lsada, mahsulotlar sonining katta son bo'lishi va boshqa sabablar bu tekshirish usuli noqulay, katta qiyinchiliklar tug'diradi.

Ishlab chiqarilgan mahsulotlarni umumiyroq qilib tekshirilgan (o'rganiladigan) obyektlar deb bu obyektlarning barchasidan tashkil topgan to'plamini qaraymiz. Bu bosh to'plam deyiladi. Bosh to'plam elementlarining soni shu to'plamning hajmi deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi.

Bosh to'plamdan tavakkal qilib chekli sondagi obyektlar olinadi. Tanlab olingan bu obyektlardan tuzilgan to'plam tanlanma to'plam deyiladi (qisqacha tanlanma deyiladi). Tanlanma to'plam elementlarining soni shu to'plamning hajmi deyiladi, uni n harfi bilan belgilaymiz.

Masalan, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning barchasi 125 000 bo'lib, ulardan tekshirish uchun 200 tasi tanlangan bo'lsa, unda bosh ma'lumotning hajmi $N=125\,000$ bo'lib, tanlanma to'plamning hajmi $n=200$ bo'ladi.

Bu tushunchalardan foydalanib, asosiy masala va uni yechish usullarini keltiramiz.

Masala, bosh to'plam obyektlarini ham sifat, ham son ko'rsatkichlar bo'yicha tekshirish, ularning yaroqlilik darajasini aniqlash, kerakli xulosalar chiqarish hodisasini takomillashtirish uchun kerakli tavsiyalar berishdan iborat.

Bu masalalarni yechish yo'llaridan birini bayon etamiz.

Bosh to'plamdan (ravshanki, uning hajmi katta bo'ladi) tanlanma to'plamni (uning hajmi kichik bo'ladi) ajratib olinadi. Tanlanma to'plam obyektlarini tekshirib, bosh to'plam obyektlari to'g'risida xulosalar chiqariladi. Odatda, bunday usul tanlanma usul deyiladi.

Bosh to'plamdan ajratiladigan tanlanma ikki usulda bajariladi:

1. Bosh to'plamdan tekshirish uchun navbatma-navbat obyekt olinadi, u o'rganilib bosh to'plamga qaytariladi. So'ng keying obyekt olinadi va jarayon davom ettirilib tanlanma hosil qilinadi. Bu takror tanlanma deyiladi. Takror tanlanma bitta obyekt bosh to'plamdan bir necha bor olinishi mumkin.
2. Bosh to'plamdan tekshirish uchun olingan obyekt o'rganilib, u bosh to'plamga qaytarilmaydi. Shu usul tuzilgan tanlanma takrormas tanlanma deyiladi. Bu holda olingan obyekt bir martagina tekshiriladi. Bosh to'plamni o'rganishda ko'pincha takrormas tanlanmadan foydalaniladi.

Shuni takidlash lozimki, bosh to'plamdan obyektlarni olib tanlanma to'plam hosil qilinadi. U ham bo'lsa, bosh to'plam obyektlarining barcha xususiyatlari tanlanma to'plamda yetarli darajada o'z aksini topishi lozim.

2⁰. Emperik taqsimot funksiyasi

Amaliyotda, ko'pincha qarayotgan tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi noma'lum bo'lib, uni kuzatish natijasiga ko'ra, ya'ni tanlanmaga ko'ra topiladi.

Bosh to'plamdan ajratib olingan tanlanmaning hajmi n ga teng bo'lib, ular

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

bo'lsin.

Ixtiyoriy x sonni olib (1) tanlanmaning tanlanma x_k ($k=1,2,\dots,n$) qiymatlaridan ushbu

$$x_k < x$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan tanlanmaning sonini v_k deylik. Unda

$$\frac{v_k}{n} \quad (2)$$

nisbat olingan tanlanma tanlangan qiymatlarining x nuqtadan chap tomonga tushish chastotasini ifodalaydi. Boshqacha qilib aytganda, (2) nisbat $\{\xi < x\}$ hodisaning chastotasi bo'ladi.

Ravshanki, u x ga bog'liq bo'lib, x ning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiya olingan tanlanma ξ tasodifiy miqdorning emperik taqsimot funksiyasi deyiladi va $F_n(x)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$F_n(x) = \frac{v_k}{n} \quad (3).$$

Ma'lumki, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ ushbu $\{\xi < x\}$ hodisa (tajriba natijasida tasodifiy miqdor ξ ning x dan kichik bo'ladigan qiymatlarini qabul qilish hodisasi) ehtimollaridan iborat edi

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Bu $F(x)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning nazariy taqsimot funksiyasi deb ham yuritiladi.

ξ tasodifiy miqdorning emperik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ esa n ta tajribada shu hodisaning chastotasi ifodalaydi.

Tasodifiy miqdorning emperik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ ham uning taqsimot funksiyasi $F(x)$ xossalari kabi xossalarga ega.

Ayni paytda, n ning katta qiymatlarida Bernulli teoremasiga ko'ra hodisa chastotasi uning ehtimoliga taxminan teng bo'lishidan ushbu

$$F(x) \approx F_n(x) = \frac{v_k}{n}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

Demak, tanlanma hajmi kattaroq bo'lgan sari emperik taqsimot funksiya nazariy taqsimot funksiyaning aniqroq ifodalab beradi.

Misol. Tanlanma natijasida ushbu

$$-3, 2, -1, -3, 5, -3, 2$$

sonlar hosil qilingan. Emperik taqsimot funksiyasi topilsin, uning grafigi chizilsin.

Ravshanki, bu misolda tanlanmaning hajmi $n=7$ bo'lib,

$$x_1 = x_4 = x_6 = -3, x_2 = x_7 = 2, x_3 = -1, x_5 = 5$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$v_k = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -3 \\ 3, & \text{agar } -3 < x \leq -1 \\ 4, & \text{agar } -1 < x \leq 2 \\ 6, & \text{agar } 2 < x \leq 5 \\ 7, & \text{agar } x > 5 \end{cases}.$$

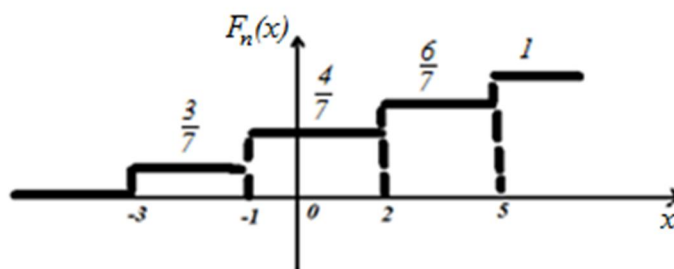
Unda emperik taqsimot funksiya ushbu

$$F_n(x) = \frac{v_k}{n}$$

formulaga ko'ra

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -3 \\ \frac{3}{7}, & \text{agar } -3 < x \leq -1 \\ \frac{4}{7}, & \text{agar } -1 < x \leq 2 \\ \frac{6}{7}, & \text{agar } 2 < x \leq 5 \\ 1, & \text{agar } x > 5 \end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma

Keltirilgan 1-chizmaning tasviridan foydalanib quyidagilarni aytish mumkin.

1. Emperik taqsimot funksiyasi zinasimon uzilishga ega bo'lgan funksiya bo'ladi.

2. Bu funksiyaning uzilishi tanlanma qiymatlarni ifodalovchi miqdorida sodir bo'ladi. Bu nuqtalarda funksiyaning sakrasi $\frac{1}{7}$ ga (umumiy holda $\frac{1}{n}$ ga) karrali bo'ladi.

3. Ravshanki, $x_1, x_2, \dots, x_7$ larning kichigi $x_{\min} = -3$, kattasi $x_{\max} = 5$ bo'lib, emperik taqsimot funksiyasi $x < x_{\min}$ bo'lganda $F_n(x) = 0$, $x > x_{\max}$ bo'lganda esa $F_n(x) = 1$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, (1) tanlanmaga ko'ra emperik taqsimot funksiya tanlanma qiymatlarini qanday tartibda joylashishiga bog'liq bo'lmaydi. Boshqacha qilib aytganda faqat joylashtirish jufti bilan foydalanuvchi barcha tanlanmalarining emperik taqsimot funksiyasi bitta bo'ladi.

3⁰. Poligon va gistogramma

Tanlanma bo'yicha tasodifiy miqdor haqida to'laroq tasavvurga ega bo'lishda tanlanmaning (tanlanma taqsimotining) poligon va gistogrammalaridan foydalaniladi.

Aytaylik, hajmi n ga teng tanlanma

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

da x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo, x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo'lsin. Bu holda tanlanmaning chastotasi n_k lar uchun

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

bo'ladi.

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olib, unda koordinatalari x_k va n_k bo'lgan (x_k, n_k) nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziqli kesmalari yordamida birlashtirsak, siniq chiziqli hosil bo'ladi. Uni tanlanmaning (tanlanma taqsimotining) chastotalar poligoni deyiladi.

Chastotalar poligonida (grafik) tanlanmaning har bir qiymati qanchalik tez-tez kuzatilishi tushuniladi.

Misol. Yuqorida keltirilgan

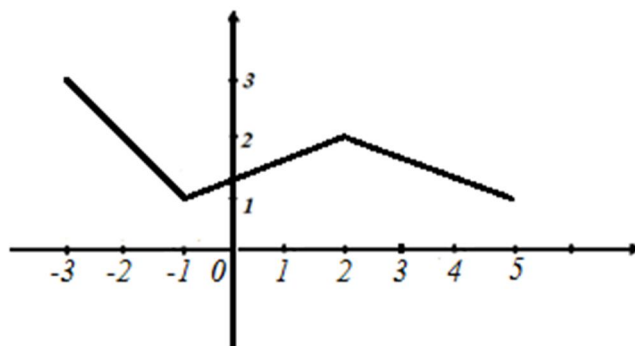
$$-3, 2, -1, -3, 5, -3, 2$$

tanlanma uchun chastotalar poligoni chizilsin.

Bu tanlanmaning -3 qiymatining chastotasi 3, -1 qiymatining chastotasi 1, 2 qiymatning chastotasi 2 va 5 qiymatning chastotasi 1 ga teng. Bulardan foydalanib

$$(-3, 3), (-1, 1), (2, 2), (5, 1)$$

nuqtalarni hosil qilinadi. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziqli yordamida birlashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziqli berilgan tanlanmaning chastotalar poligoni bo'ladi (2-chizma).



2-chizma

Tasodifiy miqdor haqida batafsilroq tasavvurga ega bo'lishda tanlanmaning (tanlanma taqsimotining) chastotalar gistogrammasidan foydalaniladi.

Aytaylik,

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

kuzatilgan qiymatlarning kichigini $x_{\min}$, kattasini $x_{\max}$ deb ushbu,

$$[x_{\min}, x_{\max}]$$

oraliqni qaraymiz. Bu oraliqni uzunligi h ga teng bo'lgan bir qancha T_m oraliqlarga argumenti δ , har bir oraliqqa kiritilgan qiymatlardan nechtasi tushishini hisoblaymiz.

Aytaylik T_m oraliqqa kiritilgan qiymatlaridan v_m tasi tushgan bo'lsin.

Unda asosi T_m oraliqdan iborat bo'lgan, balandligi $\frac{v_m}{h}$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaliadi. Hosil bo'lgan chizma tanlanmaning (tanlanma taqsimotining) chastotalar gistogrammasi deyiladi. Bunday yasalgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi

$$h \cdot \frac{v_m}{h} = v_m$$

bo'ladi.

Demak, to'g'ri to'rtburchakning yuzi T_m oraliqdagi kuzatilgan qiymatlar soniga teng bo'ladi. Barcha to'g'ri to'rtburchaklardan tashkil topgan ko'pburchakning yuzi esa barcha kuzatilgan qiymatlar soniga, ya'ni tanlanma hajmiga teng bo'ladi.

Misol. Kuzatish natijasida quyidagi qiymatlar va ularning chastotalari aniqlangan:

Qiymatlar	-2	0	1	2	3	5	7
Chastotalar	4	0	7	8	6	2	1

Bu taqsimotning gistogrammasi yasalsin.

Ravshanki, kuzatilgan qiymatlarining eng kattasi $x_{\max} = 7$, eng kichigi $x_{\min} = -2$ bo'lib,

$$[x_{\min}; x_{\max}] = [-2; 7]$$

oraliqning uzunligi 9 ga teng. Bu oraliqni 4 ta oraliqqa ajratamiz:

$$[-2; 0,25], [0,25; 2,5], [2,5; 4,75], [4,75; 7].$$

1) $[-2; 0,25]$ oraliqqa 9 ta kuzatilgan qiymatlar tushadi (ular -2 qiymat 4 marta, 0 qiymat 5 marta).

2) $[0,25; 2,5]$ oraliqqa 15 ta kuzatilgan qiymatlar tushadi (ular 1 qiymat 7 marta, 2 qiymat 8 marta).

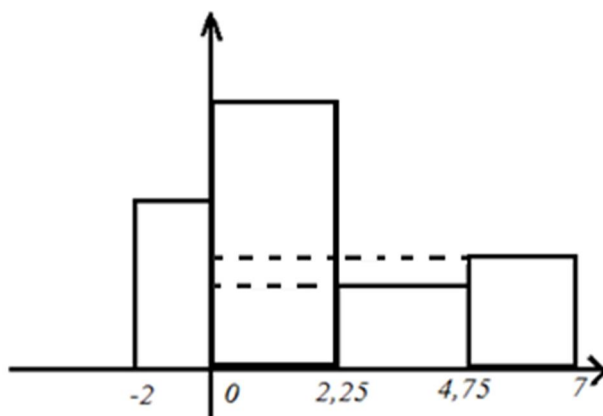
3) $[2,5; 4,75]$ oraliqqa 6 ta kuzatilgan qiymatlar tushadi (ular 3 qiymat 6 marta).

4) $[4,75; 7]$ oraliqqa 3 ta kuzatilgan qiymatlar tushadi (ular 5 qiymat 2 marta, 7 qiymat 1 marta).

Gistogrammani yasash uchun yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan foydalanib quyidagi jadvalni tuzamiz:

Oraliq	$[-2; 0,25]$	$[0,25; 2,5]$	$[2,5; 4,75]$	$[4,75; 7]$
v_m	9	15	6	3
$\frac{v_m}{h}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$

Izlanayotgan gistogramma quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



3-chizma

Yuqorida keltirilgan $[x_{\min}; x_{\max}]$ oraliq uzunligini h ga teng bo'laklashlardagi turlicha (masalan, $\left[a - \frac{h}{2}; a + \frac{h}{2}\right]$ usulda) ajratilishi mumkin. Shuni aytish kerakki, gistogrammaning ko'rinishi h ning uzunligini tanlashga ham bog'liq bo'ladi.

4⁰. Emperik o'rta qiymat va emperik dispersiya

Tasodifiy miqdor ξ ning matematik kutilishi (o'rta qiymati) va dispersiyasi uchun kuzatishlar natijasida hosil bo'lgan qiymatlar bo'yicha taqribiy formulalarni keltiramiz. Chunki n ni har qanday qilib olinganda ham tanlanma bo'yicha tasodifiy miqdorning o'rta qiymati va dispersiyasini umuman aytganda aniq topib bo'lmaydi.

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdorni kuzatish natijasida

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlar hosil bo'lsin. Ravshanki, bu qiymatlar ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Ushbu,

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

miqdor emperik o'rta qiymat (Emperik matematik kutilish yoki tanlanma bo'yicha o'rta qiymat) deyiladi. Uni ξ tasodifiy miqdor matematik kutilishi (o'rta qiymati $M(\xi)$ ning taqribiy ifodasi) sifatida qabul qilinadi.

Demak,

$$M(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Ushbu

$$S^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

miqdor Emperik dispersiya (tanlanma bo'yicha dispersiya) deyiladi. Uni ξ tasodifiy miqdor dispersiyasi $D(\xi)$ ning taqribiy ifodasi sifatida qabul qilinadi.

Demak,

$$D(\xi) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Odatda

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

mos ravishda o'rta qiymat $M(\xi)$ va dispersiya $D(\xi)$ larning baholari deyiladi.

Biz yuqorida tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalaridan bo'lgan o'rta qiymat va dispersiyasi uchun taqribiy formulalarni topdik. Bu taqribiy formulalarning aniqligi baholanishi lozim.

Ravshanki, $M(\xi)$ va $D(\xi)$ larning baholari $\bar{x}$ va S^2 lar tanlanma qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga bog'liq. Qaralayotgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar shunday bo'lishi kerakki, tasodifiy miqdor $\bar{x}$ va S^2 lar o'zgarmas $M(\xi)$ va $D(\xi)$ larni yetarlicha aniqroq ifodalasin. Bunda $\bar{x}$ va S^2 baholar quyidagi uchta xususiyatga ega bo'lishi talab qilinadi.

1) Bahoning sistematik yuqorilab yoki paslab ketmasligi uchun

$$M(\bar{x}) = M(\xi), \quad M(S^2) = D(\xi)$$

bo'lishi lozim. Bu bahoning siljimaydiganlik xususiyati deyiladi.

2) Qaralayotgan $\bar{x}$ va S^2 lar $n \rightarrow \infty$ da $M(\xi)$ va $D(\xi)$ larga intilishi, ya'ni ixtiyoriy $\alpha > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|M(\xi) - \bar{x}| > \alpha\} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|D(\xi) - S^2| > \alpha\} = 0$$

bo'lishi kerak. Bu bahoning asosiy xususiyati deyiladi.

3) Qaralayotgan baholar boshqa baholarga nisbatan natijalar, ya'ni $\bar{x}$ va S^2 lar eng kichik qiymatlariga ega bo'lishi kerak. Bu baholashning effektiv xususiyati deyiladi.

$M(\xi)$ va $D(\xi)$ lar uchun keltirilgan $\bar{x}$ va S^2 baholar yuqoridagi uchta xususiyatga ega bo'ladi. Biz ulardan birini, masalan, 1)-xususiyatga ega bo'lishini isbotlaymiz.

Ma'lumki, ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari

$$x_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

lar ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorlar faqat ξ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlarinigina qabul qilishi mumkin va ularning taqsimotlari ham bir xil bo'ladi. Demak, barcha k lar uchun

$$M(x_k) = M(\xi), \quad D(x_k) = D(\xi) \quad (*)$$

bo'ladi.

Modomiki, tanlanma tavakkal qilib olingan qiymatlardan tashkil topgan ekan, unda x_k lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning o'rta qiymati xossalari hamda (*) munosabatdan foydalanib

$$\begin{aligned} M(\bar{x}) &= M\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(x_k) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot M(\xi) = M(\xi) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Demak,

$$M(\bar{x}) = M(\xi).$$

Endi tasodifiy miqdorning o'rta qiymati va dispersiyasi xossalarini, shuningdek

$$D(\eta) = M(\eta^2) - (M(\eta))^2$$

munosabat hamda

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left(x_k + \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i \right)$$

va

$$M(x_k) - M(\bar{x}) = M(\xi) - M(\xi) = 0$$

tengliklarni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} M(S^2) &= M\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n M(x_k - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [D(x_k - \bar{x}) + (M(x_k - \bar{x}))^2] = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[D\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(x_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i\right) \right] + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [M(x_k) - M(\bar{x})^2] = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 D(x_k) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1, i \neq k}^n D(x_i) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D(\xi) + \frac{n-1}{n^2} D(\xi) \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot n \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D(\xi) + \frac{n-1}{n^2} D(\xi) \right] = D(\xi) \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \right) = D(\xi). \end{aligned}$$

Demak,

$$M(S^2) = D(\xi).$$

Shu bilan $\bar{x}$ va S^2 baholar uchun siljima yidigan xususiyati o'rinli bo'lishi isbotlandi.

5⁰. Bahoning ishonchliligi. Ishonchlilik intervali

Aytaylik, bosh to'plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan tanlanmaning hajmi h ga teng bo'lib, ular

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

bo'lsin.

Avvalgi punktlarda (1) tanlanmaga ko'ra taqsimot parametrlari (o'rta qiymat va dispersiya) uchun baholar keltirildi. Unda parametr a ni taqribiy ifodalovchi

$$a \approx a^* \quad (a^* = a^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (2)$$

formula hosil qilindi. Bu taqribiy tenglikning chap tomonida tasodifiy bo'lmagan son, o'ng tomonida esa tasodifiy miqdor bo'lib, u $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning funksiyasi bo'ladi.

(2) formula baholanayotgan parametrni qanday aniqlikda taqribiy ifodalanishini ko'rsatmaydi.

Ravshanki, kuzatishlar soni katta bo'lganda (tanlanmaning hajmi katta bo'lganda) taqribiy formulaning aniqlik darajasi yuqoriroq bo'lib, amaliy xulosaalar chiqarish uchun yetarli bo'ladi.

Ammo tanlanmaning hajmi kichik bo'lsachi? Bu holda bahoning aniqligini bilish muhim masalaga aylanadi. Bu masalaga quyidagicha yondoshiladi.

Aytaylik, a taqsimotning noma'lum parametri va (1) tanlanmaga ko'ra topilgan a^* esa a ning bahosi bo'lsin

$$a \approx a^*.$$

Ushbu

$$|a - a^*| < \delta, (\delta > 0)$$

hodisaning ehtimoli

$$P\{|a - a^*| < \delta\} = p \quad (3)$$

ga qarab bahoning aniqlik (ishonchliligi) haqida xulosa chiqarish mumkin.

Ravshanki,

$$|a - a^*| < \delta$$

bo'lganda $a \in (a^* - \delta, a^* + \delta)$ bo'ladi. Odatda

$$(a^* - \delta, a^* + \delta)$$

interval ishonchlilik intervali deyiladi.

Demak, (3) munosabat noma'lum parametr a ning ishonchlilik intervali bilan qoplanish ehtimolini ifodalaydi.

Amalyotda, p sonini ($0 < p < 1$) birga yaqin qilib tanlanadi. Unda ehtimoli p bo'lgan $\{|a - a^*| < \delta\}$ hodisa muqarrar hodisaga yaqin bo'ladi.

6⁰. Normal taqsimotning dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning o'rta qiymati (matematik kutilish) uchun ishonchlilik intervali

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lib, uning dispersiyasi

$$D(\xi) = \sigma^2$$

ma'lum bo'lsin.

Unda

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

tanlanmani n ta bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin. Ular ham ξ tasodifiy miqdor kabi normal taqsimlangan bo'ladi. Shuning uchun,

$$M(x_1) = M(x_2) = \dots = M(x_n) = a,$$

$$D(x_1) = D(x_2) = \dots = D(x_n) = \sigma^2$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan foydalanib

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

tanlanmaning o'rta qiymati

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}$$

uchun $M(\bar{x})$ va $D(\bar{x})$ larni topamiz.

$$M(\bar{x}) = M\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(x_k) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a = a,$$

$$D(\bar{x}) = D\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(x_k) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Shuni aytish kerakki, x_k tasodifiy miqdor normal qonun bo'yicha taqsimlangan ekan. Ularning yig'indisi ham (binobarin, $\bar{x}$ ham) normal taqsimlangan bo'ladi.

Endi p ning biror qiymatini tayinlaymiz. Unga ko'ra $\delta > 0$ ni ushbu

$$P\{|x - a| < \delta\} = p \quad (4)$$

shartni bajarishdan topamiz.

Modomiki, $\bar{x}$ tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib,

$$M(\bar{x}) = a, D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ekan, uning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\sqrt{n}\right) \quad (5)$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$P\{|\bar{x} - a| < \delta\} = P\{-\delta < \bar{x} - a < \delta\} = P\{a - \delta < \bar{x} < a + \delta\}$$

$$P\{y_1 < \xi < y_2\} = F(y_2) - F(y_1).$$

Bu va (4), (5) munosabatlardan foydalanib

$$2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = p$$

ya'ni

$$\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{p}{2}$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tenglik δ ga nisbatan tenglama. Φ funksiya uzluksiz va o'suvchi, hamda $0 < p < 1$ bo'lganligidan shunday yagona δ^0 son topiladiki

$$\Phi(\delta^*) = \frac{p}{2}$$

bo'ladi (Odatda, p berilgan holda δ^0 sonni Φ funksiya uchun tuzilgan jadvaldan topiladi).

Demak,

$$\delta^* = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

bo'lib,

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta^*$$

boʻladi.

Natijada

$$P\{a - \delta < \bar{x} < a + \delta\} = p$$

munosabat ushbu

$$P\left\{a - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta^* < \bar{x} < a + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta^*\right\} = p$$

koʻrinishga keladi.

Demak, normal taqsimotning nomaʼlum parametri (oʻrta qiymati) a quyidagi

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta^*, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \delta^* \right)$$

ishonchlilik intervali bilan qoplanadi.

AMALIY MATEMATIKA

1-§. Xatoliklar nazariyasi haqida tushuncha

Aniq sonlar biror kattalikning aniq qiymatini ifodalaydi. Taqribiy sonlar esa, biror kattalining aniq qiymatiga juda yaqin bo'lgan sonni ifodalaydi.

Ta'rif. *Taqribiy sonning absolyut xatoligi deb, A va a orasidagi ayirmaning moduliga aytiladi. Absolyut xatolikni Δ deb belgilasak, u holda,*

$$\Delta = |A - a| \quad (1).$$

Ta'rif. *Taqribiy son a ning nisbiy xatoligi $\delta(a)$ deb, absolyut xatolik Δa ni, A ni moduliga nisbatiga aytiladi.*

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|} \cdot 100\%, \quad \delta(a) \approx \frac{\Delta a}{|a|} \quad (2).$$

Misol. $a = 35,148 \pm 0,00074$ taqribiy sonning nisbiy xatoligi (foizlarda) topilsin.

Yechish. Bu yerda $\Delta a = 0,00074$; $A = 35,148$. U holda (2) ga asosan

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|} \cdot 100\% = \frac{0,00074}{35,148} \cdot 100\% = 0,002105382 \approx 0,002$$

Agarda nisbiy xatolik berilgan bo'lsa u holda absolyut xatolik quyidagicha topiladi:

$$\Delta a = \frac{\delta(a) \cdot |A|}{100}.$$

Misol. 300 gr miqdordagi paxta namunasi tortildi. Agarda tarozining nisbiy xatoligi $\delta(a) = 5\%$ bo'lsa uning absolyut xatoligini toping.

Yechish. Bu yerda $\delta(a) = 5\%$, $A = 300$ gr. (2) formuladan

$$\Delta a = \frac{\delta(a) \cdot |a|}{100} = \frac{5 \cdot 300}{100} = 15, \quad A = 300 \pm 15 \text{ gr.}$$

Taqribiy sonlar ustida amallar:

1. Taqribiy sonlarni qo'shganda yoki ayirganda ularning absolyut xatoliklari qo'shiladi, ya'ni,

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a \pm \Delta b \quad (3).$$

Bu yerda a va b lar taqribiy sonlar.

2. Taqribiy sonni taqribiy songa bo'lganda yoki ko'paytirganda ularning nisbiy xatoliklari qo'shiladi, ya'ni,

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b) \quad (4)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b) \quad (5)$$

3. Taqribiy sonni darajaga oshirilganda, uning nisbiy xatoligi daraja ko'rsatkichga ko'paytiriladi:

$$\delta(a^n) = n\delta(a) \quad (6)$$

Misol. $y = \left(\frac{a+b}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ifodaning nisbiy xatoligini toping.

$$\delta(y) = \frac{1}{2}(\delta(a+b) + 3\delta(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 3\frac{\Delta x}{|x|}\right).$$

Amaliyotda, ya'ni to'qimachilik, yengil va paxta sanoati muammolari bo'yicha olib borilayotgan ilmiy izlanishlarda:

agarda nisbiy xatolik $\delta(a) \leq 2\%$ bo'lsa, u holda bu aniqlangan qiymat yuqori aniqlikda topilgan;

agar $2\% \leq \delta(a) \leq 5\%$ bo'lsa o'rta aniqlikda topilgan;

agar $5\% \leq \delta(a) \leq 10\%$ bo'lsa past aniqlikda topilgan deb hisoblanadi.

Funksiya xatoligi. Faraz qilaylik, a bir o'zgaruvchili funksiya $y = f(x)$ ning argumenti x ning taqribiy qiymati bo'lsin. Δa – esa uning absolyut xatoligi. Bu funksiyaning absolyut xatoligi tarzida uning ortirmasi Δy ni olish mumkin. Orttirmani esa differensial bilan almashtirsak, $\Delta y \approx dy$ u holda,

$$\Delta y = |f'(a)| \cdot \Delta a$$

bo'ladi.

Ushbu mulohazani ko'p o'zgaruvchili funksiyaga ham qo'llash mumkin. $u = f(x, y, z)$ funksiyasining argumentlari x, y, z lar uchun taqribiy qiymatlar a, b, c lar bo'lsin. U holda

$$\Delta u = |f'_x(x; y; z)| \cdot \Delta a + |f'_y(x; y; z)| \cdot \Delta b + |f'_z(x; y; z)| \cdot \Delta c \quad (7).$$

Bu yerda $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ - argumentlar absolyut xatoligi, f'_x, f'_y, f'_z - mos ravishda x, y, z bo'yicha olingan xususiy hosilalar.

Nisbiy xatolik esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\delta(u) = \frac{\Delta u}{|f(a, b, c)|} \quad (8)$$

2-§. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari

Bir noma'lumli istalgan tenglamani quyidagi ko'rinishiga keltirish mumkin.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

bu yerda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz.

Ta'rif. (1) tenglamaning ildizi (yechimi) deb shunday ξ ($a \leq \xi \leq b$) soniga aytiladiki, ξ ni (1) ga qo'yganda ayniyat hosil bo'ladi, ya'ni $f(\xi) = 0$ tenglik bajariladi.

Agar (1) da $f(x)$ funksiya algebraik bo'lsa, ya'ni

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2)$$

bo'lsa, u holda (1) ga algebraik tenglama deyiladi.

Agar (1) tenglamada $f(x)$ funksiya algebraik bo'lmasa, ya'ni uni (2) ko'rinishda ifodalab bo'lmasa, u holda (1) ga transsendent tenglama deyiladi.

Transsendent tenglamalarga misollar:

$$x - \sin x = 0, 3x - 2 \cos x = 0, 5, \lg(x+1) = 9x - 10 \text{ va h.k.}$$

Ildizlarni ajratish

Tenglamalarni taqribiy yechish jarayoni ikki bosqichda amalga oshiriladi.

1. Ildizlarni ajratish
2. Ildizlarni berilgan aniqlikda topish.

$[a, b]$ kesmada $f(x) = 0$ tenglamaning ildizi ξ dan boshqa ildizi yo'q bo'lsa, ildiz ξ ajratilgan hisoblanadi.

Ildizlarni ajratish deganda, shunday $[a, b]$ kesmani topishga aytiladiki, bu yerda tenglamani faqat bitta ildizi bo'ladi.

Ildizlarni grafik va analitik usullari bilan ajratish mumkin.

Ildizlarni grafik usulda ajratish uchun $f(x)=0$ tenglamani $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishda yozib olamiz.

Dekart koordinatalar sistemasida $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o‘zaro kesishsa, kesishgan nuqtalardan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan nuqtalar (yoki nuqta) yechimlar bo‘ladi.

Ildizlarni analitik usulda ajratish uchun quyidagi teoremdan foydalaniladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlarini qabul qilib, $[a,b]$ kesmaning ichida $f(x)$ funksiyaning hosilasi o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda $[a,b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta yechimi yotadi.

Oraliqni ikkiga bo‘lish usuli

Faraz qilaylik $f(x) = 0$ tenglamaning biror ildizi ξ $[a,b]$ kesmada bo‘lsin. Kesmaning uzunligini $d = b - a$ deb begilaylik. Tenglamaning yechimi $\varepsilon = 0.001$ aniqlikda topilsin.

Ildiz ξ $[a,b]$ ni ichida bo‘lganligi uchun, a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz, b ga ortig‘i bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar $d \leq 0,001$ bo‘lsa masala yechilgan hisoblanadi. a va b lar $f(x) = 0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon = 0,001$ aniqlikdagi yechimlari bo‘ladi. Bu holda taqribiy yechim sifatida a va b lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan x_0 ni olish mumkin. Taqribiy yechim sifatida

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

ni olish maqsadga muvofiq.

Endi faraz qilaylik $d > 0,001$ bo‘lsin $(a; b)$ kesmani o‘rtasida $c = \frac{a+b}{2}$ nuqtani olaylik. U holda $[a, b]$ kesma $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarga ajraladi.

Shu ikki kesmani qaysi birini chekka nuqtalarida $f(x)$ funksiya ishorasini o'zgartirsa, shu kesmani olib qolib, keyingisini tashlab yuboramiz. Qolgan kesmaning uzunligi $d_n \leq \varepsilon$ (n -ikkiga bo'lishlar soni) bo'lganligiga qadar davom ettiramiz.

Urinmalar usuli

Berilgan $f(x)$ funksiya uzluksiz, birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin, ular $(a; b)$ oraliqda o'z ishoralarini o'zgartirmasin. (1) tenglama bu oraliqda yagona yechimiga ega bo'lsin.

Bu usulni qo'llash uchun quyidagi shartni qanoatlantiradigan.

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

(bu nuqtadan funksiya va uning ikkinchi tartibli hosilasi bir xil ishorali qiymat qabul qilinsin) x_0 – boshlang'ich yaqinlashishni tanlab olamiz. Bu a yoki b qiymat bo'lishi mumkin.

$y = f(x)$ egri chizig'iga $B(x_0; f(x_0))$ nuqtadan urinma o'tkazamiz va urinmani OX o'qi bilan kesishgan x_1 nuqtani aniqlaymiz:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Umuman olganda,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

jarayonni

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

shart bajarilganda to'xtatamiz.

Iteratsiya usuli

Biz ushbu usul bilan $f(x) = 0$ tenglamaning $x = \varphi(x)$ ko'rinishda yozib olib, quyidagi ketma-ket bajarilishi lozim bo'lgan jarayonni hisoblashimiz kerak bo'ladi:

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1})$$

bu yerda

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ - ketma-ket yaqinlashishlar;

x_0 - boshlang'ich yaqinlashish;

x_1 - birinchi yaqinlashish;

x_2 - ikkinchi yaqinlashish va h.k.

Bu jarayonning yaqinlashuvchi bo'lish shartini quyidagi teorema ifodalaydi.

Teorema. $x = \varphi(x)$ tenglamaning ildizi $[a, b]$ kesmada ajratilgan bo'lib, bu kesmaning hamma nuqtalarida quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$|\varphi'(x)| \leq M < 1$$

u holda bu yaqinlashuvchi jarayon bo'ladi.

3-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari

Kundalik hayotimizda uchraydigan ko'p muxandislik masalalarini yechishda aniq integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik,

$$\int_a^b f(x) dx$$

integralni hisoblash talab etilsin. Bu yerda $f(x)$ $[a; b]$ kesmada berilgan uzluksiz funksiya. Ko'p hollarda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday formulaga *kvadratura formulalari* deyiladi.

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma'nosini bilish lozim.

Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x) dx$ ning qiymati son jihatidan $y = f(x)$ funksiyaning grafigi hamda $x = a$, $x = b$, to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura) ning yuziga teng. Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng.

Shunday qilib, aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi. Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba'zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

To'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiya formulalari

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalar yordamida $[a, b]$ kesmani n ta teng bo'lakchalarga bo'lamiz. Har bir bo'lakchanning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$.

Bo'linish nuqtalari esa:

$$x_0 = a; x_1 = a + h; x_2 = a + 2h; x_3 = a + 3h; \dots; x_{n-1} = a + (n-1)h; x_n = b.$$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ bo'lsin. Bular $y_0 = f(a), y_1 = f(x_1), y_n = f(b)$ larga teng bo'ladi.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun $[a, b]$ kesmani bo'lish natijasida hosil bo'lgan barcha to'rtburchakning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo'ladi. Albatta bu yuzchalarni hisoblashlarda, ma'lum darajada xatoliklarga yo'l qo'yiladi.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} y_k \quad (2)$$

Bu yerda to'g'ri to'rtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. O'ng ordinata olinsa,

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^n y_k \quad (3)$$

Bular mos ravishda chap va o'ng to'g'ri to'rtburchak formulalari deyiladi.

(2) va (3) formulalarning qo'llaganda yo'l qo'yiladigan xatolikni kamaytirish uchun, bo'linish nuqtalarini iloji boricha ko'proq olish, ya'ni qadamini tobora kichaytirish lozim bo'ladi.

(2) va (3) formulalarni hadlarini mos ravishda qo'shib ikkiga bo'lsak, ya'ni ularni o'rta arifmetigini olsak, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right) = h \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2} \right) \quad (4)$$

Bu formula trapetsiya formulasi deyiladi.

Simpson foymulasi

Simpson formulasi yuqorida keltirib chiqarilgan (2), (3) va (4) formulalarga qaraganda aniqligi yuqori bo'lgan formula hisoblanadi.

$[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_n = b$ nuqtalar bilan $n = 2m$ ta juft teng bo'lakchalarga ajratamiz. $y = f(x)$ egri chiziqqa tegishli, bo'lgan (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz. Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + 4y_{2m}) \quad (5)$$

Bu topilgan formula Simpson formulasidir. Ba'zi hollarda uni parabolalar formulasi deb ham aytadilar.

4-§. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari

Agar tenglamada noma'lum funksiya hosila yoki differensial ostida qatnashsa, bunday tenglamaga differensial tenglama deyiladi. Agar differensial tenglamadagi noma'lum funksiya faqat bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa bunday tenglamaga oddiy differensial tenglama deyiladi.

n -tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Bu yerda x -erkli o'zgaruvchi, y -noma'lum funksiya, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ -noma'lum funksiyaning hosilalari.

(1) ni ko'p hollarda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2).$$

Bu tenglamaga boshlang'ich masala quyidagicha qo'yiladi.

(1) differensial tenglamaning shunday yechimi $y = \varphi(x)$ ni topish kerakki, bu yechim erkli o'zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x = x_0$ da quyidagi qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$$x = x_0 \text{ da } y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

(3) shartga boshlang'ich shartlar deyiladi. $x_0, y_0, y', y'', \dots, y^{(n)}$ sonlariga yechimining boshlang'ich qiymatlari deyiladi. Boshlang'ich shartlar (3) yordamida umumiy yechimidan xususiy yechimini ajratib olinadi. (2) differensial tenglamani yechimini (3) boshlang'ich shartlari asosida topishga Koshi masalasi ham deyiladi.

Differensial tenglamalarni aniq yechimini topish juda kamdan kam hollardagina uchrashi mumkin bo'ladi. Amaliyotda uchraydigan ko'pdan ko'p masalalarda aniq yechimini topishning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun differensial tenglamalarni yechishda taqribiy usullar muhim ahamiyatga ega.

Bulardan sonli usullarni ko'rib chiqamiz.

Eyler usuli

Amaliy masalalarni yechganda, yechimlarni formula ko'rinishida emas, balki jadval ko'rinishida olingani qulay bo'ladi.

Differensial tenglamalarni sonli usullar bilan yechganda yechimlar jadval ko'rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko'p qo'llanadigan Eyler va Runge–Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

Birinchi tartibli differensial tenglamani

$$y' = f(x, y) \quad (4)$$

$[a, b]$ kesmada boshlang'ich shart: $x = x_0$ da $y = y_0$ ni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$[a, b]$ kesmani $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalar bilan n ta teng bo'laklarga ajratamiz.

Bu yerda $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $h = \frac{b-a}{n}$ – qadam.

(4) tenglamani $[a, b]$ kesmaga tegishli bo'lgan biror $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada integrallasak

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx_k$$

bu yerda $y(x_k) = y_k$ belgilash kiritsak

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$

bu yerda integral ostidagi funksiyani $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada o'zgarmas $x=x_k$ nuqtada boshlang'ich qiymatga teng desak, Eyler formulasini hosil qilamiz:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = hf(x_k, y_k). \quad (5)$$

Ushbu jarayonni $[a, b]$ ga tegishli bo'lgan har bir kesmachada takrorlasak, (4) ni yechimini ifodalovchi jadvalni tuzamiz.

Eyler usulini differensial tenglamalar sistemasini yechishda ham qo'llash mumkin. Quyidagi sistema uchun boshlang'ich masala berilgan bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \right\}, \quad x=x_0 \text{ da } y=y_0, z=z_0 \quad (6)$$

(6) ning taqribiy yechimlari quyidagi formulalar bilan topiladi

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

Bu yerda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i), \quad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Misol. Eyler usuli bilan $y' = y + (1+x)y^2$, $y(1) = -1$ masalaning yechimi $[1; 1,5]$ kesmada $h=0,1$ qadam bilan topilsin.

Yechish. Masalani shartidan $x_0=1$, $y_0=-1$ topamiz va (5) Eyler formulasidan quyidagi jadvalni tuzamiz.

I	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	Aniq yechim
0	1	-1	1	-1
1	1,1	-0,9	0,801	-0,909091
2	1,2	-0,8199	0,659019	-0,833333

3	1,3	-0,753998	0,553582	-0,769231
4	1,4	-0,698640	0,472794	-0,714286
5	1,5	-0,651361		-0,666667

Jadvaldan taqribiy yechim va aniq yechim orasidagi farqlarni ham ko‘rishimiz mumkin.

Bu usulni takomillashtirilgan ko‘rinishlaridan biri Eyler-Koshi usulidir. Eyler-Koshi usuli yordamida esa taqribiy yechimlar quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}$$

bu yerda

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i).$$

Runge-Kutta usuli

Runge-Kutta usuli ko‘p jihatdan Eyler usuliga o‘xshash, ammo aniqlik darajasi Eyler usuliga nisbatan yuqori bo‘lgan usullardan biridir. Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish juda qulay. Buning sababi, bu usul orqali noma‘lum funksiyani x_{i+1} dagi qiymatini topish uchun uning x_i dagi qiymati aniq bo‘lishi yetarli.

Runge-Kutta usulini uning aniqlash darajasi bo‘yicha bir necha usullarga ajratadilar. Shulardan amaliyotda eng ko‘p qo‘llanadigani to‘rtinchi darajali aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir.

Birinchi tartibli differensial tenglama $y' = f(x, y)$ uchun $x=x_i$ da $y=y_i$ ($i=0,1,2,\dots,n$) qiymatlar ma‘lum bo‘lsin. Bu yerda y_i boshlang‘ich shart ma‘nosida bo‘lmasligi ham mumkin.

Tenglamaning yechimi qidirilayotgan kesma $[a, b]$, $x_i=x_0+ih$ ($i=0,1,2,\dots,n$) nuqtalar bilan bir-biriga teng n ta bo‘lakka bo‘lingan.

Noma‘lum funksiya “y” ni $x=x_{i+1}$ dagi qiymati $y_{i+1}=y(x_{i+1})$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo‘ladi:

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf_i(x_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= hf_i(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2) \\ K_3^{(i)} &= hf_i(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2) \\ K_4^{(i)} &= hf_i(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Funksiyaning orttirmasi Δy_i ni quyidagi formuladan topiladi

$$\Delta y_i = (K_1^{(i)} + 2 K_2^{(i)} + 2 K_3^{(i)} + K_4^{(i)}) / 6 \quad (8)$$

Bu yerda $h=(b-a)/n$ – integrallash qadami. i ni har bir qiymati uchun (7) va (8) dagi amallarni bajaramiz va noma'lum funksiya y ni qiymatlarini (tenglamaning yechimini) quyidagi formuladan topamiz.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

Runge-Kutta usuli bilan differensial tenglamani yechishda jadval tuzilsa hisoblash jarayoni birmuncha osonlashadi. Jadvalni tuzish tartibi quyidagicha:

I. (2) va (3) ustunlarga x va y ning kerakli bo'lgan qiymatlari yoziladi.

II. “ x ” va “ y ” larning qiymatlarini ((2)-va (3)-ustunlardan) $y' = f(x, y)$ tenglamani o'ng tarafiga qo'yiladi va natijalarni (4) ustunga (satrlari mos ravishda) qo'yiladi.

III. Topilgan $f(x, y)$ qiymatlarini integrallash qadami “ h ” ga ko'paytiriladi va natijalar (5) ustunga yoziladi.

IV. $K_1^{(0)}$ ni 1 ga, $K_2^{(0)}$ va $K_3^{(0)}$ larni 2 ga, $K_4^{(0)}$ ni 1 ga ko'paytirib ularni (6) ustunga yozamiz.

I-IV jarayonni K^i ni ($i=0, 1, 2, \dots, n$) har bir qiymati uchun takrorlaymiz. (6)-ustunni qiymatlarining yig'indisini hisoblab, natijani 6 ga bo'lamiz va

$$\Delta y = (1/6) (K_1^{(i)} + 2 K_2^{(i)} + 2 K_3^{(i)} + K_4^{(i)})$$

ni topamiz. Va nihoyat $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ topiladi. Yuqorida keltirilgan hisoblash tartibini $[a, b]$ kesmani barcha nuqtalari uchun takrorlaymiz.

1-Jadval

	x	y	$y' = f(x, y)$	$K = hf(x, y)$	Δy
1	2	3	4	5	6

0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0+h/2$	$y_0+K_1^{(0)}/2$	$f(x_0+h/2; y_0+K_1^{(0)}/2)$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0+h/2$	$y_0+K_2^{(0)}/2$	$f(x_0+h/2; y_0+K_2^{(0)}/2)$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	x_0+h	$y_0+K_3^{(0)}$	$f(x_0+h; y_0+K_3^{(0)})$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$	$f(x_1, y_1)$	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(1)}$
	$x_1+h/2$	$y_1+K_1^{(1)}/2$	$f(x_1+h/2; y_1+K_1^{(1)}/2)$	$K_2^{(1)}$	$2K_2^{(1)}$
	$x_1+h/2$	$y_1+K_2^{(1)}/2$	$f(x_1+h/2; y_1+K_2^{(1)}/2)$	$K_3^{(1)}$	$2K_3^{(1)}$
	x_1+h	$y_1+K_3^{(1)}$	$f(x_1+h; y_1+K_3^{(1)})$	$K_4^{(1)}$	$K_4^{(1)}$
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_1$
2	x_2	$y_2=y_1+\Delta y_1$			

Misol. Runge-Kutta usuli yordamida quyidagi differensial tenglamaga qo'yilgan boshlang'ich masalaning $y' = \frac{2}{x}y + x$, $y(1)=0$ yechimi $[1;1,5]$ kesmada $h=0,1$ qadam bilan topilsin.

Yechish. Yechimlar va hisobiy qiymatlar 2-jadvalda keltirilgan.

2-Jadval

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$K=hf(x_i, y_i)$	Δy_1
0	1	0	1	0,1	0,1
	1,05	0,05	1,145238	0,114524	0,229048
	1,05	0,057262	1,159071	0,115907	0,231814
	1,1	0,115907	1,310740	0,131074	0,131074
					0,115323
1	1,1	0,115323	1,309678	0,130968	0,130968
	1,15	0,180807	1,464447	0,146445	0,292889
	1,15	0,188546	1,477905	0,147791	0,295581

	1,20	0,263114	1,638523	0,163852	0,163852
					0,147215
2	1,2	0,262538	1,637563	0,163756	0,163756
	1,25	0,344416	1,801066	0,180107	0,360213
	1,25	0,352591	1,814146	0,181415	0,362829
	1,3	0,443953	1,983005	0,198301	0,198301
					0,180805
3	1,3	0,443388	1,982135	0,198214	0,198214
	1,35	0,524495	2,153696	0,215370	0,430739
	1,35	0,551073	2,166404	0,216640	0,443281
	1,4	0,660028	2,342897	0,234290	0,234290
					0,216087
4	1,4	0,659475	2,342107	0,234211	0,234211
	1,45	0,776580	2,521146	0,252115	0,504229
	1,45	0,785532	2,533493	0,253349	0,506700
	1,50	0,912824	2,717099	0,271710	0,271711
					0,252808
5	1,5	0,912283			

Galerkin usuli

Differensial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishda taqribiy-varyotsion usullardan biri Galerkin usulini qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu usulda tenglamaning yechimi tanlab olingan funksiyalar yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. Bu usulni ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalaga qo'llanishini ko'raylik.

Bizga quyidagi chegaraviy masala berilgan bo'lsin:

$$y''(x) + p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x), a \leq x \leq b; \quad (10)$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0 \quad (11 a)$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \quad (11 b)$$

bu yerda, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ —berilgan funksiyalar; α_0 , β_0 , γ_0 , α_1 , β_1 , γ_1 —o‘zgarmaslar.

Faraz qilamiz, bu chegaraviy masalani yagona, yetarlicha differensiallanuvchi yechimi mavjud. Buning uchun, quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, |\alpha_1| + |\beta_1| > 0.$$

Galerkin usulini qo‘llash uchun quyidagi shartlarni bajaruvchi funksiyalar tizimini $\{\varphi_i(x)\}$ tanlab olamiz:

1) Bu funksiyalar uzluksiz va ikkinchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega $\varphi_k(x) \in C^2[a, b]$.

2) Ixtiyoriy n uchun funksiyalar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ $[a, b]$ da chiziqli bog‘liq emas.

$$3) \alpha_0 \varphi_0(a) + \beta_0 \varphi_0'(a) = \gamma_0, \alpha_1 \varphi_0(b) + \beta_1 \varphi_0'(b) = \gamma_1,$$

$$\alpha_0 \varphi_k(a) + \beta_0 \varphi_k'(a) = 0, \alpha_1 \varphi_k(b) + \beta_1 \varphi_k'(b) = 0, k = 1, 2, \dots;$$

4) (10), (11 a, b) shartlarni bajaruvchi $\{\varphi_i(x)\}$ funksiyalar $C^2[a, b]$ to‘plamda to‘la gruppani tashkil etadi.

Bu shartlarni bajaruvchi funksiyalarga koordinat funksiyalar deb ataladi.

Berilgan masalani yechimi quyidagi ko‘rinishda

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (12)$$

qidiramiz.

Noma’lum $a_1, a_2, \dots, a_n$ koeffitsientlar quyidagi shartlardan topiladi:

$$\int_a^b R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) \psi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

bu yerda

$$R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) - q(x)y_n(x) - f(x).$$

Oxirgi integral tenglikdan quyidagi algebraik tenglamalar tizimini hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^n c_{ki} a_k - d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13).$$

Bu yerda

$$c_{ki} = \int_a^b [\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) - q(x)\varphi_k(x)]\varphi_i(x)dx,$$

$$d_i = \int_a^b [f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x)]\varphi_i(x)dx.$$

Hosil qilingan (13) tenglamalar sistemasidan noma'lum koeffitsientlar topilib, (12) ga qo'yiladi, natijada berilgan masalani taqribiy yechimi topiladi.

Galerkin usulini taqribiy yechimining aniqligi koordinat funksiyalar soniga (n) va ularni qanday tanlab olinishiga bog'liq.

Misol. Galerkin usuli yordamida quyidagi chegaraviy masalani

$$y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y'(0) = -2, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

taqribiy yechimini toping.

Yechish. Koordinat funksiyalarni $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... darajali funksiyalar 1, x , x^2 , ... kombinatsiyasi sifatida olamiz. $\varphi_0(x) = b + cx$ funksiya chegaraviy shartlarni $\varphi_0'(0) = -2$, $\varphi_0(1) + \varphi_0'(1) = 0$ qanoatlantirishini hisobga olsak $\varphi_0(x) = 4 - 2x$ ekanligini topamiz. $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... funksiyalar esa bir jinsli chegaraviy shartlarni $\varphi_k'(0) = 0$, $\varphi_k(1) + \varphi_k'(1) = 0$ qanoatlantirishi kerak. U holda, bu funksiyalarni $\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$ ko'rinishda olsak, noma'lum parametrlarni topib, koordinat funksiyalarni

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x, \quad \varphi_1(x) = x^2 - 3, \quad \varphi_2(x) = x^3 - 4$$

hosil qilamiz. $k, i=1, 2$ uchun c_{ki} va d_i larni topamiz:

$$c_{11} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3)dx = -22,93333;$$

$$c_{12} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -32,33333;$$

$$c_{21} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^2 - 3)dx = -31,16667;$$

$$c_{22} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^3 - 4)dx = -44,22857;$$

$$d_1 = \int_0^1 (x^2 + 8)(x^2 - 3)dx = -22,13333;$$

$$d_2 = \int_0^1 (x^2 + 8)(x^3 - 4)dx = -31,16667.$$

U holda Galerkin tenglamalar tizimidan

$$\begin{cases} 22,93333a_1 + 31,16667a_2 = 22,13333 \\ 32,33333a_1 + 44,22857a_2 = 31,16667 \end{cases}$$

noma'lum koeffitsientlarni topamiz:

$$a_1=1,14852, a_2=-0,13498.$$

Natijada, berilgan chegaraviy masalani taqribiy yechimini hosil qilamiz:

$$y(x) \approx 1,094-2x+1,149x^2-0,135x^3.$$

5-§. Chegaraviy masalalarni chekli ayirmali usullar yordamida yechish

Chegaraviy masalalarni yechish Koshi masalalariga nisbatan ancha murakkab bo'lganligi sababli, bu ko'rinishdagi masalalar ba'zi hollarda Koshi masalasiga keltirib yechiladi, ko'pchilik hollarda esa chekli ayirmali usullardan foydalaniladi, masalan progonka usuli, potokli progonka usuli, differensial progonka usuli va boshqalar.

Aytaylik, ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y(x) = F(x) \quad (1)$$

chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lsin

$$\beta_0 y'(a) + \alpha_0 y(a) = \gamma_0 \quad (2)$$

$$\beta_1 y'(b) + \alpha_1 y(b) = \gamma_1 \quad (3)$$

bu yerda $A(x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$, $[\alpha_i] + [\beta_i] > 0$, $i=0,1$.

Bu chegaraviy masalani yechish uchun chekli ayirmali usulni qo'llaymiz. Buning uchun $[a,b]$ oraliqni N ta qismga bo'lamiz va h qadamli to'r hosil qilamiz:

$$h=(b-a)/N; x_i=x_0+ih, x_0=a, x_N=b, i=0,N;$$

bu yerda N -oraliqlar soni.

Tenglama koeffitsientlari, noma'lum funksiya va uning hosilalarining x_i nuqtadagi qiymatlari quyidagi munosabatlar bilan beriladi:

$$A(x_i)=A_i, B(x_i)=B_i, C(x_i)=C_i, F(x_i)=F_i, y(x_i)=y_i,$$

$$y'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_i) / h, y''(x) \approx (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2.$$

Ba'zan $y'(x)$ ni $y'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h)$ ko'rinishida ham yozish mumkin.

U holda (1) tenglamani $x=x_i$ nuqtadagi ifodasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + B_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + C_i y_i = f_i \quad (4)$$

chegaraviy shartlarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\beta_0(y_1 - y_0)/h + \alpha_0 y_0 = \gamma_0 \quad (5)$$

$$\beta_1(y_N - y_{N-1})/h + \alpha_1 y_N = \gamma_1 \quad (6).$$

(4)-(6) ko'rinishdagi chekli-ayirmali masalani yechishning juda ko'p usullari mavjud, masalan progonka, differensial progonka, potokli progonka, ortogonal progonka, variatsion usullar va boshqalar.

Biz berilgan masalani progonka usuli bilan yechamiz. Uning uchun (4)-(6) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i y_{i-1} = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (7)$$

$$\alpha_{01} y_0 + \beta_{01} y_1 = \gamma_0 \quad (8)$$

$$\alpha_{02} y_{N-1} + \beta_{02} y_N = \gamma_1 \quad (9).$$

Bu yerda

$$a_i = A_i + h B_i / 2, \quad b_i = h^2 C_i - 2 A_i$$

$$c_i = A_i - h B_i / 2, \quad t_i = h^2 f_i$$

$$\alpha_{01} = \alpha_0 - \beta_0/h, \quad \beta_{01} = \beta_0/h$$

$$\alpha_{02} = -\beta_1/h, \quad \beta_{02} = \beta_1/h + \alpha_1.$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasini (7)-(9) ni yechimi o'ng progonka usuli orqali quyidagicha topiladi:

1. To'g'ri progonka:

$$X_1 = -\beta_{01}/\alpha_{01}, \quad Z_1 = \gamma_0/\alpha_{01}$$

$$X_{i+1} = \frac{a_i}{b_i + c_i X_i}, \quad Z_{i+1} = \frac{t_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i}$$

bu formulalar orqali ketma-ket yordamchi parametrlar

$(X_1, Z_1, X_2, Z_2, \dots, X_N, Z_N)$ hisoblanadi.

2. Teskari progonka:

$$y_N = \frac{1}{\Delta}(\gamma_1 - \alpha_{02}Z_N), \quad \Delta = \beta_{02} + \alpha_{02}X_N;$$

$$y_{i-1} = X_i y_i + Z_i$$

bu formula orqali esa ketma-ket izlanayotgan yechimlar qiymatlari

$y_N, y_{N-1}, y_{N-2}, \dots, y_1$ hisoblanadi.

Bu o'ng progonka usuli

$$|\alpha_{01}| \geq |\beta_{01}|, \quad |b_i| \geq |c_i| + |a_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (10)$$

shartlar bajarilganda sonlarni yaxlitlash xatoligiga turg'un bo'ladi.

Agarda

$$|\beta_{02}| \geq |\alpha_{02}|, \quad |b_i| \geq |c_i| + |a_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

shartlar bajarilsa, chap progonka usuli qo'llaniladi:

$$1) X_{N-1}^{(1)} = -\alpha_{02}/\beta_{02}, \quad Z_{N-1}^{(1)} = \gamma_1/\beta_{02};$$

$$X_{i-1}^{(1)} = - \frac{c_i}{b_i + a_i X_i^{(1)}}, \quad Z_{i-1}^{(1)} = \frac{t_i - a_i Z_i^{(1)}}{b_i + a_i X_i^{(1)}}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1$$

$$2) y_0 = \frac{\gamma_0 - \alpha_{01} Z_0^{(1)}}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \alpha_{01} + \beta_{01} X_0^{(1)};$$

$$y_{i+1} = X_i^{(1)} y_i + Z_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

Misol. Quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamaga

$$y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

qo'yilgan chegaraviy masala yechimi to'g'ri usuli yordamida $x_n = 0, 1n$; $n = 0, 1, \dots, 10$ nuqtalarda hisoblansin.

Yechish: Berilgan masala uchun chekli ayirmalar sxemasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$(1-0,01n)y_{n-1} - 2,02y_n + (1+0,01n)y_{n+1} = 0,0002n^2, \quad n = 1, 2, \dots, 9,$$

$$y_0 = 1, \quad y_{10} = 0$$

Bu algebraik tenglamalar tizimiga o'ng progonka usulini qo'llaymiz. Buning uchun oldin X_n, Z_n lar hisoblanadi:

$$X_1 = 0, \quad X_{n+1} = \frac{0,1+0,01n}{2,02-(1-0,01n)X_n},$$

$$Z_1 = 1, \quad Z_{n+1} = \frac{(1-0,1 \cdot n)Z_n - 0,0002 \cdot n^2}{2,02-(1-0,01n)X_n},$$

$$n = 1, 2, \dots, 9.$$

So'ng teskari yo'nalishda yechimlar

$$y_{10} = 0, \quad y_{n-1} = X_n y_n + Z_n, \quad n = 10, 9, \dots, 1$$

topiladi. Hisoblangan qiymatlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

n	X_n	Z_n	y_n	n	X_n	Z_n	y_n
0	-	-	1,0000	6	0,83333	0,11667	0,16000
1	0,00000	1,0000	0,81000	7	0,85714	0,08286	0,09000
2	0,50000	0,49000	0,64000	8	0,87500	0,05500	0,04000
3	0,66667	0,31333	0,49000	9	0,88889	0,03111	0,01000
4	0,75000	0,22000	0,36000	10	0,90000	0,01000	0,0
5	0,80000	0,16000	0,25000				

Tajriba natijalarni qayta ishlash. Emperik funksiyalar qurish

Y faktorning X faktorga bog‘liqligi: $y = \varphi(x)$ qandaydir texnologik jarayonda o‘tkazilayotgan tajribaga asosan aniqlash talab qilinsin.

Tajriba natijalari quyidagi jadval

$$X: \quad X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n$$

$$Y: \quad Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_n$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

Izlanayotgan $y = \varphi(x)$ funksiya qandaydir ma’noda tajriba natijalarini aks ettirsin.

$y = \varphi(x)$ funksiyaning ko‘rinishi nazariy mulohazalarga asosan yoki tajribada olingan qiymatlarga mos keladigan nuqtalarning koordinatalari tekisligida joylashuviga qarab aniqlanadi. Bu chiziqli funksiya, parabolik funksiya, poliminial ko‘rinishdagi funksiya, logorifmik, eksponiansial, ko‘rsatkichli va h.k., funksiyalar ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

Izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiya Y funksiyaning X faktorga nisbatan regressiya tenglamasi yoki bir faktorli regression model deb ham ataladi.

Interpolyatsion masala. Lagranj interpolyatsion formulasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin:

$$y = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

Odatda interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha qo'yiladi: shunday «n»-chi tartibdan oshmagan $R(x)=R_n(x)$ ko'phad topish kerakki, $R(x)$ berilgan x_n ($n=0,1,2,\dots,n$) nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin, ya'ni

$$R(x_n)=y_n$$

tenglik bajarilsin.

Topilishi lozim bo'lgan ko'phadning ko'rinishini quyidagicha olaylik:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

Bu yerda a_n ($n=0,1,2,\dots,n$) – noma'lum o'zgarmas koeffisientlardir. Shartga ko'ra $L_n(x)$ fumksiya $x_0, x_1, \dots, x_n$ interpolyatsiyalash tugunlarida

$$L_n(x_0) = 0, \quad L_n(x_1) = y_1, \dots, L_n(x_n) = y_n$$

qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan holda quyidagi Lagranj interpolyatsion formulasini topish mumkin:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot y_n.$$

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik:

$n = 1$ bo'lganda Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini beradi.

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

Agar $n=2$ bo'lsa, u vaqtda kvadratik interpolyastion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa ega bo'lgan parabolani aniqlaydi.

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

Kichik kvadratlar usuli. Regressiya teglamalarini qurish

Bizga quyidagi tajribalar natijalari berilgan bo'lsin:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Bir faktorli regression model

$$y = \varphi(x, a, b, \dots) \quad (1)$$

ko'rinishda tanlab olingach, shu modelga kiruvchi $a, b, c, \dots$ parametrlarni shunday tanlash kerakki, u o'rganilayotgan texnologik jarayonni biror ma'noda yaxshi aks ettirsin. Qo'yilgan masalani yechishda keng tarqalgan usul kichik kvadratlar usulidir.

Texnologik jarayonda o'tkazilgan tajribada olingan y_t qiymat bilan mos nuqtalardagi $\varphi(x, a, b, c, \dots)$ funksiya qiymatlari orasidagi ayirmalar kvadrlarining yig'indisini qaraymiz.

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2 \quad (2)$$

$a, b, c, \dots$ parametrlarni shunday tanlaymizki, bu yig'indi eng kichik qiymat qabul qilsin.

Demak, $S(a, b, c, \dots)$ funksiyaning minimumga aylantiradigan $a, b, c, \dots$ parametrlari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi lozim

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots \quad (3)$$

Chiziqli regressiya tenglamasi

Qidirilayotgan $\varphi(x, a, b, c, \dots)$ - chiziqli funksiya bo'lsin, ya'ni

$$\varphi(x, a, b) = ax + b \quad (4)$$

U holda

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \rightarrow \min$$

a va b ni parametrlar shunday tanlab olinadiki, bu yig'inda eng kichik qiymat qabul qilinsin. Buning uchun bu yig'indini a va b parametrlar bo'yicha xususiy hosilalami olamiz va 0 ga tenglaymiz. Hosilalami topib soddalashtirganimizdan so'ng quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Bu yerda belgilash kiritsak

$$P_1 = \sum_{i=1}^n x_i, Q_1 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, Q_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

U holda, noma'lum koeffitsientlar quyidagi formulalar bilan hisoblanishini topamiz:

$$a = \frac{Q_2 \times n - P_1 \times Q_1}{P_2 \times n - P_1 \times P_1}; b = \frac{Q_1 - a \times P_1}{n}.$$

Ikkinchi tartibli regressiya tenglamasi

Qidirilayotgan $\varphi(x, a, b, c, \dots)$ - ikkinchi tartibli funksiya bo'lsin, ya'ni

$$\varphi(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c \quad (5)$$

U holda,

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + bx_i + c - y_i] \rightarrow \min$$

a, b va c ni parametrlar shunday tanlab olinadiki, bu yig'inda eng kichik qiymat qabul qilinsin. Buning uchun bu yig'indini a, b va c parametrlar bo'yicha xususiy hosilalami olamiz va 0 ga tenglaymiz.

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + bx_i + c - y_i] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + bx_i + c - y_i]x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + bx_i + c - y_i]x_i^2 = 0$$

Quyidagi belgilashlar kiritsak:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad P_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad P_3 = \sum_{i=1}^n x_i^3, \quad P_4 = \sum_{i=1}^n x_i^4,$$
$$Q_1 = \sum_{i=1}^n y_i, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad Q_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i$$

U holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} P_2a + P_1b + n \cdot c = Q_1 \\ P_3a + P_2b + P_1c = Q_2 \\ P_4a + P_3b + P_2c = Q_3 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasi yechilib noma'lumlar a, b, c koefitsientlar topiladi va (5) funksiyaga olib borib qo'yiladi.

ILOVALAR

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ funksiyaning qiymatlari}$$

1-jadval

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3604	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3189	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	1874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2466	2444
1,0	2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2056	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1624	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1466	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1136	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0308	0297	0290
2,3	0289	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180

2,5	0175	0170	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ funksiyaning qiymatlari}$$

2-jadval

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214

1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41416	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49890	49893	49896	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49915	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998
$ \begin{array}{ccccccccc} x = & 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 \\ \Phi(x) = & 0,499979 & 0,499986 & 0,499991 & 0,499995 & 0,499997 \end{array} $										
$ \begin{array}{ccccccccc} x = & 4,6 & 4,7 & 4,8 & 4,9 & 5,0 \\ \Phi(x) = & 0,499998 & 0,4999987 & 0,4999992 & 0,4999995 & 0,4999997 \end{array} $										

ADABIYOTLAR

Asosiy adabiyotlar

1. Mathematical Analysis 1, Claudio Canuto-Anita Tabacco, Milano, Italiya, 2015.
2. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I. Minchen. 2010.
3. Q.Sh.Ro'zmetov, G'.X.Djumabayev, "Matematika". Darslik. T.: "O'zbekiston faylasuflari jamiyati nashriyoti". 2017 y. -450 b.
4. Ё.Соатов, "Олий математика". Дарслик. 3-жилд.- Т.: "Ўзбекистон", 1996 й. - 640 б.
5. Sh.I.Tojiev, "Oliy matematikadan masalalar yechish". Darslik. T.: "O'zbekiston", 2002 y. - 512 b.
6. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova, "Oliy matematika", O'quv qo'llanma, Qarshi Davlat Universiteti, 1-,2-jild, 2010 y.
7. P.E.Danko, "Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami". Darslik. T.: "O'zbekiston", 2007 й. - 248 b.
8. A.C. Расулов ва бошқалар, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Т.: "Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти" 2006 й.
9. Б.Абдалимов. Олий математика. Т. 1994 .
10. Высшая математика для экономистов. «Экзамен» Москва. 2009 г.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Н.С. Пискунов, "Дифференциальное и интегральное исчисление", Учебное пособие, Том-1,2., Москва "Наука", 1985 г.
2. В.Е. Гмурман, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами", Ўқув қўлланма, Т.: "Ўқитувчи", 1980й.
3. В.П.Минорский, "Олий математикадан масалалар тўплами" Т.: "Ўқитувчи", 1990 й.
4. Т.Жўраев, Г.Худойбергенов, Х.Мансуров, А.Ворисов. "Олий математика асослари". Дарслик. Т.: "Ўзбекистон", 1998 й. 303 б.

5. Ф.Усмонов, Р.Исмоилов, Б.Хўжаев. Математикадан қўлланма.
Т.:“Янги аср авлоди”, 2006 й. 464 б.

M U N D A R I J A

SO‘Z BOSHI	3
1-BOB. DASTLABKI MA'LUMOTLAR	4
1-§. To'plam. to'plamlar ustida amallar	4
2-§. Sonlar.haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari	8
3-§. Tekislikda Dekart hamda qutb koordinalar sistemasi	17
4-§. Vektorlar	23
5-§. Kompleks sonlar	31
2-BOB. MATRISALAR VA DETERMENANTLAR	39
1-§. Matrisa haqida asosiy tushunchalar	39
2-§. Matrisalar ustida amallar	41
3-§. Matrisalarda elementar almashtirishlar	43
4-§. Matrisalar ko'paytmasi	44
5-§. Determinantlar	45
6-§. Determinantning xossalari	47
7-§. Xosmas matrisalar. Teskari matrisa	49
8-§. Matrisaning rangi	53
3-BOB. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI	55
1-§. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi	55
2-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar usulida yechish	60
4-BOB. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ	65
1-§. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi	65
2-§. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi	67
3-§. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi	69
4-§. To'g'ri chiziq haqidagi asosiy masalalar	70
5-BOB. TEKISLIKDA IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR	78
1-§. Aylana	78
2-§. Ellips	80
3-§. Giperbola	83

4-§. Parabola.	88
6-BOB. FUNKSIYA	91
1-§. Funksiya tushunchasi	91
2-§. Turli xususiyatli funksiyalar	96
7-BOB. FUNKSIYA LIMITI	102
1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi	102
2-§. Funksiya limiti	114
3-§. Limitga esa bo'lgan funksiyaning xossalari	119
4-§. Funksiya limitining mavjudligi	122
5-§. Muhim limitlar	124
8-BOB. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI	128
1-§. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi	128
2-§. Funksiyaning uzlulishi	130
3-§. Uzluksiz funksiyalar haqida asosiy teoremlar. Sodda funksiyalarning uzluksizligi	132
4-§. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari	134
9-BOB. FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALI	136
1-§. Funksiya hosilaning ta'riflari. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari	136
2-§. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari	138
3-§. Funksiya hosilasini hisoblash qoidalari	141
4-§. Sodda funksiyalarning hosilalari. Hosilalar jadvali	146
5-§. Funksiyaning differensial. Differensial hisobning asosiy teoremlari	152
6-§. Differensial hisobining asosiy teoremlari	157
7-§. Yuqori tartibli hosilalar	161
10-BOB. FUNKSIYA HOSILASINING TADBIQLARI	166
1-§. Funksiyaning monotonik oralig'ini aniqlash	166
2-§. Funksiyaning ekstremumlari	168
11-BOB. ANIQMAS INTEGRALI	177

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral	177
2-§. Aniqmas integralning xossalari	179
3-§. Asosiy integrallar jadvali	180
4-§. Integrallash usullari	182
5-§. Sodda kasrlar va ularning integrallari	187
6-§. Ratsional funksiyalarni integrallash	189
7-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash	192
8-§. Tirgonometrik funksiyalarni integrallash	194
12-BOB. ANIQ INTEGRAL	197
1-§. Aniq integral tushunchasi	197
2-§. Aniq integralning xossalari	202
3-§. Aniq integrallarni hisoblash	204
4-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash	210
13-BOB. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI BIR TADBIQLARI	217
1-§. Tekis shaklning yuzini hisoblash	217
2-§. Yoy uzunligi	219
3-§. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi	223
14-BOB. XOSMAS INTEGRALLAR	227
1-§. Chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) xosmas integrallar	227
2-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali	233
15-BOB. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR	238
1-§. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi	238
2-§. Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti	242
3-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti	244
4-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi	247
5-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differentsiallari	249
6-§. Funksiyaning to'liq orttirmasi	251
7-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensial	252
8-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari va	254

differentensiali	
9-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari	258
10-§. Funksiya ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari	259
16-BOB. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING INTEGRALI	264
1-§. Ikki karrali integral	264
2-§. Egri chiziqli integrallar	269
17-BOB. SONLI VA FUNKSIONAL QATORLAR	274
1-§. Sonli qatorlar	274
2-§. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari	276
3-§. Qatorning yaqinlashuvchiligi	277
4-§. Hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi	279
5-§. Funksional qatorlar	281
6-§. Darajali qatorlar	284
7-§. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish	288
18-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR	292
1-§. Differensial tenglama tushunchasi	292
2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar	293
3-§. Bir jinsli differensial tenglamalar	296
4-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar	298
5-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar	299
6-§. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar	302
19-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA	309
1-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari va tasdiqlari	309
2-§. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi	319
3-§. Tasodifiy miqdorlar	328
4-§. Matematik statistika elementlari	345

20-BOB. AMALIY MATEMATIKA	362
1-§. Xatoliklar nazariyasi haqida tushuncha	362
2-§. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish usullari	364
3-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari	367
4-§. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari	369
5-§. Chegaraviy masalalarni chekli ayirmali usullar yordamida yechish	378
Ilovalar	388
Adabiyotlar	391