ГРАДИЕНТНО ПОДОБНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ C_*^1

Ш.Ш.Бабаджанов

Аннотация: *построено градиентно подобное отображение для основного функционала вариационного исчисления заданного в пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[0,1]$ *функций* $x(s)$, *удовлетворяющих условию* $x(0)=x(1)=0$.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, банахово пространство, основной функционал вариационного исчисления, градиент функционала, градиентно подобное отображение.*

C_*^1 БАНАХ ФАЗОСИДА ВАРИАЦИОН ҲИСОБ АСОСИЙ ФУНКЦИОНАЛИНИНГ ГРАДИЕНТ ЎХШАШ АКСЛАНТИРИШИ

Ш.Ш.Бабаджанов

Аннотация: $[0,1]$ *кесмада узлуксиз дифференцияланувчи ва* $x(0)=x(1)=0$ *шартни қаноатлантирувчи* $x(s)$ *функциялар фазосида берилган вариацион ҳисоб асосий функционали учун градиент ўхшаш акслантириш қурилган.*

Таянч сўзлар: *дифференциал тенглама, банах фазоси, вариацион ҳисоб асосий функционали, функционал градиенти, градиент ўхшаш акслантириш.*

A GRADIENT-LIKE MAPPING OF THE FUNDAMENTAL FUNCTIONAL OF THE CALCULUS OF VARIATIONS IN A BANACH SPACE C_*^1

Sh.Sh.Babadjanov

Annotation: *A gradient-like mapping is constructed for the basic functional of the calculus of variations of functions defined continuously on the interval* $[0,1]$ *and satisfying the condition* $x(0)=x(1)=0$.

Keywords: *differential equation, banach space, basic functional of the calculus of variations, gradient of the functional, gradiently similar mapping.*

§1. Введение

В работах [1]-[4] исследованы следующие свойства функционалов классического вариационного исчисления в функциональных пространствах: непрерывность, сильная непрерывность, невырожденность и вырожденность критических точек, устойчивость критических точек, связь между критическими точками и решениями дифференциальных уравнений с градиентно подобными правыми частями. В работах [5]-[7] установлено, что такие же функционалы возникают при исследовании модельных нелинейных краевых задач, возникающих в математической физике. Например, в работе [7] исследования разрешимости модельной нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} &-\psi''(x)+\left(1+\frac{c}{x^2}\right)\psi(x)=\frac{1}{x^\alpha}\left|\psi(x)\right|^{k-1}\psi(x), \quad x>0, \\ &\psi(0)=0, \quad \psi(\infty)=0. \end{aligned} \tag{1}$$

осуществляется с помощью исследования свойств нелинейного функционала вида

$$F_{k,\alpha}(f)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{|f(s)|^{k+1}}{s^\alpha}dx \tag{2}$$

в пространстве $H_0^1=\{f : f, f'\in L_2(0,\infty),\ f(0)=0\}$.

Отметим, что различные физические модели, используемые в теории элементарных частиц ([8]), приводят к рассмотрению задачи вида (1).

При исследования свойств решений дифференциальных уравнений с градиентно подобными правыми частями возникает вопрос построении градиенто подобного отображения. В работе [4] для основного функционала вариационного исчисления

$$F(x)=\int\limits_0^1 f(s,x(s),x'(s))ds \tag{3}$$

заданного в банаховом пространстве

$$C_0^1=\{x\in C^1[0,1]: x(0)=x(1);\ x'(0)=x'(1)\}$$

построено градиентно подобное отображение.

Через C_*^1 обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $x(s)$, удовлетворяющих условию $x(0)=$ $=x(1)=0$, т.е.

$$C_*^1=\{x\in C^1[0,1]: x(0)=x(1)=0\}$$

с нормой

$$\|x\| = \max_{0\le s\le 1}|x(s)| + \max_{0\le s\le 1}|x'(s)|.$$

В настоящей работе рассмотрим вопрос о построении градиентно подобного отображения G для функционала (1) заданного в пространстве C_*^1.

§2. Построение градиентно подобного отбражения

Пусть E – банахово пространство, и $G: E \to E$ – непрерывное отображение.

Определение. Непрерывное отображение G , называется градиентно подобным отображением, если оно удовлетворяет условию:

Существует дифференцируемый по Фреше функционал $F: E \to R^1$ для которого

а) $\nabla F: E \to E^*$ – непрерывное ограниченное отображение ($\nabla F(x)$– градиент функционала F в точке $x \in E$);

б) для любого $x \in E$ $\nabla F(x) = \Theta$ тогда и только тогда, когда $G(x) = 0$;

в) значение $(\left(\nabla F(x), G(x)\right)$ функционала $\nabla F(x)$ на элементе $G(x)$ положительно: $(\nabla F(x),\ G(x)) > 0$ при $G(x) \ne 0$.

Заметим, что когда E является гильбертовым пространством, и F - функционал, заданный в этом пространстве, сам градиент $\nabla F(x)$ служит градиентно подобным отображением для функционала F .

В дальнейшем всюду будем предполагать, что функция $f(s,x,y)$ в функционале (3) непрерывна на $[0,1] \times R^2$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда в каждой точке $x \in C_*^1$ существует градиент (первая производная Фреше)

$$(\nabla F(x), h) = \int_0^1 \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x} h(s) + \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} ds$$

и $\nabla F: C_*^1 \to (C_*^1)^*$ – непрерывное отображение. Для построения градиентно подобного отображения введем следующий интегральный оператор

$$\Gamma(a,b)=\int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt+\int_0^1 K_0(s,t)b(t)dt, \qquad a,b\in C[0,1]$$

где

$$K_0(s,t)=\begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t), & \text{если } 0\le s\le t\le 1\end{cases} \quad \text{и} \quad K_1(s,t)=\begin{cases} 1-s, & \text{если } 0\le t\le s\le 1,\\ -s, & \text{если } 0\le s\le t\le 1.\end{cases}$$

Лемма. Оператор Γ непрерывно действует из C_*^1 в C_*^1. Если $a(t)$, $b(t)\in C[0,1]$, то функция $y(s)=\Gamma(a,b)(s)$ является единственным решением задачи

$$y'=c(s)-\overline{c}, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0, \tag{4}$$

где $c(s)=a(s)-\int_0^s b(\tau)d\tau$, $\overline{c}=\int_0^1 c(s)ds.$

Доказательство. Найдем общее решение дифференциального уравнения из задачи (4):

$$y(s)=c+\int_0^s (c(\tau)-\overline{c})d\tau.$$

С учетом краевых условий имеем:

$$c=0, \quad y(s)=\int_0^s (c(\tau)-\overline{c})d\tau,$$

$$y(1)=\int_0^1 (c(\tau)-\overline{c})=\int_0^1 c(\tau)d\tau-\overline{c}=\overline{c}-\overline{c}=0.$$

Если $a(t)\equiv 0$, $b(t)\equiv 0$, то из

$$y'=0, \quad y(0)=0; \quad y(1)=0$$

следует, что $y(t)=0$, т.е. решение задачи (4) единственно. Таким образом,

$$\Gamma(a,b)(s)=\int_0^s (c(\tau)-\overline{c})d\tau=\int_0^s (a(t)-\int_0^t b(\tau)d\tau dt-s\int_0^1 (a(t)-\int_0^t b(\tau)d\tau)dt=$$

$$=\int_0^s a(t)dt-s\int_0^1 a(t)dt-\int_0^s\int_0^t b(\tau)d\tau dt+s\int_0^1\int_0^t b(\tau)d\tau dt=(1-s)\int_0^s a(t)dt+s\int_s^1 a(t)dt-$$

$$-\int_0^s (1-s)\int_0^t b(\tau)d\tau dt + s\int_s^1\int_0^t b(\tau)d\tau dt = \int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt - \int_0^s (1-s)(s-t)b(t)dt +$$

$$+\int_0^s s(1-s)b(t)dt + \int_s^1 s(1-t)b(t)dt = \int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt + \int_0^s (1-s)tb(t)dt +$$

$$+\int_s^1 s(1-t)b(t)dt = \int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt + \int_0^1 K_0(s,t)b(t)dt.$$

Для $a(t)$, $b(t)\in C[0,1]$ имеем:

$$\left|\Gamma(a,b)(s)\right| \le \int_0^1 \left|K_1(s,t)\right|\left|a(t)\right|dt + \int_0^1 \left|K_0(s,t)\right|\left|b(t)\right|dt \le$$

$$\le \int_0^1 \left|a(t)\right|dt + \int_0^1 \left|b(t)\right|dt \le \|a\|_{C[0,1]} + \|b\|_{C[0,1]},$$

$$\left|\Gamma(a,b)'(s)\right| \le \left|c(s)-\overline{c}\right| = \left|a(s) - \int_0^s b(\tau)d\tau - \int_0^1 c(s)ds\right| \le \left|a(s)\right| + \left|\int_0^1 b(t)dt\right| +$$

$$+\left|\int_0^1 \left(a(t) - \int_0^t b(\tau)d\tau\right)dt\right| \le 2\left(\|a\|_{C[0,1]} + \|b\|_{C[0,1]}\right);$$

$$\|\Gamma(a,b)\| \le 3\left(\|a\|_{C[0,1]} + \|b\|_{C[0,1]}\right).$$

Отсюда следует, что отображение

$$\Gamma : C[0,1]\times C[0,1] \to C_*^1$$

непрерывно. Лемма доказана.

В пространстве C_*^1 отображение G определим следующим образом

$$G(x) = \int_0^1 K_0(s,t)\frac{\partial f(t,x(t),x'(t))}{\partial x}dt + \int_0^1 K_1(s,t)\frac{\partial f(t,x(t),x'(t))}{\partial x'}dt \equiv \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'},\frac{\partial f}{\partial x}\right). \qquad (5)$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. Отображение G непрерывно действует из C_*^1 в C_*^1 и удовлетворяет условиям б), в).

Если к тому же функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ по переменным x и y удовлетворяет локальному условию Липшица, то отображение G удовлетворяет локальному условию Липшица.

Таким образом, отображение G, определяемое формулой (5), является градиентно подобным отображением для функционала (3).

Доказательство. В силу леммы очевидно, что

$$G: C_*^1 \to C_*^1$$

и непрерывно. Для любого $x \in C_*^1$ имеем:

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x} + G(x)(s) + \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} (G(x))'(s)ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^s \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x'(\tau))}{\partial x} d\tau - \gamma \right)' G(x)(s)ds + \int_0^1 \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} (G(x))'(s)ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\gamma - \int_0^s \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x'(\tau))}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} \right) (G(x))'(s)ds.$$

Обозначим

$$b(s) = \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x}, \qquad a(s) = \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'}$$

и положим $\qquad c(s) = a(s) - \int_0^s b(\tau)d\tau \quad$ и $\quad \gamma = -\overline{c}.$

Тогда имеем

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 (c(s) - \overline{c})G(x)(s)ds = \int_0^1 (\Gamma(a,b))'(s)(G(x))'(s)ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)' (s)(G(x))'(s)ds = \int_0^1 (G(x))(s))^2 ds.$$

Следовательно,

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 ((G(x))'(s))^2 ds \text{ для любого } x \in C_*^1.$$

Отсюда, если $(\nabla F(x), G(x)) = 0,$ то $G(x)(s) \equiv const$ и так как $G(x)(0) = G(x)(1) = 0$, поэтому $G(x)(s) \equiv 0$, т.е. условие в) выполнено.

Пусть $G(x)=\theta$. Тогда в силу выше проведенных рассуждений, для любого $h\in C_*^1$

$$(\nabla F(x),h)=\int_0^1\left(\Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'},\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)'(s)h'(s)ds=\int_0^1(G(x))'(s)h'(s)ds=0,$$

т.е. $\nabla F(x)=0$.

Обратно, пусть $\nabla F(x)=0$, тогда $(\nabla F(x),h)=0$ для любого $h\in C_*^1$, т.е. $\int_0^1(G(x))'(s)h'(s)ds=0$ для любого $h\in C_*^1$.

Применяя лемму Дю-Буа Реймонда, получим, что $G(x)\equiv const$, но $G(x)(0)=G(x)(1)=0$, следовательно, $G(x)\equiv 0$ т.е. условие б) выполнено.

Таким образом, мы показали, что условия б), в) выполняются.

Если функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ по переменным x и y удовлетворяет локальному условию Липшица, то из свойства оператора Γ очевидным образом вытекает, что отображение $G:C_*^1\to C_*^1$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Теорема доказана.

Литература

[1] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, Наука, М., 1975.

[2] Красносельский М.А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М, Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // Доклады Академии наук. 1978. Т. 240. №3. С. 530-533.

[3] Абдуваитов Х. А. К вопросу об устойчивости градиентных систем // Автомат. и телемех., 1987, № 6, 3–6.

[4] Бабаджанов Ш.Ш. Градиентно подобное отображение основного функционала вариационного исчисления в банаховом пространстве // Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1998, № 104. С. 69-82.

[5] Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Об ограниченных решениях нелинейного уравнения Шредингера на полуоси // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, № 1, с. 38-49.

[6] Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Асимптотика и существование ограниченных решений нелинейного уравнения Шредингера на полуоси // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, № 5, с. 651-656.

[7] Мухамадиев Э.М, Наимов А.Н. Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // «Математический сборник», 2011, том 202, №9, с.121-134.

[8]. Амирханов И.В, Жидков Е.П., Макаренко Г.И. Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля // Сообщения Объединенного института ядерных исследований, Р5-11705, Дубна, 1978. - 16 с.