ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

УТЕБАЕВ ДАУЛЕТБАЙ

УМУМЛАШТИРИЛГАН ЕЧИМЛИ НОСТАЦИОНАР ЖАРАЁНЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика–математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2019

УДК 519.6

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

УТЕБАЕВ ДАУЛЕТБАЙ

УМУМЛАШТИРИЛГАН ЕЧИМЛИ НОСТАЦИОНАР ЖАРАЁНЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР

**01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика–математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ – 2019

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.DSc/FM12 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация афтореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб–саҳифаси (www.tuit.uz) ва «Ziyonet» таълим ахборот порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи: **Арипов Мерсаид Мирсиддикович**
физика– математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: **Имомназаров Холматжон Худайназарович**
физика–математика фанлари доктори,
етакчи илмий ходим (Россия, ҲМ ва МГ ИТИ)

Алоев Рахматулла Джураевич
физика–математика фанлари доктори, профессор

Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович
физика–математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот: **Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

З.Х. Юлдашев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда ички тўлқинлар, суюқликлар ва газлар ҳаракатларини математик моделлаштириш масалаларига келтирилади. Тўлқинлар, суюқликлар ва газлар ҳаракатларининг математик моделлари физика, туташ муҳитлар механикаси, суюқликлар ва газлар механикаси каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Эластикликнинг динамик назарияси, ички тўлқинлар назарияси, акустика, геомеханика, электромагнит тўлқинларнинг тарқалиши масалалари айнан шу соҳалардаги жараёнларни аниқлашда асос сифатида хизмат қилади. Бундай масалалар асосан чекли элементлар ва чекли айирмалар каби сонли усуллар билан ечилади. Чекли элементлар ва чекли айирмаларга асосланган сонли усуллар туташ муҳитлар механикасининг ностационар масалаларини ечишда асос сифатида хизмат қилади. Шу сабабли чекли айирмалар ва чекли элементлар методларини такомиллаштириш, уларнинг аниқлик даражасини ошириш ҳисоблаш математикаси соҳасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ностационар жараёнларнинг математик моделлари асосини ташкил этувчи гиперболик тенгламалар ва тенгламалар системаси учун қурилган айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятларини аниқлаш долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Дисперсион таҳлил гиперболик тенгламаларнинг умумлаштирилган (носиллиқ) ечимларини ҳисоблашда муҳим аҳамиятга эга. Юқори тартибли аниқликка эга сонли схемалар энг яхши дисперсион хусусиятларга эга бўлиб, улар ўрганилаётган жараёнларнинг физик ҳусусиятларини аниқроқ тасвирлаб беради. Шу сабабли ностационар жараёнларни ифодаловчи математик моделлар учун юқори аниқликка эга бўлган сонли ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқиш мақсадли тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган туташ муҳитлар механикаси, биокимё, экология ва биология соҳаларидаги ностационар масалаларнинг сонли ечиш усулларини яратишнинг долзарб йўналишларига алоҳида эътибор кучайтирилди. Бу йўналишда юқори аниқликка эга сонли усулларни қуриш ва уларни такомиллаштиришга бағишланган қатор илмий тадқиқотларни амалга оширишда салмоқли натижаларга эришилди. Дифференциал тенглама ва математик физика, динамик тизимлар назарияси ва математик моделлаштириш каби фанларнинг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш амалий математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда туташ муҳитлар механикасининг ностационар

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори.

жараёнларини математик моделлаштириш ва сонли усуллар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантриш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисидаги» Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги», 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисидаги» қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М.Мирзиёевнинг 2019 йил 24 май куни Ўзбекистон миллий университетида таълим ва илм-фан соҳаси вакиллари билан бўлиб ўтган учрашувидаги маърузаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[2]. Туташ муҳитлар механикасининг ностационар масалалари учун чекли айирмалар ва чекли элементлар схемаларини қуриш ва уларнинг аниқлигини баҳолаш бўйича илмий изланишлар жаҳоннинг етакчи олий таълим муассасалари ва илмий марказлари, жумладан, University of Liverpool, University of Wales (Буюк Британия), Universite of Paris (Франция), University of Maryland, Massachusetts Institute of Technology (АҚШ), Technological University of Dresden (Германия), Sofia University (Болгария), Politecnico de Milano, University degli Studi de Trento (Италия), Москва давлат университети, Россия Фанлар академиясининг математик моделлаштириш институти, Келдыш номидаги Амалий математика институти, Россия Фанлар академияси ва унинг Сибир бўлимининг ҳисоблаш марказлари, Новосибирск давлат университети (Россия), Киев Миллий университети (Украина), Белоруссия давлат университети, Белоруссия Миллий фанлар академиясининг Математика институти (Белоруссия), Ўзбекистон Миллий университети, Қорақалпоқ давлат университети (Ўзбекистон) да олиб борилмоқда.

Ностационар дифференциал тенгламалар, динамик системалар ва функционал дифференциал тенгламалар ва улар учун қўйилган чегаравий масалаларни сонли ечиш усулларини ишлаб чиқишга оид жаҳонда олиб

---

2 Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи http://www.eriez.com/, https://www.ihs.com/, http://www.sciencedirect.com/, http://link.springer.com/, http://www.iccm-central.org/, http://www.university-directory.eu, www.webofknowledge.com, www.scholar.google.com ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

борилган тадқиқотлар натижасида бир қатор, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: эллиптик типдаги дифференциал тенгламалар ечимининг силлиқлигига минимал талаблар қўйиш имконини берадиган чекли элементлар усули асосида қурилган айирмали схемаларнинг аниқлик баҳолари олинган (Politecnico de Milano, University degli Studi de Trento, (Италия); University of Combridge (Буюк Британия); Universite de Paris (Франция); Sofia University (Болгария)); аниқ айирмали схемалар операторлари асосида эллиптик типдаги тенгламалар учун яқинлашиш тезлиги баҳолари олинган (Москва давлат университети, Россия Фанлар академиясининг Математик моделлаштириш институти ва Келдыш номидаги Амалий математика институти (Россия); Киев Миллий университети (Украина); Sofia University (Болгария); Қорақалпоқ давлат университети (Ўзбекистон)); ностационар параболик ва гиперболик типдаги тенгламалар ечимининг силлиқлигига минимал талаблар қўйиш имконини берадиган чекли айирмали схемаларнинг аниқлик баҳолари олинган (Москва давлат университети, Россия Фанлар академиясининг Математик моделлаштириш институти ва Келдыш номидаги Амалий математика институти (Россия); Киев Миллий университети (Украина); Қорақалпоқ давлат университети (Ўзбекистон)).

Дунёда амалий масалаларнинг математик моделлари ҳисобланган ностационар тенгламалар ва тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг юқори аниқликдаги ечимларни топиш каби бир қатор устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда, шу жумладан, биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системаларига қўйилган Коши абстракт масалалари учун айирмали схемалар қуриш; айирмали схемаларнинг аниқлигини ва яқинлашиш тезлигини баҳолаш; математик моделлари биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси орқали ифодаланадиган газ динамикаси, фильтрация, океанология, биохимия каби соҳаларнинг амалий масалаларини ечиш усулларини ишлаб чиқиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ностационар тенгламалар кўп амалий масалаларда учрайди ва уларнинг ечимини топишнинг асосий усули чекли айирмалар усули ҳисобланади. Айирмали схемаларни қуриш ва аниқлигини тадқиқ қилиш масалалари А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Г.И. Марчук, Н.Н. Яненко, С.К. Годунов, Ю.И. Шокин, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, А.В. Гулин, М.Н. Москальков, Р. Рихтмайер, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус ва бошқаларнинг ишлари ўрганилган. Н.Н. Яненко, Дж. Фромм, В. Вендрофф, Е. Таркел, М.Н. Москальков, Ю.И. Шокин, А.С. Макаренко, Б.Л. Рождественский каби олимларнинг илмий ишларида айирмали схемаларнинг аппроксимация хатолигини оширишда дисперсиянинг пасайиши исботланган.

Ҳозирги вақтда айирмали схемалар назариясида дифференциал тенглама ечимининг силлиқлигига минимал талаблар қўйиш имконини берадиган айирмали схемалар қуриш ва аниқлик баҳосини олиш масалаларига катта эътибор берилмоқда, шу жумладан, яқинлашиш тезлиги баҳоларини олиш тадқиқотлари А.А. Самарский, Г.И. Марчук, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, В.

Вайнельт, М.Н. Москальков, А.А. Злотник, И.Н. Джураев ва бошқалар томонидан олиб борилган. Сонли усуллар назариясида чекли элементлар усули универсал саналади ва Г.Стренг, Дж. Фикс, О. Зенкевич, К. Морган, Ф. Сьярле, Ж.-П. Обен, Э. Митчелл, Р. Уэйт ва бошқаларнинг ишлари ушбу усулни қўллаш масалаларига бағишланган. М.Н. Москальков, О. Зенкевич, И. Фрид ва бошқаларнинг илмий ишларида юқори аниқликка эга чекли элементлар усули схемасини қуриш ғояси вақт ўзгарувчисини аппроксимациялаш учун фойдаланилган.

Бугунги кунда кўплаб илмий марказларда ностационар масалаларнинг яна бир муҳим синфи ҳисобланган биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун аралаш чегаравий шартларга эга амалий масалаларни ечиш бўйича илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Бундай амалий масалалар учун сонли усуллар С.В. Севашинский, А.А. Самарский, С.К. Годунов, Н.Н. Яненко, Н.Н. Анучина, А.Н. Коновалов, Н.М. Горский, А.В. Гулин, Ю.П. Попов, Н.В. Арделян, Х.О. Крайс, Р.Д. Алоев ва бошқаларнинг ишларида кўриб чиқилган. Хусусан, Н.В. Арделян томонидан дифференциал тенгламалар ечими силлиқ бўлганда биринчи тартибли аниқликдаги айирмали схемалар қурилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режаси билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг «Амалий математика масалаларини ечишнинг алгоритмлари ва дастурий таъминоти» илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади – ностационар тенгламалар учун юқори тартибли аниқликдаги айирмали схемалар қуриш ва уларнинг аниқлигини баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системасига қўйилган Коши абстракт масалалари учун юқори аниқликдаги кўп параметрли айирмали схемаларни қуриш, уларнинг аниқлик баҳоларини олиш;

интерполяцион фазоларда гиперболик типдаги биринчи тартибли тенгламалар системаси учун марказлашган айирмали схемалар қуриш ва яқинлашиш тезлиги ҳамда аниқлик баҳоларини олиш;

хусусий ҳосилали ностационар тенгламалар учун фазо ва вақт бўйича чекли элементлар усулига асосланган юқори аниқликдаги сонли схемаларни қуриш ва аниқлик баҳоларини олиш;

кўп параметрли схемалар оиласидан дисперсион хусусиятлари бўйича оптимал ҳисобланган айирмали схемаларни танлаш;

янги қурилган айирмали схемалар асосида туташ муҳитлар механикасининг ностационар масалаларини сонли моделлаштириш.

Тадқиқотнинг объекти – ностационар тенгламалар ва тенгламалар системасидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети – чизиқли ва ночизиқли хусусий ҳосилали ностационар тенгламалар учун юқори аниқликдаги сонли усулларни ишлаб чиқишдан иборат.

Тадқиқот усуллари. Диссертация ишида ҳисоблаш математикаси, алгебра, сонли моделлаштириш, функционал анализ усулларидан ҳамда алгоритмлаш технологияларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системаларига қўйилган Коши абстракт масалаларига юқори аниқликдаги янги айирмали схемалар қурилган ва аниқлик теоремалари исботланган;

кососимметрик операторли икки қатламли операторли-айирмали схема учун негатив метрикада янги априор баҳо олинган;

интерполяцион фазоларда умумлаштирилган ечимли акустик, тезлик-кучланишли эластикликнинг динамик назарияси масалалари учун янги марказлашган айирмали схемалар қурилган ва аниқлик баҳолари олинган;

умумлаштирилган ечимларга эга цилиндрлик ва сферик симметрияли акустик тенгламалари учун янги марказлашган айирмали схемалар қурилган ва уларнинг яқинлашиш тезлиги баҳоланган;

суюқликларнинг ички тўлқинлар ҳаракати, ёпишқоқ-эластик муҳит деформацияси ҳаракати, гравитацион-гироскопик суюқлик тўлқинлари ҳаракати тенгламалари учун вақт ва фазо бўйича юқори аниқликдаги янги айирмали схемалар қурилган ва улар учун аниқлик баҳолари олинган;

акустик, тезлик-кучланишли эластикликнинг динамик назарияси масалалари учун қурилган марказлашган айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятлари аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Ностационар чегаравий масалаларни ечишнинг янги сонли усуллари қурилган, уларнинг янги априор баҳолари олинган ва туташ муҳитлар механикасининг ностационар чегаравий масалаларини сонли ечишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги олинган натижалар асосида туташ муҳитлар механикасининг ностационар чегаравий масалаларини сонли ечиш бўйича ҳисоблаш экспериментлари ўтказилганлиги ва математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти биринчи ва иккинчи тартибли ностационар тенгламалар учун Коши абстракт масаласининг юқори аниқликка эга айирмали схемалари назариясини асослаш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти кўп ўлчамли тўғри ва тескари, чизиқли ва ночизиқли ностационар тенгламалар учун фазо ва вақт бўйича юқори аниқликдаги сонли ечиш схемаларини қуришда, газ динамикаси, фильтрация, биохимия ва экология масалаларини сонли ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Параболик ва гиперболик типдаги ностационар тенгламалар учун чекли айирмалар ва чекли элементлар усулларига асосланган юқори аниқликдаги сонли ечиш схемаларини қуришга оид олинган илмий натижалар асосида:

хусусий ҳосилали параболик ва гиперболик тенгламалар учун қурилган юқори аниқликдаги айирмали схемаларан 1.3.1.3. рақамли «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земле» лойиҳасида тўғри ва тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Россия Фанлар академияси Сибир бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2019 йил 26 апрелдаги 15301.03-221-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ғовак-эластик муҳит ҳаракати масалаларини ечиш имконини берган;

ностационар жараёнларни сонли моделлаштириш учун қурилган юқори аниқликдаги айирмали схемалар 0118РК01304 рақамли «Рациональное использование природных ресурсов, в том числе водных ресурсов, геологии, переработка, новые материалы и технологии, безопасные изделия и конструкции» лойиҳасида геомеханиканинг ностационар масалаларини сонли ечишда фойдаланилган (Қозоғистон, С. Баишев номидаги Актобе университетининг 2019 йил 5 майдаги 102-10/2159-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши саноат чиқиндиларига эга ғовак муҳитлардаги жисмларни конвектив қуритиш жараёнида ғовак муҳит ҳаракати масалаларини ечиш имконини берган;

икки ўлчамли параболик тенгламалар учун қурилган юқори аниқликдаги айирмали схемалар 0118РК01304 рақамли «Рациональное использование природных ресурсов, в том числе водных ресурсов, геологии, переработка, новые материалы и технологии, безопасные изделия и конструкции» лойиҳасида иссиқлик ўтказувчанлик масалаларини ечишда фойдаланилган (Қозоғистон, С. Баишев номидаги Актобе университетининг 2019 йил 5 майдаги 102-10/2159-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши техноген чиқиндиларни қайта ишлаш жараёнининг самарадорлигини ва сифатини ошириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 16 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 70 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 15 та илмий мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 9 таси республика илмий журналларида нашр этилган.

Диссертация тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркибига кўра кириш, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 300 бет бўлиб, ишнинг асосий матни 192 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯ ИШИНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий–тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Ностационар тенгламалар системаларига юқори аниқликдаги айирмали схемалар»** деб номланувчи биринчи боби биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системалари учун Коши абстракт масаласига тўртинчи ва олтинчи тартибли аниқликдаги янги икки ёки уч параметрли айирмали схемалар оиласи қурилган. Схемада параметрлар мавжудлиги схеманинг аниқлигини ва рўёбга чиқариш алгоритмини оптималлаштириш имконини берган. Тегишли априор баҳолар олинган ва улар асосида мазкур схемаларнинг турғунлик тезлиги ва аниқлик теоремалари исботланган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида айрим белгилар ва ёрдамчи фикрлар келтирилган.

Иккинчи параграфда қуйидаги Коши абстракт масаласи қаралган:

$$D\ddot{u} + Au = f, \quad u(0) = u_0 \quad (0 \le t \le T). \tag{1}$$

Бу ерда, A, D – H дан H га ҳаракатланувчи t га боғлиқ эмас операторлар, $A^* = A > 0$, $D^* = D > 0$, $\forall t \ge 0$, $u = u(t) \in H$, $f = f(t) \in H$, H – гильберт фазоси. Қуйидаги

$$y(t) = y^n \varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n \varphi_{10}^n(t) + y^{n+1} \varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1} \varphi_{11}^n(t), \tag{2}$$

полином асосида, бу ерда,

$$y^n = y(t_n), \quad \dot{y}^n = dy(t_n)/dt, \quad \varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$\varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2), \quad \xi = (t - t_n)/\tau,$$

уч параметрли айирмали схемалар қурилган:

$$Dy_t - \tau^2 A\dot{y}_t/12 + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma D\dot{y}_t + \alpha Ay_t + \beta A\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \tag{3}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt, \; \varphi_2 = \frac{12}{\tau^3}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\left(s_1\vartheta_2^{(1)} + s_2\vartheta_2^{(3)}\right)dt, \quad \vartheta_1(t) = s_1\varphi_{01} + (1 - s_1)\varphi_{00},$$

$$\vartheta_2(t) = s_2\varphi_{11} + (1 - s_2)\varphi_{10}, \quad s_1 = 15\gamma - 35\alpha/3, \quad s_2 = 140\gamma - 350\alpha/3.$$

(3)–схемаларнинг бошланғич маълумотлар бўйича барқарорлигини тадқиқ қилиш учун унинг каноник шакли

$$\mathrm{B}Y_t + \mathrm{A}Y = 0, \quad Y = (y, \dot{y}) \tag{4}$$

ёзилган $(f(t)=0)$ ва А.А. Самарскийнинг икки қатламли айирмали схемалар барқарорлигини тадқиқ қилиш теоремаси асосида қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 1. Фараз қилайлик $A^*=A>0,\ D^*=D>0$ бўлсин ва бундан ташқари $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$ ҳамда $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma=O(\tau^2)$ шартлар бажарилсин. У ҳолда, агар $u(t)\in C^5[0,T]$ бўлса, (3) схема ечими (1) масала ечимига турғунлашади ва қуйидаги

$$\|y(t)-u(t)\|_A\le M\tau^3\max_t\left\|\frac{d^5u}{dt^5}\right\|_A,\ \|\dot y(t)-\dot u(t)\|_A\le M\tau^2\max_t\left\|\frac{d^5u}{dt^5}\right\|_A,\ \forall t\in[0,T]$$

аниқлик баҳолари ўринли бўлади.

Аниқликни ошириш учун (3) векторли схемаси қуйидаги

$$\overline{B}y_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2\overline{R}y_{\bar t t}+\overline{A}y=\overline{F},\ (\ y^0,y^1 - \text{берилган}) \tag{5}$$

уч қатламли схема шаклга келтирилган ва айирмали схемалар назариясининг уч қатламли айирмали схемалар барқарорлиги теоремаси асосида қуйидаги теорема олинган.

Теорема 2. Фараз қилайлик $A^*=A>0,\ D^*=D>0,\ AD=DA$ бўлсин ва бундан ташқари $\alpha>0,\ \ 0<\beta\le\alpha/(3\varepsilon),\ \ \gamma>0$, $\alpha,\beta,\gamma=O(\tau^2)$, $\overline{R}\ge((1+\varepsilon)/4)\overline{A}$ шартлар бажарилсин. Агар $u(x,t)\in C^6[0,T]$ бўлса, у ҳолда (3) схема ечими (1) масала ечимига турғунлашади ва $\forall t\in[0,T]$ учун

$$\|y(t)-u(t)\|_{A^2}\le M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}\right\|_{A^2},\ \|\dot y(t)-\dot u(t)\|_{A^2}\le M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}\right\|_{A^2}$$

аниқлик баҳолари ўринли бўлади.

1 ва 2 теоремалар (4) схемадаги А кососимметрик оператор ($A^*=-A$) ҳолати учун ҳам тўғри эканлиги исботланган.

Учинчи параграфда қуйидаги Коши абстракт масаласи қаралган

$$D\ddot u+Au=f,\quad t_0<t\le \mathrm{T},\ u(t_0)=u_0,\quad \dot u(t_0)=u_1. \tag{6}$$

Бу ерда A, D – H дан H га ҳаракатланувчи t га боғлиқ бўлмаган операторлар:

$$A^*=A>0,\ D^*=D>0;\ \forall\, t\ge 0,\ u=u(t),\ \ f=f(t)\in H;$$
$$\ddot u=d^2u/dt^2,\ \dot u=du/dt.$$

Мазкур параграфда (6) масала учун (2) полином (куб полиномларнинг чизиқли комбинацияси) асосида қуйидаги уч параметрли схемалар синфи қурилган:

$$D_\gamma\dot y_t+Ay^{(0.5)}=\varphi_1,\ D_\alpha y_t-D_\beta\dot y^{(0.5)}=\varphi_2,\ y^0=u_0,\ \dot y^0=u_1. \tag{7}$$

Бунда

$$y=y^n=y(t_n),\ \hat{y}=y^{n+1},\ D_\gamma=D-\gamma\tau^2A,\ D_\alpha=D-\alpha\tau^2A,\ D_\beta=D-\beta\tau^2A,$$

$$\varphi_1=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_1(\xi)d\xi,\quad \varphi_2=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_2(\xi)d\xi$$

$$\varphi_1=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_1(\xi)d\xi,\quad \varphi_2=\int_0^1 f(t_n+\tau\xi)\vartheta_2(\xi)d\xi,$$

$$\vartheta_1(\xi)=p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi)+p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi),\ \vartheta_2(\xi)=s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi)+s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi),\ \xi=(t-t_n)/\tau,$$

$$\vartheta_1^{(1)}(\xi)=1,\ \vartheta_1^{(2)}(\xi)=\xi^2-\xi,\ \vartheta_2^{(1)}(\xi)=\tau(\xi-1/2),\ \vartheta_2^{(2)}(\xi)=\tau\left(\xi^3-3\xi^2/2+\xi/2\right),$$

$$p_1=6-60\gamma,\ p_2=30-360\gamma,\ s_1=180\beta-40\alpha,\ s_2=1680\beta-280\alpha,$$

$\alpha,\ \beta,\gamma$ – тўртинчи тартибли аппроксимация шартига бўйсунувчи параметрлар: $\alpha+\gamma=\beta+1/6$.

$\alpha+\gamma=\beta+1/6$ шарт бажарилганда (7) схемасининг аппроксимация хатолиги ечимнинг етарлича силлиқлигида ($Au(t)\in C^4[0,T]$ ёки $u(t)\in C^6[0,T]$) тўртинчи тартибга эга бўлади.

A, D операторларнинг $AD=DA$ шарти тўғрисидаги фаразсиз ($AD\neq DA$) схеманинг турғунлиги исботланган ва схемаларни руёбга чиқаришнинг тежамкор алгоритми таклиф қилинган. Тегишли априор баҳолар олинган ва улар асосида қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3. Фараз қилайлик $D^*=D>0,\ A^*=A>0$ бўлсин. Бунда, агар $D-m\tau^2A\geq\varepsilon D,\ 0<\varepsilon<1,\ m=\max\{\alpha,\beta,\gamma\}$ шарт бажарилса ва схема параметрлари $\alpha+\gamma=\beta+1/6$ шартини қаноатландирса ва $u(t)\in C^6[0,T]$ бўлса, у ҳолда (7) схемасининг ечими (6) масаласининг ечимига турғунлашади ва унинг ечими учун

$$\|y(t)-u(t)\|_A\leq M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\|_A,\ \|\dot y(t)-\dot u(t)\|_D\leq M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\|_A,\ \forall t\in[0,T]$$

аниқлик баҳолари ўринли бўлади.

Агар $\alpha+\gamma=\beta+1/6$ шартдан ташқари $\beta+1/40=6\alpha\gamma$ шарт ҳам бажарилса, у ҳолда (7) синфидаги схемалар олтинчи тартибли аппроксимация хатолигига эга бўлиши исботланган.

Тўртинчи параграфда қуйидаги

$$D\ddot u+B\dot u+Au=f(t),\quad u(0)=u_0,\quad \dot u(0)=u_1,\quad 0\leq t\leq T. \tag{8}$$

иккинчи тартибли диссипацияли дифференциал тенгламаси учун чекли элементлар усули схемаси кўриб чиқилади. Бу ерда $A^*=A>0,\quad B^*=B\geq 0,$ $D^*=D>0$, H дан H га ҳаракатланувчи t га боғлиқ эмас чизиқли, доимий операторлар.

(8) масала учун (2) полином асосида

$$\begin{gathered}D_\gamma\dot y_t+By_t+Ay^{(0.5)}=\varphi_1,\ D_\alpha y_t-\tau^2\gamma B\dot y_t-D_\beta\dot y^{(0.5)}=\varphi_2,\\ y^0=u_0,\ \dot y^0=u_1\end{gathered} \tag{9}$$

векторли айирмали схемалар синфи қурилган ва

$$AD = DA, \quad AB = BA, \quad DB = BD\,,\ A^* = A > 0, \quad B^* = B \ge 0, \quad D^* = D > 0$$

шартлари бажарилганда тегишли априор баҳолари олинган.

(9) схема турғунлигини тадқиқ қилиш учун, у y ва $\dot{y}$ учун скаляр уч қатламли схема кўринишида ёзилади:

$$\widetilde{D}y_{\bar{t}t} + \widetilde{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \widetilde{A}y = \widetilde{\varphi}_1, \qquad \overline{D}\dot{y}_{\bar{t}t} + \overline{B}\dot{y}_{\overset{\circ}{t}} + \overline{A}\dot{y} = \widetilde{\varphi}_2\ ,$$

бунда $\widetilde{D}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}$, $\overline{D}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ айрим A, B, D операторларининг йиғиндиси ва кўпайтмаси, $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$ –ўнг томони. Масалан,

$$\widetilde{D} = D_\alpha + \tau^2 BD_\gamma^{-1}B/12 + \tau^2 D_\beta D_\gamma^{-1}A/4.$$

Айирмали схемалар назариясининг уч қатламли айирмали схемалар барқарорлиги теоремаси асосида қуйидаги теорема олинган.

Теорема 4. Фараз қилайлик $A^* = A > 0$, $B^* = B \ge 0$, $D^* = D > 0$, $AD = DA$, $AB = BA$, $DB = BD$ бўлсин ва $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$, $D_\omega = D - \omega\tau^2 A \ge \delta D$, $0 < \delta < 1$, $\omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4]$ шартлари бажарилсин. У ҳолда агар $u(t_n) \in C^6[0,T]$ бўлса, (9) схема ечими (8) масала ечимига турғунлашади ва

$$\|y(t) - u(t)\|_A \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|, \ \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|, \forall t \in [0,T]$$

аниқлик баҳолари ўринли бўлади.

Бу бобда қурилган янги схемалар қатор афзалликларга эга:

- схемалар юқори аниқликка эга (иккидан кўп); олинган ечимдан ташқари бир вақтда унинг ҳосиласида (тезлиги) шу аниқликда топилади. Амалий масалаларда, масалан, туташ муҳитлардаги тўлқин ҳаракатларида бу ҳосила ҳаракатнинг тезлигини англатади.

- (2) турдаги интерполяцион формуладан фойдаланиб, зарур бўлса, ечимни ва унинг ҳосиласини ҳар қандай вақтда олиш мумкин;

- схема икки қатламли бўлганлиги туфайли аниқликни йўқотмасдан вақт бўйича ўзгармали қадам танлаш мумкин;

- схема шартли турғунли бўлиб, чекли айирмалар усули схемаларга нисбатан 4 маротаба кўпроқ арифметик амаллар талаб қилади, лекин бу схема муайян бир аниқликни олиш учун вақт бўйича катта қадамларни танлаб олиш имконини беради.

Диссертациянинг «**Умумлаштирилган ечимли биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун айирмали схемалар қуриш ва тадқиқ қилиш**» деб номланган иккинчи боби турли чегаравий шартларга эга тезлик–кучланишли эластикликнинг динамик назарияси ва акустика тенгламалар системалари учун марказлашган айирмали схемалар қуриш ва тадқиқ қилишга бағишланган. Кососимметрик операторли икки қатламли операторли–айирмали схемалар учун априор баҳолар олинган. Ноаниқ айирмали схемалар асосида тўр одимига чек қўймайдиган, тежамкор айирмали схемалар қурилган. Тегишли априор баҳолар олинган ва улар асосида схемаларнинг аниқлик баҳолари олинган. Бундан ташқари, интерполяцион фазода аниқликнинг мувофиқлаштирилган баҳолари олинган.

Қуйидагиларни киритайлик. Маълумки,

$$E_{h,\tau}^{(s)}(t;z) \le M(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1})\|u\|_{k,Q_T}$$

баҳоси гиперболик типдаги тенгламалар ечимининг уларга қурилган айирмали схемалар ечими силлиқлилиги билан мувофиқлаштирилган (келишилган) аниқлик баҳоси дейилади. Бу ерда $E_{h,\tau}^{(s)}(t;z)$ s-даражали энергетик норма, $\|\cdot\|_{k,Q_T}$ - $W_2^k(Q_T)$ Соболев фазоси нормаси, $Q_T = \{(0,T)\times\Omega\}$, z – сонли усул ҳатолиги.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида қуйидаги

$$\overline{B}Y_t + AY^{(0.5)} = \Phi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad Y_0 \text{ берилган,} \tag{10}$$

шаклдаги икки қатламли операторли–айирмали схемаси кўриб чиқилган. Бунда $\overline{B} = B - 0.5\tau A - H$ дан H га ҳаракатланувчи t га боғлиқ эмас чизиқли, доимий оператор, $Y^{(0.5)} = (Y(t+\tau) + Y(t))/2$.

Қуйидаги шартларни киритамиз.

Шарт 1 (У1). Фараз қилайлик $\overline{B}^* = \overline{B} \ge \varepsilon E$, ε >0, $A^* = -A$ бўлсин.

Шарт 2 (У2). Фараз қилайлик $\overline{B} = D + 0.5\tau G$, $GD^{-1}A = -AD^{-1}G$, D чекланган оператор, $D^* = D > 0$ бўлсин.

Шарт 3 (У3). Фараз қилайлик $D - 0.5\tau G \ge \varepsilon E$ бўлсин.

Шарт 4 (У4). Фараз қилайлик $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{p} D\Phi_\alpha$, $\Phi_\alpha = A_\alpha \pi_\alpha$ ва

$$\sup_{\|Y\|\ne 0} \frac{\|A_\alpha^* AY\|}{\|AD^{-1}A^*Y\|} \le M, \ \forall\, \alpha = \overline{1,p} \text{ бўлсин.}$$

Қуйидаги марказий теорема олинган.

Теорема 5. Фараз қилайлик У1–У4 шартлари бажарилган бўлсин. У ҳолда (10) айирмали схема бошланғич маълумотлар ва ўнг томон бўйича $H^{-1}(\omega)$ да барқарор бўлади ва унинг ечими учун

$$\|Y(t_1)\|_{H^{-1}} \le M(\|Y(0)\|_{H^{-1}}^2 + \sum_{t'=0}^{t_1-\tau} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\pi_\alpha(t')\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

априор баҳо ўринли бўлади. Бу ерда $\|Y\|_{H^{-1}}$ – баъзи бир заиф норма.

Иккинчи параграф акустиканинг икки ўлчовли

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a\frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1(x,t), \ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a\frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2(x,t), \ \frac{\partial p}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + f_3(x,t) \tag{11}$$

тенгламалар системаси учун марказлашган айирмали схемаларни қуриш ва тадқиқ қилишга бағишланган.

Фазо бўйича айирмали схемаларни марказлаштириш шарти кўриб чиқилган, у тугунлар ўзаро жойлашувининг тўртта ҳолатини қаноатлантиради. Тўр тугунларини шундай усулда танлаш орқали айирмали схемаларнинг марказлашувига эришилади ва у схемалар аниқлигининг зарур баҳоларини олиш имконини беради. Тўр тугунларининг шундай усулда танланиши чегаравий шартлар билан биргаликда бутун фазо бўйича тўрни тузишни кўрсатиб беради.

Учта ўзгарувчига эга функция учун тегишли ўрталаштирувчи операторни танлаб оламиз, масалан,

$$S^{x_1}u = S^{x_1}u(\cdot, x_2, t) = \frac{1}{h_1}\int_{x_{i_1}}^{x_{i_1+1}} u(\xi_1, x_2, t)\,d\xi_1 \quad \text{ва ҳ.о.}$$

Уларни (11) системаси тенгламаларининг ҳар бирига қўллаб ва интегралларни ўрта тўғрибурчаклар формуласи асосида аппроксимациялаш орқали ҳар хил чегаравий шартларда тегишли марказлашган айирмали схемалар олинган. Масалан, (11) тенгламаларининг аралаш чегаравий шартлари учун марказлашган схема қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\vartheta_{1,t} = a\bar{q}_{\bar{x}_1} + \varphi_1, \quad \vartheta_{2,t} = a\bar{q}_{x_2} + \varphi_2, \quad \bar{q}_t = a(\hat{\vartheta}_{1,x_1} + \hat{\vartheta}_{2,\bar{x}_2}) + \hat{\varphi}_3. \qquad (12)$$

Бу ерда $\vartheta_1 = \vartheta_1(x_1, x_2, t)$, $\vartheta_2 = \vartheta_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)$, $\bar{q} = q(\bar{x}_1, x_2, \bar{t})$, $\bar{x}_1 \in \widetilde{\omega}_1^*$, $x_2 \in \bar{\omega}_2$, $x_1 \in \widetilde{\omega}_1$, $\bar{x}_2 \in \bar{\omega}_2^*$, $t \in \bar{\omega}_\tau, \bar{t} \in \bar{\omega}_\tau^*$, $\varphi_1 = S^t \bar{S}^{x_1} \bar{S}^{x_2} f_1$, $\varphi_2 = S^t S^{x_1} S^{x_2} f_2$, $\varphi_3 = \bar{S}^t S^{x_1} \bar{S}^{x_2} f_3$.

(12) системасини

$$\vartheta_1^{\,0} = \bar{S}^{x_1}\bar{S}^{x_2} u_1^{\,0}(x), \quad \vartheta_2^{\,0} = S^{x_1} S^{x_2} u_2^{\,0}(x), \qquad (13)$$

$$q^0 = S^{x_1}\bar{S}^{x_2} p^0(x), \quad \frac{\bar{q}^0 - q^0}{0.5\tau} = a(\vartheta^0_{1,x_1} + \vartheta^0_{2,\bar{x}_2}) + \varphi_3^{\,0}$$

бошланғич ва

$$\begin{gathered} \vartheta_1(0, x_2, t) = \bar{S}^t \bar{S}^{x_2} \mu^{(-1)}, \quad q(l_1, x_2, t) = S^t \bar{S}^{x_2} \pi^{(+1)}, \\ q(x_1, 0, \bar{t}) = S^t \bar{S}^{x_1} \pi^{(-2)}, \quad q(x_1, l_2, \bar{t}) = S^t \bar{S}^{x_1} \pi^{(+2)} \end{gathered} \qquad (14)$$

чегаравий шартлар билан тўлиқтирамиз.

Шунга ўхшаш тарзда бошқа чегаравий шартларга эга масалалар учун марказлашган айирмали схемалар қурилган.

Бундай марказлашган айирмали схемалардан ташқари ўртачаланган (усредненные) айирмали схемалар ҳам қурилган ва аниқлик баҳолари олинган.

Махсус тўрли H_1, H_2, H_3 фазоларини танлаб (чегаравий шартларга боғлиқ) (12)–(14) схемасининг ҳатолиги қуйидаги икки қатламли оператор–айирмали схема шаклида ёзилади

$$\bar{B} Z_t + A Z^{(0.5)} = \psi, \quad Z^0 = 0. \qquad (15)$$

Бу ерда, $\bar{z}_3^0 = -0.5\tau(A_1^*\eta_3^0 + A_2^*\eta_4^0)$, $\psi = (A_1\bar{\eta}_1, A_2\bar{\eta}_2, B_1\hat{\eta}_3 + B_2\hat{\eta}_4)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & -A_2 \\ A_1^* & A_2^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 & \tau A_1/2 \\ 0 & E & \tau A_2/2 \\ \tau A_1^*/2 & \tau A_2^*/2 & E \end{pmatrix},$$

$A_\alpha : H_3 \to H_\alpha$, $B_\alpha : H_\alpha \to H_3$ ва улар шундай аниқланган:

$$A_1 z = a z_{\bar{x}_1}, \; A_2 z = a z_{x_2}, \; B_1 z = a z_{x_1}, \; B_2 z = a z_{\bar{x}_2}.$$

2.1 параграфнинг маълумотларига асосланиб $\|\cdot\|_H$-оддий ва $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ -заиф нормалда тегишли априор баҳолар олинган ва аниқлик теоремалари исботланган. Масалан, қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 6. Фараз қилайлик $U = (u_1, u_2, p) \in W_2^k(Q_T)$ бўлсин ва

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \le (1-\varepsilon)^2, \quad \gamma_\alpha = |a|\tau / h_\alpha, \quad \alpha = 1{,}2 \quad , \quad 0 < \varepsilon < 1. \qquad (16)$$

шартлар бажарилсин. У ҳолда, (12)–(14) айирмали схемаси ечими $H^s(\omega)$ фазосида дастлабки масала ечимига $O(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1})$ тезлигида турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли бўлади:

$$\| Z(t_1) \|_{(s)} \le M(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1}) \| U \|_{k,Q_T}, \quad 1 < k - s \le 3, \; s = -1{,}0, \; k = 1{,}2{,}3.$$

Бунда, $|h|^\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha$, $\|\cdot\|_{(-1)} = \|\cdot\|_{H^{-1}}$, $\|\cdot\|_{(0)} = \|\cdot\|_H$.

Бундан ташқари интерполяцион фазода (12)–(14) схемасининг турғунлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ҳам олинган.

Теорема 7. Фараз қилайлик $U = (u_1, u_2, p) \in W_2^{æ}(Q_T)$ бўлсин ва (16) шартлар бажарилсин. У ҳолда, (12)–(14) айирмали схемаси ечими $H^\theta(\omega)$ фазосида дастлабки масала ечимига $O(\tau^{æ\text{-}\theta\text{-}1} + |h|^{æ\text{-}\theta\text{-}1})$ тезлигида турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли бўлади:

$$\|Z\|_\theta \le M(\tau^{æ\text{-}\theta\text{-}1} + |h|^{æ\text{-}\theta\text{-}1}) \|U\|_{æ,Q_T}, \; æ \in [1,3], \; \theta \in [-1,0], \; 2 \le æ - \theta \le 3.$$

Бунда, $|h|^\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha$, $\|\cdot\|_{(-1)} = \|\cdot\|_{H^{-1}}$, $\|\cdot\|_{(0)} = \|\cdot\|_H$.

Учинчи параграфда қуйидаги

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha, \; \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2) \sum_{\gamma=1}^{2} \frac{\partial \vartheta_\gamma}{\partial x_\gamma} + c_2^2 \left(\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad (17)$$

тезлик–кучланишли эластикликнинг динамик назарияси тенгламалар системасининг

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha^0(x), \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0 \qquad (18)$$

бошланғич шарти ва

$$\vartheta_\beta = \mu_\beta^{(-\alpha)}, \quad x_\alpha = 0; \quad \vartheta_\beta = \mu_\beta^{(+\alpha)}, \quad x_\alpha = l_\alpha; \quad \alpha, \beta = 1{,}2, \quad t \in (0, T] \quad (19)$$

чегаравий шартлар билан берилган масаласи $(\varGamma_1 = \varGamma, \; \varGamma_2 = \emptyset)$ кўриб чиқилган.

2.2 параграфидаги ҳар ҳил чегаравий масалалар учун айирмали схемани қуриш техникасидан фойдаланиб, (17)–(19) масалалар учун қуйидаги марказлашган айирмали схема қурилган

$$y_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{2} (D^{-}_{3-\beta}\, \overline{æ}_{\alpha\beta})_{\bar{x}_\beta} + \varphi_\alpha,$$

$$\overline{æ}_{\alpha\beta,t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2) \sum_{\gamma=1}^{2} (D^{+}_{3-\gamma}\, \hat{y}_\gamma)_{x_\gamma} + c_2^2 \left[(D^{+}_{3-\gamma}\, \hat{y}_\beta)_{x_\alpha} + (D^{+}_{3-\beta}\, \hat{y}_\alpha)_{x_\beta} \right], \tag{20}$$

$$y_\alpha^0 = \bar{S}^{x_1} \bar{S}^{x_2} \vartheta_\alpha^0(x) \quad x_\alpha \in \overline{\omega}_\alpha, \quad æ^0_{\alpha\beta} = S^{x_1} S^{x_2} \sigma^0_{\alpha\beta}(x) \quad x_\alpha \in \omega^*_\alpha \tag{21}$$

$$\frac{\overline{æ}^0_{\alpha\beta} - æ^0_{\alpha\beta}}{\tau/2} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2) \sum_{\gamma=1}^{2} (D^{+}_{3-\gamma} y_\gamma)^{\,0}_{x_\gamma} + c_2^2 \left[(D^{+}_{3-\alpha} y_\beta)^{\,0}_{x_\alpha} + (D^{+}_{3-\beta} y_\alpha)^{\,0}_{x_\beta} \right]$$

$$y_\beta = \bar{S}^t \bar{S}^{x_{3-\alpha}} \mu_\beta^{(-\alpha)} \quad x_\alpha = 0, \quad y_\beta = \bar{S}^t \bar{S}^{x_{3-\alpha}} \mu_\beta^{(+\alpha)} \quad x_\alpha = l_\alpha. \tag{22}$$

(20)–(22) схемаси аниқ схемалар синфига киради: (20) нинг дастлабки иккита тенгламасидан $\hat{y}_\alpha$ ҳисобланади ва кейинчалик қолган тенгламалардан $\hat{\overline{æ}}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1{,}2$ топилади.

Схеманинг ҳатолигини тадқиқ қилиш учун махсус тўрли фазоларни танлаб (20)–(22) схемаси икки қатламли оператор–айирмали схема шаклида ёзилган. Кейинчалик 2.1 параграфнинг маълумотларига асосланиб тегишли априор баҳолар олинган ва мазкур теоремалар асосида схеманинг турғунлиги тўғрисидаги теорема исботланган. Интерполяцион фазода схеманинг аниқлиги ҳақидаги теорема олинган.

Бу натижалар тезлик–кучланишли эластикликнинг динамик назарияси тенгламалар системасининг учинчи чегаравий масаласи учун ҳам олинган. Схема ечимининг априор баҳолари олинган ва схеманинг турғунлик тезлиги исботланган. Аниқлик баҳолари олинган. Бундан ташқари, интерполяцион фазода аниқликнинг мувофиқлаштирилган (келишилган) баҳолари ҳам олинган.

Қуйидаги тежамкор факторизацияланган марказлашган айирмали схема қурилган ва у

$$(E + \sigma c_1^2 \tau^2 R_1)(E + \sigma c_1^2 \tau^2 R_2) y_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{2} A_\beta \overline{æ}_{\alpha\beta} + \varphi_\alpha,$$

$$\overline{æ}_{\alpha\beta,t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2) \sum_{\gamma=1}^{2} B_\gamma \hat{y}_\gamma + c_2^2 (B_\alpha \hat{y}_\beta + B_\beta \hat{y}_\alpha)$$

тезлик–кучланишли формасида тегишли бошланғич ва чегаравий шартлари билан ёзилган. Тегишли априор баҳолар олинган ва улар асосида аниқлик баҳолари ҳам олинган. Интерполяцион фазода аниқликнинг мувофиқлаштирилган баҳоларини олиш йўллари кўрсатилган.

Тўртинчи параграфда эгри чизиқли координаталарда берилган акустика тенгламалари системаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial p}{\partial r} = f_1(r,t), \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{a}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}(r^m u) = f_2(r,t),$$
$$(r,t) \in Q_T = \{0 < r < 1,\, 0 < t \le T\}$$

учун бошланғич шартлари $u(r,0) = u_0(r),\quad p(r,0) = p_0(r)$ ва чегаравий шартлари $u(0,t) = \mu_1(t),\quad p(1,t) = \mu_2(t)$ билан берилган масалага қуйидаги марказлашган айирмали схема қурилган:

$$\vartheta_t + a\bar{q}_{\bar{r}} = \varphi_1, \quad \bar{q}_t + \frac{a}{k_i^m}(r_i^m \hat{\vartheta})_r = \hat{\varphi}_2. \tag{23}$$

Бунда, $u(r,t)$ функциясини $\vartheta = \vartheta_i^n = \vartheta(r_i, t_n)$ ва $p(r,t)$ функциясини $\bar{q} = \bar{q}_i^m = q(\bar{r}_i, \bar{t}_n)$ – функцияси аппроксимациялайди,

$$\varphi_1 = \frac{1}{\bar{h}_i\tau}\iint_{l_1} f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad \hat{\varphi}_2 = \frac{1}{k_i^m h_{i+1}\tau}\iint_{l_2} \xi^m f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

$m = 0, 1, 2$ қийматлари мос равишда фазо, цилиндрик ва сферали симметрияга жавоб беради. (23) тенгламасига

$$\vartheta^0 = \frac{1}{\bar{h}_i}\int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} u_0(\xi)d\xi, \; q^0 = \frac{1}{k_i^m h_{i+1}}\int_{r_i}^{r_{i+1}} \xi^m p_0(\xi)d\xi, \; \frac{\bar{q}^0 - q^0}{0.5\tau} + \frac{a}{k_i^m}(r_i^m \vartheta)_r^0 = \varphi_2^0 \tag{24}$$

бошланғич шартлари ва

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\tau}\int_{\bar{t}_{n-1}}^{\bar{t}_n} u_0(\eta)d\eta, \quad \bar{q}_N = \frac{1}{\tau}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{p}_N(\eta)d\eta. \tag{25}$$

чегаравий шартлари қўшилади.

Қуйидаги теорема олинган.

Теорема 8. Фараз қилайлик $U = (u,p) \in W_2^{æ}(Q_T)$ бўлсин ва

$$\gamma \le 1 - \varepsilon, \quad (\gamma = \frac{|a|\tau}{\tilde{h}_i}), \quad \tilde{h}_i = \min_i(h_i, \bar{h}_i). \tag{26}$$

барқарорлик шарти бажарилсин. У ҳолда (23)–(25) айирмали схемасининг ечими, k_i^m ва $r_i, \bar{r}_i$ мос равишда танлов олинганда, дастлабки масаланинг аниқ ечимига $O(\tau^{æ\text{-}\theta\text{-}1} + h^{æ\text{-}\theta\text{-}1})$ тезликда турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли бўлади:

$$\|Z\|_\theta \le M(\tau^{æ\text{-}\theta\text{-}1} + h^{æ\text{-}\theta\text{-}1})\|U\|_{æ,Q_T}, \; æ \in [1,3], \; \theta \in [-1,0], \; 2 \le æ - \theta \le 3.$$

Бундан ташқари, ω_h тўри тугунини ҳисоблаш алгоритми кўрсатилган.

Диссертациянинг «**Дифференциал тенгламалар ечими силлиқлигига минимал талабда юқори аниқликдаги айирмали схемалар**» деб номланувчи учинчи бобида иккинчи тартибли параболик ва гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалалар кўриб чиқилган. Бундан ташқари, ностационар тенгламалар учун (2 даражадан юқори бўлган аралаш ҳосилали) турли чегаравий масалалар кўриб чиқилган. Хусусан, юмшоқ эластик муҳит ҳаракат тенгламаси (Фохта тенгламаси), суюқликларнинг гравитацион тўлқинлари ҳаракати (Буссинеск тенгламаси) ва гравитацион–гироскопик суюқлик тўлқинлари ҳаракати тенгламалари кўриб чиқилган. Чекли элементлар усули асосида юқори тартибли аниқликдаги айирмали схемалар қурилган ва аниқлик баҳолари олинган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида хусусий ҳосилали параболик тенгламага вақт ва фазо ўзгарувчилари бўйича чекли элементлар усул асосида айирмали схемалар қурилган ва уларнинг аниқлик баҳолари олинган.

Қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T,\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\Omega}, \qquad (27)$$
$$u = 0,\ x \in \Gamma = \partial\Omega,\ t \in [0,T],$$

масаласи кўриб чиқилган. Бунда

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q(x)u,\ k_1 \ge k(x) \ge k_0 > 0,\ k_1 \ge q(x) \ge 0,\ p = 1,2,\ldots.$$

Фазо бўйича ўзгарувчиларни чекли элементлар усули асосида аппроксимациялаш орқали (27) масаласига вақт бўйича қуйидаги Коши дифференциал масаласи қўйилади:

$$D\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \qquad (28)$$

бунда $D, A : H_h \to H_h \subset H$; $H_h -$ H фазосининг чекли ўлчовли фазоси, D, A – H_h дан H_h га ҳаракатланувчи операторлар (уларга мос равишда M –масса ва G–қаттиқлик матрицалари тўғри келади).

(3) векторли схема ечими (27) дастлабки масаласининг аниқ ечимига турғунлашишининг қуйидаги теоремаси исботланган.

Теорема 9. Фараз қилайлик $A^* = A > 0,\ D^* = D > 0$ бўлсин ва (3) схемасининг $\alpha = \tau^2/12,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0$ барқарорлик шартлари бажарилсин. У ҳолда, агар $u(x,t) \in L_2\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\}$, бўлса, (3) схемасининг ечими (27) масаласининг ечимига турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли бўлади:

$$\sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')]dt' \right\|_1 \le$$

$$\le M\left\{\tau^4\left(\|u(x,0)\|_1+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right)+h^k\left(\|u(x,0)\|_k+\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'}\right)\right\}.$$

Иккинчи параграфда ўхшаш натижалар хусусий ҳосилали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Lu+f(x,t),\ (x,t)\in Q_T,\quad u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),$$

$$u=0,\quad x\in\Gamma=\partial\Omega,\quad t\in[0,T]$$

гиперболик тенгламаси учун олинган. Бу ерда,

$$Lu=\sum_{m=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right),\ k_1\ge k(x)\ge k_0>0,\ x\in\Omega\subset R^p,\ p=1,2...$$

эллиптик оператор.

Учинчи параграф Фохта тенгламасининг (туташ муҳитларда тўлқинларнинг тебраниши ва тарқалиши процессларининг математик модели) бошланғич–чегаравий масалалари учун қурилган усулларнинг аниқлигини ўрганишга бағишланган.

Қуйидаги

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\delta\frac{\partial}{\partial t}(Lu)=Lu+f(x,t),\ (x,t)\in Q_T=\{x\in\Omega,t\in(0,T]\},\\ u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\quad u=0,\quad x\in\Gamma=\partial\Omega,\quad t\in[0,T]\end{gathered}\tag{29}$$

масаласи кўриб чиқилган. Бу ерда L – эллиптик оператор, $\delta>0$ дисперсияни характерловчи сонли параметр.

(29) масаласининг фазо бўйича ўзгарувчиларни чекли элементлар методи асосида аппроксимациялаш орқали вақт бўйича қуйидаги Коши абстракт масаласига эга бўламиз:

$$D\frac{d^2u_h(t)}{dt^2}+B\frac{du_h(t)}{dt}+Au_h(t)=f_h(t),\quad u_h(0)=u_{0,h},\quad \frac{du_h}{dt}(x,0)=u_{1,h}.\tag{30}$$

Бу ерда, D, B, A операторлари H_h дан H_h га ҳаракатланади: $D=M$, $B=\delta G$, $A=G$; $M=\left((\varphi_i,\varphi_j)\right)_{i,j=1}^N$ – H_h фазо ости координата системасининг масса матрицаси; $G=\left(a(\varphi_i,\varphi_j)\right)_{i,j=1}^N$– H_h да Lu операторига жавоб берадиган қаттиқлиқ матрицаси. Операторлар $D>0,\ B>0,\ \mathrm{A}>0$.

Дастлабки дифференциал масаланинг ечимига анча паст силлиқни талаб қилувчи навбатдаги теорема исботланган.

Теорема 10. Фараз қилайлик (30) масаласининг операторлари $A^*=A>0$, $B^*=B\ge 0$, $D^*=D>0$, $AD=DA,\ AB=BA,\ DB=BD$ бўлсин ва қуйидаги

$$D_\omega=D-\omega\tau^2A\ge lD,\ 0<l<1,\ \omega=\max[\alpha,\beta,\gamma,1/4]\ ,\ \alpha+\gamma=\beta+1/6$$

барқарорлик шартлари бажарилсин. У ҳолда, агар $u(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T]; W_2^2(\Omega)\right\}$ бўлса, (9) схема ечими (29) масаласининг ечимига турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли булади:

$$\left\|u_h(x,t)-y(x,t)\right\|_0+\sqrt{\delta\int_0^t\left\|u_h(x,t')-y(x,t')\right\|_1^2 dt'}+\left\|\int_0^t\left[u_h(x,t')-y(x,t')\right]dt'\right\|_1 \le$$

$$\le M\left\{\tau^3\left(\sqrt{(1+\delta)}\max_t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2+\sqrt{(2+\delta)\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right)+\right.$$

$$\left.+h^k\sqrt{(1+\delta)\int_0^t\left\|u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}\right\} \quad \forall t\in[0,T],\ M=M(k_0,k_1,T).$$

Тўртинчи параграфда ностационар ички тўлқинлар назариясининг чизиқли масалаларини ечиш учун чекли элементлар усули схемаси қурилган ва тадқиқ қилинган. Бу ерда стратификацияланган суюқликларда тарқаладиган ички тўлқинлар ҳаракатининг қуйидаги

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(L_1 u)+L_2 u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T=\{x\in\Omega, t\in(0,T]\},\\ u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\quad u=0,\quad x\in\Gamma=\partial\Omega,\quad t\in[0,T]\end{gathered} \tag{31}$$

масаласи кўриб чиқилган.

Бу ерда L_1, L_2 – эллиптик операторлар:

$$L_\alpha u=\sum_{m=1}^{p_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k_m^\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)-q^\alpha(x)u,\quad x\in\Omega\subset R^{p_\alpha},\ p_\alpha=1,2,...,$$

$$0<k_0\le k_m^1(x)\le k_1,\ 0\le k_0\le k_m^2(x)\le k_1,\ q^\alpha(x)\ge 0,\ \alpha=1,2\ .$$

Қайд қилиш керакки, L_1, L_2 операторларнинг ўлчовлари турлича бўлиши мумкин ($p_1\ne p_2$), L_1- кучли эллиптик оператор, L_2 эса x_m ўзгарувчилари бўйича барча иккинчи тартибли хосилаларни ўз ичига ола олмайдиган айнимали оператор бўлиши мумкин. Масалан, $p=2$ маъноси учун: $L_1 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $L_2 u=\omega_0^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, бунда ω_0^2 – Вяйсял–Брент частотаси квадрати.

(31) масаласининг фазо бўйича ўзгарувчиларни чекли элементлар усули асосида аппроксимациялаш орқали вақт бўйича қуйидаги Коши абстракт масаласига эга бўламиз:

$$D\frac{d^2u_h(t)}{dt^2}+Au_h(t)=f_h(t),\ u_h(0)=u_{0,h},\ \frac{du_h}{dt}(0)=u_{1,h}. \tag{32}$$

Бунда $D, A : H_h \to H_h$.

Мазкур масала учун ҳам чекли элементлар усули вақт ўзгарувчисига қўлланилган. Кучли ва кучсиз нормаларда тегишли теоремалар олинган. Масалан, қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 11. Фараз қилайлик (32) масаласининг операторлари $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$ бўлсин ва қуйидаги $D - m\tau^2 A \ge \varepsilon D,$, $0 < \varepsilon < 1,\ m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$ барқарорлик шартлари бажарилсин. У ҳолда агар $u(x,t) \in L_2([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega))$, $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\}$ бўлса, (7) схема ечими (31) масаласининг ечимига турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси уринли бўлади:

$$\|u(x,t) - y(x,t)\|_1 + \left\| \int_0^s [u(x,t') - y(x,t')]dt' \right\|_1 \le$$

$$\le M\left\{ \tau^3 \left(\max_t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \right\|_2 + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + h^k \left(\max_t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right\|_{k+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t') \right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\} \quad \forall t \in [0,T],\ M = M(k_0, k_1, k_2, T) > 0 \cdot$$

Бешинчи параграфда суюқликларнинг гравитацион–гироскопик тўлқин ҳаракатининг

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Delta_3 u - \rho^2 u\right] + \omega_0^2 \Delta_2 u + \theta^2\left[\Delta_1 u - \rho^2 u\right] = f(x,t),\quad (x,t) \in Q_T, \qquad (33)$$

$$u = 0,\ x \in \Gamma_1;\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_2;\ t \in [0,T],\ u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x).$$

чегаравий масаласини ечиш учун чекли элементлар усулининг айирмали схемаси қурилган ва тегишли теоремалар олинган. Бу ерда $\rho, \theta - const > 0$, ω_0 – Вяйсял–Брент частотаси,

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\ \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega,$$

$$\Omega = \{0 < x_k < l_k, k = 1,2,3\},\ Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (0,T]\}.$$

Бу ерда ҳам (33) масаланинг фазо бўйича ўзгарувчиларини чекли элементлар усули асосида аппроксимациялаш орқали вақт бўйича (32) Коши абстракт масаласига эга бўламиз.

Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 12. Фараз қилайлик, $A^* = A > 0$, $B^* = B \ge 0$, $D^* = D > 0$, $AD = DA,\ AB = BA,\ DB = BD$ бўлсин ва қуйидаги

$$D_{\omega} = D - \omega\tau^2 A \geq lD, \;\; 0 < l < 1, \;\; \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4] \;, \;\; \alpha + \gamma = \beta + 1/6.$$

барқарорлик шартлари бажарилсин. У ҳолда, агар

$$u(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\; W_2^{k+1}(\Omega)\right\}, \;\; \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T];\, W_2^2(\Omega)\right\}$$

бўлса, (7) схемаси ечими (33) масаласининг ечимига турғунлашади ва қуйидаги аниқлик баҳоси ўринли бўлади:

$$\left\|u_h(x,t) - y(x,t)\right\|_0 + \sqrt{\delta\int_0^t \left\|u_h(x,t') - y(x,t')\right\|_1^2 dt'} + \left\|\int_0^t \left[u_h(x,t') - y(x,t')\right]dt'\right\|_1 \leq$$

$$\leq M\left\{\tau^3\left(\sqrt{(1+\delta)}\max_t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2 + \sqrt{(2+\delta)\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right) + \right.$$

$$\left. + h^k\sqrt{(1+\delta)\int_0^t \left\|u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}\right\} \quad \forall t \in [0,T], \; M = M(k_0, k_1, T).$$

Сўнги тўртинчи боб «**Айирмали схемаларнинг дисперсион таҳлили**» деб номланиб, унда олдинги бобларда қурилган турли айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятлари тадқиқ қилинган. Турли айирмали схемаларнинг аниқлиги ва дисперсиялиги ўртасида алоқа ўрнатилган. Гиперболик тенгламалар учун қурилган бир хил аниқликдаги айирмали схемалар оиласидан дифференциал масалаларнинг асосий хусусиятларини ўз ичига оладиган энг яхшисини танлаш мақсадида уларнинг дисперсион хусусиятлари таққосланган. Юқори аниқликка эга схемалар сифатли тўрлик ечимлар бериши кўрсатилган ва у сонли мисоллар билан тасдиқланган. Бундан ташқари, дисперсия даражасини (тартибини) оширишнинг турли усуллари кўрсатилган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида кейинги параграфларда фойдаланиш мақсадида айирмали схеманинг аниқлиги ва дисперсияси ўртасидаги алоқа кўрсатилган.

Иккинчи параграфда акустиканинг икки ўлчовли тенгламалари системаси учун 2.4 параграфда қурилган ва тадқиқ қилинган айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятлари ўрганилган. Мазкур схемалар иккинчи тартибли дисперсияга эгалиги исботланган. Бундан ташқари, Лакса–Вендрофф икки босқичли схемасининг дисперсион хусусиятлари ҳам ўрганилган. Масалан, дисперсия ҳатолиги ёйилмасининг бош аъзолари:
минимал шаблонда қурилган схема учун

$$d_1 = -\frac{1}{24}\left(h_1^2\cos^4\varphi + h_2^2\sin^4\varphi - \tau^2\right),$$

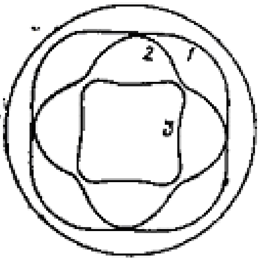
ўртачаланган айирмали схема учун

$$d_2 = -\frac{1}{24}\left[h_1^2\cos^4\varphi + h_2^2\sin^4\varphi + 3(h_1^2 + h_2^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \tau^2\right],$$

Лакса–Вендрофф схемаси учун

$$d_3 = -\frac{1}{24}\left[4\left(h_1^2\cos^4\varphi + h_2^2\sin^4\varphi\right) + 3(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 4\tau^2\right]$$

солиштирилган. Схеманинг барқарорлик шарти $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \le 1$ бажарилганда $|d_1| \le |d_2| \le |d_3|$ бўлади. Бу эса минимал шаблонда қурилган схеманинг энг кам дисперсияга эга эканлигини кўрсатади.



1-расм. Дисперсиянинг эгри чизиқлари:
1 – минимал шаблонда қурилган схема;
2 – ўртачаланган айирмали схема;
3 – Лакса–Вендрофф схемаси.

Бу учта схеманинг дисперсия хатолиги $æ = 8,\ h_1 = h_2 = 0.1,\ \tau = 0.05$ маънолари учун 1-расмда келтирилган. Бунда доира орқали икки ўлчамли акустика тенгламалар системаси гармоникасининг тезлиги дастури тасвирланган.

Бундан ташқари, айирмали схеманинг дисперсион таҳлили асосида турли тарқалиш йўналишларига эга гармоник тебранишларнинг схема негизида сифатли берилишини тадқиқ қилиш мумкинлиги кўрсатилган. Кейин тўр қадамини танлаш орқали дисперсияни минималлаштириш асосида айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятларини яхшилаш усуллари ҳам кўрсатилган. Олинган назарий натижаларни тасдиқловчи ҳисоблаш экспериментлари ўтказилган.

Учинчи параграфда учинчи бобда эластикликнинг динамик назарияси системаси учун қурилган ва тадқиқ қилинган айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятлари ўрганилган. Мазкур схемалар иккинчи тартибли дисперсияга эга эканлиги исботланган. Кўриб чиқилаётган схемалар барқарорлигининг максимал йўл қўйиладиган шарти олинган: $\tau^* = h_1 h_2 / [c_1\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\,]$. Ҳисоблаш тажрибалари ўтказилган ва натижада схеманинг тузилишига, тўр қадамига ва x_1, x_2 ўқи йўналишига нисбатан у ёки бу схеманинг устунлиги исботланган.

Тўртинчи параграфда дисперсион таҳлил асосида иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системаси учун биринчи бобда қурилган кўп параметрли юқори аниқликка эга айирмали схемалар синфининг энг яхши схемалари танлаб олинган.

Иловаларда тўлқин ҳаракати, эластик муҳит ҳаракати, вязкоэластик муҳит ҳаракати, ички тўлқинлар ҳаракати ва гравитацион–гироскопик тўлқин ҳаракати тенгламаларининг чегаравий масалаларини сонли моделлаштириш учун ҳар хил тест ҳисоблари ўтказилган. Мазкур диссертациянинг назарий натижаларини тасдиқловчи ва амалдаги сонли усуллардан устунлигини кўрсатувчи турли тест ҳисоб–китоблари олинган.

ХУЛОСА

Диссертация иши ностационар тенгламалар ва уларнинг системалари учун юқори аниқликка эга айирмали схемаларни қуришга бағишланган. Диссертация ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

биринчи ва иккинчи тартибли тенгламалар системаларига қўйилган Коши абстракт масалаларига юқори аниқликдаги янги айирмали схемалар қурилган ва аниқлик теоремалари исботланган;

кососимметрик операторли икки қатламли операторли–айирмали схема учун негатив метрикада янги априор баҳо олинган;

интерполяцион фазоларда умумлаштирилган ечимли акустик, тезлик–кучланишли эластикликнинг динамик назарияси масалалари учун янги марказлашган айирмали схемалар қурилган ва аниқлик баҳолари олинган;

умумлаштирилган ечимларга эга цилиндрик ва сферик симметрияли акустик тенгламалари учун янги марказлашган айирмали схемалар қурилган ва уларнинг яқинлашиш тезлиги баҳоланган;

суюқликларнинг ички тўлқинлар ҳаракати, ёпишқоқ-эластик муҳит деформацияси ҳаракати, гравитацион–гироскопик суюқлик тўлқинлари ҳаракати тенгламалари учун вақт ҳамда фазо бўйича юқори аниқликдаги янги айирмали схемалар қурилган ва улар учун аниқлик баҳолари олинган;

ностационар чегаравий масалаларни ечиш учун қурилган айирмали схемаларнинг априор баҳоларини олишнинг янги усули ишлаб чиқилган;

акустик, тезлик–кучланишли эластикликнинг динамик назарияси масалалари учун қурилган марказлашган айирмали схемаларнинг дисперсион хусусиятлари аниқланган;

тўлқин ҳаракати, суюқликларнинг ички тўлқинлари ҳаракати, ёпишқоқ-эластик муҳит деформацияси ҳаракати, гравитацион–гироскопик суюқлик тўлқинлари ҳаракати тенгламаларини сонли ечиш учун кўп параметрли айирмали схемалар асосида ҳисоблаш экспериментлари ўтказилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

УТЕБАЕВ ДАУЛЕТБАЙ

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико–математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ – 2019

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.DSc/FM12

Докторская диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу «www.ziyonet.uz»

Научный консультант:	**Арипов Мерсаид Мирсиддикович** доктор физико–математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Имомназаров Холматжон Худайназарович** доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник (Россия, ИВМ и МГ)
	Алоев Рахматулла Джураевич доктор физико–математических наук, профессор
	Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович доктор физико–математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Университет мировой экономики и дипломатии**

Защита диссертации состоится «__»__________ 2019 года в__ часов на заседании Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук 14.07.2016.T.29.01 при Ташкентском университете информационных технологии и Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100202, г. Ташкент, ул. Амира Тимура, 108. Тел.: (99871)238–64–43, факс: (99871) 238–65–52, e–mail: tuit@tuit.uz)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ташкентском университете информационных технологии (регистрационный номер _____). Адрес: 100202, г. Ташкент, ул. Амира Тимура, 108. Тел.: (99871)238–64–43, факс: (99871) 238–65–52, e–mail: tuit@tuit.uz)

Автореферат диссертации разослан «__»__________2019 года.

(протокол рассылки № ___ от «__»__________2019 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

З.Х. Юлдашев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам создания математических моделей процессов движения внутренних волн, жидкостей и газов. Движения этих процессов являются объектами исследования в таких областях как математическая физика, механика сплошных сред, механика жидкости и газа. Они являются основой при решении широкого круга прикладных задач: задачи динамической теории упругости, теории внутренних волн, акустики, геомеханики, распространение электромагнитных волн и другие. Решаются они, в основном, численными методами. Природа ударных волн в газах, жидкостях и твердых телах, описываемых этими уравнениями, часто такова, что решения их математических моделей нужно искать в классах обобщенных решений. Поэтому построение приближенных методов, которые позволяют находить решения этих задач с высокой точностью при естественных требованиях к гладкости исходных данных, считается одной из актуальных задач теории численных методов.

В мире в настоящее время имеется тенденция исследования дисперсионных свойств разностных схем гиперболических уравнений и их систем, которые являются математическими моделями нестационарных процессов механики сплошной среды. Особое значение, дисперсионный анализ имеет при расчете обобщенных (разрывных или быстроменяющихся) решений, присущих гиперболическим уравнениям. Так как, схемы повышенного порядка точности имеют лучшие дисперсионные свойства, то есть лучше передают основные свойства обобщенных решений дифференциальных задач, то построение схем повышенной степени точности остается важной задачей приближенных методов. Поэтому разработка численных методов и их алгоритмов для решения нестационарных задач является целевым научным исследованием.

В нашей стране особое внимание уделяется направлениям фундаментальной науки, имеющим практические применения, в частности, отдельно уделено внимание созданию приближенных методов решения нестационарных задач механики сплошной среды. В этом направлении получены весомые результаты по проведению ряда научных исследовании, посвященных построению и исследованию численных методов повышенной точности. Проведение научных исследований в приоритетных направлениях, таких как математическая физика, численные методы и математическое моделирование на уровне международных стандартов было обозначено как основные задачи и направления деятельности науки прикладной математики[1]. Для обеспечения исполнения постановления имеет важное

[1]Постановление Кабинета министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года.

значение развитие математического моделирования и численного исследования нестационарных процессов механики сплошной среды.

Знание законов и особенностей нестационарных процессов играет первостепенную роль в разработке и совершенствованию технологических процессов, технических установок и устройств ряде отраслей промышленности, что и определяет актуальность проведенных исследований и их значимость для приложений. Проводимые в настоящее время научные исследования по вышеуказанному направлению научных исследований обосновывают актуальность темы данной диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлении № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах дальнейшему развитию системы высшего образования», выступление Президента Республики Узбекистан от 24 мая 2019 года в Национальном университете с деятелями науки и образования, а также других нормативно-правовых актов по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2] . Научные исследования, направленные построению и исследованию разностных схем метода конечных разностей и метода конечных элементов для нестационарных задач механики сплошной среды осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, University of Liverpool, University of Wales (Великобритания), Universite de Paris (Франция), University of Maryland, Massachusetts Institute of Technology (США), Technological University of Dresden (Германия), Sofia University (Болгария), Politecnico de Milano, University degli Studi de Trento (Италия), Московский государственный университет имени Ломоносова, Институт математическое моделирование, Институт прикладной математики им. Келдыша РАН, Вычислительные центры РАН и СО РАН, Новосибирский госуниверситет (Россия), Киевский Национальный университет (Украина),

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации осуществляется на основе http://www.eriez.com/, https://www.ihs.com/, http://www.sciencedirect.com/, http://link.springer.com/, http://www.iccm-central.org/, http://www.university-directory.eu, www.webofknowledge.com, www.scholar.google.com и других источников.

Белорусский госуниверситет, Институт математики НАН Белоруссии (Белоруссия), Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Каракалпакский госуниверситет им. Бердаха (Узбекистан) проводят широкие научные исследования.

В результате исследований, проведенных в мире по усовершенствованию численных методов решения краевых задач нестационарных дифференциальных уравнений, динамических систем, функциональных дифференциальных уравнений получены ряд первостепенные результаты, в том числе, следующие: получены оценки точности схем метода конечных элементов при минимальных требованиях к гладкости решения уравнений эллептического типа (Politecnico de Milano, University degli Studi de Trento, (Италия); University of Combridge (Великобритания); Universite de Paris (Франция); Sofia University (Болгария)); с помощью операторов точных разностных схем получены согласованные оценки скорости сходимости разностных схем для эллиптических уравнений (Московский государственный университет, Институт математическое моделирование, Институт прикладная математика им. Келдыша РАН; Киевский Национальный университет (Украина); Sofia University (Болгария); Каракалпакский государственный университет (Узбекистан)); получены согласованные оценки точности метода конечных разностей при минимальных требованиях к гладкости решения уравнений параболического и гиперболического типов (Московский государственный университет, Институт математическое моделирование, Институт прикладная математика им. Келдыша РАН (Россия); Киевский Национальный университет (Украина); Каракалпакский государственный университет (Узбекистан)).

В настоящее время в мире интенсивно исследуются начально-краевые задачи нестационарных уравнений и их систем, которые являются математическими моделями многих прикладных нестационарных задач, в том числе проводится ряд исследований по приоритетным направлениям, как нахождения обобщенных решении этих задач численными методами повышенной точности и получение согласованных с гладкостью решения оценок точности. В частности, построение схем повышенной точности для абстрактной задачи Коши для систем уравнений первого и второго порядков и получения оценок скорости сходимости и точности; разработка методов решения задач газовой динамики, фильтрации, океанологии, биохимии и других прикладных задач, математические модели которых являются системами гиперболических уравнений первого порядка.

Степень изученности проблемы. Основным достоинством метода конечных разностей является его универсальность, применимость к широким классам дифференциальных уравнений. Вопросам построения разностных схем, исследованию устойчивости и точности посвящены работы авторов А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко, С.К. Годунова, Р. Рихтмайера, Ю.И. Шокина, Р.Д. Лазарова, В.Л. Макарова, А.В. Гулина, М.Н. Москалькова, П.Н. Вабищевича и др. В работах Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокина, М.Н. Москалькова, А.С. Макаренко, Е. Таркела, Дж. Фромма, В. Вендроффа и др. отмечено уменьшение дисперсии при повышении порядка аппроксимации разностной схемы, что намечает один из возможных путей улучшения качества сеточного решения – построение схем повышенного порядка точности.

В теории разностных схем все большее внимание уделяется вопросу получения оценок скорости сходимости разностных схем, при минимальных требованиях к гладкости решения дифференциальной задачи, в том числе получению согласованных оценок скорости сходимости. Впервые такие оценки получены в работах А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Р.Д. Лазарова, В.Л. Макарова, В. Вайнельта, М.Н. Москалькова, А.А. Злотника, И.Н. Джураева и др. Среди численных методов метод конечных элементов является самым универсальным и сравнительно близким к интерпретации физической сути задачи, кроме того, удобен при теоретическом обосновании его применимости. Этим вопросам посвящены работы Г. Стренга, Дж. Фикса, О. Зенкевича, Ф. Сьярле и др. В работах М.Н. Москалькова, О. Зенкевича, И. Фрида и других идея построения схем метода конечных элементов повышенной точности, применяется для аппроксимации и по временной переменной за счет использования по времени полиномов третьей степени.

Важным классом нестационарных задач являются гиперболические системы уравнений первого порядка. На практике наибольший интерес представляет решение системы уравнений первого порядка со смешанными краевыми условиями. Разностные схемы для таких задач рассматривались в работах С.К. Годунова, А.А. Самарского, Х.О. Крайса, С.В. Севашинского, Н.Н. Яненко, Н.Н. Анучина, А.Н. Коновалова, Н.М. Горского, Г.И. Марчука, Р. Куранта, П.П. Матуса, А.В. Гулина, Ю.П. Попова, Н.В. Арделяна, Р.Д. Алоева и др. В частности, Н.В. Арделяном построены разностные схемы первого порядка точности, когда решение дифференциальной задачи гладко.

Связь темы диссертации с научно–исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательской работы Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека по теме «Алгоритмы и программное обеспечение решения задач прикладной математики».

Цель исследования – построение разностных схем повышенной степени точности для нестационарных уравнений и получения их оценки точности.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели необходимо:

построение многопараметрических схем повышенной точности для абстрактной задачи Коши для уравнений первого и второго порядков;

получения согласованных с гладкостью решения оценок точности разностных схем в интерполяционных пространствах для систем гиперболических уравнений первого порядка;

построение повышенной точности схем метода конечных элементов по пространству и по времени для нестационарных уравнений в частных производных и получение оценок точности при минимальных требованиях к гладкости;

определение дисперсионных свойств разностных схем с целью выбора оптимальной по порядку дисперсии разностных схем из некоторого класса разностных схем;

применение построенных новых разностных схем для численного моделирования некоторых нестационарных задач механики сплошной среды.

Объект исследования. Объектом исследования являются нестационарные уравнения и их системы.

Предметом исследования является разработка численных методов высокого порядка точности для линейных и нелинейных нестационарных задач механики сплошной среды.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы вычислительной математики, алгебры, численного моделирования, функционального анализа, а также технология алгоритмизации.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построены новые методы повышенного порядка точности решения абстрактной задачи Коши для системы уравнений первого и второго порядка, получены теоремы о точности этих методов;

получена новая априорная оценка для двухслойной операторно–разностной схемы в негативной метрике для случая кососимметричного оператора;

построены новые центрированные разностные схемы и получены новые согласованные с гладкостью оценки точности решений задач акустики и динамической теории упругости в скоростях–напряжениях с обобщенными решениями в интерполяционных пространствах;

построены центрированные разностные схемы и получены оценки скорости сходимости решений системы уравнений акустики в случае цилиндрической и сферической симметрии с обобщенными решениями;

построены новые схемы повышенного порядка точности по времени и пространству для уравнений внутренних волн жидкости, движения вязкоупругих сред, движения гравитационно–гироскопических волн жидкости и получены соответствующие оценки точности;

определены дисперсионные свойства центрированных разностных схем для систем уравнений акустики, динамической теории упругости в скоростях–напряжениях для выбора оптимальной разностной схемы и разработаны различные способы повышения порядка дисперсионности.

Практические результаты исследования. В результате исследований построены новые численные методы решения нестационарных краевых задач. Получены новые априорные оценки точности исследуемых задач. Разработана новая методика получения априорных оценок для решений разностных схем в классах обобщенных (негладких) решений.

Результаты диссертации позволили решить нестационарные краевые задачи механики сплошной среды с высокой точностью при естественных требованиях к гладкости решений дифференциальных задач.

Достоверность результатов исследования обоснована сравнением полученных в диссертации результатов с известными результатами по численному решению нестационарных краевых задач механики сплошной среды и проведением вычислительных экспериментов и визуализацией, подтвердивших теоретические результаты.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в построении новых многопараметрических разностных схем для решения абстрактной задачи Коши для системы уравнений первого и второго порядков и обосновании решения конкретных прикладных задач.

Практическая значимость полученных в исследовании результатов обосновывается возможностью широкого применения построенных новых многопараметрических разностных схем высокого порядка точности при решении многомерных прямых и обратных, линейных и нелинейных нестационарных краевых механики сплошной среды, как задачи газовой динамики, фильтрации, биохимии и экологии.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные в диссертационной работе, внедрены в практику в следующих направлениях:

разностные схемы высокого порядка точности для параболических и гиперболических уравнений в частных производных использованы для решения прямых и обратных задач в исследованиях по проекту гранта 1.3.1.3. «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земле» (справка 15301.03-221 от 26 апреля 2019 года Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук). Использование научных результатов дало возможность решить задачи пороупругости;

разностные схемы высокого порядка точности для численного моделирования нестационарных процессов использовались для решения нестационарных задач проекта «Рациональное использование природных ресурсов, в том числе водных ресурсов, геологии, переработка, новые материалы и технологии, безопасные изделия и конструкции» (Казахстан, справка 102-10/2159 от 5 мая 2019 года Актюбинского университета имени С. Баишева). Использование научных результатов дало возможность решить задачи тепломассопереноса в процессе конвективной сушки керамических пористых тел;

разностные схемы высокого порядка точности для двумерных параболических уравнений использовались в проекте «Рациональное использование природных ресурсов, в том числе водных ресурсов, геологии, переработка, новые материалы и технологии, безопасные изделия и конструкции» для решения задач пористых тел содержащих техногенные отходы (Казахстан, справка 102-10/2159 от 5 мая 2019 года Актюбинского университета имени С. Баишева). Использование научных результатов дало возможность увеличения эффективности и качества обработки техногенных отходов.

Апробация результатов исследования. Основные концепции, идеи, положения и результаты диссертации обсуждались на 20 научно-практических конференциях, в том числе, на 16 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 70 научных работ, из них 4 монографии, 15 научных статей, в том числе 6 в зарубежных и 9 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, выводов, заключения, списка использованной литературы, приложений. Общий объем диссертации составит 300 страниц, основной текст работы изложен на 192 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность проведенного исследования, цель и задачи исследования, характеризуются объект и предмет, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, раскрываются научная и практическая значимость полученных результатов, внедрение в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, под называнием **«Разностные схемы повышенной точности для системы нестационарных уравнений»** посвящена построению и исследованию разностных схем для решения абстрактной задачи Коши для системы уравнений первого и второго порядков на основе метода конечных элементов. На основе специальной дискретизации по временной переменной построены новые двух или трех параметрические семейства разностных схем четвертого и шестого порядков точности. Наличие параметров в схеме позволяет произвести регуляризацию схем с целью оптимизации алгоритма реализации и точности схемы. Получены, соответствующие априорные оценки и на их основе доказаны теоремы о скорости сходимости и точности этих схем.

В первом параграфе первой главы приведены некоторые обозначения и вспомогательные утверждения.

Во втором параграфе рассматривается задача Коши

$$D\dot{u} + Au = f, \quad u(0) = u_0 \quad (0 \le t \le T). \tag{1}$$

Здесь A, D – операторы из H в H, $A^* = A > 0$, $D^* = D > 0$, A, D не зависят от t; $\forall t \ge 0$, $u = u(t) \in H$, $f = f(t) \in H$, где H – гильбертово пространство. На основе полинома

$$y(t)=y^n\varphi_{00}^n(t)+\dot y^n\varphi_{10}^n(t)+y^{n+1}\varphi_{01}^n(t)+\dot y^{n+1}\varphi_{11}^n(t), \qquad (2)$$

где $y^n=y(t_n),\quad \dot y^n=dy(t_n)/dt,\quad \varphi_{00}^n(t)=2\xi^3-3\xi^2+1,\quad \varphi_{01}^n(t)=3\xi^2-2\xi^3,$

$$\varphi_{10}^n(t)=\tau(\xi^3-2\xi^2+\xi),\quad \varphi_{11}^n(t)=\tau(\xi^3-\xi^2),\quad \xi=(t-t_n)/\tau,$$

построена трехпараметрическая разностная схема вида

$$Dy_t-\tau^2A\dot y_t/12+Ay^{(0.5)}=\varphi_1,\quad \gamma D\dot y_t+\alpha Ay_t+\beta A\dot y^{(0.5)}=\varphi_2, \qquad (3)$$

Здесь

$$\varphi_1=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)dt,\quad \varphi_2=\frac{12}{\tau^3}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}f(t)\left(s_1\vartheta_2^{(1)}+s_2\vartheta_2^{(3)}\right)dt,\quad \vartheta_1(t)=s_1\varphi_{01}+(1-s_1)\varphi_{00},$$

$$\vartheta_2(t)=s_2\varphi_{11}+(1-s_2)\varphi_{10},\quad s_1=15\gamma-35\alpha/3,\quad s_2=140\gamma-350\alpha/3.$$

Для исследования устойчивости схемы (3) по начальным данным записывается ее каноническая форма

$$\mathrm{B}Y_t+\mathrm{A}Y=0,\quad Y=(y,\dot y) \qquad (4)$$

($f(t)=0$) и на основе известной теоремы устойчивости двухслойных разностных схем А.А.Самарского доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $A^*=A>0,\ D^*=D>0$ и, кроме того, выполнены условия $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$ и $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma=O(\tau^2)$. Тогда, если $u(t)\in C^5[0,T]$, то схема (3) сходится к решению задачи (1) и для ее решения справедливы оценки точности

$$\|y(t)-u(t)\|_A\le M\tau^3\max_t\left\|\frac{d^5u}{dt^5}\right\|_A,\ \|\dot y(t)-\dot u(t)\|_A\le M\tau^2\max_t\left\|\frac{d^5u}{dt^5}\right\|_A,\ \forall t\in[0,T].$$

Для повышения точности векторная схема (1.19) сводится к скалярной трехслойной схеме вида

$$\overline{B}y_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2\overline{R}y_{\bar tt}+\overline{A}y=\overline{F},\quad y^0,y^1 - \text{заданы} \qquad (5)$$

и на основе известной теоремы устойчивости трехслойных разностных схем получена следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $A^*=A>0,\ D^*=D>0,\ AD=DA$, и, кроме того, выполнены условия $\alpha>0,\ 0<\beta\le\alpha/(3\varepsilon),\ \gamma>0$, $\alpha,\beta,\gamma=O(\tau^2)$, $\overline{R}\ge((1+\varepsilon)/4)\overline{A}$. Тогда, если $u(x,t)\in C^6[0,T]$, то схема (3) сходится к решению задачи (1) и для ее решения справедливы оценки точности

$$\|y(t)-u(t)\|_{A^2}\le M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}\right\|_{A^2},\ \|\dot y(t)-\dot u(t)\|_{A^2}\le M\tau^4\max_t\left\|\frac{d^6u}{dt^6}\right\|_{A^2}\quad \forall t\in[0,T].$$

Утверждения теорем 1 и 2 верны и для случая, когда в схеме оператор A кососимметричный, т.е. $A^*=-A$.

В третьем параграфе рассматривается задача Коши

$$D\ddot u+Au=f,\quad t_0<t\le \mathrm{T},\ u(t_0)=u_0,\quad \dot u(t_0)=u_1, \qquad (6)$$

где A и D линейные постоянные не зависящие от t операторы из $H\to H$,

$$A^* = A > 0,\ D^* = D > 0\,;\ \forall\, t \ge 0,\ u = u(t),\ \ f = f(t) \in H\,;$$
$$\ddot{u} = d^2 u / dt^2\,, \dot{u} = du / dt.$$

В этом параграфе на основе линейных комбинаций кубических полиномов (2) было построено трехпараметрическое семейство схем

$$D_\gamma \dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1,\ D_\alpha y_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2,\ y^0 = u_0,\ \dot{y}^0 = u_1. \qquad (7)$$

Здесь $y = y^n = y(t_n),\ \hat{y} = y^{n+1},\ D_\gamma = D - \gamma\tau^2 A,\ D_\alpha = D - \alpha\tau^2 A,\ D_\beta = D - \beta\tau^2 A,$

$$\varphi_1 = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_1(\xi)d\xi,\quad \varphi_2 = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_2(\xi)d\xi\,,$$

$$\vartheta_1(\xi) = p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi) + p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi),\ \vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi),\ \xi = (t - t_n)/\tau\,,$$

$$\vartheta_1^{(1)}(\xi) = 1,\ \vartheta_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi,\ \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau(\xi - 1/2),\ \vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2\right),$$

$$p_1 = 6 - 60\gamma,\ p_2 = 30 - 360\gamma,\ s_1 = 180\beta - 40\alpha,\ s_2 = 1680\beta - 280\alpha\,,$$

$\alpha,\ \beta, \gamma$ – параметры, которые подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации: $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$.

При выполнении условия $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$ погрешность аппроксимации схемы (1.44) на достаточно гладких решениях $Au(t) \in C^4[0,T]$ или $u(t) \in C^6[0,T]$ имеет четвертый порядок.

Получены соответствующие априорные оценки и доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $D^* = D > 0,\ A^* = A > 0$. Тогда, если выполнено условие $D - m\tau^2 A \ge \varepsilon D,\ 0 < \varepsilon < 1,\ m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и параметры схемы удовлетворяет условию $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$, то при $u(t) \in C^6[0,T]$ решение схемы (7) сходится к решению задачи (6) так, что справедливы оценки точности

$$\|y(t) - u(t)\|_A \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|_A,\ \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|_A,\ \forall t \in [0,T].$$

Следует отметить, что перестановочности исходных операторов A и D не предполагается.

Если кроме условия $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$ выполняется и условие $\beta + 1/40 = 6\alpha\gamma$, то доказано, что схема класса (7) имеет шестой порядок аппроксимации.

В четвертом параграфе рассматривается схема метода конечных элементов для дифференциального операторного уравнения второго порядка с диссипацией

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f(t),\quad u(0) = u_0,\quad \dot{u}(0) = u_1,\quad 0 \le t \le T\,. \qquad (8)$$

Здесь $A^* = A > 0,\quad B^* = B \ge 0,\quad D^* = D > 0$, линейные, постоянные не зависящие от t операторы, отображающие в гильбертово пространство H в H.

Для задачи (8) строится семейство векторных разностных схем

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1,\ D_\alpha y_t - \tau^2 \gamma B\dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2,$$
$$y^0 = u_0,\ \dot{y}^0 = u_1 \qquad (9)$$

Далее получены соответствующие априорные оценки в предположений

$$AD = DA, \quad AB = BA, \quad DB = BD,\ A^* = A > 0, \quad B^* = B \ge 0, \quad D^* = D > 0.$$

Для исследования сходимости схемы (9), она записывается в виде скалярной трехслойной схемы для y и $\dot{y}$:

$$\widetilde{D}y_{\bar{t}t} + \widetilde{B}y_{\overset{\circ}{t}} + \widetilde{A}y = \widetilde{\varphi}_1, \quad \overline{D}\dot{y}_{\bar{t}t} + \overline{B}\dot{y}_{\overset{\circ}{t}} + \overline{A}\dot{y} = \widetilde{\varphi}_2,$$

где $\widetilde{D},\ \widetilde{B},\ \widetilde{A},\ \overline{D},\ \overline{A},\ \overline{B}$ некоторые суммы и произведения операторов $A,\ B,\ D;\ \widetilde{\varphi}_1,\ \widetilde{\varphi}_2$ – правые части. Например,

$$\widetilde{D} = D_\alpha + \tau^2 BD_\gamma^{-1}B/12 + \tau^2 D_\beta D_\gamma^{-1}A/4.$$

На основе общей теории устойчивости трехслойных разностных схем доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $A^* = A > 0$, $B^* = B \ge 0$, $D^* = D > 0$, $AD = DA$, $AB = BA$, $DB = BD$ и выполнены условия $\alpha + \gamma = \beta + 1/6$,

$$D_\omega = D - \omega\tau^2 A \ge \delta D,\ 0 < \delta < 1,\ \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4].$$

Тогда, если $u(t_n) \in C^6[0,T]$, то решение схем (9) сходятся к решению задачи (8) так, что справедливы оценки точности

$$\|y(t) - u(t)\|_A \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|,\ \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \le M\tau^4 \max_t \left\| \frac{d^6 u}{dt^6}(t) \right\|,\ \forall t \in [0,T].$$

Построенные в этой главе разностные схемы имеют следующие преимущества:

- схемы высокого порядка точности (выше двух); кроме самого решения, одновременно находится и её производная (скорость) с той же точностью. В практических задачах, например, волновых движениях в сплошных средах, эта производная соответствует скоростям движения;
- используя интерполяционное представление решения (2), при необходимости можно получить решение и его производную в любой момент времени;
- поскольку схемы двухслойные, можно без потери точности использовать переменный шаг;
- схема условно устойчивая и требует в 4 раза больше арифметические операции, чем схемы метода конечных разностей, но эта схема для достижения определенной точности позволяет выбрать большие шаги по времени.

Вторая глава диссертации, под называнием **«Построение и исследование разностных схем для системы гиперболических уравнений первого порядка с обобщенными решениями»** посвящена построению и исследованию так называемых центрированных разностных схем для системы уравнений акустики и динамической теории упругости в скоростях–напряжениях с различными краевыми условиями. Получены априорные оценки для общей двухслойной операторно–разностной схемы с кососимметричным оператором, которые используются в дальнейшем для получения согласованных оценок точности решений исходных задач при слабых предположениях о гладкости решений дифференциальных уравнений. Построены центрированные разностные схемы. На основе неявных разностных схем, не дающие ограничения на шаги сетки, построены экономичные факторизованные разностные схемы. Указаны способы численной реализации построенных схем. Приведены теоремы устойчивости по начальным данным и по правой части. Получены соответствующие априорные оценки и на их основе получены согласованные оценки скорости сходимости построенных разностных схем. Кроме того, получены согласованные оценки точности в интерполяционных пространствах. Аналогичные результаты получены для системы уравнений акустики в некоторых криволинейных координатах.

Согласованной с гладкостью искомого решения оценкой скорости сходимости разностных схем для уравнения гиперболического типа назовем оценку вида $E_{h,\tau}^{(s)}(t;z) \le M(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1})\|u\|_{k,Q_T}$, где $E_{h,\tau}^{(s)}(t;z)$ - некоторая энергетическая норма s-го порядка, аналогичная интегралу энергии. В отличие от нее в данной диссертации рассмотрен также случай $s < 0$. Здесь $\|\cdot\|_{k,Q_T}$ - норма в пространстве Соболева $W_2^k(Q_T)$, $Q_T = \{(0,T)\times\Omega\}$, z – погрешность численного метода.

В первом параграфе второй главы рассматривается векторная двухслойная операторно–разностная схема в виде

$$\overline{B}Y_t + AY^{(0.5)} = \Phi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \text{задан } Y_0, \tag{10}$$

где $\overline{B} = B - 0.5\tau A$ – линейный оператор из H в H, $Y^{(0.5)} = (Y(t+\tau) + Y(t))/2$.

Введены следующие условия.

Условие 1 (У1). Пусть $\overline{B}^* = \overline{B} \ge \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$, $A^* = -A$.

Условие 2 (У2). Пусть $\overline{B} = D + 0.5\tau G$, где G такой оператор, что $GD^{-1}A = -AD^{-1}G$, а D ограниченный оператор $D^* = D > 0$.

Условие 3 (У3). Пусть $D - 0.5\tau G \ge \varepsilon E$.

Условие 4 (У4). Пусть $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{p} D\Phi_\alpha$, $\Phi_\alpha = A_\alpha \pi_\alpha$ и

$$\sup_{\|Y\|\ne 0} \frac{\|A_\alpha^* AY\|}{\|AD^{-1}A^*Y\|} \le M, \ \forall\, \alpha = \overline{1,p}.$$

Получена следующая основная теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены У1–У4. Тогда, разностная схема (10) устойчива в $H^{-1}(\omega)$ по начальным данным и по правой части, а для её решения имеет место априорная оценка

$$\|Y(t_1)\|_{H^{-1}} \le M(\|Y(0)\|_{H^{-1}}^2 + \sum_{t'=0}^{t_1-\tau} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\pi_\alpha(t')\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\|Y\|_{H^{-1}}$ – некоторая слабая норма.

Второй параграф посвящен построению и исследованию центрированных разностных схем для системы двумерных уравнений акустики

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a\frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1(x,t), \frac{\partial u_2}{\partial t} = a\frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2(x,t), \frac{\partial p}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + f_3(x,t), \quad (11)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Рассматривается условие “центровки” разностных схем по пространству, что удовлетворяет некоторым четырем случаям взаимного расположения узлов сетки. Выбирая узлы сетки таким способом, достигается центровка разностных схем, что в результате дает возможность получить нужные оценки по точности схемы. Таким образом, вид выбранного расположения узлов сетки вместе с краевыми условиями диктует построение сетки по всей области.

Выбирая, соответствующий оператор усреднения для функции трех переменных, например,

$$S^{x_1}u = S^{x_1}u(\cdot, x_2, t) = \frac{1}{h_1}\int_{x_{i_1}}^{x_{i_1+1}} u(\xi_1, x_2, t)d\xi_1 \quad \text{и т.д.}$$

и применяя их к уравнениям (11) и аппроксимируя интегралы, по формуле средних прямоугольников получены, соответствующие разностные схемы с различными краевыми условиями. Например, схема для (11) со смешанными краевыми условиями имеет вид

$$\vartheta_{1,t} = a\bar{q}_{\bar{x}_1} + \varphi_1, \quad \vartheta_{2,t} = a\bar{q}_{x_2} + \varphi_2, \quad \bar{q}_t = a(\hat{\vartheta}_{1,x_1} + \hat{\vartheta}_{2,\bar{x}_2}) + \hat{\varphi}_3. \qquad (12)$$

Здесь $\vartheta_1 = \vartheta_1(x_1, x_2, t)$, $\vartheta_2 = \vartheta_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, t)$, $\bar{q} = q(\bar{x}_1, x_2, \bar{t})$, $\bar{x}_1 \in \tilde{\omega}_1^*$, $x_2 \in \bar{\omega}_2$, $x_1 \in \tilde{\omega}_1$, $\bar{x}_2 \in \bar{\omega}_2^*$, $t \in \bar{\omega}_\tau, \bar{t} \in \bar{\omega}_\tau^*$, $\varphi_1 = S^t \bar{S}^{x_1} \bar{S}^{x_2} f_1$, $\varphi_2 = S^t S^{x_1} S^{x_2} f_2$, $\varphi_3 = \bar{S}^t S^{x_1} \bar{S}^{x_2} f_3$.

Систему (12) дополним начальными условиями

$$\vartheta_1{}^0 = \bar{S}^{x_1}\bar{S}^{x_2}u_1{}^0(x), \quad \vartheta_2{}^0 = S^{x_1}S^{x_2}u_2{}^0(x), \qquad (13)$$

$$q^0 = S^{x_1}\bar{S}^{x_2}p^0(x), \quad \frac{\bar{q}^0 - q^0}{0.5\tau} = a(\vartheta^0_{1,x_1} + \vartheta^0_{2,\bar{x}_2}) + \varphi_3{}^0$$

и краевыми условиями

$$\vartheta_1(0, x_2, t) = \bar{S}^t \bar{S}^{x_2}\mu^{(-1)}, \quad q(l_1, x_2, t) = S^t \bar{S}^{x_2}\pi^{(+1)},$$
$$q(x_1, 0, \bar{t}) = S^t \bar{S}^{x_1}\pi^{(-2)}, \quad q(x_1, l_2, \bar{t}) = S^t \bar{S}^{x_1}\pi^{(+2)}. \qquad (14)$$

Аналогично построены разностные схемы для задачи с другими краевыми условиями.

Кроме этих разностных схем, построены и исследованы так называемые усредненные разностные схемы, которые получены при специальном выборе шаблонов разностных схем.

Выбирая специальные сеточные пространства H_1, H_2, H_3 (в зависимости от краевых условий) задача для погрешности схемы записывается в виде двухслойной операторно–разностной схемы

$$\overline{B}Z_t + AZ^{(0.5)} = \psi, \quad Z^0 = 0, \tag{15}$$

где $\bar{z}_3^0 = -0.5\tau(A_1^*\eta_3^0 + A_2^*\eta_4^0), \quad \psi = (A_1\overline{\eta}_1, A_2\overline{\eta}_2, B_1\hat{\eta}_3 + B_2\hat{\eta}_4),$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & -A_2 \\ A_1^* & A_2^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 & \tau A_1/2 \\ 0 & E & \tau A_2/2 \\ \tau A_1^*/2 & \tau A_2^*/2 & E \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_\alpha : H_3 \to H_\alpha$ и $B_\alpha : H_\alpha \to H_3$ и они определены так

$$A_1 z = a z_{\bar{x}_1}, \; A_2 z = a z_{x_2}, B_1 z = a z_{x_1}, B_2 z = a z_{\bar{x}_2}.$$

Далее, получены соответствующие априорные оценки в нормах $\|\cdot\|_H$- обычная норма, $\|\cdot\|_{H^{-1}}$- более слабая норма и доказана следующая теорема о точности схемы (12)-(14).

Теорема 6. Пусть $U = (u_1, u_2, p) \in W_2^k(Q_T)$ и выполнено условие

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \le (1-\varepsilon)^2, \quad \gamma_\alpha = |a|\tau/h_\alpha, \quad \alpha = 1,2 \quad , \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{16}$$

Тогда, решение разностной схемы (12)-(14) сходится в $H^s(\omega)$ к решению исходной задачи со скоростью $O(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1})$, причем выполняется оценка точности

$$\| Z(t_1) \|_{(s)} \le M(\tau^{k-s-1} + |h|^{k-s-1}) \| U \|_{k,Q_T}, 1 < k - s \le 3, \; s = -1,0, \; k = 1,2,3.$$

Здесь $|h|^\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha$, $\|\cdot\|_{(-1)} = \|\cdot\|_{H^{-1}}, \|\cdot\|_{(0)} = \|\cdot\|_H$.

Далее получена следующая теорема о сходимости схемы (12)–(14) в интерполяционных пространствах.

Теорема 7. Пусть $U = (u_1, u_2, p) \in W_2^{æ}(Q_T)$ и выполнено условие устойчивости (16). Тогда, решение разностной схемы (12)–(14) сходится в $H^\theta(\omega)$ к решению исходной задачи со скоростью $O(\tau^{æ-\theta-1} + |h|^{æ-\theta-1})$, причем выполняется оценка точности

$$\|Z\|_\theta \le M(\tau^{æ-\theta-1} + |h|^{æ-\theta-1})\|U\|_{æ,Q_T}, \; æ \in [1,3], \; \theta \in [-1,0], \; 2 \le æ - \theta \le 3,$$

где $|h|^\alpha = h_1^\alpha + h_2^\alpha$, $\|\cdot\|_{(-1)} = \|\cdot\|_{H^{-1}}$, $\|\cdot\|_{(0)} = \|\cdot\|_H$.

В третьем параграфе рассматривается первая краевая задача для системы уравнений динамической теории упругости в скоростях–напряжениях

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha , \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2)\sum_{\gamma=1}^{2} \frac{\partial \vartheta_\gamma}{\partial x_\gamma} + c_2^2 \left(\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (17)$$

с начальными условиями

$$\vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha^0(x), \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0 \quad (18)$$

и краевыми условиями $(\Gamma_1 = \Gamma,\ \Gamma_2 = \emptyset)$

$$\vartheta_\beta = \mu_\beta^{(-\alpha)}, \quad x_\alpha = 0; \quad \vartheta_\beta = \mu_\beta^{(+\alpha)}, \quad x_\alpha = l_\alpha; \quad \alpha, \beta = 1{,}2, \quad t \in (0, T]. \quad (19)$$

Используя технику построения разностных схем для различных краевых задач параграфа 2.2, для задачи (17)–(19) построена схема

$$\begin{gathered} y_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{2} (D_{3-\beta}^{-}\, \overline{æ}_{\alpha\beta})_{\bar{x}_\beta} + \varphi_\alpha , \\ \overline{æ}_{\alpha\beta,t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2)\sum_{\gamma=1}^{2} (D_{3-\gamma}^{+} \hat{y}_\gamma)_{x_\gamma} + c_2^2 \left[(D_{3-\gamma}^{+} \hat{y}_\beta)_{x_\alpha} + (D_{3-\beta}^{+} \hat{y}_\alpha)_{x_\beta} \right], \end{gathered} \quad (20)$$

$$y_\alpha^0 = \overline{S}^{x_1} \overline{S}^{x_2} \vartheta_\alpha^0(x) \quad x_\alpha \in \overline{\omega}_\alpha, \quad æ_{\alpha\beta}^0 = S^{x_1} S^{x_2} \sigma_{\alpha\beta}^0(x) \quad x_\alpha \in \overset{*}{\omega}_\alpha , \quad (21)$$

$$\frac{\overline{æ}_{\alpha\beta}^0 - æ_{\alpha\beta}^0}{\tau/2} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2)\sum_{\gamma=1}^{2} (D_{3-\gamma}^{+} y_\gamma)_{x_\gamma}^{0} + c_2^2 \left[(D_{3-\alpha}^{+} y_\beta)_{x_\alpha}^{0} + (D_{3-\beta}^{+} y_\alpha)_{x_\beta}^{0} \right],$$

$$y_\beta = \overline{S}^{t} \overline{S}^{x_{3-\alpha}} \mu_\beta^{(-\alpha)} \quad x_\alpha = 0, \quad y_\beta = \overline{S}^{t} \overline{S}^{x_{3-\alpha}} \mu_\beta^{(+\alpha)} \quad x_\alpha = l_\alpha . \quad (22)$$

Схема (20)–(22) относится к классу схем бегущего счета: из первых двух уравнений (20) вычисляются $\hat{y}_\alpha$, а затем из остальных уравнений находятся $\hat{\overline{æ}}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1{,}2$.

Выбирая специальные сеточные пространства, задача для погрешности схемы (20)–(22) записывается в виде двухслойной операторно–разностной схемы. Далее, используя результаты параграфа 2.2, получены соответствующие априорные оценки и на основе этих теорем доказана теорема о сходимости схемы. Доказана теорема о точности схемы в интерполяционных пространствах.

Аналогичные результаты получены для третьей краевой задачи динамической теории упругости в скоростях–напряжениях, т.е. когда на границе прямоугольника заданы нормальная составляющая перемещений и касательная составляющая напряжений. Получены априорные оценки и доказаны теоремы о скорости сходимости схемы. Оценка точности та же. Получены согласованные оценки точности в интерполяционных пространствах.

Далее построена экономичная факторизованная разностная схема, которая записывается в скоростях и напряжениях

$$(E + \sigma c_1^2 \tau^2 R_1)(E + \sigma c_1^2 \tau^2 R_2) y_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{2} A_\beta \overline{æ}_{\alpha\beta} + \phi_\alpha ,$$

$$æ_{\alpha\beta,t} = \delta_{\alpha\beta}(c_1^2 - 2c_2^2)\sum_{\gamma=1}^{2} B_\gamma \hat{y}_\gamma + c_2^2(B_\alpha \hat{y}_\beta + B_\beta \hat{y}_\alpha).$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями. Получены соответствующие априорные оценки и на их основе получены оценки точности. Указаны пути получения согласованных оценок точности в интерполяционных пространствах.

В четвертом параграфе для системы уравнений акустики в криволинейных координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial p}{\partial r} = f_1(r,t), \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{a}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}(r^m u) = f_2(r,t),$$

$$(r,t) \in Q_T = \{0 < r < 1, 0 < t \le T\}$$

с заданными начальными условиями $u(r,0) = u_0(r)$, $p(r,0) = p_0(r)$ и краевыми условиями $u(0,t) = \mu_1(t)$, $p(1,t) = \mu_2(t)$ построена следующая разностная схема

$$\vartheta_t + a\bar{q}_{\bar{r}} = \varphi_1, \;\; \bar{q}_t + \frac{a}{k_i^m}(r_i^m \hat{\vartheta})_r = \hat{\varphi}_2, \tag{23}$$

где $\vartheta = \vartheta_i^n = \vartheta(r_i, t_n)$ – аппроксимирует $u(r,t)$, а $\bar{q} = \bar{q}_i^m = q(\bar{r}_i, \bar{t}_n)$ – функцию $p(r,t)$, $\varphi_1 = \frac{1}{\bar{h}_i\tau}\iint_{l_1} f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta$, $\hat{\varphi}_2 = \frac{1}{k_i^m h_{i+1}\tau}\iint_{l_2} \xi^m f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta$.

Значения $m = 0,1,2$ отвечает соответственно плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Уравнения (23) дополнена начальными условиями

$$\vartheta^0 = \frac{1}{\bar{h}_i}\int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} u_0(\xi)d\xi, \; q^0 = \frac{1}{k_i^m h_{i+1}}\int_{r_i}^{r_{i+1}} \xi^m p_0(\xi)d\xi, \; \frac{\bar{q}^0 - q^0}{0.5\tau} + \frac{a}{k_i^m}(r_i^m\vartheta)_r^0 = \varphi_2^0 \tag{24}$$

и краевыми условиями

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\tau}\int_{\bar{t}_{n-1}}^{\bar{t}_n} u_0(\eta)d\eta, \quad \bar{q}_N = \frac{1}{\tau}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{p}_N(\eta)d\eta. \tag{25}$$

Далее, получены соответствующие априорные оценки в нормах $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ и доказана теорема о точности схемы. Кроме того, получена следующая теорема о скорости сходимости в интерполяционных пространствах.

Теорема 8. Пусть $U = (u,p) \in W_2^{æ}(Q_T)$ и выполнено условие устойчивости

$$\gamma \le 1 - \varepsilon, \quad (\gamma = \frac{|a|\tau}{\tilde{h}_i}), \quad \tilde{h}_i = \min_i(h_i, \bar{h}_i). \tag{26}$$

Тогда решение разностной схемы (23)-(25) при соответствующем выборе k_i^m и узлов сетки $r_i, \bar{r}_i$ сходится в сеточной норме H^{θ} к точному решению исходной задачи, причем выполняется оценка точности

$$\|Z\|_{\theta} \le M(\tau^{\text{æ}-\theta-1} + h^{\text{æ}-\theta-1})\|U\|_{\text{æ},Q_T}, \ \text{æ} \in [1,3], \ \theta \in [-1,0], \ 2 \le \text{æ} - \theta \le 3.$$

Далее указан алгоритм вычисления узлов сетки ω_h.

В третьей главе диссертации, называемой **«Разностные схемы высокого порядка точности при слабых требованиях к гладкости решения дифференциальной задачи»** рассматриваются задачи для параболического и гиперболического уравнений второго порядка. Кроме того, рассмотрены различные задачи для нестандартных (со смешанными производными порядка выше 2) уравнений. В частности, уравнения движения вязкоупругих сред (уравнение Фохта), уравнения движения внутренних волн в стратифицированной жидкости (уравнение Буссинеска) и уравнения движения гравитационно–гироскопических волн жидкости. На основе метода конечных элементов построены и исследованы разностные схемы высокого порядка точности. Высокий порядок точности схемы достигается за счет специальной дискретизации временной и пространственных переменных. Доказана устойчивость и сходимость построенных алгоритмов. Получены оценки точности схемы при слабых предположениях о гладкости решений дифференциальных задач.

В первом параграфе третьей главы для параболического уравнения в частных производных получены оценки точности разностной схемы, которая построена методом конечных элементов по времени и по пространственным переменным.

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega},$$
$$u = 0, \ x \in \Gamma = \partial\Omega, \ t \in [0,T], \tag{27}$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) - q(x)u, \ k_1 \ge k(x) \ge k_0 > 0, \ k_1 \ge q(x) \ge 0, \ p = 1,2,....$

Аппроксимируя пространственные переменные методом конечных элементов, к задаче (27) ставится в соответствие дифференциальная задача Коши по времени для приближенного решения $u_h(t)$:

$$D\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \tag{28}$$

где $D, A : H_h \to H_h \subset H$; $H_h -$ конечномерное пространство пространства H, D, A – операторы из H_h в H_h (им соответствуют матрицы M –массы и G– жесткости).

Доказана следующая теорема о сходимости решения векторной схемы (3) к решению исходной задачи (27).

Теорема 9. Пусть $A^* = A > 0,\ D^* = D > 0$ и выполнены условия устойчивости $\alpha = \tau^2/12,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0$ схемы (3). Тогда для ее решения, аппроксимирующего решения задачи (27) такого, что

$$u(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\right\},$$

верна оценка точности

$$\sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')] dt' \right\|_1 \le$$

$$\le M\left\{ \tau^4 \left(\|u(x,0)\|_1 + \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + h^k \left(\|u(x,0)\|_k + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}.$$

Во втором параграфе аналогичные результаты получены для гиперболического уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0,T].$$

Здесь L – эллиптический оператор

$$Lu = \sum_{m=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right),\ k_1 \ge k(x) \ge k_0 > 0,\ x \in \Omega \subset R^p,\ p = 1,2....$$

Третий параграф посвящен исследованию точности методов начально–краевой задачи для уравнения Фохта, которое используется для математического описания процессов колебаний и распространения волн в сплошной среде. Аналогичная задача возникает и в пъезоэлектроупругости.

Рассматривается задача

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \frac{\partial}{\partial t}(Lu) = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, t \in (0,T]\}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad u = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{29}$$

Здесь L – эллиптический оператор как в параграфе 1.6, $\delta > 0$ – числовой параметр, характеризующий дисперсию.

Аппроксимируя пространственных переменных задачи (29) методом конечных элементов, получена задача Коши по времени, которая записана в виде операторного уравнения

$$D\frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(x,0) = u_{1,h}. \tag{30}$$

Здесь операторы D, B, A действуют из H_h в H_h: $D = M$, $B = \delta G$, $A = G$; $M = \left((\varphi_i, \varphi_j)\right)_{i,j=1}^N$ – матрица массы координатной системы подпространства

H_h; $G=\left(a(\varphi_i,\varphi_j)\right)_{i,j=1}^{N}$ – матрица жесткости, отвечающая оператору Lu в H_h. Очевидно, что $D>0,\ B>0,\ \mathrm{A}>0$.

Доказана следующая теорема, требующие от решения исходной дифференциальной задачи более низкие гладкости.

Теорема 10. Пусть операторы задачи (30) $A^*=A>0$, $B^*=B\geq 0$, $D^*=D>0$, $AD=DA,\ AB=BA,\ DB=BD$ и выполнены условия устойчивости

$$D_\omega=D-\omega\tau^2 A\geq lD,\ \ 0<l<1,\ \ \omega=\max[\alpha,\beta,\gamma,1/4]\ ,\ \ \alpha+\gamma=\beta+1/6.$$

Тогда, решение схемы (9) аппроксимирующего решения задачи (29) такого, что $u(x,t)\in L_2\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\in C\left\{[0,T];W_2^2(\Omega)\right\}$ верна следующая оценка точности

$$\left\|u_h(x,t)-y(x,t)\right\|_0+\sqrt{\delta\int_0^t\left\|u_h(x,t')-y(x,t')\right\|_1^2 dt'}+\left\|\int_0^t\left[u_h(x,t')-y(x,t')\right]dt'\right\|_1\leq$$

$$\leq M\left\{\tau^3\left(\sqrt{(1+\delta)}\max_t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2+\sqrt{(2+\delta)\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right)+\right.$$

$$\left.+h^k\sqrt{(1+\delta)\int_0^t\left\|u(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}\right\}\quad\forall t\in[0,T],\ M=M(k_0,k_1,T).$$

В четвертом параграфе построены и исследованы схемы метода конечных элементов для решения линейных задач теории нестационарных внутренних волн. Рассматривается задача для уравнения движения внутренних волн, распространяющихся в стратифицированной жидкости

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(L_1u)+L_2u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T=\{x\in\Omega,t\in(0,T]\}\,,\tag{31}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\quad u=0,\quad x\in\Gamma=\partial\Omega,\quad t\in[0,T].$$

Здесь L_1,L_2 – эллиптические операторы

$$L_\alpha u=\sum_{m=1}^{p_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k_m^\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)-q^\alpha(x)u,\quad x\in\Omega\subset R^{p_\alpha}\ ,\ p_\alpha=1,2,...,$$

$$0<k_0\leq k_m^1(x)\leq k_1,\ 0\leq k_0\leq k_m^2(x)\leq k_1,\ q^\alpha(x)\geq 0,\ \alpha=1,2\ .$$

Заметим, что размерность операторов L_1,L_2 может быть различной $p_1\neq p_2$, т.е. оператор L_1– сильно эллиптический, а L_2 может быть вырожденным оператором, содержащим не все вторые производные по переменным x_m. Например, для значения $p=2$: $L_1 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, а $L_2 u=\omega_0^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, где ω_0^2 – квадрат частоты Вяйсяля–Брента.

Аппроксимируя пространственные переменные методом конечных элементов, к задаче (31) ставится в соответствие дифференциальная задача Коши по времени для приближенного решения $u_h(t)$:

$$D\frac{d^2 u_h(t)}{dt^2}+Au_h(t)=f_h(t),\ u_h(0)=u_{0,h},\frac{du_h}{dt}(0)=u_{1,h}. \qquad (32)$$

Здесь операторы D, A действует из H_h в H_h.

Далее для этой задачи опять, теперь по переменной t применяется метод конечных элементов, в результате чего получена схема повышенного порядка точности. Получены соответствующие теоремы в сильных и слабых нормах. Например, доказана следующая теорема.

Теорема 11. Пусть $D^*=D>0,\ A^*=A>0$. и выполнено условие устойчивости $D-m\tau^2 A\geq \varepsilon D,\ 0<\varepsilon<1,\ m=\max\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\alpha+\gamma=\beta+1/6$. Тогда, решение схемы (7) аппроксимирующего решения задачи (31) такого, что $u(x,t)\in L_2([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\in C([0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega))$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\in C\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\}$ верна следующая оценка точности

$$\|u(x,t)-y(x,t)\|_1+\left\|\int_0^s [u(x,t')-y(x,t')]dt'\right\|_1 \leq$$

$$\leq M\left\{\tau^3\left(\max_t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right)+h^k\left(\max_t\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{k+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t')\right\|_{k+1}^2 dt'}+\sqrt{\int_0^t\|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'}\right)\right\} \quad \forall t\in[0,T],\ M=M(k_0,k_1,k_2,T)>0.$$

В пятом параграфе построены и исследованы схемы метода конечных элементов для решения краевых задач движения гравитационно–гироскопических волн жидкости:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Delta_3 u-\rho^2 u\right]+\omega_0^2\Delta_2 u+\theta^2\left[\Delta_1 u-\rho^2 u\right]=f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \qquad (33)$$

$$u=0,\ x\in\Gamma_1;\ \frac{\partial u}{\partial n}=0,\ x\in\Gamma_2;\ t\in[0,T],\ u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x).$$

Здесь $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, ω_0 - частота Вяйсяля-Брента; $\rho, \theta - const > 0$, $\Omega = \{0 < x_k < l_k, k = 1,2,3\}$, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (0,T]\}$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$.

Аппроксимируя пространственные переменные методом конечных элементов, к задаче (33) ставится в соответствие дифференциальная задача Коши по времени (32) для приближенного решения $u_h(t)$.

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 12. Пусть операторы задачи (32) $A^* = A > 0$, $B^* = B \geq 0$, $D^* = D > 0$, $AD = DA,\ AB = BA,\ DB = BD$ и выполнены условия устойчивости

$$D_\omega = D - \omega\tau^2 A \geq lD,\ \ 0 < l < 1,\ \ \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4]\ ,\ \ \alpha + \gamma = \beta + 1/6.$$

Тогда, решение схемы (7) аппроксимирующего решения задачи (33) такого, что

$$u(x,t) \in L_2\left\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\right\},\ \ \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\left\{[0,T]; W_2^2(\Omega)\right\}$$

верна следующая оценка точности

$$\|u_h(x,t) - y(x,t)\|_0 + \sqrt{\delta\int_0^t \|u_h(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} + \left\|\int_0^t [u_h(x,t') - y(x,t')]dt'\right\|_1 \leq$$

$$\leq M\left\{\tau^3\left(\sqrt{(1+\delta)}\max_t \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t)\right\|_2 + \sqrt{(2+\delta)\int_0^t \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t')\right\|_2^2 dt'}\right) + \right.$$

$$\left. + h^k\sqrt{(1+\delta)\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'}\right\}\quad \forall t \in [0,T],\ M = M(k_0, k_1, T).$$

Четвертая глава диссертации, именуемая **«Дисперсионный анализ разностных схем»** посвящена исследованию дисперсионных свойств различных разностных схем, построенных в предыдущих главах. Устанавлены связь между точностью и дисперсионностью разностной схемы. При отборе из множества разностных схем одинакового порядка точности для уравнений гиперболического типа предлагается использовать сравнение их дисперсионных свойств. Это дает возможность отбирает из них самые лучшие в смысле передачи основных свойств дифференциальной задачи. Указано, что схема повышенного порядка точности дает качественное сеточное решение, что подтверждается численными примерами. Кроме того, указаны различные способы повышения порядка дисперсионности.

В первом параграфе четвертой главы установлена связь между точностью и дисперсионностью разностной схемы.

Во втором параграфе исследованы дисперсионные свойства разностных схем для системы двумерных уравнений акустики, построенной и исследованной в параграфе 2.4. Доказано, что эти схемы имеют второй порядок дисперсионности. Кроме того, исследуются дисперсионные свойства известной двухшаговой схемы Лакса–Вендроффа. Например, сравнены коэффициенты главных членов разложения погрешности дисперсии: схема на минимальном шаблоне

$$d_1 = -\frac{1}{24}\left(h_1^2 \cos^4\phi + h_2^2 \sin^4\phi - \tau^2\right),$$

усредненная схема

$$d_2 = -\frac{1}{24}\left[h_1^2 \cos^4\phi + h_2^2 \sin^4\phi + 3(h_1^2 + h_2^2)\sin^2\phi\cos^2\phi - \tau^2\right],$$

схема Лакса–Вендроффа

$$d_3 = -\frac{1}{24}\left[4\left(h_1^2 \cos^4\phi + h_2^2 \sin^4\phi\right) + 3(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)\sin^2\phi\cos^2\phi - 4\tau^2\right].$$

При выполнении условия устойчивости $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \le 1$ имеет место оценка $|d_1| \le |d_2| \le |d_3|$. Это означает, что центрированная схема на минимальном шаблоне имеет наименьшую дисперсию.

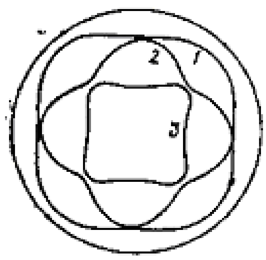


Рис. 1. Дисперсионные кривые:
1 – схема на минимальном шаблоне;
2 – усреденая схема;
3 – схема Лакса-Вендроффа.

Более полную картину дисперсии трех схем дает рис. 1, на котором изображены графики скоростей гармоник $\widetilde{\vartheta} = \widetilde{\vartheta}(\varphi)$ при $æ = 8,\ h_1 = h_2 = 0.1,\ \tau = 0.05$ для схемы на минимальном шаблоне − линия 1, усредненная схема − линия 2, схема Лакса-Вендоффа–линия 3. Здесь же окружностью изображен график скорости гармоник системы двумерных уравнений акустики.

Кроме того, показано, как с помощью дисперсионного соотношения для разностной схемы можно исследовать качество передачи схемой гармонических колебаний с различным направлением распространения. Далее указаны способы улучшения дисперсионных свойств разностных схем на основе минимизации дисперсии выбором шагов сетки. Проведен вычислительный эксперимент, подтверждающий полученные теоретические результаты.

В третьем параграфе исследованы дисперсионные свойства разностных схем для системы динамической теории упругости, построенной и исследованной в третьей главе. Доказаны, что эти схемы имеют второй порядок дисперсионности. Получено, максимально допустимое условие устойчивости рассматриваемых схем $\tau^* = h_1 h_2 / [c_1 \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\,]$. Проведены вычислительные эксперименты, в результате чего доказаны преимущества той или иной схемы по отношению построения самой схемы, шагов сетки и направлении вдоль осей x_1, x_2.

В четвертом параграфе на основе дисперсионного анализа указаны наилучшие схемы из семейства многопараметрических разностных схем повышенного порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, построенной и исследованной в первой главе.

В приложении приведены различные тестовые расчёты для численного моделирования волновых уравнений, уравнения движения вязкоупругих сред, уравнения внутренних волн в стратифицированной жидкости и уравнения движения гравитационно-гироскопических волн жидкости. Полученные различные тестовые расчёты подтверждают теоретические результаты данной диссертации и показывают преимущества перед другими аналогичными численными методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению разностных схем высокого порядка точности для нестационарных уравнений и их систем. Основные результаты работы можно охарактеризовать следующим образом:

построены новые методы повышенного порядка точности решения абстрактной задачи Коши для системы уравнений первого и второго порядка, получены теоремы о точности этих методов;

получена новая априорная оценка для двухслойной операторно–разностной схемы в негативной метрике для случая кососимметричного оператора;

построены новые центрированные разностные схемы и получены новые согласованные с гладкостью оценки точности решений задач акустики и динамической теории упругости в скоростях–напряжениях с обобщенными решениями в интерполяционных пространствах;

построены центрированные разностные схемы и получены оценки скорости сходимости решений системы уравнений акустики в случае цилиндрической и сферической симметрии с обобщенными решениями;

построены новые схемы повышенного порядка точности по времени и пространству для уравнений внутренних волн жидкости, движения вязкоупругих сред, движения гравитационно–гироскопических волн жидкости и получены соответствующие оценки точности;

определены дисперсионные свойства центрированных разностных схем для систем уравнений акустики, динамической теории упругости в скоростях–напряжениях для выбора оптимальной разностной схемы и разработаны различные способы повышения порядка дисперсионности;

проведены вычислительные эксперименты и визуализации для численного моделирования волнового уравнения, уравнения движения внутренних волн жидкости, уравнения движения вязкоупругих сред, уравнения движения гравитационно-гироскопических волн жидкости на основе построенных многопараметрических разностных схем.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

UTEBAEV DAULETBAY

DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL SIMULATION OF NONSTATIONARY PROCESSES WITH GENERALIZED SOLUTIONS

01.01.03 Computational and discrete Mathematics
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCAS

TASHKENT – 2019

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.DSc/FM12

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Aripov Mirsaid Mirsiddikovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Imomnazarov Kholmatzon Khudaynazarovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor (Russia, ICMMG)
	Aloev Rakhmatulla Djuraevich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Khuzhayorov Bakhtiyor Khuzhayorovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**University of World Economy and diplomacy**

Defense will take place on "____" __________ 2019 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, 4. E-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University Str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____" __________ 2019.
(mailing report № _______on "____"___________2019).

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
On award of scientific degrees, D.F.M.S.

Z.KH. Yuldashev
Chairman of Scientific Seminar undeScientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. For non-stationary problems in the first stage, the finite element method is used to construct a semi-discrete model (continuous in time), which is a Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. Therefore, the urgent task is to develop a technology for constructing a multiparameter family of finite element approximations of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations using a time variable based on splines of degree higher than the first, a method for obtaining estimates of the accuracy of the constructed schemes and developing cost-effective algorithms for their implementation.

The nature of shock waves in gases, liquids, and solids described by non-stationary equations is often such that solutions to their mathematical models must be sought in classes of generalized solutions. Consequently, the construction of approximate methods that allow finding solutions to these problems with high accuracy with natural requirements for the smoothness of the source data is considered one of the urgent problems of the theory of numerical methods.

The aim of the work construction and substantiation of difference schemes of a higher order of accuracy for non-stationary equations of continuum mechanics, both for smooth and non-smooth solutions. Obtaining consistent estimates of the rate of convergence of the constructed numerical methods. Investigation of their dispersion properties, recommendation for choosing from a family of circuits with parameters that are optimal in the accuracy of transfer of the main features of a differential solution.

The tasks of research work are:

construction high-accuracy multiparameter schemes for the abstract Cauchy problem for equations of the first and second orders;

obtaining consistent with the smoothness of the solution estimates of the accuracy of difference schemes in interpolation spaces for systems of first-order hyperbolic equations;

building a higher accuracy of the space and time finite element method schemes for nonstationary partial differential equations and obtaining accuracy estimates with minimal smoothness requirements;

determination of the dispersion properties of difference schemes with the aim of choosing the order-optimal dispersion of difference schemes from a certain class of difference schemes;

application of the constructed new difference schemes for the numerical simulation of some non-stationary problems of continuum mechanics.

The object of research work the object of research is the non-stationary problems of continuum mechanics.

Scientific novelty of the research work is as follows: The thesis work is theoretical in nature and represents a unified and complete study in the construction of numerical methods of increased order of accuracy for solving non-stationary problems of continuum mechanics. It built a new class of difference schemes based on the finite difference method and the finite element method. The constructed schemes are fully justified and tested for specific tasks.

The outline of the thesis. The scientific novelty of the research is as follows:

new methods of increased order of accuracy of solving the abstract Cauchy problem for the system of equations of the first and second order are constructed, theorems on the accuracy of these methods are obtained;

a new a priori estimate was obtained for a two-layer operator – difference scheme in the negative metric for the case of an skew-symmetric operator;

new centered difference schemes were constructed and new accuracy estimates were obtained for the accuracy of solutions of acoustics and dynamic elasticity in velocity – stress problems with generalized solutions in interpolation spaces;

built and obtained estimates of the rate of convergence and accuracy of the centered difference schemes for the system of acoustic equations in the case of cylindrical and spherical symmetry with generalized solutions;

built new schemes of higher order accuracy in time and space for the equations of internal waves of the fluid, the movement of viscoelastic media, the movement of gravitational-gyroscopic waves of the liquid and obtained corresponding estimates of accuracy;

studies of the dispersion properties of centered difference schemes for systems of acoustics equations, dynamic theory of elasticity in speeds – voltages for the selection of the optimal difference scheme were carried out and various methods were developed to increase the order of dispersion;

computational experiments and visualizations were carried out for numerical modeling of the wave equation, equations of motion of internal waves of a fluid, equations of motion of viscoelastic media, equations of motion of gravitational-gyroscopic waves of a fluid, based on the constructed multiparameter difference schemes.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Moskalkov M.N., Utebaev D. Accuracy of the «Cross» Difference Scheme for the System of Acoustic Eqations // Journal of Mathematical Sciences, 1991, Vol. 54, No. 2, Pp. 773–780: doi.org/10.1007/BF01097586. (№11. Springer. IF=0.3)
2. Moskalkov M.N., Utebaev D. Convergence of Centered Difference Schemes for a System of Two–Dimensional Equations of Acoustics // Journal of Mathematical Sciences, 1992, Vol. 58, No. 3, Pp. 229–235: doi.org/10.1007/BF01098331. (№11. Springer. IF=0.3)
3. Moskalkov M.N., Utebaev D. Investigation of Economical Difference Systems for Dynamical Problems in Elasticity Theory in a Class of Nonsmooth Solutions // Journal of Mathematical Sciences, 1993, Vol. 67, No. 3, Pp. 3042–3047: doi.org/10.1007/BF01098137. (№11. Springer. IF=0.3)
4. Moskalkov M.N., Utebaev D. Comparison of Dispersion Properties of Some Difference Schemes for the System of Two– Dimensional Equations of Acoustics // Journal of Mathematical Sciences, 1994, Vol. 72, No. 3, Pp. 3080–3085: doi.org/10.1007/BF01259475. (№11. Springer. IF=0.3)
5. Утебаев Д. Априорные оценки для двухслойной операторно–разностной схемы с кососимметрическим оператором // ДАН РУз., Сер. Математика, технические науки, естествознание, 2005, №2, С. 14–18. (01.00.00, №7)
6. Бозоров М.Б., Утебаев Д., Юлдашев З.Х. Разностные схемы для второй краевой задачи динамической теории упругости // Вестник НУУз., серия механика-математика, 2006, № 2, С. 82–83. (01.00.00, №8)
7. Утебаев Д. Об одном методе численного решения операторного дифференциального уравнения второго порядка // ДАН РУз., Сер. Математика, технические науки, естествознание, 2007, №1, С. 31–34. (01.00.00, №7)
8. Утебаев Д. Численное решение линейных нестационарных задач теории внутренних волн // ДАН РУз., Сер. Математика, технические науки, естествознание, 2008, №3, С. 49–53. (01.00.00, №7)
9. Москальков М.Н., Утебаев Д. О сходимисти схемы метода конечных элементов для гиперболического уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Узбекский математический журнал (УзМЖ), 2009, № 2, С. 119–128. (01.00.00, №6)
10. Утебаев Д., Маматкулов М., Бабакаев С.Н. О решении задач при колебательном режиме изменения давления релаксирующей жидкости в трубе // Журнал проблемы механики, 2009 , №5-6, С.129-133. (01.00.00, №4)
11. Утебаев Д., Маматкулов М., Бабакаев С.Н. Исследование дисперсионных соотношений для уравнений релаксирующей жидкости // Журнал проблемы механики, 2009 , №5-6, С.53-56. (01.00.00, №4)

12. Moskalkov M.N., Utebaev D. Comparison of Some Methods for Solving the Internal Wave Propagation Problem in a Weakly Stratified Fluid // Mathematical models and Computer Simulations, 2011, Vol. 3, No. 2, Pp. 264–271: DOI:10.1134/S2070048211020086. (№11. Springer. IF=0.340)
13. Moskalkov M.N., Utebaev D. Convergence of the Finite Element Scheme for the Equation of Internal Waves // Cybernetics and Systems Analysis, 2011, Vol. 47, No. 3, Pp. 459–465. (№11. Springer. IF=0.24)
14. Москальков М.Н., Утебаев Д., Утебаев Б.Д. Разностные схемы повышенной точности для решения уравнений с сильной дисперсией // Узбекский математический журнал (УзМЖ), 2017 г., № 2, С. 98–108. (01.00.00, №6)
15. Арипов М.М., Утебаев Д., Утебаев Б.Д. Схемы повышенной точности для нестационарных задач конвекции–диффузии // Научный журнал «Проблемы вычислительной и прикладной математики», ТУИТ, 2019, № 2, С. 5–13. (01.00.00, №9)

II бўлим (Часть II; Part II)

16. Утебаев Д. Разностные схемы для гиперболических систем уравнений с обобщенными решениями. Монография. – Т.: «Фан ва технология», 2017. – 236 С.
17. Утебаев Д., Москальков М.Н. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. Монография. – Т.: «Фан ва технология», 2012. – 176 С.
18. Утебаев Д., Бабакаев С.Н. Исследования взаимодействия газожидкостных систем численными методами. Монография. – Нукус: «Билим», 2004. – 152 С.
19. Утебаев Д., Хусайнов Д.Я., Кожаметов А. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. Монография. – Нукус: «Билим», 1992. – 140 С.
20. Утебаев Д. *A*–устойчивая схема для нестационарного уравнения первого порядка // Вестник КК филиала АН РУз., Нукус, 1989, № 1. – С. 12–13. (05.00.00, №19)
21. Утебаев Д. Численная реализация одной схемы метода конечных элементов // Вестник КК отд. АН РУз., Нукус, 2005, №3, С. 18. (05.00.00, №19)
22. Утебаев Д. Построение и исследование неявных разностных схем для системы одномерных уравнений акустики // Вестник КК отд. АН РУз., Нукус, 2005, №3, С. 14–17. (05.00.00, №19)
23. Утебаев Д. Численное моделирование колебания струны методом конечных элементов // Вестник КК отд. АН РУз., Нукус, 2007, № 4, С. 5–11. (05.00.00, №19)
24. Moskalkov M.N., Utebaev D. Investigation of Difference Schemes of Finite Element Method for Second–Order Unsteady–State Equations // J. Comput. Appl. Math., No. 1(92), Kiev, 2005, Pp. 70–76.

25. Утебаев Д. Оценки точности схемы метода конечных элементов по времени и по пространству для параболических уравнений. Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики, 2005, №4-5, С. 99-103. (05.00.00, №5)
26. Утебаев Д. Решение краевой задачи для уравнения Фохта методом конечных элементов // Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики, 2006, №1, С. 73–77. (05.00.00, №5)
27. Утебаев Д. Побудова схем методу скінченних елементів для рівняння коливання з диссипацією // Вісник Київ. нац. унів. Сер. Кібернетика. – Київ, 2006, № 7, С. 48–51.
28. Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для уравнения колебания с диссипацией // Вісник Київ. нац. унів., Сер. фіз.–мат. науки, Київ, 2006, № 4, С. 232–237.
29. Utebaev D. Errors Estimates Scheme Finite Element Method Time–Dependent and Space Variations of Second Order Hyperbolic–Type Partial Differential // Bulletin of the University of Kiev, Ser.: Physics & Mathematics, Kiev, 2007, № 1, Pp. 198–200.
30. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование сходимости метода конечных элементов для уравнения Фохта в слабой метрике // Журнал обчислювальної та прикладної математики, Київ, 2007, №2(95), С 81 – 87.
31. Moskalkov M.N., Utebaev D. Finite Element Method for Equation With Strong Dispersion // Bulletin of the University of Kiev, Ser.:Cybernetics, Kiev, 2007, № 7, Pp. 33–36.
32. Москальков М.Н., Утебаев Д., Завиша В.В. Дослідження збіжності методу скінченних елементів для рівняння із сильною дисперсією в слабкій метриці // Вісник Київского Національного університету імені Т. Шевченка, Сер. фіз.–мат. Науки, Київ, 2008, № 2, С. 111 – 115.
33. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование сходимости схемы метода конечных элементов для параболического уравнения в слабой метрике // Вісник Київского Національного Університету, Сер. Кібернетика, 2009, № 9, С. 21–23.
34. Бабакаев С.Н., Утебаев Д., Умаров Р.Н. Нестационарные нелинейные задачи фильтрации жидкости и газа в гидродинамически взаимодействующих пластах // Архитектура, строительство, дизайн. ТАСИ, 2010, № 1-2, С. 98-101. (05.00.00, №4)
35. Бабакаев С.Н.,Утебаев Д., Умаров Р.Н. Нестационарная фильтрация и взаимодействие паластов в условиях продвижения подошвенных вод // Архитектура, строительство и дизаин, ТАСИ, 2010, № 4, С. 46-47. (05.00.00, №4)
36. Бабакаев С.Н., Умаров Р.Н., Утебаев Д. Нестационарная фильтрация и взаимодействие пластов в условиях продвижения краевых вод // Архитектура, строительство и дизаин, ТАСИ, 2011, № 2, С. 49-52. (05.00.00, №4)

37. Moskalkov M.N., Utebaev D. Finite Element Method for the Gravity–Gyroscopic Wave Equation // J. Comput. Appl. Math, No. 2(101), Kiev, 2010, Pp. 97–104.
38. Utebaev D. Assessment of Centered Difference Schemes Accuracy for Dynamic Tasks of the Theory of Elasticity in Interpolation Space // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 2012, Vol. 3, № 2, Pp. 176–181.
39. Utebaev D. Finite Element Method for Internal Wave Equation for Stratified Fluid // Computer and Information Science, Canada, 2012, Vol. 5, №5, Pp. 88–92: DOI: 10.5539/cis.v5n5p88.
40. Утебаев Д., Садыкова Л. У., Асанова У.С. Согласованные оценки скорости сходимости центрированных разностных схем для системы уравнений Максвелла // Вестник КК отд. АН РУз., Нукус, 2012, № 2, С. 5-10. (05.00.00, №19)
41. Moskalkov M.N., Utebaev D. Finite Element Solution of a Problem for Gravity–Gyroscopic Wave Equation in the Time Domain // Applied Mathematics, 2014, Vol. 5, No. 8, Pp. 1200–1212: DOI. arg/10.4236/am.2014.58105.
42. Утебаев Д., Бабакаев С.Н., Шелмуханов Г.С. Численное моделирование уравнения вязкоупругих сред методом конечных элементов // Вестник КК отд. АН РУз., г. Нукус, 2014 г., № 1, с. 5–11. (05.00.00, №19)
43. Утебаев Д., Утебаев Б.Д. О сходимости схемы метода конечных элементов для краевых задач деформирования вязкоупругих сред // Вестник КК отд. АН РУз., г. Нукус, № 2, 2015 г. С. 5–8. (05.00.00, №19)
44. Utebaev D. Solution of the Neumann problem with respect to the eqation for gravity–gyroscopic waves by the finite element method» // Journal of Advances in Applied Mathematics, Vol. 1, No. 2, 2016, Pp. 107–119 (Isaac Scientific Publishing).
45. Утебаев Д. Дисперсия разностных схем для системы одномерных уравнений акустики // Проблемы архитектуры и строительства, Ташкент, 2005, С. 98–101.
46. Москальков М.Н., Утебаев Д. Численное моделирование колебания мембраны методом конечных элементов // Вестник ТУИТ, Ташкент, 2007, № 2, С. 64–67.
47. Утебаев Д., Бекниязова Э.С. Исследование дисперсионных свойств разностных схем для динамических задач теории упругости // Вестник Каракалпакского госуниверситета, Нукус, 2009, № 2, С. 26–29.
48. Утебаев Д., Абдикаримов Р.А., Ядгаров Ш.А. Численное моделирования уравнение sin-Гордона методом конечных элементов высокого порядка точности // Вестник Каракалпакского госуниверситета, 2009, № 4, С.16-20.
49. Утебаев Д., Утебаев Б.Д. Разностные схемы повышенной точности для нестационарного уравнения переноса в классе негладких решений // Вестник КК отд. АН РУз., Нукус, 2016, №4(245), С. 5–12. (05.00.00, №19)
50. Утебаев Д. Экономичные факторизованные разностные схемы для системы двумерных уравнений акустики // Сб. «Приближенные методы

решения задач математической физики и оптимизации, Нукус, 1989, С. 3–10.
51. Ахметов Б.С., Утебаев Д. Алгоритм оптимального восстановления функции эрмитовыми сплайнами с заданной тоностью // X1 науч.–теор. конф. проф. –преп. состава НГУ: Тез. докл., Нукус, 1987, С. 3–4.
52. Утебаев Д. Разностные схемы для смешанных краевых задач динамической теории упругости // Труды 1 научно–мет. конф. проф. преп. и студ. Составов, Нукус, 1993, С. 3–6.
53. Утебаев Д., Касымов М. Центрированные разностные схемы для динамических задач теории упругости // Проблемн. вопросы мех. и машиностр: Тезисы док. междун. науч. –прак. конф., Ташкент, 1993, С. 260.
54. Москальков М.Н., Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для нестационарных уравнений второго порядка // Питання оптимізації обчислень: Праці міжн. конф., Київ, 2005, С. 156–157.
55. Утебаев Д. Схема метода конечных элементов для волнового уравнения с диссипацией // Тез. докл. XI міжнар. конф. ім. акад. М.Кравчука: Київ, 2006, С. 276.
56. Москальков М.Н., Утебаев Д. Об одном методе численного решения уравнения с сильной дисперсией // Питання оптимізації обчислень: Праці міжн. конф., Київ, 2007, С. 210.
57. Moskalkov M.N., Utebaev D. On One Numerical Method of Stratifiable Liquid Fluidflaw Equation // International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation»: Kiev, 2007, P. 352.
58. Москальков М.Н., Утебаев Д. О сходимости схемы метода конечных элементов высокого порядка точности для параболического уравнения // International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation» Kiev, 2009, С. 79.
59. Утебаев Д., Бабакаев С.Н. Численное моделирование одномерных продольных волн в двухкомпонентном полупространстве методом конечных элементов // Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики». Ташкент, 2009, С. 525-527.
60. Москальков М.Н., Утебаев Д. Метод скінчених елементів для моделювання нестаціонарних коливань стратифікованої рідини // Материалы Международной конференции «Вычислительная математика и математические проблемы механик»: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, Львов, 2009, С. 47–48.
61. Утебаев Д., Садыкова Л. У., Асанова У.С. Оценки точности разностных схем для системы уравнений Максвелла // Материалы республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г. Нукус, 2012, С. 202–204.

62. Утебаев Д. О точности схемы метода конечных элементов для уравнений нестационарных колебаний гравитационно–гироскопических волн в стратифицированной жидкости // Материалы республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г. Нукус, 2012, С. 198–202.
63. Москальков М.Н., Утебаев Д. О сходимости разностных схем для задачи динамики вязкой стратифицированной жидкости // Материалы международной конференции «Вычислительная и прикладная математика» посвященной 90–летию со дня рождения академика И.И. Ляшко, г. Киев, 10–11–сентябрь 2012, С. 71-72.
64. Москальков М.Н., Утебаев Д. О сходимости схемы метода конечных элементов для гиперболических систем уравнений // International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation», Kiev, 2013, P. 113.
65. Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Утепов Ж.Б. Об одной схеме повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation», Kiev, 2013, P. 134.
66. Москальков М.Н., Утебаев Д. Методы конечных элементов высокого порядка точности для решения нестационарных краевых задач // Труды IV–Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологии – Аль – Хорезми 2014», Самарканд, 15–17 сентябрь 2014, С. 152–155.
67. Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Бекимбетов Б.А. Исследование устойчивости разностных схем для нелинейных параболических задач // International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigation»: Kiev, 2015, P. 119.
68. Москальков М.Н., Утебаев Д., Утебаев Б.Д. Метод конечных разностей высокого порядка точности для решения уравнений с сильной дисперсией. // Труды международной научной конференции «Вопросы оптимизации вычислений», посвященная 85–летию со дня рождения академика В.С. Михалевича, Украина, Закарпатская обл., 2015, С. 71.
69. Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Ярлашов Р.Ш. О устойчивости нелинейных разностных уравнений и ее некоторые приложения // Тезисы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль–Хорезми 2016», 9–10 ноябрь 2016 г., г. Бухара, Бухарский Государственный университет, С. 141 – 144.
70. Арипов М.М., Утебаев Д. Схемы повышенной точности для одной обратной задачи нестационарной теплопроводности // Uzbek–Israel international Scientific Conference «Contemporary problems in mathematics and physics», October 6–10, 2017, Tashkent, Pp. 138–139.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида 2019 йил ўтказилди.

Босишга рухсат этилди . Ҳажми 4,0 босма табоқ.
Бичими 60x84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма .

М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди