ТГТУ Абдуллаев Ф.С., Олимхўжаев Х.Б.

ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Автоматическое построение сетки применяется для решения задач методом конечных элементов с целью упрощения подготовки и проверки входных данных.

Почти половина, а то и больше половины общего числа времени и стоимости вычислений тратится на формирование и проверку входных данных. Таким образом,если пользователь может общаться с машиной лучшим, более быстрым и безошибочным способом, будет достигнута существенная экономия трудных средств. Кроме того, автоматизация позволяет уменьшитьошибки операторов, обеспечить регулярность сетки, облегчить использование других типов элементов, упростить параметрические исследования.

В обзоре даны краткие описания некоторых методов построения сетки, применявшихся в разное время для самых разных задач.

Каждую из приведенных схем автоматической подготовки данных применяют обычно к конкретному виду геометрии. Поэтому в настоящее время используют так много схем. Не существует "одной наилучшей" схемы, которая отвечала бы запросам всех исследователей.

Желательно иметь "библиотеку" схем, из которых можно было бы выбрать наилучший для данной задачи метод.

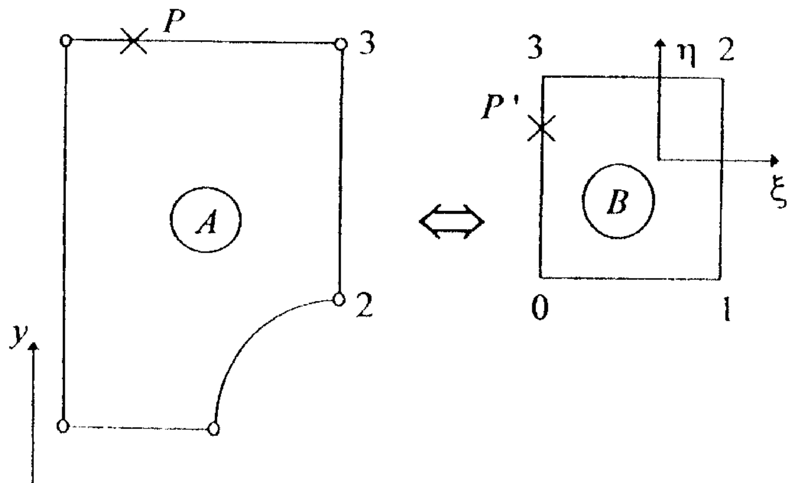
В ППП "ШТАМП" в качестве основного способа автоматизации триангуляции используется основанный на идее отображения сложной физической области на простую вычислительную в виде прямоугольника или квадрата с помощью функций:

(1) $$x = f_1(\xi, \eta),\ y = f_2(\xi, \eta),\ -1 \le \xi, \eta \le 1\ .$$

Ясно, что построение сетки в квадратной области (ξ,n) весьма просто.

Такой подход дает широкие возможности, однако требует решения задачи автоматизации процесса построения соответствующих преобразований координат, которые в общем случае эквивалентны по трудоемкости исходным задачам описания областей и построения сетки.

Начнем с весьма общей задачи, в которой требуется отобразить область *A* сложной формы (рис.1, а) на стандартный квадрат (ξ,n) (рис.1, б). Априори принимается некоторое соглашение о соответствии между граничными точками *A* и граничными точками *B*, т. е. каждой точке*P* на границе *A* ставится в соответствие единственный образ Р на границе *B*. В частности, образы угловых узлов задаются так, как показано на рисунке.



а) б)

Рис. 1. Отображение рассматриваемой области

Искомое отображение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками на границах в плоскости (ξ,n) и граничными точками фактической области *A* в плоскости (x,y).

На рис.2 в перспективе изображены плоскость (ξ,n) изменение x вдоль границы. Чтобы найти полное отображение, нужно построить гладкую поверхность, натянутую на эти краевые значения.

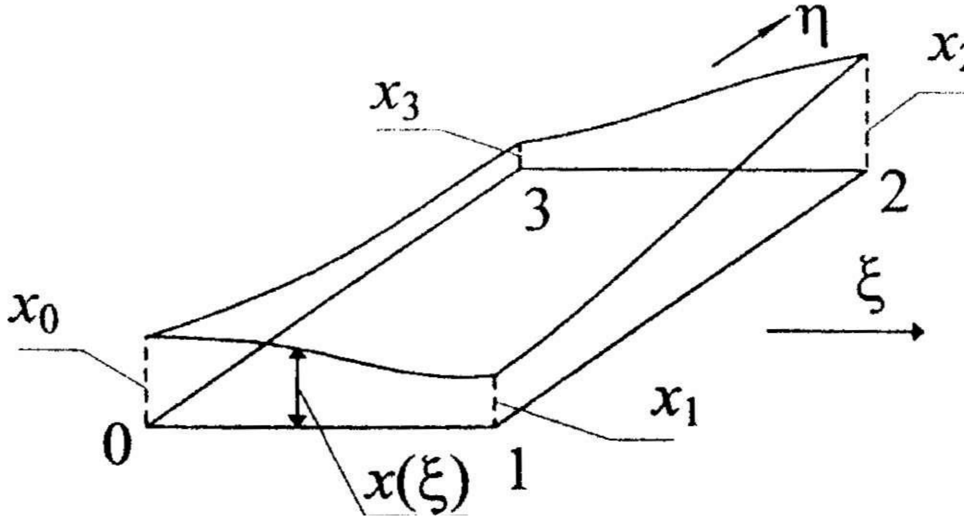


Рис.2. Изменение x вдоль границы в переменных(ξ,n)

Состав процесса построения такой поверхности графически показан на рис. 3 и состоит из четырех этапов.

1. Нахождение функции, осуществляющей линейную интерполяцию по т] между значениями x, заданными на прямых т|=±1.

2. Нахождение функции, осуществляющей линейную интерполяцию по £, между значениями к, заданными на прямых

3. Сложение этих двух функций, дающее однозначно определенную непрерывную функцию, граничные значения которой отличаются от требуемых на линейную функцию.

4. Вычитание из полученной суммы функции стандартной билинейной интерполяции для точных угловых значений.

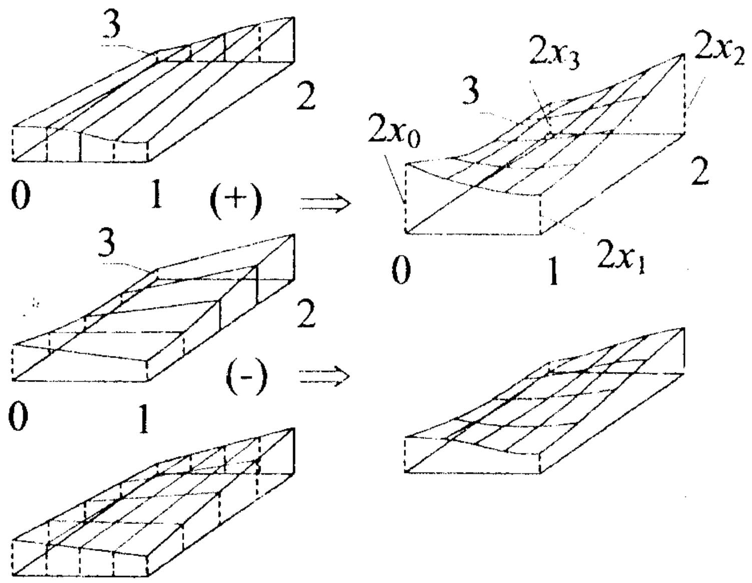


Рис.3 Построение функции отображения с помощью процесса линейного составления

В результате этого процесса получается гладкая кривая f_1(ξ,n) из (1), определяющая координату x в любой точке плоскости (ξ,n).

Мы не приводим никаких аналитических выражений для осуществляющих это отображение функций, поскольку выкладки тривиальны, если хорошо понят сам принцип построения.

Аналогичная интерполяция для координаты у приводит к функции f_2(ξ,n)из (1), что и заканчивает построение отображения.

Такой процесс может быть обобщен на случай использования интерполяции многочленами высших степеней. Например, если помимо выполнения краевых условий требуется, чтобы какое-либо конкретное множество точек (x,y) принадлежало некоторым прообразам прямых, параллельных осям координат в плоскости (ξ,n) использованную выше линейную интерполяцию следует заменить квадратичной интерполяцией.

Эта процедура в принципе позволяет отобразить область произвольной формы (возможно, разбитую на подобласти или элементы произвольного вида) на квадрат (или на семейство квадратов). Чтобы получить такое отображение, необходимо с помощью соответствующих функций, описывающих поведение координат x и y на прямых $\xi=\pm1$, $\eta=\pm1$ определить внешние границы и границы между элементами. Этот процесс весьма полезен при отображении односвязной области сложной формы на квадрат, где решения могут быть получены с помощью глобальных функций или - в случае необходимости - подразбиения на регулярные элементы стандартного типа. В действительности отображение такого рода позволяет использовать и конечно- разностную процедуру в простой регулярной области плоскости (ξ,n). С помощью этой процедуры удается устранить основные недостатки конечно-разностного метода, поскольку задачу в области сложной формы можно решить непосредственным применением конечно-разностного метода к соответствующим образом преобразованному дифференциальному уравнению на получающихся квадрате в плоскости (ξ,n).