ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

КОНФИГУРАЦИЯСИГА ҚАТТИҚ ЧЕКЛАШЛАР ҚЎЙИЛГАН ПАНЖАРАЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ГИББС ЛИМИТ ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

КОНФИГУРАЦИЯСИГА ҚАТТИҚ ЧЕКЛАШЛАР ҚЎЙИЛГАН ПАНЖАРАЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ГИББС ЛИМИТ ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.DSc/FM35 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Наманган давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Гринив Остап Олегович** профессор (Дарем университети, Англия)
	Рахимов Абдуғофур Абдумажидович физика-математика фанлари доктори
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги Dsc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган.) (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И.Чилин
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида физик ва биологик системаларнинг термодинамик хоссаларини ҳамда хизмат кўрсатиш, ахборотлар назарияси масалаларини ўрганиш учун олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида вужудга келадиган муаммоларнинг ечимлари аксарият ҳолларда Гиббс ўлчовлари назарияси масалаларига келтирилади. Классик статистиканинг доимий ҳарорат сақланадиган ва атроф-муҳит билан иссиқлик мувозанатида бўлган системалари учун америкалик олим Дж.У.Гиббс томонидан ўрнатилган каноник Гиббс тақсимоти муҳим аҳамиятга эга. Р.Бэкстер ва F.Kelly ишларидан кўриш мумкинки, Гиббс тақсимотларини ўрганиш фаннинг кўп йўналишларида, жумладан, физика, статистик механика, биология ва хизмат кўрсатиш назарияси каби йўналишларда долзарб ҳисобланади. Шунингдек, статистик механиканинг турли моделлари учун Гиббс тақсимотларини қуриш ўлчовлар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда физика, статистик механика моделлари учун трансляцион-инвариант, даврий, кучсиз даврий ва бошқа Гиббс ўлчовларини қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: берилган гамильтониан учун Гиббс ўлчови мавжудлигини аниқлаш; барча бундай ўлчовлар тўпламининг стуктурасини таҳлил қилиш; мавжуд Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш шартларини топиш; ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматларини аниқлаш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, статистик механиканинг классик моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилиш, трансляцион-инвариант, даврий, кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини мавжудлигини аниқлаш усулларини топишга алоҳида эътибор қаратилди. Конфигурациясига қаттиқ чеклашлар қўйилган панжарали системалар ҳамда чекли ва саноқли сондаги спин қийматларга эга бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларини қуриш ва бундай ўлчовлар тўпламининг структурасини таҳлил қилишда сезиларли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика, эҳтимоллик назарияси ва динамик тизимлар назарияси» фанларининг устивор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда Гиббс ўлчовлари тўпламининг хоссаларини тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида» ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги № ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПҚ-2789 “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида” ги, 2017 йил 20 апрелдаги № ПҚ-2909 “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ва 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2].

Гиббс ўлчовлари назарияси бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Бонн университети, амалий математика институти, Бохумнинг Рур университети (Германия); INFN илмий институти, Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Истиқболли тадқиқотлар маркази, Аквила университети (Италия); назарий физика маркази, Марсель университети, Прованс университети, CNRS ва Париж университети (Франция); Москва давлат университети, ахборотлар узатиш муаммолари институти, Россия фанлар академияси Математика институти (Россия); Авейру университети (Португалия); Кюсю университети (Япония); статистика лабораторияси, Кембридж университети, School of Mathematics, University of Leeds, Лафборо университети (Буюк Британия); Зирве университети, Харран университети (Туркия); Женева университети (Швейцария) ва бошқа жойларда олиб борилмоқда.

Физика ва статистик механиканинг турли моделлари учун Гиббс ўлчовларини қуриш бўйича олинган натижаларни тадқиқ қилишга оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан қуйидаги илмий натижалар олинган: Кэли дарахти устида икки ҳолатли Hard-Core (HC) модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчови ягона эканлиги кўрсатилган ва шу модель параметрларига баъзи шартлар қўйилганда даври иккига тенг бўлган Гиббс ўлчовларининг ягона эмаслиги исботланган (Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge, Англия); уч ва тўрт ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари учун

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, http://www.springer.com/mathematics; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series https://www.researchgate.net ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

унумдор НС модели тушунчаси киритилган ва бундай моделлар учун Гиббс ўлчови ягона ва ягона бўлмайдиган шартлар топилган (Department of Mathematics, London School of Economics (Англия), Bell Laboratories, Lucent Technologies, Mountain Avenue Murray Hill, New Jersey (АҚШ)); Кэли дарахти устида уч ҳолатли НС моделлари учун трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги масаласи кўрилган ва баъзи ҳолларда ҳар қандай мусбат λ активлик учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг ягоналиги исботланган (CNRS and University Paris (Франция), Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge (Англия)); $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида ферромагнит Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўлиқ таснифланган, $k = 2$ тартибли Кэли дарахти устида эса бу ўлчовларнинг четка ўлчов бўлиш шартлари топилган (Fakultät für Mathematik - Ruhr-Universität Bochum (Германия)); Кэли дарахти устида тўрт ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари ҳамда SOS модели учун трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги ва ягона эмаслиги кўрсатилган (Centre de Physique Théorique, Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var (Франция)).

Дунёда бугунги кунда, турли моделлар учун Гиббс ўлчовларини аниқлаш ва уларни татбиқ этиш бўйича бир қатор изланишлар, жумладан: НС модели учун даврий ва трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини кўрсатиш ва кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини таснифлаш; икки ҳолатли НС модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг четка ўлчов бўлиш шартларини топиш; чекли ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари ва SOS моделлари учун параметрларнинг трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона бўлмайдиган аниқ қийматларини топиш ҳамда четка ўлчов бўлиш шартларини аниқлаш; спин қийматлари сони чекли ёки саноқли бўлган моделлар учун даврий, кучсиз даврий ва бошқа Гиббс ўлчовларининг мавжудлик шартларини топиш; Поттс ва НС моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини таснифлаш ва бу ўлчовлар тўпламининг структурасини таҳлил қилиш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Дж.У.Гиббс томонидан каноник Гиббс тақсимоти яратилган бўлишига қарамай, биринчи бўлиб Гиббснинг лимит ўлчовлари умумий характеристикаси Р.Л.Добрушин, О.Лэнфорд ва Д.Рюэлларнинг ишларида келтирилган. Бу тушунчанинг хусусий ҳоли, бундан анча аввал, Н.Н.Боголюбов ва Б.И.Хацет ишларида намоён бўлган. Гиббс ўлчовлари назарияси кўплаб олимларнинг, жумладан, Р.Бэкстер, Х.О.Георги, В.А. Малишов, R.A.Minlos, К.Престон, Д.Рюэль, Я.Г.Синай, M.Baus, C.F.Nejero, G.Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, Jean Zinn-Justin, Ф.Мухаммедов, Н.Н.Ганиходжаев ва У.А.Розиковларнинг ишларида ёритилган. Р.Л.Добрушин томонидан лимит Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган. К.Х.Хинин бу теоремани квант майдонлар назариясининг панжарали моделлари учун қўллаган. Фаза алмашишларнинг асосий назарияси С.А.Пирогов, Я.Г.Синай, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter ва M.Zahradnik ишларида ўз аксини топган.

Конфигурациясида спин чекланмаган сондаги қийматлар қабул қиладиган моделлар учун Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақида теорема J.Lebowith ва E.Presutti томонидан исботланган. Панжарали моделларнинг турли синфлари учун Пайерлснинг контур усулига асосланиб лимит Гиббс ўлчовларини анализ қилиш Ф.А.Березин, С.А.Пирогов, Я.Г.Синай, J.Ginibre, A.Grossman, Д.Рюэль, Р.Л.Добрушин, В.Герцик, O.J.Heilmann, E.M.Lieb, M.Cassandro, M.Da Fano, G.Olivereri, Г.Ботиров ва бошқа олимларнинг ишларида намоён бўлган.

Статистик физикада тадбиқлари билан асосланган HC модели Z^d панжарада A.E.Mazel ва Yu.M.Suhov томонидан ривожлантирилган. Кэли дарахтида группалар назариясини қўллаб лимит Гиббс тақсимотлари илк бор F.Spitzer томонидан қурилган. HC моделларининг тасодифий боғлиқмас графлар тўпламини ва панжарада газ молекулаларининг системасини ўрганишда пайдо бўлишини ҳамда уларнинг тадбиқларига бағишланган илмий изланишларни Р.Бэкстер, G.R.Brightwell, P.Winkler, D.Galvin, J.Kahn, F.Kelly, G.Louth, P.Mitra, K.Ramanan, A.Sengupta, I.Ziedins ишларида кўриш мумкин. Кэли дарахтида HC моделлари учун трансляцион-инвариант, даврий ва бошқа Гиббс ўлчовларини қуриш ҳамда бундай ўлчовлар тўпламининг структурасини анализ қилиш бўйича G.Brightwell, O.Häggström, P.Winkler, F.Kelly, B.Luen, D.Galvin, F.Martinelli, P.Tetali, Yu.M.Suhov, J.Martin, J.Ruiz, D.Gandolfo, У.А.Розиков, Ш.А.Шоюсуповлар илмий изланишлар олиб боришган.

Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков ишларида Кэли дарахтида q ҳолатли Поттс модели учун чекли сондаги трансляцион-инвариант ва саноқсиз сондаги трансляцион-инвариант бўлмаган Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилган. Гиббс ўлчовлари тўпламини кенгайтириш мақсадида У.А.Розиков ва М.М.Рахматуллаев ишларида кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган ва Изинг модели учун бундай ўлчовлар мавжудлиги исботланган. Изинг моделининг умумлашган ҳоли бўлган SOS модели учун трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовларини таҳлил қилиш бўйича Yu.M.Suhov, У.А.Розиков, Ш.А.Шоюсупов, Р.М.Хакимов ва бошқалар илмий-тадқиқотлар олиб боришган. Кэли дарахтида статистик механиканинг турли моделлари учун, группалар назариясини қўллаб, Гиббс ўлчовларини қуриш кўп сонли илмий ишларда, жумладан, F.Peruggi, F.di Liberto, G.Monroy, J.F.F.Mendes, F.Wagner, D.Grensing, J.Heide, F.Y.Wu, G.Brightwell, P.Winkler, Н.Н.Ганиходжаев, Ф.Мухаммедов, У.А.Розиков, М.Рахматуллаев, Г.Ботиров, Р.М.Хакимов ва бошқаларнинг изланишларида ривожлантирилди. Юқоридаги каби кўплаб илмий ишлар бажарилганига қарамасдан, ҳозиргача ҳали бирорта ҳам модель учун лимит Гиббс ўлчовларининг тўла таснифи берилмаганини таъкидлаш жоиз.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Фанлар Академияси Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари»

(2012-2016 йиллар) ва ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос»+«Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага тадбиқлари» (2017-2021 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади спин қийматлари сони чекли бўлган Поттс ва қаттиқ дисклар моделлари учун лимит Гиббс ўлчовлари тўпламининг структурасини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида НС модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш шартларини топиш;

икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели учун даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини текшириш;

қаттиқ дисклар модели учун даври тўртга тенг бўлган кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини аниқлаш;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона эмаслик ҳамда уларнинг чекка ўлчов бўлиш шартларини топиш;

тўрт ҳолатли унумдор НС моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ягона бўлмайдиган параметрларнинг қийматларини топиш;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг тўлиқ таснифлаш;

$k = 2$, $k = 3$ тартибли Кэли дарахтида Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш оралиқларини кўрсатиш;

Кэли дарахти устида Поттс модели учун трансляцион-инвариант бўлмаган даврий Гиббс ўлчовларининг сонини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти Кэли дарахти устида q ҳолатли Поттс модели, икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели ҳамда уч ва тўрт ҳолатли унумдор НС моделларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети чекли ҳолатли Поттс ва қаттиқ дисклар моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари, Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовлари ҳамда икки ҳолатли НС модели учун трансляцион-инвариант ва кучсиз даврий Гиббс ўлчовларидан иборатдир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида марков тасодифий миқдорлар назариясига ҳамда шу назариянинг реккурент тенгламаларига ваночизиқли динамик системалар назариясига асосланган усуллардан фойдаланилган. Шунингдек, ўлчовлар назарияси, ночизиқли анализ, чизиқли алгебра, қисқартириб акслантириш усулларидан ва MathCAD, Maple 15 дастурларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари тўлиқ таснифланган;

уч ҳолатли НС модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлар сонининг қуйи чегараси аниқланган;

уч ҳолатли НС модели учун $k = 2$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш ва бўлмаслик шартлари топилган;

тўрт ҳолатли унумдор НС моделларининг бири учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўлиқ таснифланган;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида q ҳолатли Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўлиқ таснифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси Гиббс ўлчовлари ягона бўлмаган моделлар учун параметрларнинг фаза алмашишларни таъминлайдиган аниқ ёки тақрибий қийматларини аниқланганлигидан ҳамда баъзи ўлчовлар учун физик системанинг тоза фазасини ифодаловчи чекка ўлчов бўлиш оралиқлари топилганлигидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги ўлчовлар назариясининг фундаментал натижаларидан, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ва параметрлар фиксирланган ҳолда фазавий ўтиш учун топилган критик қийматлар ҳақидаги тасдиқлар натижалари математик дастурлаш тилидаги Maple 15, MathCAD дастурлари ёрдамида текширилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти физика ва статистик механиканинг турли моделлари учун фаза алмашишлар мавжудлигини аниқланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти лимит Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги, чекка ўлчов бўлиши ва тўлиқ таснифи физик система ҳолатининг ўзгаришини тадқиқ қилиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Конфигурациясига қаттиқ чеклашлар қўйилган панжарали системаларнинг Гиббс лимит ўлчовларига оид олинган натижалар асосида:

Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг тўлиқ таснифи «Symmetries and Universality in Mesoscopic Systems» мавзусидаги DFG SFB | TR12 рақамли хорижий грантида шу модель учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш масаласини ечиш учун қўлланилган (Рур университетининг 2016 йил 26 октябрдаги маълумотномаси, Германия). Илмий натижанинг қўлланиши Поттс моделига мос физик системаларнинг термодинамик хоссаларини ўрганиш имконини берган;

Кэли дарахтида НС моделлари ва q ҳолатли Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг тўлиқ таснифи «Quadratic Stochastic Operators with Infinite State Space and Their Applications» мавзусидаги FRGS 14-116-0357 рақамли хорижий грантида Бете панжарасида

q ҳолатли Поттс моделининг фаза диаграммаларини ўрганиш учун қўлланилган (Халқаро Ислом университетининг 2016 йил 1 ноябрдаги маълумотномаси, Малайзия). Илмий натижанинг қўлланиши Поттс модели учун p-адик Гиббс ўлчовларини ўрганиш имконини берган;

Кэли дарахтида Поттс модели учун Гиббс ўлчовлари бўйича олинган натижалар «Real/ p-adic dyanamical systems and Gibbs measures» мавзусидаги ANR-10-LABX-58 рақамли хорижий грантда баъзи бир моделлар учун ноаменабел графларда ҳақиқий ва p-адик Гиббс ўлчовларини ўрганиш учун қўлланилган (Париж-Эст университетининг 2019 йил 5 июндаги маълумотномаси, Франция). Илмий натижанинг қўлланиши мос физик системаларнинг фазаси ҳақида маълумот олиш имконини берган;

Кэли дарахтида Поттс ва HC моделлари учун Гиббс ўлчовларини таснифлаш усулларидан хорижий илмий журналларда (Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2015; Chaos, Solitons & Fractals, 2016; Journal of Statistical Physics, 2017; Journal of Physics: Conference Series, 2017; Random Structures & Algorithms, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 2019) чоп этилган илмий мақолаларда янги Гиббс ўлчовларини тадқиқ этишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши янги Гиббс ўлчовларини қуриш, фазавий ўтишлар мавжудлигини аниқлаш ва физик системаларнинг ҳолати ҳақида маълумот олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 23 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 5 та халқаро ва 18 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 40 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссияси томонидан докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 17 та мақола, жумладан, 11 та мақола хорижий ва 6 та мақола республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар руйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 196 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи биринчи боби икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш шартларини топишга ҳамда даври иккига тенг бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг ягона эканлигини ва даври тўртга тенг бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг ягона эмаслигини исботлашга бағишланган.

Биринчи параграфда зарур таърифлар, даврий, кучсиз даврий ва трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тушунчалари ҳамда баъзи маълум фактлар ва натижалар келтирилган.

$k \geq 1$ тартибли τ^k Кэли дарахти бу чексиз дарахтдир, яъни ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи циклсиз графдир.

$\tau^k = (V, L, i)$ ни қарайлик, бунда V тўплам τ^k дарахтнинг учлари тўплами, $L-$унинг қирралари тўплами ва $i-$ҳар бир $l \in L$ қиррага унинг $x, y \in V$ четки нуқталарини мос қўювчи инцидентлик функциясидир. Агар $i(l) = \{x, y\}$ бўлса, у ҳолда x ва y учлар энг яқин қўшнилар дейилади ва $l = \langle x, y\rangle$ каби белгиланади. Кэли дарахтида $x,\ y \in V$ учлар орасидаги $d(x, y)$ масофа ушбу формула орқали аниқланади

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V\ ,\ \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Фиксирланган $x^0 \in V$ учун қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},\ \ V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

$x \in W_n$ учун $S(x) = \{y \in W_{n+1} :\ d(x, y) = 1\}$ тўплам x нинг тўғри авлодлари тўплами дейилади.

G_k-ташкил этувчилари мос равишда $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ бўлган $k+1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг эркин кўпайтмаси бўлсин.

Қуйидаги тасдиқ Н.Н.Ганиходжаевнинг ишида келтирилган.

Тасдиқ 1. $k-$тартибли Кэли дарахтининг V учлар тўплами билан G_k группа ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

G_k группа τ^k $(k \geq 1)$ тартибли Кэли дарахтининг группавий тасвири бўлсин. Унинг ихтиёрий $x \in G_k$ элементи қуйидаги кўринишга эга:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n},\ \text{ бунда }\ 1 \leq i_m \leq k+1,\ \ m = \overline{1, n}.$$

n сони x сўзнинг узунлиги дейилади ва $l(x)$ каби белгиланади.

x сўзнинг қисқармас ёзувида қатнашувчи ҳар бир $a_i,\ (i = \overline{1, k+1})$ ҳарфнинг сонини $\omega_x(a_i)$ орқали белгилаймиз. Масалан, агар $x = a_2 a_1 a_2 a_3 a_2$ бўлса, у ҳолда $\omega_x(a_1) = \omega_x(a_3) = 1,\ \omega_x(a_2) = 3$. Равшанки, x сўзнинг узунлиги $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \omega_x(a_i)$ га тенг.

$A \subseteq V$ тўпламда аниқланган $\sigma_A : x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{0,1,...,q\}$ функция конфигурация дейилади. A тўпламда аниқланган барча конфигурациялар тўплами $\Omega_A = \Phi^A$ каби белгиланади. Хусусан, $\Omega = \Omega_V$ ва $\sigma = \sigma_V$.

G_k группанинг G_k^* қисм группасини қарайлик. Агар ихтиёрий $x \in G_k$ ва $y \in G_k^*$ учун $\sigma(yx) = \sigma(x)$ бўлса, у ҳолда $\sigma \in \Omega$ конфигурация G_k^*-даврий дейилади.

Барча силжишларга нисбатан инвариант бўлган конфигурация трансляцион-инвариант дейилади.

$\sigma \in \Omega$ конфигурациянинг энергияси ушбу

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \le r}} I(\sigma_A), \tag{1}$$

гамильтониан орқали берилади, бунда $r \in N$, $diam(A) = \max_{x,y \in A} d(x,y)$ ва $I(\sigma_A) : \Omega_A \to R -$ берилган потенциал.

$D^c = V \setminus D$ да φ_{D^c} чегаравий шарт берилган чекли $D \subset V$ соҳа учун шартли гамильтониан қуйидаги

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A \subset V: A \cap D \ne \varnothing \\ diam(A) \le r}} I(\sigma_A)$$

кўринишга эга, бунда

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ агар } x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), \text{ агар } x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

$\mathbf{B} - \Omega$ тўпламнинг цилиндрик қисм тўпламларидан ташкил топган σ-алгебра бўлсин.

Ушбу

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V \setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ агар } x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ агар } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

конфигурацияни қарайлик.

Таъриф 1. Агар ихтиёрий чекли $A \subset V$ учун ушбу

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V \setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V \setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда μ эҳтимоллик ўлчови $\mathbf{B}$ $\sigma -$ алгебрада лимит Гиббс ўлчови дейилади, бунда $H(\sigma)$ (1) формула орқали аниқланган, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0 -$ ҳарорат ва

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi \in \Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

$\mathcal{G}(H)-$барча лимит Гиббс ўлчовлари тўплами бўлсин. Агар $\nu_1 \neq \nu_2$ учун $\mu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ тенглик бажариладиган $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}(H)$ лар мавжуд бўлмаса, у ҳолда $\mu \in \mathcal{G}(H)$ нуқта $\mathcal{G}(H)$ тўпламнинг чекка нуқтаси дейилади.

Асосий масалалар. Бизни қуйидаги иккита асосий масала қизиқтиради:

1) Берилган гамильтониан учун ҳеч бўлмаганда битта Гиббс ўлчови мавжудлигини аниқлаш.

2) Берилган гамильтонианга мос $\mathcal{G}(H)$ барча Гиббс ўлчовлари тўпламининг структурасини таҳлил қилиш.

Маълумки, агар $H-$узлуксиз гамильтониан бўлса, у ҳолда $\mathcal{G}(H)$ тўплам (Ω, B) да аниқланган барча эҳтимолликлар тўпламининг бўш бўлмаган қавариқ компакт қисм тўплами бўлади.

$\Phi = \{0,1\}$ ва $\sigma \in \Phi^V -$конфигурация бўлсин, бунда $\sigma(x)=1$ эканлиги Кэли дарахтида x учнинг «банд» эканлигини, $\sigma(x)=0$ эса унинг «вакант» эканлигини билдиради.

Таъриф 2. Агар V (V_n ёки W_n) даги ихтиёрий $\langle x, y\rangle$ учун $\sigma(x)\sigma(y)=0$ бажарилса, у ҳолда σ конфигурация жоиз конфигурация дейилади.

Бундай конфигурациялар тўпламини Ω (Ω_{V_n} ва Ω_{W_n}) орқали белгилаймиз. Равшанки, $\Omega \subset \Phi^V$.

HC-моделнинг гамильтониани ушбу

$$H(\sigma) = \begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), & \text{агар } \sigma \in \Omega, \\ +\infty, & \text{агар } \sigma \notin \Omega, \end{cases}$$

формула орқали аниқланади, бунда $J \in R$.

Ҳар қандай жоиз $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ конфигурация учун $\#\sigma_n$ орқали V_n даги бирлар (банд учлар) сонини белгилаймиз:

$$\#\sigma_n = \sum_{x\in V_n}\sigma_n(x),$$

$z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_+^2$ функция V да берилган вектор функция бўлсин. Ω_{V_n} да $n = 1, 2, \ldots$ учун қуйидагича

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n}\lambda^{\#\sigma_n}\prod_{x\in W_n} z_{\sigma_n(x),x} \qquad (2)$$

аниқланган $\mu^{(n)}$ эҳтимоллик тақсимотини қарайлик, бунда $Z_n -$нормалловчи бўлувчи:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\#\varphi_n}\prod_{x\in W_n} z_{\varphi_n(x),x}.$$

Агар ихтиёрий $n \geq 1$ ва $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ учун қуйидаги

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\mu^{(n)}$ эҳтимолликлар кетма-кетлиги мувофиқлашган дейилади, бунда

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\begin{cases}1, \text{ агар } \sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n}\\ 0, \text{ агар } \sigma_{n-1}\vee\omega_n\notin\Omega_{V_n}.\end{cases}$$

Агар $\mu^{(n)}$ учун мувофиқлик шарти бажарилса, у ҳолда Колмогоров теоремасига кўра $(\Omega,\mathbf{B})$ да ихтиёрий n ва $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ учун ушбу

$$\mu(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu^{(n)}(\sigma_n).$$

тенгликни қаноатлантирувчи ягона μ ўлчов мавжуд.

$G_k^*-G_k$ нинг қисм группаси бўлсин.

Таъриф 3. Агар $\forall x\in G_k,\ y\in G_k^*$ учун $z_{yx}=z_x$ бўлса, у ҳолда $z=\{z_x,x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи G_k^*-даврий дейилади.

G_k-даврий қийматлар трансляцион-инвариант дейилади.

Ихтиёрий $x\in G_k$ учун $\{y\in G_k:\langle x,y\rangle\}\setminus S(x)$ тўплам ягона элементга эга, бу элементни $x_\downarrow$ орқали белгилаймиз.

$G_k/G_k^*=\{H_1,...,H_r\}-$фактор группа бўлсин, бунда $G_k^*-r\geq 1$ индексли нормал бўлувчи.

Таъриф 4. Агар $x\in H_i,\ x_\downarrow\in H_j$ да $z_x=z_{ij}$ бўлса, у ҳолда $z=\{z_x,x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи G_k^*-кучсиз даврий дейилади.

Эслатма 1. Агар z_x нинг қиймати $x_\downarrow$ га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда z кучсиз даврий қийматлар оддий даврий билан устма-уст тушади.

Таъриф 5. G_k^*-(кучсиз) даврий z қийматлар мажмуига мос μ ўлчовни G_k^*-(кучсиз) даврий ўлчов дейилади.

Ю.Сухов ва У.Розиковларнинг ишларидан қуйидаги теорема маълум.

Теорема 1. (2) даги $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $(n=1,2,\ldots)$ эҳтимоллик тақсимотлари кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун $x\in V$ да ушбу

$$z_x^{'}=\prod_{y\in S(x)}\frac{1}{1+\lambda z_y^{'}},$$

тенглама ўринли бўлиши зарур ва етарли, бунда $z_x^{'}=\dfrac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda=e^{J\beta}>0-$ параметр.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфи НС модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчов (ТИГЎ) ларининг чекка ўлчов бўлиш шартларини топишга бағишланган. Ю.Сухов ва У.Розиков ишларида $z=1/(1+\lambda z)^k$

тенгламанинг ягона ечимига мос μ^* ТИГЎ $k \geq 2$ ва $\lambda > \left(\sqrt{k}\right)^k / (\sqrt{k}-1)^{k+1}$ бўлганда чекка ўлчов бўлмаслиги исботланган.

Иккинчи параграфнинг асосий теоремаси қуйидагича.

Теорема 2. μ^* ТИГЎ $k \geq 2$ ва $\lambda \in (0, \lambda_*)$ бўлганда чекка ўлчов бўлади, бунда

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k}\left(\frac{1}{t_*} - 1\right),$$

ва $t_* \in (0,1)$ – қуйидаги тенгламанинг ягона ечими:

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k-1)t - k + 1 = 0.$$

Биринчи бобнинг учинчи параграфида кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ўрганилган. $\varnothing \neq A \subset N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$ ва $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i)$ – жуфт сон$\}$ – индекси икки бўлган нормал бўлувчи бўлсин, бунда $w_x(a_i)$ – сон $x \in G_k$ сўздаги a_i ҳарф сони. Ю.Сухов ва У.Розиковларнинг ишидан маълум бўлган $(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$ тенгсизликдан фойдаланиб, қуйидаги теорема исботланган:

Теорема 3. HC модели учун ихтиёрий $k \geq 1$, $i \leq k$, бунда $i = |A|$, ва $\lambda > 0$ ларда H_A-кучсиз даврий Гиббс ўлчови ягона. Бундан ташқари, бу ўлчов ягона бўлган ТИГЎ билан устма-уст тушади.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфи даври тўртга тенг кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини ўрганишга бағишланган.

Қуйидаги тўпламларни қараймиз:

$$I_1 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\},\ I_2 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7,\ z_2 = z_8\},$$
$$I_3 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, z_7 = z_8\},\ I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8,\ z_2 = z_7\}.$$

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремада келтирилган.

Теорема 4. HC модели учун нормал бўлувчининг индекси тўрт бўлганда қуйидагилар ўринли:

1. $k \geq 1, i \leq k$ учун I_1 тўпламда кучсиз даврий Гиббс ўлчови ягона ва бу ўлчов ягона бўлган ТИГЎ билан устма-уст тушади.

2. $k = 2$, $\lambda_{cr} = 4$ ва $i = 1$ ёки $i = 2$ бўлсин. У ҳолда I_2 да $\lambda < \lambda_{cr}$ бўлганда трансляцион-инвариант бўлган ягона кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжуд, $\lambda = \lambda_{cr}$ да бири трансляцион-инвариант, иккинчиси даврий бўлмаган иккита кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд ва $\lambda > \lambda_{cr}$ да даврий бўлмаган иккита кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

3. $k = 3, i = 1$ бўлсин. У ҳолда шундай λ_0 мавжудки, I_2 да $\lambda > \lambda_0$ бўлганда бири трансляцион-инвариант, қолганлари кучсиз даврий (даврий бўлмаган) камида тўртта Гиббс ўлчовлари мавжуд.

4. $k \geq 1, i = 1$ ёки $k = 2, i = 2$ бўлганда I_3 инвариант тўпламда кучсиз даврий Гиббс ўлчови ягона.

5. $k=2,3,\ i=1$ ёки $k=i$ бўлганда I_4 инвариант тўпламда кучсиз даврий Гиббс ўлчови ягона.

Диссертациянинг **«Ахборотлар назариясидаги бир модел учун Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи иккинчи боби уч ҳолатли унумдор қаттиқ дисклар моделлари учун ТИГЎларини ўрганишга бағишланган. Баъзи моделлар учун $k\geq 2$ тартибли Кэли дарахтида ТИГЎлари ягона бўлмайдиган λ параметрнинг аниқ қийматлари топилган. $k=2$ бўлганда эса мавжуд ТИГЎларининг чекка ўлчов бўлиш ва бўлмаслик шартлари аниқланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида унумдор граф тушунчаси, зарур бўлган таърифлар ва шу модель бўйича маълум бўлган натижалар келтирилган.

Қаралаётган моделда ҳар бир x учга $\sigma(x)\in\{0,1,2\}$ қийматлардан бири мос қўйилади. $\sigma(x)=1,2$ эканлиги x учнинг «банд»лигини, $\sigma(x)=0$ эса унинг «вакант» эканлигини ифодалайди.

Кэли дарахтида конфигурация $\sigma:V\to\Phi=\{0,1,2\}$ каби аниқланади. V да аниқланган барча конфигурациялар тўплами Ω орқали белгиланади. Худди шунга ўхшаш, V_n (W_n) да конфигурациялар аниқланади ва V_n (W_n) да аниқланган барча конфигурациялар тўплами Ω_{V_n} (Ω_{W_n}) каби белгиланади.

Φ тўпламни бирор G графнинг учлари тўплами сифатида қараймиз. Агар V (V_n) даги ихтиёрий x,y яқин қўшнилар учун $\{\sigma(x),\sigma(y)\}-G$ графнинг қирраси бўлса, у ҳолда σ конфигурация Кэли дарахтида (V_n ёки W_n) G-жоиз конфигурация дейилади. G-жоиз конфигурациялар тўпламини Ω^G $(\Omega^G_{V_n})$ орқали белгилаймиз.

G граф учун активлик тўплами $\lambda:G\to R_+$ функциядир. λ функциянинг $i\in\{0,1,2\}$ учлардаги λ_i қийматлари учнинг “активлиги” дейилади.

Берилган G ва λ лар учун $G-$НС моделнинг гамильтониани ушбу

$$H^{\lambda}_G(\sigma)=\begin{cases}\sum\limits_{x\in V}\ln\lambda_{\sigma(x)}, & \text{агар } \sigma\in\Omega^G,\\ +\infty, & \text{агар } \sigma\notin\Omega^G.\end{cases}$$

орқали аниқланади.

Таъриф 6. Агар шундай λ активлик мавжуд бўлсаки, мос гамильтониан камида иккита ТИГЎ га эга бўлса, у ҳолда G унумдор граф дейилади.

Учлари $0,1,2$ ($\sigma(x)$ нинг қийматлари тўпламида) бўлган қуйидаги тўртта унумдор графларни қарайлик:

Сиртмоқ: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$; Жезл: $\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$;

Калит: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}$; Ҳуштак: $\{0,0\}\{0,1\}\{1,2\}$.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида $G=$ *сиртмок* ва $G=$ *жезл* бўлган ҳолларда $\lambda>\lambda_{cr}$ бўлганда учинчи тартибли Кэли дарахтида учта, $k\geq 2$ тартибли Кэли дарахтида эса камида учта ТИГЎ мавжуд бўладиган λ_{cr} нинг аниқ қийматлари топилган.

Иккинчи параграфнинг асосий теоремаси қуйидагича:

Теорема 5. $k \geq 2$ ва $\lambda_{cr}(k) = (k+1)^k (k-1)^{-1} k^{-k}$ бўлсин. У ҳолда НС модели учун $G = сиртмок$ бўлган ҳолда, $\lambda > \lambda_{cr}$ да камида учта, $\lambda \leq \lambda_{cr}$ да эса битта ТИГЎ мавжуд.

Эслатма. 2. 1. У.Розиков ва Ш.Шоюсуповларнинг ишида НС модели учун $G = сиртмок$ ва $G = жезл$ ҳолларда $k = 2$ бўлганда, $\lambda > \lambda_{cr}$ да учта μ^*, μ_1, μ_2 ТИГЎлари мавжуд эканлиги исботланган.

2. Иккинчи параграфда $k = 3$ да НС модели учун $G = сиртмок$ ва $G = жезл$ ҳолларда $\lambda > \lambda_{cr}$ бўлганда учта ТИГЎ мавжудлиги кўрсатилган.

3. $G = жезл$ бўлганда теорема 5 га айнан ўхшаш теорема исботланган, бунда $\lambda_{cr}(k) = 2^k (k-1)^{-1} k^{-k}$.

4. У.Розиков, Ш.Шоюсупов, J.Martin ва Ю.Суховларнинг ишидан маълумки, $G = хуштак$ ва $G = калит$ ҳолларда ихтиёрий $\lambda > 0$ ва $k \geq 1$ учун ТИГЎ ягона.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфи $k = 2$ да μ^*, μ_1, μ_2 ТИГЎларининг чекка ўлчов бўлиш шартларини топишга бағишланган. Kesten-Stigum ва F.Martinelli, A.Sinclair, D.Weitz усулларидан фойдаланиб қуйидаги теорема исботланди.

Теорема 6. $k = 2$ бўлсин. У ҳолда $G = сиртмок$ ҳолида НС модели учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. Шундай $\lambda_0 \approx 7.0355$ мавжудки, $\lambda > \lambda_0$ да μ^* ўлчов чекка ўлчов бўлмайди ва $\lambda < \lambda_0$ да чекка ўлчов бўлади.

2. $\lambda_1 = 0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1)$ бўлсин. Агар $\lambda_{cr}(2) < \lambda < \lambda_1$ бўлса, у ҳолда μ_1 ва μ_2 ўлчовлар чекка ўлчов бўлади.

Шуни таъкидлаш жоизки, $G = жезл$ ҳолда ҳам теорема 6 га ўхшаш теорема ўринли. Бунда $\lambda_0 \approx 2.2876$, $\lambda_1 \approx 1.3031$.

Диссертациянинг «**Унумдор НС моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари**» деб номланувчи учинчи бобида Кэли дарахтида $\lambda > 0-$активлик параметрига эга тўрт ҳолатли НС моделлари қаралади. G.Brightwell, P.Winklerларнинг ишидан маълумки, бундай моделларнинг уч тури мавжуд. Ҳар бир модель учун иккинчи ва учинчи тартибли Кэли дарахтида λ параметрнинг ихтиёрий қийматида ТИГЎ ягона эканлиги исботланган. Бундан ташқари, моделларнинг иккитаси учун λ параметрнинг, ТИГЎ ягона бўлмайдиган, қийматлари топилган.

Биринчи параграфда зарур таърифлар, мувофиқлик шартини бажарилишини таъминлайдиган тенгламалар ва маълум бўлган натижалар келтирилади.

Учлари $0,1,2,3$ ($\sigma(x)$ нинг қийматлари тўпламида) бўлган қуйидаги учта унумдор графларни қарайлик:

таёқ: $\{0,1\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$ калит: $\{0,1\}$ $\{0,2\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$

умумлашган калит: $\{0,1\}$ $\{0,2\}$ $\{1,2\}$ $\{2,2\}$ $\{2,3\}$

Учинчи бобнинг иккинчи ва учинчи параграфларининг асосий натижалари мос равишда 7 ва 8-теоремалар орқали ифодаланади.

Теорема 7. НС модели учун $G = \text{таек}$ ҳолида қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. $k=2, k=3, k=4$ ва $\lambda > 0$ бўлганда ягона ТИГЎ мавжуд.

2. $k \geq 5$ бўлсин. У ҳолда шундай $\lambda_{cr,1}$ ва $\lambda_{cr,2}$ мавжудки, $\lambda < \lambda_{cr,1}$ ва $\lambda > \lambda_{cr,2}$ да фақат битта, $\lambda = \lambda_{cr,1}$ ёки $\lambda = \lambda_{cr,2}$ да иккита ва $\lambda_{cr,1} < \lambda < \lambda_{cr,2}$ да учта ТИГЎлари мавжуд.

Теорема 8. НС модели учун $G = \text{калит}$ ҳолида қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. $k=2, k=3$ ва $\lambda > 0$ бўлганда ягона ТИГЎ мавжуд.

2. $k \geq 4$ бўлсин. У ҳолда шундай $\lambda_{cr}^{(1)}$ ва $\lambda_{cr}^{(2)}$ мавжудки, $\lambda < \lambda_{cr}^{(1)}$ ва $\lambda > \lambda_{cr}^{(2)}$ бўлганда фақат битта, $\lambda_{cr}^{(1)} \leq \lambda \leq \lambda_{cr}^{(2)}$ да эса биттадан кўп ТИГЎ мавжуд, бунда

$$\lambda_{cr}^{(1)} = \left(\frac{k-1}{2k}\right)^k \cdot \frac{\left[(k^3-k^2-k+2+k\sqrt{D_1})\cdot(k^2+k+1+\sqrt{D_1})\right]^{k+1}}{4\left(k^2-k+1+\sqrt{D_1}\right)^{2k+1}},$$

$$\lambda_{cr}^{(2)} = \left(\frac{k-1}{2k}\right)^k \cdot \frac{\left[(k^3-k^2-k+2-k\sqrt{D_1})\cdot(k^2+k+1-\sqrt{D_1})\right]^{k+1}}{4\left(k^2-k+1-\sqrt{D_1}\right)^{2k+1}},$$

$$D_1 = k^4 - 2k^3 - 5k^2 + 2k + 5.$$

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида $G = \text{умумлашган калит}$ ҳолида иккинчи ва учинчи тартибли Кэли дарахтида ихтиёрий $\lambda > 0$ учун фақат битта ТИГЎ мавжудлиги исботланган.

Диссертациянинг **«Поттс модели учун Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи тўртинчи боби q ҳолатли Поттс модели учун ТИГЎларини ўрганишга бағишланган. Поттс модели учун ТИГЎларининг тўлиқ таснифи олинган ҳамда иккинчи ва учинчи тартибли Кэли дарахтида уларнинг чекка ўлчов бўлиш шартлари топилган. Тўрт ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларининг трансляцион-инвариант эканлиги исботланган. Бундан ташқари, q ҳолатли антиферромагнит Поттс модели учун ихтиёрий тартибли Кэли дарахти устида инвариант тўпламларнинг бирида трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларининг аниқ сони топилган.

Биринчи параграфда зарур таърифлар ва тушунчалар келтирилган. Шунингдек, Поттс модели учун Гиббс ўлчовининг мувофиқлик шартининг бажарилишини таъминловчи функционал тенгламалар берилган.

Спин қийматлари тўплами $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $(q \geq 2)$ бўлган моделни қарайлик. У ҳолда V да аниқланган σ конфигурация $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$ функция сифатида аниқланади; барча конфигурациялар тўплами $\Omega = \Phi^V$.

Поттс моделининг гамильтониани ушбу

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x\in V} \delta_{1\sigma(x)},$$

формула ёрдамида аниқланади, бунда $J \in R$, $\alpha \in R-$ташқи магнит майдон, $\langle x, y\rangle -$яқин қўшнилар ва δ_{ij} $-$Кронекер символи:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ агар } i \neq j, \\ 1, \text{ агар } i = j. \end{cases}$$

V_n да μ эҳтимоллик ўлчовининг тақсимотини қуйидаги кўринишда аниқлаймиз:

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x),x} \right\}, \tag{3}$$

бунда $\beta = \dfrac{1}{T}$, $T > 0-$ҳарорат, Z_n^{-1} $-$нормалловчи кўпайтма,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x\in V_n} \delta_{1\sigma(x)}$$

ва $\{\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x}, \ldots, \tilde{h}_{q,x}) \in R^q,\ x \in V\} -$векторлар мажмуи.

Н.Н.Ганиходжаев ва У.А.Розиковларнинг ишидан қуйидаги теорема маълум.

Теорема 9. (3) формула билан берилган $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1,2,\ldots$ эҳтимоллик тақсимотларининг кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун ихтиёрий $x \in V$ да қуйидаги тенглама ўринли бўлиши зарур ва етарли:

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \tag{4}$$

бунда $F : h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h, \theta, \alpha) = (F_1, \ldots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ функция ушбу

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}$$

кўринишда аниқланади ва $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ тўплам x нинг тўғри авлодлари ва $h_x = \left(h_{1,x}, \ldots, h_{q-1,x}\right)$:

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x},\ i = 1, \ldots, q-1.$$

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида Поттс модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида ТИГЎларининг тўлиқ таснифи олинган.

$\alpha = 0$ бўлсин. Поттс модели учун ТИГЎларини қарайлик, яъни ихтиёрий $x \in V$ учун $h_x = h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$. (4) тенгламадан $h = kF(h, \theta)$ га эгамиз, яъни

$$h_i = k\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}\right),\ i=1,\dots,q-1. \tag{5}$$

$z_i=\exp(h_i),\ i=1,\dots,q-1$ белгилаш киритиб, (5) дан ушбу

$$z_i=\left(\frac{(\theta-1)z_i+\sum_{j=1}^{q-1}z_j+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}z_j}\right)^k,\ i=1,\dots,q-1 \tag{6}$$

тенгламани оламиз.

Маълумки, $J<0$ $(\theta<1)$, $k\geq 1$, $q\geq 2$ бўлганда Поттс модели ягона ТИГЎга эга. $J>0$ бўлган ҳолни кўрамиз.

Қуйидаги тасдиқ асосий теоремани исботлашда муҳим роль ўйнайди.

Тасдиқ 2. (6) тенгламалар системасининг ихтиёрий $z=(z_1,\dots,z_{q-1})$ ечими учун шундай $M\subset\{1,\dots,q-1\}$ ва $z^*>0$ мавжудки, бунда қуйидаги ўринли:

$$z_i=\begin{cases}1, & \text{агар } i\notin M,\\ z^*, & \text{агар } i\in M.\end{cases}$$

Бу тасдиқдан ихтиёрий ТИГЎ ушбу

$$z=f_m(z)\equiv\left(\frac{(\theta+m-1)z+q-m}{mz+q-m-1+\theta}\right)^k \tag{7}$$

тенгламанинг ечимларига бирор m учун мос келиши келиб чиқади.

Лемма 1. Агар $m=m_1$ да $z(m_1)$ (7) нинг ечими бўлса, у ҳолда $m=q-m_1$ да $z^{-1}(m_1)$ ҳам (7) нинг ечими бўлади.

$k\geq 2$ бўлсин. Маълумки,

$$T_{cr}=\frac{J}{\ln\left(1+\frac{q}{k-1}\right)}.$$

Бу параграфнинг қуйидаги асосий теоремаси Поттс модели учун ТИГЎларининг тўлиқ таснифини беради.

Теорема 10. $k\geq 2$ тартибли Кэли дарахтида $q-$ҳолатли ферромагнит ($J>0$) Поттс модели учун шундай критик ҳароратлар $T_{c,m}\equiv T_{c,\,m}(k,q)$, $m=1,\dots,[q/2]$ мавжудки, бунда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. $T_{c,\,1}>T_{c,\,2}>\dots>T_{c,\,[q/2]-1}>T_{c,\,[q/2]}\geq T_{cr}$.

2. Агар $T>T_{c,1}$ бўлса, у ҳолда ягона ТИГЎ мавжуд.

3. Агар бирор $m=1,\dots,[q/2]-1$ учун $T_{c,m+1}<T<T_{c,m}$ бўлса, у ҳолда $1+2\sum_{s=1}^{m}\binom{q}{s}$ та ТИГЎлари мавжуд.

4. Агар $T_{cr} \neq T < T_{c,\,[q/2]}$ бўлса, у ҳолда $2^q - 1$ та ТИГЎлари мавжуд.

5. Агар $T = T_{cr}$ бўлса, у ҳолда ТИГЎларининг сони қуйидагича аниқланади

$$\begin{cases} 2^{q-1}, & \text{агар } q \text{ – ток бўлса,} \\ 2^{q-1} - \begin{pmatrix} q-1 \\ \frac{q}{2} \end{pmatrix}, & \text{агар } q \text{ – жуфт бўлса.} \end{cases}$$

6. Агар $T = T_{c,m}$, $m = 1, \ldots, [q/2]$, $\left(T_{c,\,[q/2]} \neq T_{cr}\right)$ бўлса, у ҳолда $1 + \begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix} + 2\sum_{s=1}^{m-1} \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ та ТИГЎлари мавжуд.

Кўрилаётган бобнинг учинчи параграфи C.Kuelske, У.Розиковларнинг ишининг давоми ҳисобланади. Ферромагнит ҳолни қараймиз: $J > 0$. Поттс модели учун теорема 9 дан (4) ни қаноатлантирувчи ихтиёрий $h = \{h_x,\ x \in V\}$ учун ягона μ ТИГЎ мавжудлиги келиб чиқади.

Шуни эслатиб ўтамизки, ТИГЎ (4) нинг h_x ечимига мос, бунда ихтиёрий $x \in V$ учун $h_x = h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$. У ҳолда (4) дан $h = kF(h, \theta)$ га эгамиз ва $z_i = \exp(h_i)$, $i = 1, \ldots, q-1$ белгилашлар киритиб, охирги тенгламани (6) кўринишда ёзишимиз мумкин.

Аввалги параграфдан қуйидагилар маълум:

1. (6) тенгламани ечиб ТИГЎларини тўлиқ таснифлаш мумкин. Бирор $m = 1, \ldots, [q/2]$ да Поттс моделининг ТИГЎ (7) тенгламанинг ечимига мос.

2. $\theta_m = 1 + 2\sqrt{m(q-m)}$, $m = 1, \ldots, q-1$ бўлсин. Агар $\theta < \theta_1$ бўлса, у ҳолда $k = 2$ да ягона ТИГЎ мавжуд. Бундан ташқари, ҳар бир θ_m ТИГЎларининг сонини ўзгариши учун критик қийматдир.

3. Ихтиёрий фиксирланган m учун (7) тенглама кўпи билан учта ечимга эга: $z_0 = 1$, $z_i = z_i(\theta, q, m)$, $i = 1, 2$, бунда $z_1 < z_2$. z_i ечимларга мос келувчи ТИГЎларини $\mu_i = \mu_i(\theta, m)$ орқали белгилаймиз.

Шунингдек қуйидаги теорема маълум:

Теорема 11. $k = 2$, $m = 1$ бўлсин. У ҳолда

а) Шундай $\theta^{**} > \theta_c = q + 1$ мавжудки, ихтиёрий $\theta \in [1 + 2\sqrt{q-1}, \theta^{**})$ ($q \geq 2$) да $\mu_1(\theta, 1)$ четка ўлчов бўлади.

б) Ихтиёрий $\theta \geq 1 + 2\sqrt{q-1}$ ($q \geq 2$) да $\mu_2(\theta, 1)$ четка ўлчов бўлади.

Қуйидаги теорема 11-теореманинг а) пунктидаги $\mu_1(\theta, 1)$ ўлчовнинг четка бўлиш оралиғини кенгайтиради.

Теорема 12. $m = 1$, $k = 2$ бўлсин. Шундай $\tilde{\theta} > \theta_c = q + 1$ мавжудки, ихтиёрий $\theta \in (1 + 2\sqrt{q-1}, \tilde{\theta})$ ($q \geq 2$) да $\mu_1(\theta, 1)$ четка ўлчов бўлади.

C.Kuelske ва У.Розиковларнинг ишидан қуйидаги теорема ҳам маълум:

Теорема 13. $k=2$ бўлсин.

1. Агар $m=2$ бўлса, у ҳолда

- ихтиёрий $q=4,5,6,7,8$ учун шундай $\breve{\theta}>q+1$ мавжудки, ихтиёрий $\theta\in[\theta_2,\breve{\theta})$ да $\mu_1(\theta,2)$ чекка ўлчов бўлади.

- ҳар бир $q\geq 9$ учун шундай $\theta^{\dagger}\in(\theta_2,q+1)$ мавжудки, ихтиёрий $\theta\in[\theta^{\dagger},\breve{\theta})$ да $\mu_1(\theta,2)$ чекка ўлчов бўлади, бунда $\theta^{\dagger}=\theta^{\dagger}(q)$ ушбу

$$\theta^3-(q+3)\theta^2+(6q-17)\theta-(9q-19)=0$$

тенгламанинг ягона ечими ва $\breve{\theta}=\breve{\theta}(q)$ эса қуйидаги

$$\theta^3-(q+3)\theta^2-(2q-15)\theta-(q+13)=0$$

тенгламанинг ягона ечимидир.

2. $m=2$ да ихтиёрий $q=4,5,6,7,8$ лар учун шундай $\vartheta=\vartheta(q)$ мавжудки, $\theta_2<\vartheta\leq q+1$ ва ихтиёрий $\theta\in[\theta_2,\vartheta)$ да $\mu_1(\theta,2)$ чекка ўлчов бўлади.

3. Агар

$$q<\frac{m+1}{2m}\left[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}\right],\ m\geq 2$$

бўлса, у ҳолда $\mu_1(\theta_m,m)=\mu_2(\theta_m,m)$ чекка ўлчов бўлади.

Ушбу теорема теорема 13 ни умумлаштиради.

Теорема 14. $k=2, m\geq 2$ бўлсин. Қуйидагилар ўринли:

1. Агар $2m\leq q<\frac{m+1}{2m}[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}]$ бўлса, у ҳолда шундай $\ddot{\theta}>q+1$ мавжудки, ихтиёрий $\theta\in[\theta_m,\ddot{\theta})$ да $\mu_1(\theta,m)$ чекка ўлчов бўлади;

2. Агар $q>\frac{m+1}{2m}[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}]$ бўлса, у ҳолда шундай $\overline{\theta}\in(\theta_m,\theta_c)$ мавжудки, ихтиёрий $\theta\in(\overline{\theta},\ddot{\theta})$ да $\mu_1(\theta,m)$ чекка ўлчов бўлади;

3. Агар $2m\leq q<m+\frac{1}{4m}(m+1+\sqrt{m^2+2m+7})^2$ бўлса, у ҳолда шундай $\overline{\overline{\theta}}\in(\theta_m,+\infty)$ мавжудки, ихтиёрий $\theta\in[\theta_m,\overline{\overline{\theta}})$ да $\mu_2(\theta,m)$ чекка ўлчов бўлади.

Тўртинчи бобнинг тўртинчи параграфида $q=3,\ k=3,\ \theta>1$ бўлганда (6) тенгламалар системасининг ечимлари учун аниқ формулалар келтирилган ва бу ечимларга мос трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш масаласи ўрганилган.

Қуйидаги тасдиқ исботланган.

Тасдиқ 3. $q=3,\ k=3,\ \theta>1$ бўлсин. У ҳолда (6) тенгламалар системаси

1. $\theta<\theta_{cr}$ да ягона $(1,1)$ ечимга;

2. $\theta=\theta_{cr}$ да учта $(1,1),(z_1,1),(1,z_1)$ ечимга;

3. $\theta>\theta_{cr}$ да еттита $(1,1)$, $(z_2,1)$, $(1,z_2)$, $(z_3,1)$, $(1,z_3)$, (z_2,z_2), (z_3,z_3) ечимларга эга, бунда $z_1=x_3^3, z_2=x_1^3, z_3=x_2^3$ ва

$$\theta_{cr}=\sqrt{9+6\sqrt{3}}-2,$$

$$p(\theta) = -\frac{1}{3}(\theta^2 + \theta - 2), \; r(\theta) = \frac{1}{27}\left(-2(\theta-1)^3 - 9(\theta-1)^2 + 54\right).$$

$$\alpha(\theta) = \arctan\left(\frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right), \quad r(\theta) \neq 0,$$

$$x_1(\theta) = \frac{2p}{3}\cos\frac{\alpha + 2\pi}{3} + \frac{\theta - 1}{3} > 0, \; x_2(\theta) = \frac{2p}{3}\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3} + \frac{\theta - 1}{3} > 0,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}(3 - \sqrt{3})\right).$$

Шундай қилиб, Поттс модели учун $\theta > \theta_{cr}$ да еттита трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовига эгамиз. (6) тенгламалар системасидаги симметрияга кўра $(z_2,1)$ ва $(1,z_2)$ ($(z_3,1)$ ва $(1,z_3)$) ечимларга мос ўлчовларнинг чекка ўлчов бўлиш оралиқлари бир хил бўлишини таъкидлаш лозим. Шунинг учун мос равишда $(1,1)$, $(z_2,1)$, $(z_3,1)$, (z_2,z_2) ва (z_3,z_3) ечимларга мос μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ўлчовларнинг чекка ўлчов бўлишини ўрганиш.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 15. $k = 3$, $q = 3$ ва $J > 0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. μ_0 ўлчов $\frac{9-\sqrt{73}}{4} < \theta < \frac{9+\sqrt{73}}{4}$ да чекка ўлчов бўлади ва $\theta > \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{3})$ да чекка ўлчов бўлмайди.

2. μ_1 ва μ_2 ўлчовлар мос равишда $\theta_{cr} < \theta < \theta^{(5)}$ ва $\theta_{cr} < \theta < \theta^{(8)}$ да чекка ўлчов бўлади, бунда $\theta^{(5)} \approx 14.14214$ ва $\theta^{(8)} \approx 10.794118$.

3. μ_3 ва μ_4 ўлчовлар мос равишда $\theta > \theta^{(0)}$ ва $\theta > \theta^{(2)}$ да чекка ўлчов бўлмайди, бунда $\theta^{(0)} \approx 3.994$ ва $\theta^{(2)} \approx 3.759659$.

4. μ_3 ўлчов $\theta_{cr} < \theta < \theta^{(10)}$ да чекка ўлчов бўлади, бунда $\theta^{(10)} \approx 3.8923$.

5. μ_4 ўлчов $\theta_{cr} < \theta < \theta^{(11)}$ да чекка ўлчов бўлади, бунда $\theta^{(11)} \approx 3.74608$.

Тўртинчи бобнинг бешинчи параграфи Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовларини ўрганишга бағишланган. Тўрт ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларининг трансляцион-инвариант бўлиши исботланган ва q ҳолатли антиферромагнит Поттс модели учун ихтиёрий тартибли Кэли дарахти устида инвариант тўпламларнинг бирида трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларининг аниқ сони топилган.

Қуйидагилар маълум:

ташқи $\alpha \in R$ майдонга эга Поттс модели фақат $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларига эга;

иккинчи тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли антиферромагнит ($J<0$) Поттс модели учун ташқи майдон $\alpha=0$ бўлганда баъзи инвариантларда барча даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади;

$k\geq 1$ тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли ферромагнит ($J>0$) Поттс модели учун барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади;

ташқи $\alpha\in R$ майдонга эга Поттс модели учун иккинчи тартибли Кэли дарахти устида инвариантларнинг бирида трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари;

ташқи $\alpha\in R$ майдонга эга бўлмаган уч ҳолатли антиферромагнит Поттс модели учун баъзи инвариантларда трансляцион-инвариант бўлмаган камида иккита $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

Қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 16. $\overline{\theta}_{cr}=\dfrac{k-q+1}{k+1}$, $k\geq 3$, $q\geq 3$, $J<0$ бўлсин. У ҳолда Поттс модели учун I_m инвариант тўпламда $0<\theta<\overline{\theta}_{cr}$ да бири трансляцион-инвариант бўлган, қолган иккитаси $G_k^{(2)}$-даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) бўлган учта $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд. Бу ерда

$$I_m=\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1}: x_i=x,\, y_i=y, i=\overline{1,m},\, x_i=y_i=1, i=\overline{m+1,q-1}\};$$

Теорема 17. Поттс модели учун $k\geq 3$, $3\leq q<k+1$ ва $0<\theta<\overline{\theta}_{cr}$ шартлар бажарилганда $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ тўпламда $2\cdot(2^q-1)$ та трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

Теорема 18. $\alpha=0$ бўлсин. У ҳолда тўрт ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун $k\geq 1$ да барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши Кэли дарахтида Поттс ва НС моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини аниқлашга ва бундай ўлчовлар тўпламининг структурасини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. НС модели учун $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш шартлари топилганлигини келтириш мумкин.

2. Кэли дарахти устида икки ҳолатли НС модели учун даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовининг ягоналиги исботланганлигини таъкидлаш жоиз.

3. Икки ҳолатли НС модели учун даври тўртга тенг бўлган кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовларининг мавжудлик ва ягона эмаслик шартлари топилганлигини таъкидлаш лозим.

4. Уч ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари учун $k = 3$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг аниқ сони топилганлигини ва $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида бундай ўлчовлар сонининг қуйи чегараси аниқланганлигини эътироф этиш лозим.

5. Кэли дарахти устида уч ҳолатли қаттиқ дисклар моделлари учун $k = 2$ тартибли трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш шартлари топилганлигини таъкидлаш жоиз.

6. Тўрт ҳолатли унумдор НС моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг ягона бўлмаслик шартлари аниқланганлигини қайд этиш лозим.

7. $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг тўлиқ таснифланганлигини эътироф этиш лозим.

8. $k = 2$ тартибли Кэли дарахти устида q ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш соҳалари топилганлигини таъкидлаш лозим.

9. Уч ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун $k = 3$ тартибли Кэли дарахти устида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг чекка ўлчов бўлиш соҳалари топилганлигини қайд этиш лозим.

10. $k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида тўрт ҳолатли ферромагнит Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовларининг трансляцион-инвариант эканлигини исботланганлигини таъкидлаш лозим.

11. q ҳолатли антиферромагнит Поттс модели учун ихтиёрий тартибли Кэли дарахти устида инвариант тўпламларнинг бирида трансляцион-инвариант бўлмаган даврий Гиббс ўлчовларининг аниқ сони топилганлигини келтириш жоиз.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ С ЖЁСТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ИХ КОНФИГУРАЦИИ

01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации доктора (DSc) физико-математических наук

Ташкент – 2019 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2019.2.DSc/FM35.

Диссертация выполнена в Наманганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Гринив Остап Олегович** профессор (Университет Дарем, Англия)
	Рахимов Абдугофур Абдумажидович доктор физико-математических наук
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, Института математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований при изучении термодинамических свойств физических и биологических систем, а также при изучении задач теории информации и теории обслуживания, проводимых на международном уровне, в основном, приводятся к задачам теории мер Гиббса. Для систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой поддерживается постоянная температура, важное значение имеет каноническое гиббсовское распределение, установленное американским ученым Дж.У.Гиббсом. Из работ Р.Бэкстера и F.Kelly можно увидеть, что изучение гиббсовских распределений занимает не малое место во многих областях науки, в частности, в статистической механике, физике, биологии, в теории обслуживания и теории информации. Построение гиббсовских распределений для различных моделей статистической механики является одной из важных задач теории мер.

В настоящее время важную роль играет построение трансляционно-инвариантных, периодических, слабо периодических и других мер Гиббса для моделей физики и статистической механики. В связи с этим, реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из основных задач: существование меры Гиббса для данного гамильтониана; анализ структуры множества всех таких мер; нахождение условий крайности существующих мер Гиббса; определение критических значений параметров, обеспечивающих фазовый переход. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

В нашей стране стали больше уделять внимание научным направлениям с прикладным значением. В частности, особое внимание было уделено развитию теории мер Гиббса для классических моделей статистической механики и нахождению методов определения трансляционно-инвариантных, периодических и слабо периодических мер, являющихся основным объектом изучения задач статистической физики и механики. Значительные результаты были получены по построению мер Гиббса и анализу структуры множества таких мер для решетчатых систем с жесткими ограничениями на их конфигурации, а также для моделей с конечным или счетным числом спиновых значений. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным научным направлениям, в частности, по теории вероятностей и математической статистике, являются основными задачами и направлениями ведения научных исследований[3]. Развитие дальнейшего исследования по теории гиббсовских мер играет важную роль при обеспечении исполнения данного постановления.

---

[3] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся или касающихся фундаментальной науки.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4].

Исследования по теории мер Гиббса ведутся научными центрами и специалистами университетов зарубежных стран, такими как: Университет Бонна, Институт прикладной математики, Рурский университет Бохума (Германия); Научный институт INFN, Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Центр перспективных исследований, Аквиланский университет (Италия); Центр теоретической физики, Марсельский университет, Университет Прованса, CNRS и Парижский университет (Франция); Московский государственный университет, Институт проблем передачи информации, Институт математики Российской академии наук (Россия); Университет Авейру (Португалия); Университет Кюсю (Япония); Статистическая лаборатория, Университет Кембриджа, School of Mathematics, University of Leeds, Университет Лафборо (Великобритания); Университет Зирве, Университет Харран (Турция); Университет Женевы (Швейцария), и многими специалистами других стран мира.

В результате научных исследований, проведенных по построению мер Гиббса для различных моделей физики и статистической механики в мире, решен целый ряд актуальных задач, в том числе получены следующие научные результаты: для Hard-Core (HC) модели на дереве Кэли показана единственность транцляционно-инвариантной меры Гиббса и при некоторых условиях на параметры HC-модели доказана неединственность периодических мер Гиббса с периодом два (Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge (Англия)); для моделей жесткой сердцевины с тремя и четырьмя состояниями было введено понятие плодородной HC-модели и

[4] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, http://www.springer.com/mathematics; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series https://www.researchgate.net, также были использованы и другие источники.

для таких моделей найдены условия (не) единственности мер Гиббса (Department of Mathematics, London School of Economics (Англия), Bell Laboratories, Lucent Technologies, Mountain Avenue Murray Hill, New Jersey (США)); были изучены задачи существования трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли и в некоторых случаях доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для любой положительной активности λ (CNRS and University Paris (Франция), Statistical Laboratory, DPMMS, University of Cambridge (Англия)); дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса в ферромагнитном случае на дереве Кэли порядка $k \geq 2$, а на дереве Кэли порядка $k = 2$ найдены условия крайности этих мер (Fakultät für Mathematik - Ruhr-Universität Bochum (Германия)); показаны существование и неединственность трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для моделей жесткой сердцевины с четырьмя состояниями и для модели SOS на дереве Кэли (Centre de Physique Théorique, Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var (Франция)).

На мировом уровне осуществляется ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях, таких как изучение свойств мер Гиббса и их применение, а именно в целях, чтобы: показать существование трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса и дать описание слабо периодических мер Гиббса для HC-модели; найти условия крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для HC-модели с двумя состояниями; представить точные значения параметров, при которых трансляционно-инвариантная мера Гиббса не единственна и исследовать крайности таких мер для моделей жесткой сердцевины и SOS; исследовать и найти условия существования периодических, слабо периодических и других мер Гиббса для моделей с конечным или счетным числом спиновых значений; для модели Поттса дать описание трансляционно-инвариантных гиббсовских мер и анализ структуры множества таких мер.

Степень изученности проблемы. Несмотря на то, что американским ученым Дж.У.Гиббсом было выведено каноническое распределение Гиббса, общие характеристики предельной меры Гиббса впервые появились в работах Р.Л.Добрушина, O.E.Lanford и Д.Рюэля. Частный случай этого понятия появился гораздо раньше в работе Н.Н.Боголюбова и Б.И.Хацета. Современная теория гиббсовских мер изложена в работах Р.Бэкстера, Х.О.Георги, В.А. Малышева, R.A.Minlos, К.Престона, Д.Рюэля, Я.Г.Синая, M.Baus, C.F.Nejero, G.Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, Jean Zinn-Justin, Ф.Мухаммедова, Н.Н.Ганиходжаева и У.А.Розикова. Р.Л.Добрушиным доказана теорема существования предельной меры Гиббса. Пример использования этой теоремы, относящийся к решетчатым моделям квантовой теории поля, был рассмотрен К.Х.Хининым. Основная теория фазовых переходов содержится в работах С.А.Пирогова, Я.Г.Синая, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter и M.Zahradnik. Теоремы существования предельной меры Гиббса для моделей, где конфигурация принимает неограниченные значения, рассматривались также в работе

J.Lebowitz и E.Presutti. Анализ предельных мер Гиббса для различных классов решетчатых моделей, основанный на контурном методе Пайерлса, приведен в работах Ф.А.Березина, С.А.Пирогова, Я.Г.Синая, J.Ginibre, A.Grossman, Д.Рюэля, Р.Л.Добрушина, В.Герцика, O.J.Heilmann и E.M.Lieb, С.А.Пирогова, M.Cassandro, M.Da Fano, G.Olivereri, Г.Ботирова и других.

HC-модель на d-мерной решетке Z^d, мотивированная приложениями в статистической физике, была введена и развита Мазелью и Суховым. Ф.Спитцером, используя теорию групп, впервые были построены предельные распределения Гиббса. Возникновение HC-моделей при изучении случайных независимых множеств графа, при изучении молекул газа на решетке и исследования, посвященные их применениям, можно увидеть в работах Р.Бэкстера, G.R.Brightwell, P.Winkler, D.Galvin, J.Kahn, F.Kelly, G.Louth, P.Mitra, K.Ramanan, A.Sengupta, I.Ziedins. По построению трансляционно-инвариантных, периодических и других мер Гиббса, а также по анализу структуры множества таких мер для HC-моделей на дереве Кэли научные исследования проводились в работах G.Brightwell, O.Häggström, P.Winkler, F.Kelly, B.Luen, K.Ramanan, I.Ziedins, P.Mitra, A.Sengupta, D.Galvin, F.Martinelli, P.Tetali, Yu.M.Suhov, J.Martin, J.Ruiz, D.Gandolfo, У.А.Розикова, Ш.А.Шоюсупова и других.

Существование конечного числа трансляционно-инвариантных и несчетного числа не трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли показано в работах Н.Н.Ганиходжаева и У.А.Розикова. Чтобы получить более широкое множество гиббсовских мер, в работах У.А.Розикова и М.М.Рахматуллаева введено понятие слабо периодической меры Гиббса и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли. По изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели SOS, являющейся обобщением модели Изинга, научные исследования вели Yu.M.Suhov, У.А.Розиков, Ш.А.Шоюсупов, Р.М.Хакимов и другие. Теория построения мер Гиббса для различных моделей статистической механики, на основе использования группового представления дерева Кэли, изучалась и развивалась в работах F.Peruggi, F.di Liberto, G.Monroy, J.F.F.Mendes, F.Wagner, D.Grensing, J.Heide, F.Y.Wu, G.Brightwell, P.Winkler, Н.Н.Ганиходжаева, Ф.Мухаммедова, У.А.Розикова, М.Рахматуллаева, Г.Ботирова, Р.М.Хакимова и других. Отметим, что несмотря на многочисленные работы, ни для одной модели не было получено полное описание всех предельных мер Гиббса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии», Институт математики (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-82+ ОТ-Ф4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах»+ «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике», Институт математики (2017-2021 гг.)

Целью исследования является изучение структуры множества предельных мер Гиббса для моделей жесткой сердцевины и Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

нахождение условия крайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-модели на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

проверка существования слабо периодических мер Гиббса с периодом два для модели жесткой сердцевины с двумя состояниями;

определение существования слабо периодических (не периодических) мер Гиббса с периодом четыре для модели жесткой сердцевины;

нахождение условий неединственности и крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей жесткой сердцевины с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

нахождение точных значений параметров, при которых трансляционно-инвариантная мера Гиббса не единственна для плодородных HC-моделей с четырьмя состояниями;

полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

исследование крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядков $k = 2$ и $k = 3$;

определение количества периодических мер Гиббса, отличных от трансляционно-инвариантных, на одном из инвариантов для модели Поттса на дереве Кэли.

Объект исследования – модель Поттса с q-состояниями, модель жесткой сердцевины с двумя состояниями, плодородные HC-модели с тремя и четырьмя состояниями на дереве Кэли.

Предмет исследования – трансляционно-инвариантные меры Гиббса для моделей жесткой сердцевины и Поттса с конечным числом состояний, периодические меры Гиббса для модели Поттса, а также трансляционно-инвариантные и слабо периодические меры Гиббса для HC-модели с двумя состояниями.

Методы исследования. В работе используются методы, основанные на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории, на теории нелинейных динамических систем. Также используются методы теории мер, нелинейного анализа, линейной алгебры, сжимающих отображений и компьютерные программы MathCAD, Maple.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

для модели жесткой сердцевины с двумя состояниями получено полное описание слабо периодических мер Гиббса с периодом два;

определены точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$ и нижняя граница количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса при $k \geq 2$;

найдены условия (не) крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для НС-модели с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 2$;

для одной из плодородных НС-моделей с четырьмя состояниями получено полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

получено полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

Практические результаты исследования – определение точного или приближенного значения параметра, обеспечивающего существование фазового перехода, и нахождение областей крайности для некоторых мер, определяющих чистую фазу физической системы.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов исследования других мер Гиббса, применением фундаментальных результатов теории мер, а также методов функционального анализа, теории функций дискретного аргумента. В результате доказанных утверждений найдены критические значения для фазовых переходов, которые в случае фиксированных значений параметра были проверены с помощью математического программирования MathCAD и Maple 15.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что определено существование фазавых переходов для различных моделей физики и статистической механики.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что существование предельных мер Гиббса, их полное описание и крайность позволяют получить информацию об изменении состояния физической системы.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по предельным мерам Гиббса для решетчатых систем с жёсткими ограничениями в их конфигурации внедрены в практику по следующим направлениям:

Описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса было использовано в исследованиях зарубежного проекта DFG SFB | TR12 «Symmetries and Universality in Mesoscopic Systems» для решения задачи крайности трансляционно-инвариантных мер для этой модели (Рурский университет, справка от 26 октября 2016 года, Германия). Применение этих научных результатов дает возможность для изучения термодинамических свойств физических систем, соответствующих модели Поттса.

Результаты по НС моделям и полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с $q-$состояниями на дереве Кэли были использованы в исследованиях зарубежного проекта FRGS 14-116-0357 «Quadratic Stochastic Operators with Infinite State Space and Their Applications» для изучения фазовых диаграмм на решетке Бете для модели

Поттса с $q-$состояниями (Международный Исламский университет Малайзии, справка от 1 ноября 2016 года, Малайзия). Применение этих научных результатов способствовало изучению p-адических мер Гиббса для модели Поттса.

Результаты по мерам Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли были использованы в исследованиях зарубежного проекта ANR-10-LABX-58 «Real/ p-adic dyanamical systems and Gibbs measures» для исследования вещественных и p-адических мер Гиббса для нескольких моделей на неаменабельных графах (Университет Париж-Эст, справка от 5 июня 2019 года, Франция). Применение этих научных результатов дает возможность о получении информации о фазах, соответствующей физической системы.

Методы описания гиббсовских мер для моделей Поттса и НС на дереве Кэли использованы в научных работах, опубликованных в зарубежных журналах (Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2015; Chaos, Solitons & Fractals, 2016; Journal of Statistical Physics, 2017; Journal of Physics: Conference Series, 2017; Random Structures & Algorithms, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 2019) для исследования новых гиббсовских мер. Применение научного результата позволило построить новые меры Гиббса, определить существование фазовых переходов и получить информацию об изменении состояния физической системы.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на 23 научно-практических конференциях, в том числе на 5 международных и 18 республиканских конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 40 научных работ, из них 17 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 11 опубликованы в зарубежных журналах и 6 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 196 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Слабо периодические меры Гиббса для модели жесткой сердцевины с двумя состояниями»,** посвящена нахождению условий крайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса, а также доказательству единственности слабо периодической меры Гиббса с периодом два и неединственности слабо периодической меры Гиббса с периодом четыре для модели жесткой сердцевины с двумя состояниями.

В первом параграфе первой главы приведены необходимые определения, понятия периодической, слабо периодической и трансляционно-инвариантной меры Гиббса, а также некоторые известные факты и результаты.

Дерево Кэли τ^k порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро.

Пусть $\tau^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин τ^k, $L-$множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются ближайшими соседями вершины и обозначаются $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y),\ x,\ y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},\ V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} :\ d(x, y) = 1\}.$$

$S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x.

Пусть $G_k -$свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$, соответственно.

Из работы Н.Н.Ганиходжаева известно следующее

Утверждение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и элементами группы G_k.

Пусть $G_k -$групповое представление дерева Кэли τ^k, $k \geq 1$. Любой элемент $x \in G_k$ имеет следующий вид:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n},\ \text{где } 1 \leq i_m \leq k+1,\ m = \overline{1, n}.$$

Число n называется длиной слова x и обозначается через $l(x)$.

Число букв $a_i,\ i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x, обозначим через $\omega_x(a_i)$. Например, если $x = a_2 a_1 a_2 a_3 a_2$, то $\omega_x(a_1) = \omega_x(a_3) = 1,\ \omega_x(a_2) = 3$. Очевидно, что длина слова x равна

$$l(x)=\sum_{i=1}^{k+1}\omega_x(a_i).$$

Для $A\subseteq V$ конфигурация σ_A на A определяется как функция

$$x\in A\to\sigma_A(x)\in\Phi=\{0,1,...,q\}.$$

Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A=\Phi^A$. Обозначим $\Omega=\Omega_V$ и $\sigma=\sigma_V$.

Пусть G_k^* – подгруппа группы G_k. Конфигурация $\sigma\in\Omega$ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(yx)=\sigma(x)$ для любого $x\in G_k$ и $y\in G_k^*$.

Конфигурация, инвариантная относительно всех сдвигов, называется трансляционно-инвариантной.

Энергия конфигурации $\sigma\in\Omega$ задается с помощью гамильтониана

$$H(\sigma)=\sum_{\substack{A\subset V:\\ diam(A)\le r}} I(\sigma_A), \tag{1}$$

где $r\in N$, $diam(A)=\max\limits_{x,y\in A} d(x,y)$ и $I(\sigma_A):\Omega_A\to R$ – данный потенциал.

Для конечной области $D\subset V$ с граничным условием φ_{D^c}, данным на его дополнении $D^c=V\setminus D$, условный гамильтониан есть

$$H(\sigma_D\,|\,\varphi_{D^c})=\sum_{\substack{A\subset V:\,A\cap D\ne\varnothing\\ diam(A)\le r}} I(\sigma_A)\quad,$$

где

$$\sigma_A(x)=\begin{cases}\sigma(x), \text{ если } x\in A\bigcap D\\ \varphi(x), \text{ если } x\in A\bigcap D^c.\end{cases}$$

Пусть $\mathbf{B}$ – σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω.

Обозначим

$$\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x)=\begin{cases}\sigma(x), \text{ если } x\in A,\\ \tilde{\sigma}(x), \text{ если } x\in V\setminus A.\end{cases}$$

Определение 1. Вероятностная мера μ на σ – алгебре $\mathbf{B}$ называется предельной мерой Гиббса, если для любого конечного $A\subset V$ имеет место

$$\mu(\sigma_A\,|\,\tilde{\sigma}_{V\setminus A})=\frac{e^{-\beta H(\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

где $H(\sigma)$ определена в (1), $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0$ – температура и

$$Z_{A,\tilde{\sigma}}=\sum_{\varphi\in\Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A\vee\tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Пусть $\mathcal{G}(H)$ – множество всех предельных мер Гиббса. Точка $\mu\in\mathcal{G}(H)$ называется крайней точкой множества $\mathcal{G}(H)$, если не существуют $\nu_1,\nu_2\in\mathcal{G}(H)$ с $\nu_1\ne\nu_2$ и $\mu=\dfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)$.

Основные задачи. Нас интересуют следующие две основные проблемы:

1) Исследование существования, по крайней мере, одной меры Гиббса для данного Гамильтониана.

2) Изучение структуры множества $\mathcal{G}(H)$ всех мер Гиббса, соответствующих данному гамильтониану.

Заметим, что если $H-$непрерывный гамильтониан, то известно, что множество $\mathcal{G}(H)$ является не пустым, выпуклым компактным подмножеством множества всех вероятностных мер, определенных на (Ω, B).

Пусть $\Phi=\{0,1\}$ и $\sigma \in \Phi^{V}$ – конфигурация, где $\sigma(x)=1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x)=0$ означает, что она свободна.

Определение 2. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y)=0$ для любых соседних $\langle x,y\rangle$ из $V(V_n$ или W_n, соответственно).

Множество таких конфигураций обозначим через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega \subset \Phi^{V}$.

Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma)=\begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), & \text{если } \sigma\in\Omega, \\ +\infty, & \text{если } \sigma\notin\Omega, \end{cases}$$

где $J \in R$.

Для любой допустимой конфигурации $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ обозначим

$$\#\sigma_n=\sum_{x\in V_n}\sigma_n(x),$$

т.е. $\#\sigma_n$ – количество единиц (занятых вершин) в V_n.

Пусть $z: x \mapsto z_x=(z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_{+}^{2}$ есть векторнозначная функция на V. Для $n=1,2,\ldots$ рассмотрим вероятностное распределение $\mu^{(n)}$ на множестве Ω_{V_n}, определенное как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\lambda^{\#\sigma_n}\prod_{x\in W_n}z_{\sigma_n(x),x}. \qquad (2)$$

Здесь Z_n – нормирующий делитель:

$$Z_n=\sum_{\varphi_n\in\Omega_{V_n}}\lambda^{\#\varphi_n}\prod_{x\in W_n}z_{\varphi_n(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n\geq 1$ и $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

где

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\begin{cases}1, \text{ если } \sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n}\\ 0, \text{ если } \sigma_{n-1}\vee\omega_n\notin\Omega_{V_n}.\end{cases}$$

В этом случае по теореме Колмогорова существует единственная мера μ на $(\Omega,\mathbf{B})$ такая, что для всех n и $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu^{(n)}(\sigma_n).$$

Пусть G_k^* – подгруппа группы G_k.

Определение 3. Совокупность величин $z=\{z_x, x\in G_k\}$ называется G_k^*-периодической, если $z_{yx}=z_x$ для $\forall x\in G_k, y\in G_k^*$.

G_k^*-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x\in G_k$ множество $\{y\in G_k:\langle x,y\rangle\}\setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_\downarrow$.

Пусть $G_k/G_k^*=\{H_1,...,H_r\}$ – фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r\geq 1$.

Определение 4. Совокупность величин $z=\{z_x, x\in G_k\}$ называется G_k^*-слабо периодической, если $z_x=z_{ij}$ при $x\in H_i$, $x_\downarrow\in H_j$.

Замечание 1. Заметим, что слабо периодическая совокупность z совпадает с обычной периодической, если значение z_x не зависит от $x_\downarrow$.

Определение 5. Мера μ называется G_k^* -(слабо) периодической, если она соответствует G_k^* -(слабо) периодической совокупности величин z.

Из работы Ю.Сухова и У.Розикова известна следующая теорема.

Теорема 1. Последовательность вероятностных распределений $\mu_n(\sigma_n)$, $n=1,2,\ldots$ в (2) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x\in V$ имеет место следующее уравнение:

$$z_x^{'}=\prod_{y\in S(x)}\frac{1}{1+\lambda z_y^{'}},$$

где $z_x^{'}=\dfrac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda=e^{J\beta}>0$ – параметр.

Второй параграф первой главы посвящен нахождению условий для крайности трансляционно-инвариантных гиббсовских мер (ТИГМ) для НС модели. В работе Ю.Сухова и У.Розикова было доказано, что при $k\geq 2$ и $\lambda>\left(\sqrt{k}\right)^k/(\sqrt{k}-1)^{k+1}$ ТИГМ μ^*, соответствующая единственному решению уравнения $z=1/(1+\lambda z)^k$, является не крайней.

Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 2. При $k\geq 2$ и $\lambda\in(0,\lambda_*)$ ТИГМ μ^* является крайней, где

$$\lambda_* = \lambda_*(k) = \frac{1}{t_*^k}\left(\frac{1}{t_*} - 1\right),$$

и $t_* \in (0,1)$ является единственным решением уравнения

$$t^{k+1} - kt^2 + (2k-1)t - k + 1 = 0.$$

В третьем параграфе первой главы изучены слабо периодические меры Гиббса. Пусть $\varnothing \neq A \subset N_k = \{1,2,...,k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) -$ четное число$\}$ – соответствующий ему нормальный делитель индекса два, где $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$. Используя известную из работы Ю.Сухова и У.Розикова оценку $(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$, была доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для любых $k \geq 1$, $i \leq k$, где $i = |A|$, и при любом $\lambda > 0$ для HC-модели H_A-слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной ТИГМ.

Четвертый параграф первой главы посвящен изучению слабо периодических мер Гиббса с периодом четыре.

Рассмотрим множества:

$I_1 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\}$, $I_2 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7, z_2 = z_8\}$,

$I_3 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, z_7 = z_8\}$, $I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8, z_2 = z_7\}$.

Основным результатом четвертого параграфа является следующая

Теорема 4. Для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре верны следующие утверждения:

1. При $k \geq 1, i \leq k$, где $i = |A|$, на I_1 слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной ТИГМ.

2. Пусть $k = 2$, $\lambda_{cr} = 4$ и $i = 1$ или $i = 2$. Тогда на I_2 при $\lambda < \lambda_{cr}$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса, которая является трансляционно-инвариантной, при $\lambda = \lambda_{cr}$ существуют две слабо периодические меры Гибсса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, другая слабо периодической (не периодической) и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно две слабо периодические (не периодические) меры Гибсса.

3. Пусть $k = 3, i = 1$. Тогда существует λ_0 такая, что на I_2 при $\lambda > \lambda_0$ существуют не менее четырех мер Гиббса, одна из которых является трансляционно-инвариантной, а остальные слабо периодическими (не периодическими) мерами Гиббса.

4. При $k \geq 1, i = 1$ или $k = 2, i = 2$ на I_3 слабо периодическая мера Гиббса единственна.

5. При $k = 2,3$, $i = 1$ или $k = i$ на I_4 слабо периодическая мера Гиббса единственна.

Вторая глава диссертации, названная **«Меры Гиббса для одной модели из теории информаций»,** посвящена изучению ТИГМ для плодородных моделей жесткой сердцевины с тремя состояниями. Из работы G.Brightwell, P.Winkler известны четыре типа таких моделей. Для некоторых из моделей найдены точные критические значения λ, когда ТИГМ не единственна на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. А при $k = 2$ найдены области (не) крайности существующих ТИГМ.

В первом параграфе даны понятие плодородного графа, необходимые определения и известные факты по данной модели.

В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0,1,2\}$. Значения $\sigma(x) = 1,2$ определяют, что вершина x «занята», а значение $\sigma(x) = 0$ - что вершина x «свободна».

Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в $\Phi = \{0,1,2\}$. Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω. Аналогичном образом можно определить конфигурации в V_n (W_n), и множество всех конфигураций в V_n (W_n) обозначается как Ω_{V_n} (Ω_{W_n}).

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G. Конфигурация σ называется $G-$допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x),\sigma(y)\}-$ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G-допустимых конфигураций через Ω^G $(\Omega^G_{V_n})$.

Множество активности для графа G есть функция $\lambda : G \to R_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0,1,2\}$ называется ее "активностью".

Для данных G и λ определим гамильтониан $G-$НС-модели как

$$H^\lambda_G(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

Определение 6. Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух ТИГМ.

Рассмотрим четыре типа плодородных графов с тремя вершинами $0,1,2$ (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеют следующие виды:

Петля: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$; Жезл: $\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}$;

Ключ: $\{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}$; Свисток: $\{0,0\}\{0,1\}\{1,2\}$.

Во втором параграфе второй главы в случаях $G = \textit{петля}$ и $G = \textit{жезл}$ найдено точное значение λ_{cr} такое, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИГМ на дереве Кэли порядка три, а на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ существуют не менее трех ТИГМ.

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 5. Пусть $k \geq 2$ и $\lambda_{cr} = (k+1)^k (k-1)^{-1} k^{-k}$. Тогда для НС-модели в случае $G = \textit{петля}$ при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют не менее трех ТИГМ, а при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует ровно одна ТИГМ.

Замечание 2. 1. В работе У.Розикова и Ш.Шоюсупова для $k=2$ доказано, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИГМ μ^*, μ_1, μ_2 для НС-модели в случаях $G = петля$ и $G = жезл$.

2. Во втором параграфе второй главы для $k=3$ доказано, что при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИГМ для НС-модели в случаях $G = петля$ и $G = жезл$.

3. В случае $G = жезл$ доказана теорема, аналогичная теореме 5, и при этом $\lambda_{cr} = 2^k (k-1)^{-1} k^{-k}$.

4. Из работ У.Розикова, Ш.Шоюсупова, J.Martin и Ю.Сухова известно, что в случаях $G = свисток$ и $G = ключ$ для любых $\lambda > 0$ и $k \geq 1$ ТИГМ единственна.

Третий параграф второй главы посвящен изучению крайности ТИГМ μ^*, μ_1, μ_2 при $k=2$. Используя методы Kesten-Stigum и F.Martinelli, A.Sinclair, D.Weitz, доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $k=2$. Тогда в случае $G = петля$ для НС-модели верны следующие утверждения:

1. Существует $\lambda_0 \approx 7.0355$ такое, что в мера μ^* при $\lambda > \lambda_0$ не является крайней и является крайней при $\lambda < \lambda_0$.

2. Пусть $\lambda_1 = 0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1)$. Тогда при $\lambda_{cr}(2) < \lambda < \lambda_1$ меры μ_1 и μ_2 являются крайними.

Отметим, что в случае $G = жезл$ верна теорема, аналогичная теореме 6. При этом $\lambda_0 \approx 2.2876$, $\lambda_1 \approx 1.3031$.

В третьей главе диссертации, названной **«Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных НС-моделей»,** рассмотрены плодородные НС-модели с параметром активности $\lambda > 0$ и четырьмя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существуют три типа таких моделей. Для каждой из этих моделей доказана единственность ТИГМ при любых значениях параметра λ на дереве Кэли порядков два и три. Кроме того, для двух из моделей найдены такие значения λ, при которых ТИГМ не единственна.

В первом параграфе даются необходимые определения, плодородные графы, известные факты, некоторые результаты по данной модели и постановка задачи.

Рассмотрим три типа плодородных графов с четырьмя вершинами 0,1,2,3 (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеют следующие виды:

палка: $\{0,1\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$ ключ: $\{0,1\}$ $\{0,2\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$
обобщенный ключ: $\{0,1\}$ $\{0,2\}$ $\{1,2\}$ $\{2,2\}$ $\{2,3\}$

Основными результатами второго и третьего параграфов третьей главы являются теоремы 7 и 8, соответственно.

Теорема 7. В случае $G = палка$ для НС-модели верны следующие утверждения:

1. При $k=2, k=3, k=4$ и $\lambda > 0$ существует только одна ТИГМ.

2. Пусть $k \geq 5$. Тогда существуют $\lambda_{cr,1}$ и $\lambda_{cr,2}$ такие, что при $\lambda < \lambda_{cr,1}$ и $\lambda > \lambda_{cr,2}$ существует только одна ТИГМ, при $\lambda = \lambda_{cr,1}$ или $\lambda = \lambda_{cr,2}$ существуют две ТИГМ и при $\lambda_{cr,1} < \lambda < \lambda_{cr,2}$ существуют ровно три ТИГМ.

Теорема 8. В случае $G = ключ$ для НС-модели верны следующие утверждения:

1. При $k = 2, k = 3$ и $\lambda > 0$ существует только одна ТИГМ.

2. Пусть $k \geq 4$. Тогда существуют $\lambda_{cr}^{(1)}$ и $\lambda_{cr}^{(2)}$ такие, что при $\lambda < \lambda_{cr}^{(1)}$ и $\lambda > \lambda_{cr}^{(2)}$ существует ровно одна ТИГМ, а при $\lambda_{cr}^{(1)} \leq \lambda \leq \lambda_{cr}^{(2)}$ существует более одной ТИГМ, где

$$\lambda_{cr}^{(1)} = \left(\frac{k-1}{2k}\right)^k \cdot \frac{\left[(k^3 - k^2 - k + 2 + k\sqrt{D_1}) \cdot (k^2 + k + 1 + \sqrt{D_1})\right]^{k+1}}{4\left(k^2 - k + 1 + \sqrt{D_1}\right)^{2k+1}},$$

$$\lambda_{cr}^{(2)} = \left(\frac{k-1}{2k}\right)^k \cdot \frac{\left[(k^3 - k^2 - k + 2 - k\sqrt{D_1}) \cdot (k^2 + k + 1 - \sqrt{D_1})\right]^{k+1}}{4\left(k^2 - k + 1 - \sqrt{D_1}\right)^{2k+1}},$$

$$D_1 = k^4 - 2k^3 - 5k^2 + 2k + 5.$$

В четвертом параграфе третьей главы показано, что в случае $G = обобщенный\, ключ$ при $\lambda > 0$ существует ровно одна ТИГМ на дереве Кэли порядков два и три.

Четвертая глава диссертации, названная **«Меры Гиббса для модели Поттса»,** посвящена изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями. Дано полное описание ТИГМ для модели Поттса и изучена их крайность на дереве Кэли порядков два и три. Доказано, что для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Кроме того, для антиферромагнитной модели Поттса с q-состояниями на некотором инвариантном множестве указано точное количество $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

В первом параграфе приведены необходимые определения и понятия. Кроме того, даны функциональные уравнения, обеспечивающие условия согласованности мер Гиббса в случае модели Поттса.

Рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} \delta_{1\sigma(x)},$$

где $J \in R$, $\alpha \in R$ – внешнее поле, $\langle x, y\rangle$ – ближайшие соседи и δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в обьеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x),x} \right\}, \tag{3}$$

где $\beta = \dfrac{1}{T}$, $T > 0$ – температура, Z_n^{-1} – нормирующий множитель,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{1\sigma(x)}$$

и $\{\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x}, \ldots, \tilde{h}_{q,x}) \in R^q, \ x \in V\}$ – совокупность векторов.

Из работы Н.Н.Ганиходжаева и У.А.Розикова известна следующая

Теорема 9. Последовательность вероятностных распределений $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ в (3) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее уравнение:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \tag{4}$$

где $F: h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h, \theta, \alpha) = (F_1, \ldots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}$$

и $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ – множество прямых потомков точки x и $h_x = \left(h_{1,x}, \ldots, h_{q-1,x}\right)$ с

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \ i = 1, \ldots, q-1.$$

Во втором параграфе главы 4 для модели Поттса дано полное описание ТИГМ на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

Пусть $\alpha = 0$. В этом параграфе рассмотрим ТИГМ для модели Поттса, т.е. предположим $h_x = h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$ для всех $x \in V$. Из уравнения (4) имеем $h = kF(h, \theta)$, т.е.,

$$h_i = k \ln\left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right), \ i = 1, \ldots, q-1. \tag{5}$$

Обозначив $z_i = \exp(h_i)$, $i = 1,\ldots,q-1$, из (5) получим

$$z_i = \left(\frac{(\theta-1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \quad i = 1,\ldots,q-1. \tag{6}$$

Известно, что при $J < 0$ $(\theta < 1)$, $k \geq 1$, $q \geq 2$ модель Поттса имеет единственную ТИГМ. Мы рассмотрим случай $J > 0$.

Следующее утверждение играет ключевую роль в доказательстве основной теоремы.

Утверждение 2. Для любого решения $z = (z_1,\ldots,z_{q-1})$ системы уравнений (6) существуют $M \subset \{1,\ldots,q-1\}$ и $z^* > 0$ такие, что

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \notin M, \\ z^*, & \text{если } i \in M. \end{cases}$$

Из этого утверждения вытекает, что любая ТИГМ модели Поттса соответствует решению следующего уравнения

$$z = f_m(z) \equiv \left(\frac{(\theta+m-1)z + q - m}{mz + q - m - 1 + \theta} \right)^k \tag{7}$$

при некотором $m = 1,\ldots,q-1$.

Лемма 1. Если $z(m_1)$ является решением (7) при $m = m_1$, то $z^{-1}(m_1)$ тоже является решением (7) при $m = q - m_1$.

Пусть $k \geq 2$. Положим

$$T_{cr} = \frac{J}{\ln\left(1 + \frac{q}{k-1}\right)}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, которая дает полное описание ТИГМ.

Теорема 10. Для ферромагнитной ($J > 0$) модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ существуют критические температуры $T_{c,m} \equiv T_{c,m}(k,q)$, $m = 1,\ldots,[q/2]$, для которых верны следующие утверждения:

1. $T_{c,1} > T_{c,2} > \ldots > T_{c,[q/2]-1} > T_{c,[q/2]} \geq T_{cr}$.

2. Если $T > T_{c,1}$, то существует единственная ТИГМ.

3. Если $T_{c,m+1} < T < T_{c,m}$ для некоторого $m = 1,\ldots,[q/2]-1$, то существуют $1 + 2\sum_{s=1}^{m} \binom{q}{s}$ ТИГМ.

4. Если $T_{cr} \neq T < T_{c,[q/2]}$, то существуют $2^q - 1$ ТИГМ.

5. Если $T = T_{cr}$, то количество ТИГМ определяется следующим образом

$$\begin{cases} 2^{q-1}, & \text{если } q \text{ –нечетное,} \\ 2^{q-1} - \begin{pmatrix} q-1 \\ \frac{q}{2} \end{pmatrix}, & \text{если } q \text{ –четное.} \end{cases}$$

6. Если $T = T_{c,m}$, $m = 1, \ldots, [q/2]$, $\left(T_{c,[q/2]} \neq T_{cr}\right)$, то существуют $1 + \binom{q}{m} + 2\sum_{s=1}^{m-1}\binom{q}{s}$ ТИГМ.

Третий параграф является продолжением исследований C.Kuelske, У.Розикова. Рассмотрим только ферромагнитный случай $J > 0$. Из Теоремы 9 следует, что для любой $h = \{h_x,\ x \in V\}$, удовлетворяющей (4), существует единственная расщепленная мера Гиббса μ для модели Поттса.

Заметим, что трансляционно-инвариантная расщепленная мера Гиббса соответствует решению h_x из (4) с $h_x = h = (h_1, \ldots, h_{q-1}) \in R^{q-1}$ для всех $x \in V$. Тогда из уравнения (4) получим $h = kF(h,\theta)$ и, обозначая $z_i = \exp(h_i)$, $i = 1, \ldots, q-1$, последнее уравнение можно переписать в виде формулы (6).

Из предыдущего параграфа известны следующие факты:

1. Решив уравнение (6), можно описать полное множество ТИГМ. Показано, что любая ТИГМ модели Поттса соответствует решению уравнения (7) для некоторых $m = 1, \ldots, [q/2]$.

2. Пусть $\theta_m = 1 + 2\sqrt{m(q-m)}$, $m = 1, \ldots, q-1$.. Если $\theta < \theta_1$, то при $k = 2$, $J > 0$ существует единственная ТИГМ. Кроме того, каждая θ_m является критическим значением для изменения количества ТИГМ.

3. Для каждого фиксированного m уравнение (7) имеет не более трех решений: $z_0 = 1$, $z_i = z_i(\theta, q, m)$, $i = 1, 2$, с $z_1 < z_2$. Обозначим через $\mu_i = \mu_i(\theta, m)$ ТИГМ модели Поттса, которые соответствуют решениям z_i.

Из работы C.Kuelske и У.Розикова известна следующая

Теорема 11. Пусть $k = 2$, $m = 1$. Тогда

а) Существует $\theta^{**} > \theta_c = q+1$ такая, что мера $\mu_1(\theta, 1)$ является крайней для любой $\theta \in [1 + 2\sqrt{q-1}, \theta^{**})$, $q \geq 2$.

б) Мера $\mu_2(\theta, 1)$ является крайней при любых $\theta \geq 1 + 2\sqrt{q-1}$, $q \geq 2$.

Следующая теорема улучшает пункт а) теоремы 11.

Теорема 12. Если $m = 1$, $k = 2$, то существует $\tilde{\theta} > \theta_c = q+1$ такая, что мера $\mu_1(\theta, 1)$ является крайней при любых $\theta \in (1 + 2\sqrt{q-1}, \tilde{\theta})$, $q \geq 2$.

Из работы C.Kuelske и У.Розикова известна

Теорема 13. Пусть $k = 2$.

(i) Если $m = 2$, то

- для каждого $q=4,5,6,7,8$ существует $\breve{\theta} > \theta_c = q+1$ такое, что мера $\mu_1(\theta,2)$ является крайней при любых $\theta \in [\theta_2, \breve{\theta})$.

- для каждого $q \geq 9$ существует $\theta^\dagger \in (\theta_2, q+1)$ такое, что мера $\mu_1(\theta,2)$ является крайней при любых $\theta \in [\theta^\dagger, \breve{\theta})$, где $\theta^\dagger = \theta^\dagger(q)$ является единственным решением уравнения

$$\theta^3 - (q+3)\theta^2 + (6q-17)\theta - (9q-19) = 0$$

и $\breve{\theta} = \breve{\theta}(q)$ есть единственное решение уравнения

$$\theta^3 - (q+3)\theta^2 - (2q-15)\theta - (q+13) = 0.$$

(ii) Если $m=2$, то для каждого $q=4,5,6,7,8$ существует $\vartheta = \vartheta(q)$ такое, что $\theta_2 < \vartheta \leq q+1$ и $\mu_2(\theta,2)$ является крайней при любых $\theta \in [\theta_2, \vartheta)$.

(iii) Если $q < \frac{m+1}{2m}\left[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}\right]$ и $m \geq 2$, то мера $\mu_1(\theta_m, m) = \mu_2(\theta_m, m)$ является крайней.

Следующая теорема является обобщением теоремы 13.

Теорема 14. Пусть $k=2, m \geq 2$. Тогда

1. Если $2m \leq q < \frac{m+1}{2m}[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}]$, то существует $\ddot{\theta} > q+1$ такая, что мера $\mu_1(\theta,m)$ является крайней при любых $\theta \in [\theta_m, \ddot{\theta})$;

2. Если $q > \frac{m+1}{2m}[3m+1+\sqrt{m^2+6m+1}]$, то существует $\overline{\theta} \in (\theta_m, \theta_c)$ такая, что мера $\mu_1(\theta,m)$ является крайней при любых $\theta \in (\overline{\theta}, \ddot{\theta})$;

3. Если $2m \leq q < m + \frac{1}{4m}(m+1+\sqrt{m^2+2m+7})^2$, то существует $\overline{\overline{\theta}} \in (\theta_m, +\infty)$ такая, что мера $\mu_2(\theta,m)$ является крайней при любых $\theta \in [\theta_m, \overline{\overline{\theta}})$.

В четвертом параграфе главы 4 даны явные формулы для решений системы уравнений (6) при $q=3, k=3, \theta>1$ и изучена крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса, соответствующих этим решениям.

Пусть

$$\theta_{cr} = \sqrt{9+6\sqrt{3}} - 2,$$

$$p(\theta) = -\frac{1}{3}(\theta^2+\theta-2),\ r(\theta) = \frac{1}{27}\left(-2(\theta-1)^3 - 9(\theta-1)^2 + 54\right).$$

$$\alpha(\theta) = \arctan\left(\frac{2}{r}\sqrt{-\frac{r^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right),\ r(\theta) \neq 0,$$

$$x_1(\theta) = \frac{2p}{3}\cos\frac{\alpha+2\pi}{3} + \frac{\theta-1}{3} > 0,\ x_2(\theta) = \frac{2p}{3}\cos\frac{\alpha+4\pi}{3} + \frac{\theta-1}{3} > 0,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}}(3-\sqrt{3})\right).$$

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $q=3,\ k=3,\ \theta>1$. Тогда система уравнений (6) имеет:

1. единственное решение $(1,1)$ при $\theta<\theta_{cr}$;

2. три решения $(1,1),(z_1,1),(1,z_1)$ при $\theta=\theta_{cr}$;

3. семь решений $(1,1)$, $(z_2,1)$, $(1,z_2)$, $(z_3,1)$, $(1,z_3)$, (z_2,z_2), (z_3,z_3) при $\theta>\theta_{cr}$, где $z_1=x_3^3, z_2=x_1^3, z_3=x_2^3$.

Итак, для модели Поттса при $\theta>\theta_{cr}$ мы имеем семь трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Заметим, что в силу симметрии область крайности мер, соответствующих решениям $(z_2,1)$ и $(1,z_2)$ (аналогично $(z_3,1)$ и $(1,z_3)$), будет одинаковой. Поэтому достаточно изучать крайность мер μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, соответствующих решениям $(1,1)$, $(z_2,1)$, $(z_3,1)$, (z_2,z_2) и (z_3,z_3), соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. Пусть $k=3$, $q=3$ и $J>0$. Тогда верны следующие утверждения:

1. Мера μ_0 является крайней при $\frac{9-\sqrt{73}}{4}<\theta<\frac{9+\sqrt{73}}{4}$ и не крайней при $\theta>\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$.

2. Меры μ_1 и μ_2 являются крайними при $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(5)}$ и $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(8)}$, соответственно, где $\theta^{(5)}\approx 14.14214$ и $\theta^{(8)}\approx 10.794118$.

3. Меры μ_3 и μ_4 не являются крайними при $\theta>\theta^{(0)}$ и $\theta>\theta^{(2)}$, соответственно, где $\theta^{(0)}\approx 3.994$ и $\theta^{(2)}\approx 3.759659$.

4. Мера μ_3 является крайней при $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(10)}$, где $\theta^{(10)}\approx 3.8923$.

5. Мера μ_4 является крайней при $\theta_{cr}<\theta<\theta^{(11)}$, где $\theta^{(11)}\approx 3.74608$.

Пятый параграф главы 4 посвящен изучению периодических мер Гиббса для модели Поттса. Показано, что для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными и для антиферромагнитной модели Поттса с q-состояниями на некотором инвариантном множестве указано точное количество $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

Известно следующее:

модель Поттса с внешним полем $\alpha\in R$ имеет только периодические меры Гиббса с периодом два;

на дереве Кэли порядка два для антиферромагнитной модели Поттса ($J<0$) в случае нулевого внешнего поля на некоторых инвариантах доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными;

для ферромагнитной модели Поттса ($J>0$) с тремя состояниями показано, что на дереве Кэли порядка $k\geq 1$ все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными;

для модели Поттса с ненулевым внешним полем существуют $G_k^{(2)}$-периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса;

для антиферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями и с нулевым внешним полем доказано, что на некоторых инвариантах существует не менее двух $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 16. Пусть

$$\bar{\theta}_{cr}=\frac{k-q+1}{k+1},\ k\geq 3,\ q\geq 3,\ J<0.$$

Тогда для модели Поттса на инвариантном множестве I_m при $0<\theta<\bar{\theta}_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$- периодические меры Гиббса, при этом одна из них является трансляционно-инвариантной, а другие две $-G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными). Здесь

$$I_m=\{z=(u,v)\in R^{q-1}\times R^{q-1}: x_i=x,\ y_i=y, i=\overline{1,m},\ x_i=y_i=1, i=\overline{m+1,q-1}\};$$

Теорема 17. Для модели Поттса при $k\geq 3$, $3\leq q<k+1$ и $0<\theta<\bar{\theta}_{cr}$ на $\bigcup_{m=1}^{q} I_m$ существуют ровно

$$2\cdot(2^q-1)$$

$G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

Теорема 18. Пусть $\alpha=0.$ Тогда для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями при $k\geq 1$ все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена определению существования предельных мер Гиббса и изучению структуры множества таких мер для моделей Поттса и НС на дереве Кэли.

Основные результаты исследования заключаются в следующем.

1. Найдены условия крайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

2. Доказана единственность слабо периодической меры Гиббса с периодом два для НС-модели с двумя состояниями.

3. Найдены условия существования и неединственности слабо периодических (не периодических) мер Гиббса с периодом четыре для НС-модели с двумя состояниями.

4. Указано точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели жесткой сердцевины с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$ и определена нижняя граница количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса при $k \geq 2$.

5. Найдены области (не) крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели жесткой сердцевины с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 2$.

6. Определены условия неединственности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для плодородных НС-моделей с четырьмя состояниями.

7. Получено полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

8. Найдены области крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с q-состояниями на дереве Кэли порядка $k = 2$.

9. Найдены области крайности трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$.

10. Доказана трансляционно-инвариантность периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$.

11. На одном из инвариантных множеств найдено точное количество периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса для антиферромагнитной модели Поттса с q-состояниями.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT THENATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

NAMANGAN STATE UNIVERSITY

KHAKIMOV RUSTAMJON MAKHMUDOVICH

LIMITING GIBBS MEASURES FOR THE LATTICE SYSTEMS WITH HARD CONSTRAINTS ON THEIR CONFIGURATIONS

01.01.01 – Mathematical analysis
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT

of Doctoral Dissertation (DSc) on Physical and Mathematical Sciences

Tashkent – 2019

The theme of doctoral dissertation (Doctor of Science) was registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.DSc/FM35.

The dissertation has been prepared at the Namangan State University.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website of Scientific Council (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the website of "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz).

Scientific adviser:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Hryniv Ostap** Professor (Durham University, United Kingdom)
	Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kudaybergenov Karimbergen Kadibergenovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Qarshi State University**

Defense will take place on «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year

(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year)

A. Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

G.I. Botirov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

V.I.Chilin
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

ABSTRACT of DSc Dissertation

The urgency and relevance of the dissertation topic. Solutions of problems arising in the many scientific and applied researches to study of thermodynamic properties of physical and biological systems, carried out in the world level, mainly can be reduced to problems of the theory of Gibbs measures. For systems that are in thermal equilibrium with the environment, in which the temperature is kept constant it's important the canonical Gibbs distribution suggested by the American scientist J.Gibbs for classical statistics. From the works of R.Baxter and F.Kelly one can see that the study of Gibbs measures plays an important role in many areas of science, in particular, in the statistical mechanics, in physics, biology, queuing theory and theory of information. Construction of Gibbs measures for different models of statistical mechanics is one of the important problems of the theory of measures.

The aim of the research work is to study the structure of the set of limiting Gibbs measures for HC and Potts models with a finite number of state on a Cayley tree.

The tasks of research work:

to find conditions of extremality of translation-invariant Gibbs measure for HC model on a Cayley tree of order $k \geq 2$;

to check the existence of weakly two-periodic Gibbs measures for two state HC model;

to determine the existence of weakly four-periodic (non periodic) Gibbs measures for HC model;

to find conditions of non-uniqueness and extremality of translation-invariant Gibbs measures for three state HC models on a Cayley tree of order $k \geq 2$;

to find the exact values of parameters under which the translation-invariant Gibbs measure is not unique for four state fertile HC models;

to give a full description of translation-invariant Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree of order $k \geq 2$;

to study extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree of order $k = 2$ and $k = 3$;

to determine the number of periodic (non translation-invariant) Gibbs measures for Potts model on a Cayley tree in some invariant.

The object of the research work – $q-$state Potts model, two state HC model, three and four state fertile HC models on Cayley trees.

Scientific novelty of the research work is as follows:

for two state HC model the uniqueness of weakly two-periodic Gibbs measure is proved;

for three state HC-model on a Cayley tree of order $k = 3$ the exact number of translation-invariant Gibbs measures is found and a lower bound for number of such measures on a Cayley tree of order $k \geq 2$ is given;

for the three state HC model on a Cayley tree of order $k = 2$ conditions of (non) extremality of translation-invariant Gibbs measures are found;

for fertile four state HC-models the non-uniqueness of translation-invariant Gibbs measures is proved;

for the Potts model on a Cayley tree of order $k \geq 2$ the full description of translation-invariant Gibbs measures is obtained.

Summary of the dissertation. The dissertation is devoted to the determination of the existence of limiting Gibbs measures and study of the structure of the set of such measures for the Potts and HC models on a Cayley tree.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis have been used in the following research projects:

the full description of translation-invariant Gibbs measures for the Potts model are used in DFG SFB| TR12 foreign research projects of «Symmetries and Universality in Mesoscopic Systems» for solving of the problem of extremality of translation-invariant measures for Potts model (Ruhr-University of Bochum, Germany, certificate dated October 26, 2016). The application of these research results made it possible to study the thermodynamic properties of physical systems corresponding to the Potts model;

the results for HC model and the full description of translation-invariant Gibbs measures for q-state Potts model on a Cayley tree are used in FRGS 14-116-0357 foreign research projects of «Quadratic Stochastic Operators with Infinite State Space and Their Applications» for the study of phase diagrams on the Bethe lattice for q-state Potts model (International Islamic University Malaysia, certificate dated November 1, 2016). The application of these research results made it possible to study p-adic Gibbs measures for the Potts model;

the results about Gibbs measures of Potts models on Cayley trees have been used in the scientific project "Real/ p-adic dyanamical systems and Gibbs measures" under program of LabEx Bezout (ANR-10-LABX-58) for investigation of real and p-adic Gibbs measures of several models on non-amenable graphs (University Paris-Est, France, certificate dated June 5, 2019). The application of these research results made it possible to understand of a phase of the corresponding physical system;

the method of description of Gibbs measures for Potts and HC models on a Cayley tree is used in leading journals (Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2015; Chaos, Solitons & Fractals, 2016; Journal of Statistical Physics, 2017; Journal of Physics: Conference Series, 2017; Random Structures & Algorithms, 2017; Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 2019) in order to investigate new Gibbs measures. Using the scientific results enabled to construct Gibbs measures, to determine the existence of phase transitions and to get information about changes of the state of the physical system.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 196 pages.

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Хакимов Р.М. Единственность слабо периодической Гиббсовской меры для HC-модели. // Матем. заметки, 2013. Том 94, -№ 5. -С. 796-800. (3. Scopus. IF=0.19)
2. Kuelske C., Rozikov U.A, Khakimov R.M. Description of all translation-invariant(splitting) Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. // Jour. Stat. Phys., 2014. V.156, -№ 1, -p.189-200. (3. Scopus. IF=1.36)
3. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей HC с тремя состояниями на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2015. Том 183, -№ 3. -С. 441-449. (3. Scopus. IF=0.65)
4. Khakimov R.M. The uniqueness of the Translation-invariant Gibbs measure for four state HC-models on a Cayley tree. // Jour. Sib. Fed. Univ., 2015, 8(2), -p.165-172. (3. Scopus. IF=0.15)
5. Rozikov U.A, Khakimov R.M. Gibbs measures for fertile three-state hard core models on a Cayley tree. // Queueing Systems, 2015, Vol.81, -№ 1. p.49-69. (3. Scopus. IF=1.0)
6. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для Hard-Core моделей с четырьмя состояниями на дереве Кэли. // ДАНРУз, – 2015. -№ 4. -С. 5-8. (01.00.00; №7).
7. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре. // Укр. матем. журнал, 2015, Том 67, -№ 10. -С. 1409-1422. (3. Scopus. IF=0.19)
8. Хакимов Р.М. Меры Гиббса для плодородных моделей жесткой сердцевины на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2016. Т. 186, -№2. -С. 340-352. (3. Scopus. IF=0.74)
9. Khakimov R.M., Haydarov F.H. An improvement of extremality regions for Gibbs measures of the Potts model on a Cayley tree. // Journal of Physics: Conference Series (JPCS), 2016. 697 (1), 12 p. (3. Scopus. IF=0.45)
10. Хакимов Р.М., Хайдаров Ф.Х. Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика,– 2016. – Том 189, № 2. –С. 286-295. (3. Scopus. IF=0.74)
11. Хакимов Р.М. HC модель на дереве Кэли: трансляционно-инвариантные меры Гиббса. // Вестник НУУз, – 2017. - 2/2. –С. 245-251. (01.00.00; №8).
12. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для HC-моделей на дереве Кэли. // Сибирский матем. журнал,– 2018. – Том 59, № 1. –С. 185-196. (3. Scopus. IF=0.52)
13. Розиков У.А., Хакимов Р.М., Хайдаров Ф.Х. Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, –2018. –Том 196, № 1. –С.117-134. (3. Scopus. IF=0.8)

14. Khakimov R.M., Madgoziyev G.T. Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree. // UzMJ, 2018, -№ 3, p. 116-131. (01.00.00; №6).
15. Хакимов Р.М., Аюбжонова М.С. Периодические меры Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли. // Бюллетень Института математики, – 2018, № 1, –С. 23 – 27. (01.00.00; №17).
16. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З. О крайних мерах Гиббса для HC моделей с тремя состояниями на дереве Кэли. // Бюллетень Института математики, – 2018, № 1, –С. 28 – 31. (01.00.00; №17).
17. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-модели на дереве Кэли. // Бюллетень Института математики, – 2019, № 2, –С. 17 – 22. (01.00.00; №17).

II бўлим (Часть II; Part II)

18. Хакимов Р.М. Новые результаты по слабо периодическим мерам Гиббса для HC-модели на дереве Кэли. // Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми 2016», Том №2, Бухара, Узбекистан, 9-10 ноября, 2016, –С. 315-318.
19. Хакимов Р.М. Неединственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-модели на дереве Кэли. // «Прикладной и геометрический анализ». Тез. докл. междунар. конф. – Самарканд, 2014. – С. 95.
20. Хакимов Р.М. О существовании слабо периодических мер Гиббса для HC-модели на дереве Кэли. // «Современные методы математической физики и их приложения». – Ташкент, 2015, – С. 81-83.
21. Хакимов Р.М. О единственности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-моделей с четырьмя состояниями. // VII Ферганская конференция «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения». – Наманган, 2015. – С. 245-249.
22. Хакимов Р.М. Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для одной из HC-моделей с тремя состояниями на дереве Кэли. // «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». – Ташкент, 2015. – С. 231-234.
23. Khakimov R.M., Haydarov F.H. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. // Abstracts of the international conference « Algebra, Analysis and Quantum Probability». – Tashkent, 2015. – С. 143-146.
24. Хакимов Р.М. Изучение трансляционно-инвариантных мер Гиббса и их крайности для одной модели на дереве Кэли. // «Статистика и ее применения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2015. – С. 275-277.
25. Хакимов Р.М. Единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для HC-моделей на дереве Кэли порядка два. // «Математическая

физика и родственные проблемы современного анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Бухара, 2015. – С. 136-138.
26. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для НС-моделей на дереве. // «Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их применения». Тез. докл. междунар. конф. – Алматы, Казахстан, 2016. – С. 94-96.
27. Хакимов Р.М. Крайность мер Гиббса для одной из моделей Hard-Core на дереве Кэли. // «Актуальные проблемы анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Карши, 2016, – С. 280-282.
28. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-модели на некотором инварианте. // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI». – Ростов-на-Дону, Россия, 2016, – С. 46.
29. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для одной из НС-моделей с четырьмя состояниями на дереве Кэли. // «Проблемы современной топологии и ее приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2016, – С. 189-191.
30. Хакимов Р.М. Крайность мер Гиббса для одной из моделей Hard-Core на дереве Кэли. // International Conference on «Nonlinear analysis and its applications», Samarkand, Uzbekistan, September 19-21, 2016, p.40-41.
31. Хакимов Р.М. Неединственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для одной из НС-моделей на дереве Кэли. // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезмий-2016», Бухара, Узбекистан, 9-10 ноября, 2016, –С. 108.
32. Хакимов Р.М. Меры Гиббса для одной из плодородных НС-моделей на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция «Задачи алгебры, прикладной математики и информационных технологий», Наманган, Узбекистан, 20-21 декабря, 2016, –С. 88-91.
33. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Актульные проблемы динамических систем и их приложения», Ташкент, Узбекистан, Турин. пол. унив., 1-3 мая, 2017, –С. 213-214.
34. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Область крайности трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС модели. // Научная конференция «Проблемы современной топологии и ее приложения», Ташкент, Узбекистан, 11-12 мая, 2017, –С. 260-262.
35. Хакимов Р.М., Мадгозиев Г. О существовании новых слабо периодических мер Гиббса для НС-модели. // Статистика и ее применения. Материалы республиканской научно-практической конференции, Ташкент, 19-20 октября, 2017, –С. 338-341.
36. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З. О крайних мерах Гиббса для НС моделей с тремя состояниями на дереве Кэли. // Республиканская

научная конференция «Новые результаты математики и их приложения» СамГУ, 14-15 мая, 2018 г., –С. 48-50.
37. Хакимов Р.М. О крайних мерах Гиббса для HC моделей с двумя состояниями на дереве Кэли. // Научная конференция "Проблемы современной топологии и ее приложения", Ташкент, Узбекистан, 11-12 сентября, 2018, –С. 65-66.
38. Khakimov R.M. An extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree of order three. // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезмий-2018», Ташкент, Узбекистан, 13-15 сентября, 2018, –С. 40.
39. Розиков У.А., Хакимов Р.М. О крайности мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка три. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018», Наманган, Узбекистан, 18-19 октября, 2018, –С. 99-101.
40. Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З., Абдулбориева М. Условие единственности слабо периодической меры Гиббса для HC модели. // Материалы республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018», Наманган, Узбекистан, 18-19 октября, 2018, –С. 101-103.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали»
таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(07.06.2019 йил)

Автореферат редактирован в редакции
журнала «Узбекский математический журнал»
(07.06.2019 год)

The dissertation abstract redacted by the editor-in-chief
of the journal of “Uzbek Mathematical Journal”
(07.06.2019 year)

Босишга рухсат этилди: 07.06.2019 йил.
Бичими 60×84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Ҳажми: 4 босма табоқ. Адади: 100. Буюртма: № 35.

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида чоп этилди.
100047, Тошкент ш., М.Улуғбек кўчаси, 81-уй.