Задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием

Қ.Х.Холбозоров, А.Р.Хашимов (Тошкент молияинститути)

1. Введение. Целью данной работы является исследование уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

в области $\Omega=\left\{(x,y,t): 0<x<1,\ \ 0<y<1,\ \ 0<t\le T\right\}$, с краевыми условиями

$$u(x,y,0)=0 \quad (x,y)\in\Omega_0 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(y,t)u(0,y,t)+\alpha_2(y,t)u_{xx}(0,y,t)=\varphi_1(y,t),\ u_x(0,y,t)=\varphi_2(y,t),\\ \alpha_3(y,t)u(1,y,t)+\alpha_4(y,t)u_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)u_{xx}(1,y,t)=\varphi_3(y,t),\end{array}\right\}, \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1(x,t)u(x,0,t)+\beta_2(x,t)u_{yy}(x,0,t)=\psi_1(x,t),\ u_y(x,0,t)=\psi_2(x,t),\\ \beta_3(x,t)u(x,1,t)+\beta_4(x,t)u_x(x,1,t)+\beta_5(x,t)u_{xx}(x,1,t)=\psi_3(x,t),\end{array}\right\}, \qquad (4)$$

где

$$\begin{array}{l}\varphi_1(y,t)\in C^{0,1}_{y,t}\left(\overline{\Omega_1}\right),\ \varphi_3(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_1}\right),\ \ \varphi_2(y,t)\in C^{0,1}_{y,t}\left(\overline{\Omega_2}\right),\\ \psi_1(x,t)\in C^{0,1}_{y,t}\left(\overline{\Omega_3}\right),\ \psi_3(x,t)\in C\left(\overline{\Omega_3}\right),\ \ \psi_2(x,t)\in C^{0,1}_{y,t}\left(\overline{\Omega_4}\right).\end{array} \qquad (5)$$

Здесь

$$\Omega_0(x,y,t)=\left\{(x,y,t): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, t=0\right\},$$
$$\Omega_1(x,y,t)=\left\{(x,y,t): x=0, 0\le y\le 1, 0\le t\le T\right\},$$
$$\Omega_2(x,y.t)=\left\{(x,y,t): x=1, 0\le y\le 1, 0\le t\le T\right\},$$
$$\Omega_3(x,y,t)=\left\{(x,y,t): 0\le x\le 1, y=0, 0\le t\le T\right\},$$
$$\Omega_4(x,y,t)=\left\{(x,y,t): 0\le x\le 1, y=0, 0\le t\le T\right\}.$$

Уравнения (1) является обобщениям уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (6)$$

в пространстве R^3. Уравнения (6) была исследована в работе ([1]). Здесь была построена фундаментальные решение уравнения (6) и разработана теория потенциалов, с помощью которого можно построит регулярное решение краевых задач для уравнения (5).

Отметим, что фундаментальные решение уравнения (1) и линейные уравнения Захарова-Кузнецова

$$u_t+u_{xxx}+u_{xyy}=0 \qquad (7)$$

имеют аналогичные асимптотические свойства на бесконечности ([2]-[7]). Уравнения Захарова-Кузнецова является (7) является одним из вариантов обобщения уравнение Кортевеге-де-Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустических волновых процессы в плазме ([2], [8]).

В настоящее время часто возникает задачи связанные с исследованием уравнений в частных производных, не принадлежащих ни к одному из классических типов. Поэтому в последние годы уделяется большое внимание исследованию таких неклассических уравнений, которые еще мало изучены ([7]-[14]).

2. Основная часть. Теперь мы будем рассматривать вопрос о корректности задачи (1)-(4).

Теорема 1. Пусть $\alpha_5 \neq 0,\ \beta_5 \neq 0,\ 2\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4^2 \geq 0,\ 2\beta_3\beta_5 - \beta_4^2 \geq 0,$ $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_5} + \dfrac{1}{2} \geq 0, \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 0,\ \dfrac{\beta_3}{\beta_5} + \dfrac{1}{2} \geq 0,\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \leq 0,\ \ m < 0$. Тогда задача (1)-(4) не имеет более одного решение.

Доказательство. Допустим, что существует два решение задачи (1)-(4): $u_1(x,y,t),\ u_2(x,y,t)$. Тогда, вводя обозначение $\vartheta(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$, имеем относительно функции $\vartheta(x,y,t)$ следующую задачу с однородным краевым условием:

$$L(\vartheta) \equiv \vartheta_{xxx} + \vartheta_{yyy} - \vartheta_t = 0,$$

$$\vartheta(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1(y,t)\vartheta(0,y,t) + \alpha_2(y,t)\vartheta_{xx}(0,y,t) = 0,\ \vartheta_x(0,y,t) = 0,\\ &\alpha_3(y,t)\vartheta(1,y,t) + \alpha_5(y,t)\vartheta_x(1,y,t) + \alpha_5(y,t)\vartheta_{xx}(1,y,t) = 0, \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1(x,t)\vartheta(x,0,t) + \beta_2(x,t)\vartheta_{yy}(x,0,t) = 0,\ \vartheta_y(x,0,t) = 0,\\ &\beta_3(x,t)\vartheta(x,1,t) + \beta_4(x,t)\vartheta_y(x,1,t) + \beta_5(x,t)\vartheta_{yy}(x,1,t) = 0, \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим тождество

$$\iiint\limits_D L(\vartheta)\vartheta e^{mt}\,dxdydt = 0.$$

Интегрируя эту тождество по частям, имеем

$$-\iint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_5}\vartheta^2(1,y,t) + \frac{\alpha_4}{\alpha_5}\vartheta(1,y,t)\vartheta_x(1,y,t) + \frac{1}{2}\left(\vartheta_x^2(1,y,t)\right)\right)e^{mt}\,dydt -$$

$$-\iint\limits_{\Omega_4}\left(\frac{\beta_3}{\beta_5}\vartheta^2(x,1,t) + \frac{\beta_4}{\beta_5}\vartheta(x,1,t)\vartheta_y(x,1,t) + \frac{1}{2}\left(\vartheta_y^2(x,1,t)\right)\right)e^{mt}\,dxdt -$$

$$-\iint\limits_{\Omega_1}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\vartheta^2(0,y,t)e^{mt}\,dydt - \iint\limits_{\Omega_3}\left(-\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\vartheta^2(x,0,t)e^{mt}\,dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_T}\vartheta^2(x,y,T)e^{mT}\,dxdy + \frac{m}{2}\iiint\limits_D \vartheta^2 e^{mt}\,dxdydt = 0.$$

Отсюда в силу условий теоремы квадратичная форма $\frac{\alpha_3}{\alpha_5}\vartheta^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_5}\vartheta\vartheta_x + \frac{1}{2}\vartheta_x^2$ будет положительно определенным. Следовательно, эту может быть записано в следующем виде $\frac{\alpha_3}{\alpha_5}\vartheta^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_5}\vartheta\vartheta_x + \frac{1}{2}\vartheta_x^2 \equiv \lambda_1\vartheta^2 + \lambda_2\vartheta_x^2$. Здесь λ_1, λ_2 характеристические число матрицы квадратичной формы $\frac{\alpha_3}{\alpha_5}\vartheta^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_5}\vartheta\vartheta_x + \frac{1}{2}\vartheta_x^2$. Аналогичное вводы можно делать для выражения $\frac{\beta_3}{\beta_5}\vartheta^2 + \frac{\beta_4}{\beta_5}\vartheta\vartheta_y(x,1,t) + \frac{1}{2}\vartheta_y^2$. Тогда в силу условий теоремы имеем, что $\vartheta = 0$ в Ω.

Тогда в силу непрерывности функции $\vartheta(x,y,t)$ в $\bar{\Omega}$ получаем, что $\vartheta(x,y,t) = 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условия теоремы и условия (5). Тогда задача (1)-(4) имеет единственное решение в классе $u \in C^{3,3,1}_{x,y,t}\left(D\right) \cap C^{2,2,0}_{x,y,t}(\bar{D})$.

Доказательство. Решение задачи (1)-(4) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) = &\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_0(x-0, y-\eta, t-\tau)\, p_1(\eta,\tau)\, d\eta d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)} U_0(x-1, y-\eta, t-\tau)\, p_2(\eta,\tau)\, d\eta d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_2(x-0, y-\eta, t-\tau)\, p_3(\eta,\tau)\, d\eta d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} U_1(x-\xi, y-0, t-\tau)\gamma_3(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)} U_0(x-\xi, y-1, t-\tau)\gamma_2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} U_0(x-\xi, y-0, t-\tau)\gamma_1(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $p_i(y,t)$ и $\gamma_i(x,t)$, $i = 1,2,3 -$ пока неизвестные функции, а функции $U_0(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$, $U_1(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$, $U_2(x-\xi, y-\eta, t-\tau)$ называется фундаментальным решениям уравнения (1) и имеют вид (см.[7]) при $t > \tau$

$$U_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right), x \neq \xi, y \neq \eta,$$

$$U_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \varphi\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right), x \neq \xi, y > \eta,$$

$$U_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\varphi\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right)f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right), x>\xi, y\neq\eta$$

Здесь функции $f(z)$, $\varphi(z)$ называется функциями Эйри и является решениями уравнения

$$r''(z)+\frac{z}{3}r(z)=0.$$

Для функции $f(z)$, $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения

$$f^{(n)}(z)\sim c_n^+ z^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) \text{ при } z\to\infty,$$

$$f^{(n)}(z)\sim c_n^-|z|^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}\right) \text{ при } z\to-\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz=\pi,\quad \int_{-\infty}^{0} f(z)dz=\frac{\pi}{3},\quad \int_{0}^{\infty} f(z)dz=\frac{2\pi}{3},\quad \int_{0}^{\infty}\varphi(z)dz=0.$$

Здесь c_n^+, c_n^- – постоянные.

При построении решения задачи (1)-(4) в виде (7) нам понадобится следующие леммы (см.[7]).

Лемма 1. Пусть $\alpha(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_1}\right)$. Тогда

$$\lim_{(x,y,t)\to(1-0,y,t)}\iint_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)} U_{0\xi\xi}(x,y,t;1,\eta,\psi)d\eta d\tau=\frac{\pi^2}{3}\alpha(y,t).$$

Лемма 2. Пусть $\alpha(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_4}\right)$. Тогда

$$\lim_{(x,y,t)\to(x,1-0,t)}\iint_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)} U_{0\xi\xi}(x,y,t;\xi,1,\psi)d\xi d\tau=\frac{\pi^2}{3}\alpha(x,t).$$

Лемма 3. Пусть $\alpha(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_2}\right)$ и удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем $\beta\geq\frac{1}{4}$. Тогда

$$\lim_{(x,y,t)\to(0+0,y,t)}\iint_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{0\xi\xi}(x,y,t;0,\eta,\psi)d\eta d\tau=-\frac{2\pi^2}{3}\alpha(y,t),$$

$$\lim_{(x,y,t)\to(0+0,y,t)}\iint_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{2\xi\xi}(x,y,t;0,\eta,\psi)d\eta d\tau=0.$$

Лемма 4. Пусть $\alpha(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_3}\right)$ и удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем $\beta\geq\frac{1}{4}$. Тогда

$$\lim_{(x,y,t)\to(x,0+0,t)} \iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{0\xi\xi}(x,y,t;\xi,0,\tau)\,d\xi d\tau = -\frac{2\pi^2}{3}\alpha(x,t),$$

$$\lim_{(x,y,t)\to(x,0+0,t)} \iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{2\xi\xi}(x,y,t;\xi,0,\tau)\,d\xi d\tau = 0$$

Лемма 5. Пусть $\alpha(y,t)\in C\left(\overline{\Omega_1}\right)$. Тогда

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{J(y,t)}{(z-t)^{\frac{1}{3}}}dt = \frac{\pi^2 f'(0)}{\sqrt{3}}\alpha(y,z).$$

Здесь $J(y,t)=\int_0^t\int_0^1 \frac{1}{(t-\tau)} f'(0) f\left(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\right)\alpha(\eta,\tau)\,d\eta d\tau$.

Теперь удовлетворяя условиям (2)-(4) и воспользовавшись лемм 1-4 из (7) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(y,t) = \alpha_1(y,t)u(0,y,t) + \alpha_2(y,t)u_{xx}(0,y,t) = \\
&= \iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} \alpha_1 U_0(0-0,y-\eta,t-\tau)\,p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau - \frac{2\pi^2}{3}\alpha_2(y,t)\,p_1(y,t) + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)} \left(\alpha_1 U_0(0-1,y-\eta,t-\tau) + \alpha_2 U_{0xx}(0-1,y-\eta,t-\tau)\right) p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} \left(\alpha_1 U_2(0-0,y-\eta,t-\tau;)\right) p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} \left(\alpha_1 U_1(0-\xi,y-0,t-\tau;) + \alpha_2 U_1(0-\xi,y,t-\tau;)\right)\gamma_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)} \left(\alpha_1 U_0(0-\xi,y-1,t-\tau;) + \alpha_2 U_{0xx}(0-\xi,y-1,t-\tau;)\right)\gamma_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \\
&+ \iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} \left(\alpha_1 U_0(0-\xi,y-0,t-\tau;) + \alpha_2 U_{0xx}(0-\xi,y,t-\tau;)\right)\gamma_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\varphi_3(y,t)=\alpha_3(y,t)u(1,y,t)+\alpha_4(y,t)u_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)u_{xx}(1,y,t)=$$

$$=\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}\alpha_3U_0(1-1,y-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+\frac{\pi^2}{3}\alpha_5(y,t)p_2(y,t)+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}\alpha_4U_{0x}(1-1,y-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_3U_0(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\right)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_5U_{0xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)\right)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_3U_2(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{2x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\right)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_5U_{2xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)\right)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_3U_1(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{1x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\right)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_5U_{1xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)\right)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_3U_0(1-\xi,y-1,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-1,t-\tau)\right)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-1,t-\tau)\right)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+ \tag{9}$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_3U_0(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\right)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)\right)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\psi_1(y,t)=\beta_1(x,t)u(x,0,t)+\beta_2(x,t)u_{yy}(x,0,t)=$$

$$=\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_0(x-1,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-1,0-\eta,t-\tau)\right)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_0(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-0,0-\eta,t-\tau)\right)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_2(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{2yy}(x-0,0-\eta,t-\tau\right)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_1(x-\xi,0-0,t-\tau)\right)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_0(x-\xi,0-1,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-\xi,0-1,t-\tau)\right)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\left(\beta_1U_0(x-\xi,0-0,t-\tau)\right)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\frac{2\pi^2}{3}\beta_2(x,t)\gamma_1(x,t), \tag{10}$$

$$\psi_3(y,t)=\beta_3(x,t)u(x,1,t)+\beta_4(x,t)u_y(x,1,t)+\beta_5(x,t)u_{yy}(x,1,t)=$$

$$=\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_0(x-1,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-1,1-\eta,t-\tau)\Big)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_5U_{0yy}(x-1,1-\eta,t-\tau)\Big)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_0(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-0,1-\eta,t-\tau)\Big)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_5U_{0yy}(x-0,1-\eta,t-\tau)\Big)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_2(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{2y}(x-0,1-\eta,t-\tau\Big)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_5U_{2yy}(x-0,1-\eta,t-\tau\Big)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_1(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{1y}(x-\xi,1-0,t-\tau)\Big)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_5U_{1yy}(x-\xi,1-0,t-\tau)\Big)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_0(x-\xi,1-1,t-\tau)\Big)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\frac{\pi^2}{3}\beta_5(x,t)\gamma_2(x,t)+ \qquad (11)$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-1,t-\tau)\Big)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_3U_0(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-0,t-\tau;)\Big)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}\Big(\beta_5U_{0yy}(x-\xi,1-0,t-\tau;)\Big)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\varphi_2(x,y)=u_x(0,y,t)=\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}U_{0x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)}U_{0x}(0-1,y-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)}U_{2x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}U_{1x}(0-\xi,y-0,t-\tau)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)}U_{0x}(0-\xi,y-1,t-\tau)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+ \qquad (12)$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)}U_x(0-\xi,y-0,t-\tau)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$\psi_2(x,y)=u_x(x,0,t)=\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{0y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\iint\limits_{\Omega_2(\xi,\eta,\tau)} U_{0y}(x-1,0-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\iint\limits_{\Omega_1(\xi,\eta,\tau)} U_{2y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} U_{1y}(x-\xi,0-0,t-\tau)\gamma_3(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\iint\limits_{\Omega_4(\xi,\eta,\tau)} U_{0y}(x-\xi,0-1,t-\tau)\gamma_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+ \qquad (13)$$
$$+\iint\limits_{\Omega_3(\xi,\eta,\tau)} U_{y}(x-\xi,0-0,t-\tau)\gamma_1(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Теперь соотношениям (12), (13) применяем леммы 5. Тогда система уравнений может быть приведена к следующему виду:

$$\mu_i(z,t)=\int_0^t\int_0^1 K_{ij}(z,t;\varsigma,\tau)\tau_i(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau+\Phi_i(z,t),\quad i=\overline{1,6},$$

$$\left|K_{ij}(z,t;\varsigma,\tau)\right|\le\frac{C}{(t-\tau)^{\frac{11}{12}}},\quad \Phi_i(z,t)\in C^1(\bar{D}).$$

Так как решение этой системы существует и единственно, задача (1)-(4) имеет единственное решение.

Литература

1. Lamberto Cattabriga. Un problema al contorno per una equazion parabolica di ordine dispari. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e serie, tome 13, n^o 2 (1959), pp.163-203.
2. А.В.Фаминский. Задача Коши для уравнения Захарова-Кузнецова. Дифференциальные уравнения. 1995. Т31, №6. стр.1070-1081.
3. С.П.Попов. Особенности численного моделирования двухсолитонных решений уравнения Захарова- Кузнецова. Журнал вычислительной математики и математической физики, 39:10 (1999), стр.1749-1757.
4. С.Абдиназаров, З.А.Собиров. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка вмногомерном пространстве. Труды межд. науч. конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент 2004, стр.12-13.
5. A.R.Khashimov. Some properties of the fundamental solutions of non-stationary third order composite type equation in multidimensional domains. Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications. No. 1, 2013. pp.29-38.

6. А.Р.Хашимов, С.Якубов. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. Уфимский математический журнал. Том 6, №4 (2014). стр.139-148.
7. А.Р.Хашимов. О некоторых свойствах фундаментальных решений нестационарного уравнения нечетного порядка составного типа в многомерных областях. ДАН РУз, 2010, №5, стр.6-9.
8. А.В.Фаминский. О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова-Кузнецова. Современная математика и ее приложения. 2006, Том 38, стр.135-148.
9. А.И.Кожанов. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990, 130 стр.
10. А.В.Фаминский, М.А.Опритова. О задаче Коши для уравнения Кавахары. Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным уравнениям. Москва, 2012, стр.132-150.
11. В.М.Катсон. Уединенные вольны двумерного модифицированного уравнения Кавахары. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. стр.132-150.
12. К.Сангаре, А.В.Фаминский. Слабые решение решения смешанной задачи в полу-полосе для обобщенного уравнения Кавахары. Математические заметки. 2009, Т.85, вып.1. стр.98-109.
13. А.В.Фаминский, Р.В.Кувшинов. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары. Успехи математических наук. 2011, Т.66, вып.4(400), стр.187-188.
14. А.Р.Хашимов. Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. Математические заметки СВФУ, 2017, Том 24, №4, стр.76-86.