ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ПОШАХОДЖАЕВА ГУЛНОРА ДЖАББОРХАНОВНА

АЙЛАНАНИНГ КРИТИК АКСЛАНТИРИШЛАРИ УЧУН ТЕРМОДИНАМИК ФОРМАЛИЗМ ВА ТУШИШ ВАҚТЛАРИНИНГ ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАРИ

01.01.01– Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

УДК: 517.9

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ВА МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ПОШАХОДЖАЕВА ГУЛНОРА ДЖАББОРХАНОВНА

АЙЛАНАНИНГ КРИТИК АКСЛАНТИРИШЛАРИ УЧУН ТЕРМОДИНАМИК ФОРМАЛИЗМ ВА ТУШИШ ВАҚТЛАРИНИНГ ЛИМИТ ТЕОРЕМАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM211 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Джалилов Ахтам Абдурахманович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: **Шоимқулов Баходир Аллабердиевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Хакимов Отабек Норбўта ўғли
физика-математика фанлари фалсафа доктори

Етакчи ташкилот: **Қорақалпоқ давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И. Чилин
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда физика, биология, термодинамика, статистик механика ва динамик системалар назарияси масалаларига олиб келади. Айлана гомеоморфизмлари назарияси замонавий бир-ўлчовли акслантиришлар назариясининг муҳим йуналишларидан биридир. Айлананинг критик акслантиришлари ушбу назариядаги тадқиқотларнинг муҳим объектидир. Осмон механикасининг масалаларини ечишда А. Пуанкаре йуналишни сақловчи айлана гомеоморфизмларига доир масалалар билан биринчи бўлиб шуғулланган ва муҳим тушунчаларни киритган. Айлананинг махсусликка эга гомеоморфизмлари учун қайтиш вақтлари тақсимот функцияларининг лимити мавжудлигини текшириш етарли даражада шаклланмаганлиги сабабли термодинамак формализм ёрдамида қайтиш ва тушиш вақтларининг функциялари учун тақсимот функцияларини қуриш ва унинг асимтотик ҳолатларини ўрганиш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кун жаҳон математикасида айланани махсусликка эга акслантиришлари назарияси учун махсус нуқтанинг орбитасини таснифлаш, критик акслантиришлар учун термодинамик формализм қуриш долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Шу термодинамик формализм ёрдамида айланадаги сингуляр эҳтимоллик инвариант ўлчовининг сонли характеристикаларни ўрганиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: айланадаги лебег ўлчови ва эҳтимоллик инвариант ўлчовининг ўзаро сингулярлигини даражасини текшириш ҳамда шу ўлчовларнинг сонли характеристикаларини топиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган динамик системалар назариясининг долзарб йуналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, бир-ўлчовли динамик системаларни масалаларини ўрганишнинг асосий объекти бўлган айлана гомеоморфизмлари назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Шуни таъкидлаш лозимки, айлана гомеоморфизмлари назариясида критик нуқтага эга айлана акслантиришлари масалаларига оид салмоқли натижаларга эришилди. Математик фанларнинг устувор йуналишлари бўйича, айниқса, динамик системалар назарияси, математик анализ, алгебра ва функционал анализ, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш Фанлар Академияси В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаси ва йўналиши этиб белгиланган[1]. Қарор ижросини таъминлашда бир-ўлчовли динамик системаларни тадқиқ этишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий- тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорларни ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайан даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика ва фан технологиялари ривожланишининг устувор йуналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика и информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. М. Фейгенбаумнинг ренормализацион группалаш методи бўйича илк илмий ишларидан сўнг бу метод динамик системалардаги тадқиқотларда муҳим қурол бўлди. Айлананинг критик акслантиришлари учун ренормализацион группалаш методи Остлунд, Ямпольский, де Фария ва де Мело, А. Авила ва бошқалар илмий ишларида қўлланилган. Маълумки, $\mathbb{R}$ ренормализацион группалаш алмаштириши айлананинг, буриш бурчаги ρ иррационал сон бўлган, аналитик, битта x_0 кубик критик нуқтага эга бўлган критик акслантиришлари фазосида ягона $T(\rho)$ қўзғалмас нуқтага эга. А.Джалиловнинг ишида буриш бурчаги γ «олтин кесим» га тенг бўлган $T(\gamma)$ критик айлана гомеоморфизми учун термодинамик формализм қурилган. Термодинамик формализм асосида махсус нуқтанинг ренормализация атрофига тушиш ва қайтишнинг нормалланган вақтларини лимит ҳолатлари ва сонли характеристикалари ўрганилган.

Тушиш вақтлари учун тақсимот қонунлари турли хилдаги акслантиришлар учун ўрганилган: Марков занжирлари ва тордаги гиперболик автоморфизмлар, Аносов диффеоморфизмлари ва чекли типдаги Гёльдер потенциалли силжишлари, бўлакли-чўзилувчан айлана акслантиришлари ва айлана диффеоморфизмлари. Коэло ва де Фария ишларида айлананинг чизиқли буриш акслантириши учун ренормализация атрофига тушиш вақтларининг лимитик ҳолатлари ўрганилган. Й. Кацнельсон, Д. Орнстейн, Б. Вейс, Д. Ким ва Б. Сео, К. Чоо, А. Вайнер ва Ж.Зив, Д. Ким ва С. Марми ва бошқалар ишларида айлана ва интервалнинг кўплаб акслантиришлари учун кутиш вақтлари ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади айлананинг критик акслантиришлари учун инвариант ўлчовнинг сингулярлигини ва тушиш вақтларини таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

айлананинг критик акслантириши учун термодинамик формализм мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

айлананинг буриш бурчаги иррационал сон бўлиб критик нуқтага эга бўлган акслантиришлари учун сингуляр инвариант ўлчовнинг сонли характеристикаларини топиш;

айлананинг критик акслантиришларида махсус нуқтанинг камаювчи (кичрайиб борувчи) атрофига тушишнинг нормалланган вақтларининг асимптотик ҳолатларини тадқиқот қилиш;

[0,1] кесмада буриш бурчаги иррационал бўлган чизиқли буриш учун кутиш вақтларини лимит теоремаларини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти: Айлананинг критик акслантиришлари, буриш бурчаги, инвариант ўлчов, тушиш вақти, кутиш вақти функцияси, тақсимот функцияси.

Тадқиқотнинг предмети: Бир-ўлчовли динамик системалар, айлана гомеоморфизмлари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида математик анализ, функционал анализ, эргодиклик назарияси, бир ўлчовли динамика, эҳтимоллар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ренормгруппа алмаштиришнинг қўзғалмас нуқтаси бўлган буриш бурчаги иррационал сон бўлган айлананинг критик гомеоморфизмининг критик нуқтасининг ренорм атрофига биринчи қайтиш вақти учун Пуанкаре функцияси формуласи исботланган;

айлананинг буриш бурчаги иррационал сон бўлиб, битта кубик критик нуқтага эга бўлган етарлича силлиқ критик акслантириши учун потенциал қурилган;

айлананинг буриш бурчаги иррационал сон бўлиб, узлуксиз касрга ёйилмаси деярли даврий бўлган ва битта кубик критик нуқтага эга критик акслантиришларининг сингуляр эҳтимоллик инвариант ўлчовининг сонли характеристикалари учун лимит теоремалар исботланган;

критик нуқтанинг камаювчи ренормализацион атрофларига биринчи тушиш вақтларига мос тақсимот функциялари кетма-кетлиги учун лимит тақсимот функцияси $\Phi_k^{(1)}(t),\ k\geq 1$ мавжудлиги ва лимитик тақсимот функциянинг сонлар ўқида узлуксизлиги, ҳамда $[0,1]$ кесмада сингуляр эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат**:**

Пуанкаре акслантиришининг аниқ ифодаси, сингулярлик кўрсаткичларининг аниқ ҳисобларида фодаланилган;

бир-ўлчовли ночизиқли динамика ва унинг татбиқлари масалаларида қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, математик анализ, бир ўлчовли динамика ва эргодиклик назарияси усулларидан ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти қурилган термодинамик формализм ёрдамида инвариант ўлчовнинг сингулярлик кўрсаткичларини ҳисоблаш мумкинлиги ва махсусликка эга айлана акслантиришлари назариясини ривожлантиришда қулланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти айланада ва интервалда синиш нуқталарига эга, критик нуқтага эга гомеоморфизмларни баъзи масалаларини ечиш имконини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Айлананинг критик акслантиришлари учун термодинамик формализм ва тушиш вақтларининг лимит теоремаларини тадқиқ этишда олинган натижалар асосида:

критик нуқтага эга айлана акслантиришлари учун термодинамик формализмнинг тўлиқ таснифи “Fraction-order Differential Equations with Neural Networks”, UPAR-Project, Fund # 31S167-UPAR хорижий лойиҳасида ночизиқли каср даражали дифференциал тенгламаларни ечимларини ҳолатларини текширишда фойдаланилган (Бирлашган Араб Амирликлари университетининг 2019 йил 10 майдаги маълумотномаси). Илмий натижаларининг қўлланилиши ренормгруппа алмаштиришининг даврий нуқталари бўладиган бошқа акслантиришларини ўрганиш имконини берган;

критик нуқтанинг ренорм атрофига тушиш вақтлари ва қайтиш вақтларининг тақсимот функцияларининг лимит теоремалари FRGS/1/2018/STG06/UUM/02/13 “Solutions of Nonlinear Fraction Differential equations via a Generalized Fixed Point Method and Homotopy Analysis Method” хорижий лойиҳасида умумлаштирилган қўзғалмас нуқталар назариясида қўзғалмас нуқтанинг лимит тўпламини тадқиқ этишда қўлланилган,(Малазия Утара университетининг 2019 йил 15 майдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши махсусликка эга айлана акслантиришларида нормалланган тушиш вақтларининг тақсимот функцияларининг асимптотик ҳолатларини ўрганиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 6 та халқаро ва 2 та республика миқёсидаги илмий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси буйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, улардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестацияси Комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари (PhD) асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика илмий журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 82 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши буйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «Айлана гомеоморфизмлари ва эргодиклик назарияси буйича зарурий маълумотлар» деб номланган. Унда эргодиклик назарияси ва айлананинг критик нуқтага эга гомеоморфизмларига тааллуқли барча маълумотлар келтирилган.

1.1 параграфда эргодиклик назариясининг айрим таърифлари ва фактлари келтирилган: инвариант ўлчов тушунчаси, эргодиклиги, эргодикликнинг етарли шартлари, Биркгоф-Хинчин теоремаси, Боголюбов-Крыловнинг эҳтимолли инвариант ўлчовнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремаси келтирилган. Бу маълумотларнинг барчаси диссертация натижаларини изоҳлашда ишлатилади.

1.2 параграфда айлана гомеоморфизмлари назариясидан маълумотлар келтирилган.

Айлана сифатида бирлик айлана $S^1=[0,1)\cong R^1/Z^1$ ни оламиз. Ҳар қандай йўналишни сақловчи T_f айлана гомеоморфизмини қуйидаги формула билан ифодалаш мумкин: $T_f x = f(x) \pmod 1$, $x\in S^1$. Бу ерда $f(x)-$ тўғри чизиқда қатъий ўсувчи ва узлуксиз функция бўлиб, барча $x\in R^1$ ларда $f(x+1)=f(x)+1$ шартни қаноатлантиради. $f(x)$ функция T_f гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси ёки аниқловчиси дейилади. T_f гомеоморфизмнинг аниқловчи функциялари бутун сонга фарқ қилувчи синфни ташкил этади, яъни $\{\ f(x)+m,\ m\in \mathrm{Z}\ \}$. Биз T_f гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси сифатида $0\le f(0)<1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $f(x)$ функцияни танлаб оламиз. А. Пуанкаре теоремасида ихтиёрий $x\in R^1$ учун қуйидаги лимит мавжуд эканлигини исботланган $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n}=\rho(T_f)=\rho,$ ва унинг қиймати $x\in R^1$ нуқтага боғлиқ эмаслигини кўрсатган. Бу ерда ва кейинчалик ҳам $f^{(n)}-$ f нинг $n-$чи итерациясини билдиради. ρ сони рационал сон бўлади шунда ва фақат шундаки агарда, T_f даврий нуқтага эга бўлса. ρ сони T_f гомеоморфизм учун буриш бурчаги ёки буриш сони дейилади.

Гомеоморфизм $T_f : S^1 \to S^1$ диффеоморфизм деб айтилади, агарда f ва f^{-1} функциялар R^1 да узлуксиз ҳосилага эга бўлса. T_f диффеоморфизм $C^r(S^1),\ r>1$ синфдан деймиз, агар $f \in C^r(R^1)$ бўлса.

Таъриф 1. T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари топологик эквивалент дейилади, агар шундай йўналишни сақловчи гомеоморфизм $\varphi : S^1 \to S^1$ мавжуд бўлиб қуйидаги тенглик ўринли бўлса: $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$, $\forall x \in S^1$.

φ га қўшма гомеоморфизм ёки қўшмаси дейилади.

Айлана диффеоморфизмлари учун Данжуанинг классик теоремасини келтирамиз.

Теорема (Данжуа). Фараз қилайлик T_f айлана диффеоморфизм бўлсин унинг буриш сони $\rho = \rho(T_f)$ иррационал бўлсин. Агар T_f нинг $f(x)$ аниқловчиси S^1 узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, $f'(x) > Const > 0,$ ва $\operatorname{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$ шартлар бажарилса, у ҳолда T_f билан T_ρ топологик эквивалент бўлади, бунда, $T_\rho x = x + \rho (\bmod 1)$ чизиқли буриш акслантириши.

1.3 параграфда айлана гомеоморфизмлари учун динамик бўлинишлар ва символик динамика каби тушунчалар берилган

1.4. параграфда айлананинг критик акслантиришлари синфига доир зарур бўлган барча тушунча ва фактлар келтирилган. Айлананинг критик акслантиришлари синфи айлана диффеоморфизмлари синфининг кенгайтмасидир. Бундай акслантиришларни ўрганишга сабаб диссипатив системаларда квазипериодикликдан хаосга ўтиш жараёнини ўрганиш бўлган.

Таъриф 2. $x_{cr} \in S^1$ нуқта $(2m+1), m \geq 1$ тартибли нотекис критик нуқта деб аталади, агар айлана гомеоморфизми T унинг бирор δ- атрофида $U_\delta(x_{cr}) = (x_{cr} - \delta, x_{cr} + \delta),\quad T \in C^{2m+1}(U_\delta(x_{cr}))$ ўринли бўлса. Шунингдек

$$\frac{dT}{dx}(x_{cr}) = \frac{d^2T}{dx^2}(x_{cr}) = \ldots = \frac{d^{2m}T}{dx^{2m}}(x_{cr}) = 0,\ \ \frac{d^{2m+1}T}{dx^{2m+1}}(x_{cr}) \neq 0$$

тенгликлар бажарилсин.

Таъриф 3. T акслантириш критик акслантириш дейилади, агар у ягона тоқ тартибли нотекис критик нуқтага эга бўлса.

Айлананинг критик акслантиришига мисол қилиб, Арнольд мисолини келтириш мумкин: $A(x) = x - \dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\ (\bmod 1),\ \ x \in S^1.$

Ж. Йоккоз илмий изланишларида критик айлана гомеоморфизмини $C^3(S^1)$ синфга тегишли бўлиб, буриш сони иррационал сон бўлса, у ҳолда бу гомеоморфизм чизиқли буриш T_ρ га топологик эквивалент бўлишини исботлаган. Бу ерда x_{cr} нотекис критик нуқта бўлиш шартини тушириб юбормаслигимиз зарур. Халл ўзининг ишларида буриш бурчаги иррационал сон бўлиб C^∞ синфга тегишли айлананинг критик гомеоморфизми ҳеч қаерда зич бўлмаган орбитага эга эканлигини мисол тарзда кўрсатган. Бундан келиб чиқадики , T билан T_ρ топологик эквивалент эмас.

Буриш сонлари $\rho=\rho(T_1)=\rho(T_2)$ бир хил иррационал сон бўлган иккита T_1 ва T_2 критик гомеоморфизмларининг қўшмаси ψ ни силлиқлигини ўрганиш муаммоси табиийдир. Бу муаммога айлананинг критик гомеоморфизмлари учун «қаттиқлик муаммоси» деб аталади. Энди де Мело ва П. Гуарино томонидан исботланган муҳим натижасини келтирамиз.

Теорема 2. Фараз қиламиз, T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари C^3 синфга тегишли бўлиб, ягона $2m+1,\ m\geq 1$ тартибли, нотекис критик x_{cr} нуқтага эга бўлсин;

2) T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари буриш сонлари тенг бўлиб, $\rho=\rho(T_1)=\rho(T_2)$ “ чегараланган типли” иррационал сон бўлсин, яъни ρ нинг узлуксиз касрга ёйилмасидаги элементларнинг барчаси чегараланган.

У ҳолда T_1 ва T_2 нинг қўшмаси ψ диффеоморфизм бўлади ва $\psi\in C^{1+\alpha},\ \alpha>0$ синфга тегишли.

1.4. параграфда айлана диффеоморфизмлари ва критик акслантиришларининг эҳтимоллик инвариант ўлчови ҳақидаги айрим фактлар келтирилган.

Айланада диффеоморфизмларнинг инвариант ўлчови В. Арнольд, Ю. Мозер, М. Эрман, Ж. Йоккоз, К.Ханин ва Я. Синай, А. Кацнельсон ва Д. Орнстейн ва бошқалар ишларида ўрганилган. Айлананинг T_f диффеоморфизми $C^{2+\varepsilon},\ \varepsilon>0$ классга тегишли бўлсин. У ҳолда $\rho=\rho(T_f)$ типик иррационал сон учун ягона эҳтимоллик инвариант ўлчов μ_f айланадаги Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз бўлади.

Айлананинг критик акслантиришлари учун бу натижанинг акси бўлади. Ҳақиқатан, Грачек ва Свентек ўз ишларида инвариант ўлчов μ, Лебег ўлчовига нисбатан сингуляр эканлигини исботлашган.

Диссертациянинг иккинчи боби “Критик айлана акслантиришлари учун термодинамик формализм ва сонли кўрсаткичлар ” деб номланган. Бу бобда айлананинг, $C^3(S^1)$ синфда ётган, буриш бурчаги иррационал ва битта кубик критик $x_0=x_{cr}$ нуқтага эга бўлган критик гомеоморфизмлари ўрганилган.

2.1.1. параграфда ренормгруппа алмаштиришнинг қўзғалмас нуқтасига мос келувчи айлананинг критик акслантиришлари ўрганилган.

Ҳар бир бутун сон $k\geq 1$ учун X_k^{cr} тўпламни аниқлаймиз. Бу тўплам $(\hat{\xi},\hat{\eta})$ жуфтликлардан тузилган бўлиб, $\hat{\xi}$ ва $\hat{\eta}$ лар R^1 да қатъий ўсувчи, ҳақиқий аналитик гомеоморфизмлар бўлиб қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$(a)\ \ 0<\hat{\xi}(0)<1;$

$(b)\ \ \hat{\xi}(0)=\hat{\eta}(0)+1;$

$(c)\ \ \hat{\xi}(\hat{\eta}(0))=\hat{\eta}(\hat{\xi}(0));$

$(d)\ \ \hat{\xi}(\hat{\eta}(0))<0,\ \hat{\xi}^{(2)}(\hat{\eta}(0))<0,...,\ \hat{\xi}^{(k-1)}(\hat{\eta}(0))<0;$

$(e)\ \ \hat{\xi}^{(k)}(\hat{\eta}(0))>0;$

$(f)\ \ \hat{\xi}'(0)=\hat{\xi}''(0)=0,\ \ \hat{\eta}'(0)=\hat{\eta}''(0)=0,$ ва $\xi'''(0)\neq 0,\ \ \eta'''(0)\neq 0;$

$(g)\ \ (\hat{\xi}\circ\hat{\eta})'''(0)=(\hat{\eta}\circ\hat{\xi})'''(0).$

(a), (b) ва (c) лардан $\hat{\eta}(0)<\hat{\xi}(\hat{\eta}(0))<0$ экани маълум. $k=1$ ҳолда (d) шарт тушириб қолдирилади.

Энди ренормгруппа алмаштириши $R_k : X_k^{cr}\to X_k^{cr}$ ни қуйидаги формула билан ифодалаймиз:

$$R_k(\hat{\xi},\hat{\eta})=(\alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\alpha^{-1}x)),\ \alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\hat{\xi}(\alpha^{-1}x)))),$$

бу ерда $\alpha=\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})=\left(\hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(0))-\hat{\xi}^{k}(\hat{\eta}(0))\right)^{-1}<-1.$ $X^{cr}(\rho_k)$ орқали X_k^{cr} тўпламнинг $(\hat{\xi},\hat{\eta})$ жуфтликлардан тузилган қисм тўпламини белгилаймиз, унинг буриш сони $\rho(\hat{\xi},\hat{\eta})=\rho_k=[k,k,...,k,...]=0{,}5\cdot(-k+\sqrt{k^2+4})$ орқали ифодаланади. Остлунд ва бошқаларнинг ишида $X^{cr}(\rho_k)$ қисм тўпламда R_k ренормгруппа алмаштириши ягона гиперболик қўзғалмас нуқтага (ξ_k,η_k) эга эканлиги исботланган. Шунингдек, $\xi_k(x)$ ва $\eta_k(x)$ лар x^3 нинг аналитик функциялари бўлади. Кейинги ёзувларимизда қулайлик учун (ξ_k,η_k) жуфтликнинг индексдаги k ни тушириб юборамиз. R_k нинг ошкор кўринишидан фойдаланиб (ξ,η) функциялар жуфти учун қуйидаги функционал тенгламалар системасини келтирамиз:

$$\begin{cases}\xi(x)=\alpha\xi^{k-1}\circ\eta(\alpha^{-1}x),\\ \eta(x)=\alpha\xi^{k-1}\circ\eta\circ\xi(\alpha^{-1}x),\end{cases}$$

бу ерда константа $\alpha=[\xi^{k-1}(\eta(0))-\xi^{k}(\eta(0))]^{-1}<-1.$

(ξ,η) жуфтлиги ёрдамида ушбу $[\eta(0),\xi(0))$ айлананинг гомеоморфизмини аниқлаш мумкин:

$$Tx=T_{\xi,\eta}x=\begin{cases}\xi(x), & \text{агар}\quad x\in[\eta(0),0),\\ \eta(x), & \text{агар}\quad x\in[0,\xi\ (0)).\end{cases}$$

Энди $\frac{p_n}{q_n}$ касрни қуйидаги белгилаш орқали аниқлаймиз: $\frac{p_n}{q_n}=[k,k,...,k]$, $n\geq 1$. Биринчи қайтиш вақтлари $q_n=q_n(\rho_k)$, $n\geq 1$ га тенг бўлиб қуйидаги реккурент тенглама билан топилади

$$q_{n+1}=kq_n+q_{n-1}, \text{ бунда } q_0=1,\ q_1=k$$

Ушбу T^{q_n}, $n\geq 1$ айлана акслантиришлари биринчи қайтиш вақтлари акслантиришлари дейилади. Энди T^{q_n} ва $T^{q_n+q_{n+1}}$ акслантиришларининг ҳолатлари тўғрисидаги асосий теоремани келтирамиз.

Теорема 3. Ихтиёрий бутун сон $n\geq 1$ учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$T^{q_n}(\alpha^{-n}x)=\alpha^{-n}\xi\ (x),\quad x\in[\eta(0),0),\quad T^{q_n+q_{n-1}}(\alpha^{-n}x)=\alpha^{-n}\eta(x),\quad x\in[0,\xi(0)).$$

Энди A_n орқали, $P_n(x_0)$ динамик бўлинишини аниқловчи, критик нуқтанинг орбитасининг кесимини белгилаймиз, яъни $A_n=\{x_0=0,\ x_1,...,x_{q_n+q_{n+1}-1}\}$.

Энди A_n тўпламни $k+1$ та $A_n^{(1)},A_n^{(2)},...,A_n^{(k+1)}$ қисм тўпламларга қуйидаги тарзда ажратамиз:

$$A_n^{(1)}=A_n\cap[0,\xi\ (0)],\ A_n^{(l+1)}=A_n\cap[x_l,x_{l+1}],\quad 1\leq l\leq k-1,\quad A_n^{(k+1)}=A_n\cap[x_k,0],$$

$$A_n^{(1,1)}=A_n\cap[0,x_{q_0+q_1}],\qquad A_n^{(1,2)}=A_n\cap[x_{q_0+q_1},\xi(0)]$$

Навбатдаги теоремада A_n қисм тўплам нуқталарининг A_{n+1} қисм тўплам нуқталарига ўтишга доир формулалар исботланган.

Теорема 4. Ихтиёрий $n\geq 1$ учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$A_{n+1}^{(k+1)}=\alpha^{-1}(A_n^{(1)}\cup\{\xi\ (0)\}),\ A_{n+1}^{(l+1)}=\xi^{l-1}(\eta\ (A_{n+1}^{(1)})),\quad 1\leq l\leq k-1,$$

$$A_n^{(1,1)}=\alpha^{-1}(A_n^{(2)}\bigcup A_n^{(3)}\bigcup...\bigcup A_n^{(k+1)}),\ A_{n+1}^{(1,2)}=\xi\ (A_{n+1}^{(k+1)})=\xi\ (\alpha^{-1}A_n^{(1)}).$$

2.2 параграфда айлананинг критик акслантиришлари учун термодинамик формализм қуриш мумкинлиги исботланган. $X^{cr}(\rho_k)$ тўплам деб, буриш сони ρ_k иррационал сонга тенг бўлган, ягона $x_0=x_{cr}$ кубик критик нуқтага эга, $C^3(S^1)$синфга тегишли барча критик айлана акслантиришлари тўпламини белгилаб оламиз. $T\in X^{cr}(\rho_k)$ ни оламиз. Tнинг критик нуқтаси орбитаси $O_T(x_0)=\{x_i=T^ix_0,\ i\geq 0\}$ ёрдамида $\left\{P_n(x_0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ динамик бўлинишлар кетма-кетлигини тузамиз. $P_n(x_0)$динамик бўлиниш критик нуқтанинг траекторияси орқали тузилади $x_0:\{x_i=T^ix_0,\ 0\leq i<q_n+q_{n+1}\}$. $\Delta_0^{(n)}$ деб x_0 ва x_{q_n} ларни туташтирувчи кесмаларни белгилаймиз. Демак $\Delta_i^{(n)}=T^i\Delta_0^{(n)},\ i\geq 1$. Ушбу кесмалар системаси $\{\Delta_0^{(n)},\Delta_1^{(n)},...,\Delta_{q_{n+1}-1}^{(n)}\}\bigcup\{\Delta_0^{(n+1)},\Delta_1^{(n+1)},...,\Delta_{q_n-1}^{(n+1)}\}$ айлананинг $n-$чи динамик бўлинишини ҳосил қилади ва уни $P_n(x_0)$ орқали белгилаймиз.

$P_n(x_0)$ дан $P_{n+1}(x_0)$ га ўтишда $\Delta_j^{(n+1)},\ 0 \le j < q_n$ кесмаларнинг барчаси сақланиб ўтади, $\Delta_i^{(n)}$ кесмаларнинг ҳар бири эса $(k+1)$ та кесмаларга ажралади: $\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \bigcup_{s=0}^{k-1} \Delta_{i+q_n+sq_{n+1}}^{(n+1)}$. Бир томонлама кетма-кетликлар фазосини аниқлаймиз: $\Theta_+ = \{\underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...),\quad \varepsilon_n = a, 0, 1, ..., k;$ $\varepsilon_{n+1} = 0$, шунда ва фақат шундаки, агар $\varepsilon_n = a,\ n \ge 1\}$. Динамик бўлинишлар кетма-кетлигидан фойдаланиб ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишимиз мумкин: $\zeta : S^1 \setminus \{x_i,\ i \ge 0\} \leftrightarrow \Theta_+$. Бу дегани ҳар бир $x \in S^1 \setminus \{x_i,\ i \ge 0\}$ нуқтага $\underline{\varepsilon}(x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...) \in \Theta_+$ кўринишдаги ягона чексиз узунликдаги сўз мос келади. Энди яна бошқа бир томонлама кетма-кетликлар фазосини аниқлаймиз: $\Theta_- = \{\vec{\varepsilon} : \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...),\ \varepsilon_n = a, 0, 1, ..., k;\ \varepsilon_{n+1} = a$ шунда ва фақат шундаки, агар $\varepsilon_n = 0,\ n \ge 1\}$. Ушбу белгилашларни киритамиз: $\underline{\gamma}(a_1) = (a, 0, a, 0, ..., a, 0, ...)$, агар $a_1 = 0$, ва $\underline{\gamma}(a_1) = (0, a, 0, a, ..., 0, a, ...)$, агар $a_1 = a$ бўлса.

Энди критик акслантиришлар учун термодинамик формализм тўғрисидаги асосий теоремани келтирамиз.

Теорема 5. $k \ge 1$ бўлсин. Барча $T_k \in X^{cr}(\rho_k)$ акслантиришлар учун шундай ягона, узлуксиз (Тихонов топологиясида) функция $U_k : \Theta_- \to R^1$ мавжудки, у қуйидаги хоссаларга эга :

1) Θ_- фазодан олинган ихтиёрий $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, ..., \varepsilon_n, ...)$ ва $\underline{b} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_s, b_{s+1}, ..., b_n, ...)$ лар учун қуйидаги баҳо ўринли:

$$\left| U_k(\vec{\varepsilon}) - U_k(\vec{b}) \right| \le C_1 \left| \alpha_k \right|^{-s},\ s \ge 1,$$

Бу ерда $\alpha_k = \alpha_k(T) < -1$ ва ўзгармас сон $C_1 > 0$ $\vec{\varepsilon},\ \vec{b}$ ва s га боғлиқ эмас.

2) $\Delta(a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_n) \subset \Delta(a_1, a_2, ..., a_r) \subset V_1,\ 1 \le r < n,$ $V_1 = \Delta_0^{(2)}(x_1) \cup \Delta_0^{(3)}(x_1)$ берилган бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$\left| \Delta(a_1, a_2, ..., a_n) \right| = \left| \Delta(a_1, a_2, ..., a_r) \right| (1 + \psi_1(a_1, a_2, ..., a_n)) \times$$
$$\times \exp\{ \sum_{s=r+1}^{n} U_k(a_s, a_{s-1}, ..., a_r, ..., a_1, \underline{\gamma}(a_1)) \}.$$

бу ерда $\left| \psi_1(a_1, a_2, ..., a_n) \right| \le const \cdot \left| \alpha_k \right|^{-r}$.

2.3. параграфда айлананинг критик акслантиришлари учун сингуляр эҳтимоллик инвариант ўлчовининг сонли кўрсаткичлари ўрганилган.

Теорема 6. Фараз килайлик $T_k \in X^{cr}(\rho_k),\ k \ge 1$ бўлиб, T_k гомеоморфизмнинг буриш сони $\rho(T)$ иррационал ва унинг узлуксиз касрга ёйилмаси $\rho(T) = [m_1, m_2, ..., m_r, m_{r+1}, ...]$, бунда $m_s = k$, барча $s \ge r > 1$ учун. μ

T- инвариант эҳтимоллик ўлчов бўлсин. У ҳолда деярли барча x ларда (Лебег ўлчовли λ га нисбатан) ушбу лимит мавжуд

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\mu([x,x+\varepsilon])}{\ln\varepsilon}=\tau_{\lambda},$$

унинг қиймати x га боғлиқ эмас. Ундан ташқари, τ_{λ} ўзгармас сон фақат $\rho(T)$ га боғлиқдир. Шуни таъкидлаш керак, ўзгармас сон $\tau_{\lambda}\in(0,1)$ бўлади.

Диссертациянинг учинчи боби "Айлананинг критик акслантиришлари учун тушиш функциялари" деб номланган. Бу бобда айлананинг критик акслантиришларида нормалланган тушиш вақтлари функциясининг асимптотик характери ва чизиқли буриш учун кутиш вақтлари ўрганилган.

3.1. параграфда $C^{3}(S^{1})$ синфга тегишли битта $x_0=x_{cr}$ кубик критик нуқтага эга бўлган, буриш сони иррационал сон $\rho_k=[k,k,...,k,...]$, $k\geq1$ га тенг T айлана гомеоморфизмлари ўрганилган. x_0 махсус нуқтанинг $n-$ренормализацион атрофини $V_n(x_0)=[T^{q_n}x_0,T^{q_{n+1}}x_0]$ деб оламиз.

$E_n^{(i)}(x)$ деб x нуқтанинг $V_n(x_0)$ атрофга i-нчи тушиш вақтини белгилаймиз: $E_n^{(i)}(x)=\inf\left\{s>E_n^{(i-1)}(x)\mid\ T^{s}(x)\in V_n(x_0)\right\},\ i\geq1,\ E_n^{(o)}(x\ )\equiv0$.

Ҳар бир $i\geq1$ учун $\{D_n^{(i)}(x),\ n\geq1\}$ кетма-кетликни ушбу формула билан ифодалаймиз: $D_n^{(i)}(x)=E_n^{(i)}(x)-E_n^{(i-1)}(x)$. Бизга маълумки, $E_n^{(1)}(x)$ биринчи тушиш вақтлари 1 дан q_{n+1} гача қийматлар қабул қилади, $D_n^{(i)}(x)$ функция эса $i\geq2$ ларда фақат иккита қиймат q_n ва q_{n+1} ни қабул қилади. Қуйидаги нормалланган тасодифий миқдорларни киритамиз: $\bar{D}_n^{(i)}(x)=q^{-1}{}_{n+1}D_n^{(i)}(x),\ i\geq1$.

Кўриниб турибдики, $\bar{D}_n^{(i)}(x)$ тасодифий миқдорлар $[0;1]$ кесмадан қийматлар қабул қилади. Бизнинг масаламиз шундан иборатки, $\bar{D}_n^{(i)}(x)$ тасодифий миқдор учун тақсимот функцияларини $n\to\infty$ да яқинлашишга текшириш ва лимитик тақсимотларни абсолют узлуксизлигини ўрганиш.

$\bar{D}_n^{(k)}(x)$ нинг T гомеоморфизмга нисбатан ягона эҳтимоллик инвариант ўлчов μ бўйича олинган тақсимот функциясини $F_n^{(k)}(t)$ орқали белгилаймиз: $F_n^{(k)}(t)=\mu\left(x\in S^{1}:\bar{D}_n^{(k)}(x)\leq t\right),\ \forall t\in\mathbb{R}^{1}$.

T гомеоморфизм $T_{\rho}x=\{x+\rho\},\ \forall x\in S^{1}$ чизиқли буришга топологик қўшма бўлгани сабабли, $F_n^{(k)}(t)$ функциялар чизиқли буриш T_{ρ} нинг мос тақсимот функциялари билан устма-уст тушади.

3. Коэльо ва де Фариянинг ишида $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$ яқинлашувчи қисмий кетма-кетликнинг лимитик тақсимоти ёки текис тақсимот ёки $[0;1]$ кесмада узлуксиз, бўлакли-чизиқли тақсимот бўлиши исботланган. $k>1$ ҳолда яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$ нинг лимитик тақсимоти $\xi\equiv1$

тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бўлади ёки иккита нуқтада сакрашга эга зинапоясимон тақсимот бўлади.

$\Phi_n^{(k)}(t)$ оркали $\bar{D}_n^{(k)}(x)$ ларнинг Лебег ўлчови бўйича тақсимот функциясини белгилаймиз: $\Phi_n^{(k)}(t)=\lambda\left(x\in S^1:\bar{D}_n^{(k)}(x)\le t\right),\ \forall t\in\mathbb{R}^1.$

Маълумки, T диффеоморфизм чизиқли буриш T_ρ билан силлиқ боғланган, шунинг учун $\{F_n^{(k)}(t)\}$кетма-кетликликларга тааллуқли юқорида келтирилган барча тасдиқлар $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ кетма-кетликлар учун ҳам ўринли бўлади.

Энди шу параграфнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема 7. Фараз килайлик $T\in X^{cr}(\rho_k),\ k\ge 1$ битта x_0 кубик критик нуқтага эга айлана гомеоморфизми бўлсин. $\left\{\Phi_{n,k}^{(1)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ эса айлананинг Лебег ўлчовига нисбатан тақсимот функциялари кетма-кетлиги бўлиб, x_0 критик нуқтанинг $n-$ренормализацион атрофига биринчи тушиш вақтларига мос келади. У ҳолда

1) барча $t\in R^1$ лар учун чекли лимит мавжуд: $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_{n,k}^{(1)}(t)=\Phi_k^{(1)}(t),$

бунда $\Phi_k^{(1)}(t)=0,$ агар $t\le 0,$ ва $\Phi_k^{(1)}(t)=1,$ агар $t>1$;

2) $\Phi_k^{(1)}(t)$ тақсимот функция R^1 да узлуксиз ва $[0,1]$ да қатъий ўсувчи бўлади.

Агар $r\ge 2$ бўлса, А. Джалилов ишларида $\overline{D_n}^{(r)}(x)$ тасодифий миқдорларнинг $\Phi_n^{(r)}(x)$ тақсимот функциялари учун лимит функция мавжудлиги исботланган: $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(r)}(t)=\Phi^{(r)}(t),$ бу ерда $\Phi^{(r)}(t)=0,$ агар $t\le 0,$ ва $\Phi^{(r)}(t)=1$, агар $t>1$; $[0,1]$ оралиқда лимит функция иккита сакрашли зинапоясимон функция бўлади.

3.2 параграфда лимит функция $\Phi_k^{(1)}(t)$ нинг $[0,1]$ кесмада абсолют узлуксизлиги масаласи ўрганилган.

Энди лимитик тақсимот функция $\Phi_k^{(1)}(t)$ тўғрисидаги асосий теоремани келтирамиз.

Теорема 8. $T\in X^{cr}(\rho_k),\ k\ge 1$ айлана гомеоморфизми битта x_0 критик нуқтага эга бўлсин, $\left\{\Phi_{n,k}^{(1)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}-$ кетма-кетлик Лебег ўлчовига нисбатан олинган, x_0 критик нуқтанинг $n-$нчи ренормализацион атрофи $V_n(x_0)$га биринчи тушиш вақтларига мос тақсимот функциялари бўлсин. $\Phi_k^{(1)}(t)$ лимитик тақсимот функцияси бўлсин. У ҳолда $\Phi_k^{(1)}(t)$ функция $[0,1]$ оралиқда сингуляр функция бўлади, яъни деярли барча t ларда (Лебег маъносида) $d\Phi_k^{(1)}(t)/dt=0$ ўринли.

3.3 параграф $[0,1)$ ярим интервалда аниқланган чизиқли буриш учун нормалланган кутиш вақтларининг лимит ўзгаришлари ўрганилган.

$[0,1)$ ярим интервалда $\{\mathrm{P}_n, n \geq 1\}$ бўлинишлар кетма кетлигини қараймиз:

(A_1) P_n чекли сондаги кесишмайдиган ярим интерваллардан иборат $I_s^{(n)} = [a_s^{(n)}, a_{s+1}^{(n)})$, $1 \leq s \leq d_n - 1$, $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{d_n} = 1$, $d_n \uparrow \infty$;

(A_2) $P_n \prec P_{n+1}$, $n \geq 1$, бўлиб , ҳар бир $I^{(n)} \in P_n$ лар P_{n+1} бўлинишнинг чекли сондаги ярим интерваллари бирлашмасидан иборат;

(A_3) Шундай ўзгармас $\beta > 1$ ва $C > 1$ мавжудки, ихтиёрий $I^{(n)} \in P_n$ кесмалар учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$C^{-1}\beta^{-n} \leq |I^{(n)}| \leq C\beta^{-n}.$$

Энди P_n бўлинишдан фойдаланиб ҳар бир $n \geq 1$ ва $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$ учун кутиш вақтлари $\Upsilon_n(x,y)$ни ушбу формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$\Upsilon_n(x,y) = \min\{ j \geq 1 : T_\rho^j y \in I^{(n)}(x)\},$$

бу ерда $I^{(n)}(x) \in P_n$ ярим интервал x ни ўз ичига олади.

Ҳар қандай $x \in R$ сон учун унинг нормасини қуйидагича киритамиз: $\| x \| = \min\limits_{n \in Z} |x - n|$, яъни x соннинг нормаси унга энг яқин жойлашган бутун сонгача масофани билдиради.

$\rho \in (0,1)$ иррационал сон 1-чи типли дейилади, агарда қуйидаги тенглик ўринли бўлса:

$$\sup\{\theta : \varliminf_{n\to\infty} n^\theta \| n\rho \| = 0\} = 1.$$

Маълумки, бундай типдаги сонлар тўпламининг Лебег ўлчови 1 га тенг бўлади. Фараз қилайлик, ρ иррационал соннинг узлуксиз касрга ёйилмаси $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$ кўринишда бўлсин.

3.3 параграфнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема 9. T_ρ чизиқли буришни қараймиз. Буриш сони $\rho \in (0,1)$ сон 1-чи типли иррационал сон бўлсин. Кутиш вақти функциялари кетма-кетлиги $\{\Upsilon_n(x,y), n \geq 1\}$ берилган бўлсин. У ҳолда бирлик квадратнинг деярли барча (Лебег ўлчовида) нуқталарида ушбу чекли лимит мавжуд:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_\rho \Upsilon_n(x,y)}{n} = 1.$$

ХУЛОСА

Диссертация иши айлананинг критик акслантиришларида термодинамик формализм қуриш ва тушиш вақтлари учун лимит теоремаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Буриш бурчаги алгебраик иррационал сон ва ягона кубик критик нуқтага эга бўлган айлананинг критик акслантиришига мос Пуанкаре акслантириши учун формула исботланган;
2. Буриш бурчаги алгебраик типли иррационал сон бўлиб, битта кубик критик нуқтага эга бўлган айлананинг критик акслантиришлари учун потенциал қурилган;
3. Айлананинг буриш бурчаги узлуксиз касрга ёйилмаси даврий бўлган иррационал сон бўлиб, битта кубик критик нуқтага эга критик акслантиришлари учун сингуляр эҳтимоллик инвариант ўлчовининг сонли кўрсаткичлари ҳақидаги лимит теорема исботланган;
4. Критик нуқтанинг камаювчи ренормализацион атрофларига биринчи тушиш вақтларининг мос келувчи тақсимот функциялари кетма-кетлиги учун лимит тақсимот функцияси мавжудлиги ва шу лимит функция $\Phi_k^{(1)}(t)$ нинг сонлар ўқида узлуксизлиги исботланган;
5. $\Phi_k^{(1)}(t)$ лимит тақсимот функцияси [0,1] оралиқда сингуляр функция эканлиги ис ботланган;

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПОШАХОДЖАЕВА ГУЛНОРА ДЖАББОРХАНОВНА

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЙ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM211

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http:ik-fizmat@nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Джалилов Ахтам Абдурахманович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Шоимқулов Баходир Аллабердиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Хакимов Отабек Норбўта угли доктор философии по физико-математическим наукам
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решение проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводится к исследованию задач тдинамических систем. Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории одномерных отображений. Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А. Пуанкаре в связи с задачами небесной механики. В связи со сложностью описания критических отображений окружности их функций распределения для времени попадания и недостаточной формализованностью проверки их существования, построение термодинамического формализма для критических отображений окружности является одной из важных задач в теории динамических систем.

В настоящее время в мире актуальными проблемами гомеоморфизмов окружности являются исследование критических гомеоморфизмов окружности, построение потенциала, термодинамического формализма для гомеоморфизмов окружности. Одним из важных вопросов в теории критических отображениях окружности в динамических системах является определение показателей сингулярности вероятностной инвариантной меры окружности относительно меры лебега. В связи с этим описание числовых характеристик для сингулярной вероятностной инвариантной меры относительно меры лебега окружности, нахождение предела для последовательности функций распределений соответствующим времени первого попаданий в ренорм окрестности критической точки представляют актуальное направление научных исследований.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам нелинейного анализа, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В том числе особое внимание уделяется развитию теории гомеоморфизмов окружности с особенностями, являющийся основным объектом исследования задач одномерной динамической системы. Значительные результаты были достигнуты по построению термодинамического формализма для критического отображения окружности. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, а именно по теории динамических систем, математического анализа, по алгебре и функционального анализа, дифференциальным уравнениям и математической физики, теории вероятностей и математической статистики, является основной задачей и направлением в деятельности Института математики[1]. Развитие исследований отображений окружности играет важную роль в реализации указанного постановления.

1

Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан»

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дльнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Начиная с пионерских работ М. Фейгенбаума, метод ренормализационной группы (РГ) является одним из самых мощных инструментов при исследовании многих динамических систем. Для критических отображений окружности метод РГ был применен в работах Остлунда и др., Д. Ямпольского , де Фария и де Мело , А. Авила и др. Хорошо известно, что преобразование ренормализационной групы R в пространстве аналитических, критических отображений окружности с одной кубической критической точкой x_0 и иррациональным числом вращения ρ алгебраического типа имеет единственную неподвижную точку $T(\rho)$. В работе А. Джалилова, для критического отображения окружности $T(\gamma)$ с числом вращения γ равным золотому сечению, был построен термодинамический формализм. На основе построенного ТФ были исследованы числовые характеристики и предельные поведения нормированных времени попаданий в реномализационные окрестности особой точки.

Законы распределения для времени попадания были изучены в разных контекстах: для гиперболических автоморфизмов тора и цепей Маркова, для диффеоморфизмов Аносова и сдвигов конечного типа с гельдеревским потенциалом, для кусочно-растягивающих отображений окружности, и для диффеоморфизмов окружности. В работах Коэло и де Фария были изучены предельные поведения времени попаданий в ренормализационные окрестности для линейного поворота окружности.

В работах Кацнельсона, Д. Орнстейна и Вейс, Ким Сео, К. Чоо, Вайнер и Зив, Д. Ким, С. Марми и др изучались времени ожидания для многих отображений интервала и окружности.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планами научно-исследовательских работ Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является изучение сингулярной инвариантной меры и времени попадания для критических отображений окружности.

Задачи исследования:

построить термодинамический формализм для критических отображений окружности:

исследовать числовые характеристики сингулярной инвариантной меры для критических отображений окружности с иррациональным числом вращения:

изучать асимптотическое поведение нормированных времен попадания в убывающие окрестности особой точки критических отображений окружности:

исследовать поведение времени ожидания для линейного поворота отрезка [0,1] на иррациональный угол.

Объект исследования - критические отображения окружности, число вращения, инвариантная мера, время попадания, функция ожидания, функция распределения.

Предмет исследования - одномерные динамические системы, теория гомеоморфизмов окружности.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, функционального анализа, эргодической теории, одномерной динамики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана формула для отображения Пуанкаре первого возвращения критического отображения, соответствующего неподвижной точки ренормгруппового преобразования в множестве критических отображений с одной критической точкой и иррациональным числом вращения алгебраического типа;

построен потенциал, соответствующий достаточно гладким критическим отображениям с одной кубической критической точкой и с иррациональным числом вращения числом алгебраического типа;

доказана предельная теорема для числовых показателей сингулярностной вероятностной инвариантной меры для критических отображений с одной кубической критической точкой и иррациональным числом вращения с почти периодическим разложением в непрерывную дробь;

доказано существование предельного распределения для последовательности функций распределений соответствующих времени первого попадания в убывающие ренормализационные окрестности критической точки, а также непрерывность предельного распределения $\Phi_k^{(1)}(t)$ на прямой;

доказано, что предельная функция распределения $\Phi_k^{(1)}(t)$ является сингулярной функцией на отрезке [0,1];

доказана предельная теорема, для последовательности нормированных функциям ожидания, линейного поворота на иррациональный угол.

Практические результаты исследования - полученные явные выражения для отображения Пуанкаре и явно вычисленные показатели сингулярности можно использовать при различных решениях задач одномерной нелинейной динамики и её применениях**.**

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов одномерной динамики, эргодической теории и математического анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что при помощи термодинамического формализма (ТФ) можно вычислить числовые показатели сингулярной инвариантной меры, а также ТФ позволяет исследовать асимптотическое поведение отображений окружности с особенностями.

Практическая значимость состоит в том, что результаты диссертации, могут быть использованы при исследовании гомеоморфизмов окружности с многими изломами и отображений отрезка с критическими точками.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построению термодинамического формализма для критических отображений окружности и предельные теоремы для времени попаданий внедрены в практику по следующим направлениям:

полное описание построения термодинамического формализма для критических отображений окружности использовано в работе проекта “Fraction-order Differential Equations with Neural Networks”, UPAR-Project, Fund # 31S167-UPAR для исследования состояний решений нелинейных дифференциальных уравнений с дробными степенями (математический факультет, университет в Объединённых Арабских Эмиратах, справка от 10 мая 2019 года). Применение научного результата дало возможность для решения задач гомеоморфизмов окружности с особенностями;

полное описание функций распределения для времени ожидания и возвращения в ренормокрестность критической точки было использовано в исследованиях зарубежного проекта FRGS/1/2018/STG06/UUM/02/13 “Solutions of Nonlinear Fraction Differential equations via a Generalized Fixed Point Method and Homotopy Analysis Method” для нахождения предельного множества неподвижной точки в обобщенной теории неподвижных точек (Университет Утара, Малайзия, справка от 15 мая 2019 года). Применение научного результата дало возможность найти предельную функцию распределения для последовательности функций распределения соответствующим нормированным времени попадания;

Апробация результатов исследования.

Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования.

По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной

Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации доктора философии, в том числе 1 из них опубликованы в зарубежном журнале и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и обьем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 82 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «Необходимые сведения из эргодической теории и гомеоморфизмов окружности» содержит необходимые сведения из эргодической теории, гомеоморфизмов окружности и критических отображений окружности.

В параграфе 1.1 приведены некоторые определения и факты из эргодической теории: понятие инвариантной меры, эргодичности, достаточные условия эргодичности, эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина, теорема Боголюбова-Крылова о существовании вероятностной инвариантной меры. Все эти сведения будут использованы при изложении результатов диссертации.

В параграфе 1.2 даны предварительные сведения из теории гомеоморфизмов окружности.

Под окружностью мы будем понимать $S^1 = R^1 / Z^1 \cong [0,1)$. Всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T_f можно определить по формуле: $T_f x = f(x) \pmod 1$ $x \in S^1$, здесь $f(x) -$ строго возрастающая и непрерывная функция на R^1, удовлетворяющая условию $f(x+1) = f(x)+1$, для любого $x \in R^1$. Функция $f(x)$ называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма T_f. Отметим, что поднятие f определено с точностью до аддитивной целой константы, но эта неоднозначность устраняется условием $0 \le f(0) < 1$. А. Пуанкаре показал, что для любого $x \in R^1$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho(T_f) = \rho,$ и значение предела не зависит от выбора точки $x \in R^1$. Здесь и в дальнейшем $f^{(n)} -$обозначает

$n-$ую итерацию функции f. Число ρ рационально тогда и только тогда, когда T_f имеет периодическую траекторию. Число ρ называется числом вращения гомеоморфизма T_f.

Гомеоморфизм $T_f : S^1 \to S^1$ называется диффеоморфизмом, если f и f^{-1} имеют непрерывные производные на R^1. Мы будем говорить, что T_f диффеоморфизм класса $C^r(S^1),\ r>1$, если $f \in C^r(R^1)$.

Определение 1. Два гомеоморфизма окружности T_1 и T_2 называются топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\varphi : S^1 \to S^1$ такой, что $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$ для любого $x \in S^1$. При этом φ называется сопряжением.

Сформулируем классическую теорему Данжуа для диффеоморфизмов окружности.

Теорема (Данжуа). Пусть T_f – диффеоморфизм окружности S^1 с иррациональным числом вращения $\rho = \rho(T_f)$. Если функция $f(x)$, определяющая T_f, имеет непрерывную производную $f'(x) > Const > 0$, и $\operatorname*{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$, то T_f топологически эквивалентен повороту $T_\rho x = x + \rho \pmod 1$.

В параграфе 1.3 приводиться такие понятия, как динамические разбиения и символическая динамика для гомеоморфизмов окружности.

В параграфе 1.4 даны необходимые определения и факты относящихся классу критических отображений окружности. Критические отображения окружности являются естественным обобщением диффеоморфизмов окружности. Такие отображения изучались в связи с переходом от квазипериодичности к хаосу в диссипативных системах.

Определение 2. Точка $x_{cr} \in S^1$ называется неплоской критической точкой порядка $(2m+1),\ m \ge 1$ для гомеоморфизма T, если в некоторой δ-окрестности $U_\delta(x_{cr}) = (x_{cr}-\delta, x_{cr}+\delta)$, функция $T \in C^{2m+1}(U_\delta(x_{cr}))$, кроме того

$$\frac{dT}{dx}(x_{cr}) = \frac{d^2T}{dx^2}(x_{cr}) = \ldots = \frac{d^{2m}T}{dx^{2m}}(x_{cr}) = 0,\ \ \frac{d^{2m+1}T}{dx^{2m+1}}(x_{cr}) = 0\,.$$

Определение 3. Отображение T называется критическим отображением, если оно обладает единственной неплоской критической точкой нечетного порядка.

Типичным примером критического отображения является отображение Арнольда: $A(x) = x - \dfrac{1}{2\pi}\sin 2\pi x \pmod 1,\ x \in S^1.$ Йоккоз показал, что критическое отображение класса $C^3(S^1)$ с иррациональным числом вращения ρ топологически эквивалентен линейному повороту T_ρ. Заметим, что условие неплоскости критической точки x_{cr} не может быть упущена. Халл построил примеры C^{∞} критических гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения и не всюду плотными орбитами. Следовательно, T топологически не эквивалентен линейному повороту T_{ρ}.

Естественной проблемой является изучение регулярности сопряжения ψ между двумя критическими гомеоморфизмами T_1 и T_2 с одинаковым иррациональным числом вращения $\rho = \rho(T_1) = \rho(T_2)$. Эта проблема называется «проблемой жёсткости» для критических гомеоморфизмов окружности. Сформулируем важный результат доказанный де Мело и П. Гуарино.

Теорема 2. Предположим, что гомеоморфизмы окружности T_1 и T_2 удовлетворяют следующим условиям:

1) T_1 и T_2 гомеоморфизмы окружности из класса C^3 с единственной, неплоской критической точкой x_{cr}, одинакового и нечетного порядка $2m+1$, $m \geq 1$;

2) числа вращения гомеоморфизмов T_1 и T_2 совпадают $\rho = \rho(T_1) = \rho(T_2)$ и является иррациональным «ограниченного типа», т.е. элементы разложения ρ в непрерывную дробь ограничены в совокупности. Тогда сопряжение ψ между T_1 и T_2 является диффеоморфизмом окружности класса $C^{1+\alpha}$, с некоторой универсальной константой $\alpha > 0$.

В параграфе 1.4 приводится некоторые факты об вероятностных инвариантных мерах диффеоморфизмов и критических отображений окружности.

Инвариантные меры диффеоморфизмов окружности были изучены в работах В. Арнольда, Ю. Мозера, М. Эрмана, Ж. Йоккоза, К.Ханина и Я. Синая, А. Катнельсона и Д. Орнстейна и др. Пусть T_f диффеоморфизм окружности принадлежит классу $C^{2+\varepsilon}$, при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда, для типичных иррациональных чисел вращения $\rho = \rho(T_f)$ единственная вероятностная инвариантная мера μ_f является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Для критических отображений окружности результат оказался противоположным. А именно, как показали Грачек и Свентек, инвариантная мера μ является сингулярной относительно меры Лебега.

Вторая глава диссертации, названная **“Термодинамический формализм и числовые показатели для критических отображений окружности”** посвящена исследованию критических гомеоморфизмов окружности из класса $C^3(S^1)$ с одной кубической критической точкой и иррациональным числом вращения.

В параграфе 2.1.1 изучается критические отображения окружности, соответствующие неподвижным точкам преобразования ренормгруппы.

Для каждого целого числа $k \geq 1$ определим множество X_k^{cr} состоящих из пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой R^1 удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $0 < \hat{\xi}(0) < 1;$

(b) $\hat{\xi}(0) = \hat{\eta}(0) + 1;$

(c) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) = \hat{\eta}(\hat{\xi}(0));$

(d) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < 0,\ \hat{\xi}^{(2)}(\hat{\eta}(0)) < 0, ..., \hat{\xi}^{(k-1)}(\hat{\eta}(0)) < 0;$

(e) $\hat{\xi}^{(k)}(\hat{\eta}(0)) > 0;$

(f) $\hat{\xi}'(0) = \hat{\xi}''(0) = 0,\ \hat{\eta}'(0) = \hat{\eta}''(0) = 0,$ и $\xi'''(0) \neq 0, \eta'''(0) \neq 0;$

(g) $(\hat{\xi} \circ \hat{\eta})'''(0) = (\hat{\eta} \circ \hat{\xi})'''(0).$.

Из условий (a), (b) и (c) вытекает, что $\hat{\eta}(0) < \hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < 0.$ В случае $k = 1,$ условие (d) опускается.

Теперь определим ренормгрупповое преобразование $R_k : X_k^{cr} \to X_k^{cr}$ по формуле: $R_k(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = (\alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\alpha^{-1}x)),\ \alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\hat{\xi}(\alpha^{-1}x)))),$ где $\alpha = \alpha(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \left(\hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(0)) - \hat{\xi}^{k}(\hat{\eta}(0))\right)^{-1} < -1.$

Обозначим через $X^{cr}(\rho_k)$ подмножество X_k^{cr}, состоящее из таких пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, что число вращения определяется следующим образом: $\rho(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \rho_k = [k, k, ..., k, ...] = 0,5 \cdot (-k + \sqrt{k^2 + 4})$. В работе Остлунда и др. доказано, что преобразование R_k в подмножестве $X^{cr}(\rho_k)$ имеет единственную гиперболическую неподвижную точку (ξ_k, η_k). При этом $\xi_k(x)$ и $\eta_k(x)$ являются аналитическими функциями от x^3.

Всюду в дальнейшем для простоты записи в индексах пары (ξ_k, η_k) будем опускать $k.$ Используя явный вид R_k получим, что пара функций (ξ, η) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi(x) = \alpha \xi^{k-1} \circ \eta(\alpha^{-1}x), \\ \eta(x) = \alpha \xi^{k-1} \circ \eta \circ \xi(\alpha^{-1}x), \end{cases}$$

где константа $\alpha = [\xi^{k-1}(\eta(0)) - \xi^{k}(\eta(0))]^{-1} < -1.$

При помощи пары (ξ, η) определим гомеоморфизм окружности $[\eta(0), \xi(0))$:

$$Tx = T_{\xi,\eta}x = \begin{cases} \xi(x), & \text{если} \quad x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x), & \text{если} \quad x \in [0, \xi\ (0)). \end{cases}$$

Подходящяя дробь $\frac{p_n}{q_n}$ определяется следующим образом: $\frac{p_n}{q_n}=[k,k,...,k],\ n\geq 1.$ Времена первого возвращения т.е. числа $q_n=q_n(\rho_k)$, $n\geq 1$ удовлетворяют разностному уравнению:

$$q_{n+1}=kq_n+q_{n-1},\ \text{здесь}\ q_0=1,\ \ q_1=k\ .$$

Отображения T^{q_n}, $n\geq 1$ называются отображениями первого возвращения. Сформулируем основную теорему о поведении отображений T^{q_n} и $T^{q_n+q_{n+1}}$.

Теорема 3. Для каждого $n\geq 1$ имеет место следующие соотношения:

$$T^{q_n}(\alpha^{-n}x)=\alpha^{-n}\xi\ (x),\quad x\in[\eta(0),0)\,,$$

$$T^{q_n+q_{n-1}}(\alpha^{-n}x)=\alpha^{-n}\eta(x),\ \ x\in[0,\xi(0)).$$

Обозначим через A_n отрезок орбиты критической точки $x_0=0$ составляющие разбиения $P_n(x_0)$ т. е. $A_n=\{x_0=0,\ x_1,...,x_{q_n+q_{n+1}-1}\}$.

Далее разобьем множество A_n на $k+1$ подмножеств $A_n^{(1)},A_n^{(2)},...,A_n^{(k+1)}$ следующие образом:

$$A_n^{(1)}=A_n\cap[0,\xi\ (0)],\qquad A_n^{(l+1)}=A_n\cap[x_l,x_{l+1}],\quad 1\leq l\leq k-1,\quad A_n^{(k+1)}=A_n\cap[x_k,0],$$

$$A_n^{(1,1)}=A_n\cap[0,x_{q_0+q_1}],\qquad A_n^{(1,2)}=A_n\cap[x_{q_0+q_1},\xi(0)].$$

Ясно, что $A_n=\bigcup_{l=1}^{k+1}A_n^{(l)}$, $A_n^{(1)}=A_n^{(1,1)}\cup A_n^{(1,2)}$.

Следующая теорема описывает переход от точек подмножества A_n к точкам A_{n+1}.

Теорема 4. Для каждого $n\geq 1$ имеет место следующие соотношения:

$$A_{n+1}^{(k+1)}=\alpha^{-1}(A_n^{(1)}\cup\{\xi\ (0)\}),\quad A_{n+1}^{(l+1)}=\xi^{l-1}(\eta\ (A_{n+1}^{(1)})),\quad 1\leq l\leq k-1,$$

$$A_n^{(1,1)}=\alpha^{-1}(A_n^{(2)}\bigcup A_n^{(3)}\bigcup...\bigcup A_n^{(k+1)}),\quad A_{n+1}^{(1,2)}=\xi\ (A_{n+1}^{(k+1)})=\xi\ (\alpha^{-1}A_n^{(1)}).$$

Параграф 2.2 посвящён построению термодинамического формализма для критических отображений окружности. Пусть $X^{cr}(\rho_k)$ множество всех критических отображений окружности из класса $C^3(S^1)$, с единственной одной кубической критической точкой $x_0=x_{cr}$ и иррациональным числом вращения ρ_k. Пусть $T\in X^{cr}(\rho_k)$. При помощи орбиты критической точки $O_T(x_0)=\{x_i=T^ix_0,\ i\geq 0\}$ можно определить последовательность динамических разбиений $\{P_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. Динамическое разбиение $P_n(x_0)$ получается при помощи части траектории особой точки x_0: $\{x_i=T^ix_0,\ 0\leq i<q_n+q_{n+1}\}$. Для каждого $n\geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}$ отрезок соединяющий точки x_0 и x_{q_n}. Положим $\Delta_i^{(n)}=T^i\Delta_0^{(n)},\ i\geq 1$. Система отрезков $\{\Delta_0^{(n)},\Delta_1^{(n)},...,\Delta_{q_{n+1}-1}\}\bigcup\{\Delta_0^{(n+1)},\Delta_1^{(n+1)},...,\Delta_{q_n-1}^{(n+1)}\}$

Образует разбиение окружности, которое обозначим через $P_n(x_0)$ и назовём $n-$ым динамическим разбиением окружности. При переходе от $P_n(x_0)$ к $P_{n+1}(x_0)$ все отрезки $\Delta_j^{(n+1)},\ 0\le j<q_n$ сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n)}$ разбивается на $(k+1)$ отрезков $\Delta_i^{(n)}=\Delta_i^{(n+2)}\cup\bigcup_{s=0}^{k-1}\Delta_{i+q_n+sq_{n+1}}^{(n+1)}$.

Определим следующее пространство односторонних последовательностей:
$\Theta_+=\{\underline{\varepsilon}:\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n,...),\ \varepsilon_n=a,0,1,...,k;\ \varepsilon_{n+1}=0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_n=a,\ n\ge1\}$.

Используя последовательность убывающих динамических разбиений можно построить взаимно-однозначное соответствие $\zeta:S^1\setminus\{x_i,\ i\ge0\}\leftrightarrow\Theta_+$. Следовательно , каждой точки $x\in S^1\setminus\{x_i,\ i\ge0\}$ соответствует единственное бесконечное слово $\underline{\varepsilon}(x)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,..\ .,\ \varepsilon_n,...)\in\Theta_+$.

Далее определим, другое пространство односторонних последовательностей
$\Theta_-=\{\vec{\varepsilon}:\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n,...),\ \varepsilon_n=a,0,1,...,k;\ \varepsilon_{n+1}=a$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_n=0,\ n\ge1\}$. Положим $\underline{\gamma}(a_1)=(a,0,a,0,...,a,0,...)$, если $a_1=0$, и $\underline{\gamma}(a_1)=(0,a,0,a,...,0,a,...)$, если $a_1=a$.

Теперь сформулируем основную теорему о термодинамическом формализме для критических отображений.

Теорема 5. Пусть $k\ge1$. Для всех отображений $T_k\in X^{cr}(\rho_k)$ существует единственная, непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_k:\Theta_-\to R^1$ обладающая следующими свойствами:

1) Для любых $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_s,\varepsilon_{s+1},...,\varepsilon_n,...)$ и $\underline{b}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_s,b_{s+1},...,b_n,...)$ из пространства Θ_- верна оценка $\left|U_k(\vec{\varepsilon})-U_k(\vec{b})\right|\le C_1|\alpha_k|^{-s},\ s\ge1,$

где $\alpha_k=\alpha_k(T)<-1$ и константа $C_1>0$ не зависит от $\vec{\varepsilon},\ \vec{b}$ и s.

2) Пусть $\Delta(a_1,a_2,...,a_r,a_{r+1},...,a_n)\subset\Delta(a_1,a_2,...,a_r)\subset V_1,\ 1\le r<n,$ $V_1=\Delta_0^{(2)}(x_1)\cup\Delta_0^{(3)}(x_1)$. Тогда

$$|\Delta(a_1,a_2,...,a_n)|=|\Delta(a_1,a_2,...,a_r)|(1+\psi_1(a_1,a_2,...,a_n))\times$$
$$\times\exp\{\sum_{s=r+1}^{n}U_k(a_s,a_{s-1},...,a_r,...,a_1,\underline{\gamma}(a_1))\}.$$

где $|\psi_1(a_1,a_2,...,a_n)|\le const\cdot|\alpha_k|^{-r}$.

В параграфе 2.3 исследованы числовые показатели сингулярной вероятностной инвариантной мере для критических отображений окружности.

Теорема 6. Пусть $T_k\in X^{cr}(\rho_k),\ k\ge1,$ гомеоморфизм окружности с одной кубической критической точкой $x_0=x_{cr}$. Предположим, что $r\ge1$ и число вращения $\rho(T)$ иррациональное и ее разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho=\rho(T_k)=\left[m_1,m_2,...,m_r,m_{r+1},...\right]$, где $m_s=k$, для всех $s\geq r+1$. Пусть μ вероятностная T- инвариантная мера. Тогда для почти всех x по мере Лебега λ существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{\ln\mu([x,x+\varepsilon])}{\ln\varepsilon}=\tau_\lambda$,

и его значение не зависит от x. Кроме того, константа τ_λ зависит только от числа вращения ρ. Отметим, что константа τ_λ принадлежит интервалу $(0,1)$.

Третья глава диссертации, названная **"Функции попадания для критических отображений окружности"** посвящена исследованию асимптотического поведения нормированных времени попаданий критических отображений окружности и времени ожидания линейного поворота.

В параграфе 3.1 изучается критические гомеоморфизмы окружности T из класса $C^3(S^1)$ с одной кубической критической точкой $x_0=x_{cr}$ и иррациональным числом вращения $\rho(T)=\rho(k)=[k,k,...,k,...],\ k\geq1$. Пусть $V_n(x_0)=[T^{q_n}x_0,T^{q_{n+1}}x_0]$ $n-$ая ренормализационная окрестность критической точки x_0. Обозначим через $E_n^{(i)}(x)$ время i-го попадания точки x в $V_n(x_0)$ т.е. $E_n^{(i)}(x)=\inf\left\{s>E_n^{(i-1)}(x)\mid\ T^s(x)\in V_n(x_0)\right\},\ i\geq1$. Положим $E_n^{(o)}(x\ )\equiv0$. Для каждого $i\geq1$ определим последовательность $\{D_n^{(i)}(x),\ n\geq1\}$ по формуле: $D_n^{(i)}(x)=E_n^{(i)}(x)-E_n^{(i-1)}(x)$. Заметим, что время первого попадания $E_n^{(1)}(x)$ прини-мает значения от 1 до q_{n+1}, а при $i\geq2$, функция $D_n^{(i)}(x)$ принимает всего два значения: q_n и q_{n+1}. Введем теперь следующие нормированные случайные величины: $\bar{D}_n^{(i)}(x)=q^{-1}{}_{n+1}D_n^{(i)}(x),\ i\geq1$. Ясно, что случайные величины $\bar{D}_n^{(i)}(x)$ принимают значения лежащее на отрезке [0,1]. Задача состоит в изучении сходимости функций распределения для $\bar{D}_n^{(i)}(x)$ при $n\to\infty$, а также об абсолютно непрерывности их предельных распределений. Обозначим через $F_n^{(k)}(t)$ функцию распределения $\bar{D}_n^{(k)}(x)$ относительно единственной вероятностной инвариантной меры μ гомео-морфизма T, т.е. $F_n^{(k)}(t)=\mu\left(x\in S^1:\bar{D}_n^{(k)}(x)\leq t\right),\forall t\in\mathbb{R}^1$. Поскольку гомеоморфизм T топологически сопряжен линейному повороту $T_\rho x=\{x+\rho\},\ \forall x\in S^1$, функции $F_n^{(k)}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота $T_\rho x=\{x+\rho\},\ \forall x\in S^1$.

З. Коэльо и де Фария доказали, что предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$ является или равномерным распределением, или непрерывным кусочно-линейным распределением на отрезке [0,1]. При $k>1$ предельное распределение для сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$ является или распределением для случайной величины $\xi \equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва. Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(t)$ функцию распределения $\bar{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега λ, т.е.

$$\Phi_n^{(k)}(t) = \lambda\left(x \in S^1 : \bar{D}_n^{(k)}(x) \le t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Заметим, что если диффеоморфизм T гладко сопряжен с линейным поворотом T_ρ, то для последовательности $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F_n^{(k)}(t)\}$ также справедливы.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая

Теорема 7. Пусть $T \in X^{cr}(\rho_k)$, $k \ge 1$ гомеоморфизм окружности с одной кубической критической точкой x_0, $\left\{\Phi_{n,k}^{(1)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующие времени первого попадания в $n-$ую ренормализационной окрестностью критической точки x_0. Тогда

1) для всех $t \in R^1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{n,k}^{(1)}(t) = \Phi_k^{(1)}(t)$,

причем $\Phi_k^{(1)}(t) = 0$, если $t \le 0$, и $\Phi_k^{(1)}(t) = 1$, если $t > 1$;

2) $\Phi_k^{(1)}(t)$ является строго возрастающий и непрерывной функцией распределения на $[0,1]$.

В случае $r \ge 2$, А. Джалилов показал, что для функция распределений $\Phi_n^{(r)}(t)$ случайных величин $\overline{D}_n^{(r)}(x)$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(r)}(t) = \Phi^{(r)}(t)$, причём $\Phi^{(r)}(t) = 0$, если $t \le 0$, и $\Phi^{(r)}(t) = 1$ если $t \ge 1$. Кроме того, каждая предельная функция $\Phi^{(r)}(t)$ является ступенчатой функцией с двумя точками разрыва на отрезке $[0,1]$.

В параграфе 3.2 изучается вопрос об абсолютной непрерывности предельной функции $\Phi_k^{(1)}(t)$. Сформулируем основную теорему о характере предельной функции.

Теорема 8. Пусть $T \in X^{cr}(\rho_k)$, $k \ge 1$ гомеоморфизм окружности с одной критической точкой x_0, $\left\{\Phi_{n,k}^{(1)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функция распределений относительно меры Лебега на окружности, соответствующие времени первого попадания в $n-$ую ренормализационную окрестность $V_n(x_0)$ критической точки x_0 и $\Phi_k^{(1)}(t)$ ее предельная функция распределения. Тогда $\Phi_k^{(1)}(t)$ является сингулярной функцией на отрезка $[0,1]$ т.е. $d\Phi_k^{(1)}(t)/dt = 0$ почти для всех t (по мере Лебега $[0,1]$).

Параграф 3.3 посвящён исследованию предельного поведения нормированных функций ожидания для линейного поворота на $[0,1)$.

Рассмотрим последовательность разбиений $\{P_n, n \geq 1\}$ полуинтервала $[0,1)$ со следующими свойствами:

(A_1) P_n состоит из конечного числа непересекающихся полуинтервалов $I_s^{(n)} = [a_s^{(n)}, a_{s+1}^{(n)})$, $1 \leq s \leq d_n - 1$, $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{d_n} = 1$, $d_n \uparrow \infty$;

(A_2) $P_n \prec P_{n+1}$, $n \geq 1$, т.е. каждый $I^{(n)} \in P_n$ является объединением конечного числа полуинтервалов разбиения P_{n+1};

(A_3) Существуют константы $\beta > 1$ и $C > 1$, такие, что для любого отрезка $I^{(n)}$ разбиения P_n справедливы неравенства $C^{-1}\beta^{-n} \leq |I^{(n)}| \leq C\beta^{-n}$.

Теперь для каждого $n \geq 1$ используя разбиения P_n определим функцию ожидания $\Upsilon_n : [0,1) \times [0,1) \to N$ по формуле

$$\Upsilon_n(x, y) = \min\{ j \geq 1 : T_\rho^j y \in I^{(n)}(x)\},$$

где $I^{(n)}(x) \in P_n$ обозначает полуинтервал разбиения P_n содержащий x.

Для каждого $x \in R$, определим норму числа x следующим образом: $\| x \| = \min\limits_{n \in Z} | t - n |$, т.е. как расстояние от x ближайшего целого числа. Пусть разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$.

Иррациональное число $\rho \in (0,1)$ называется типа 1, если

$$\sup\{\theta : \varliminf_{n \to \infty} n^\theta \| n\rho \| = 0\} = 1.$$

Отметим, что лебегова мера множества иррациональных чисел типа 1 равна единице.

Сформулируем основной результат параграфа 3.3.

Теорема 9. Рассмотрим линейный поворот T_ρ с иррациональным числом ρ типа 1. Пусть $\{\Upsilon_n(x, y), n \geq 1\}$ последовательность функций ожидания. Тогда для почти всех (по мере Лебега) $(x, y) \in [0,1) \times [0,1)$ существует следующий предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-\log_\rho \Upsilon_n(x, y)}{n} = 1.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению термодинамического формализма и изучению предельных теорем для критических отображений окружности с иррациональным числом вращения.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказана формула для отображения Пуанкаре соответствуещего критическому отображению окружности с единственной кубической критической точкой и иррациональным числом вращения;
2. Построен потенциал, соответствующий достаточно гладким критическим отображениям с одной кубической критической точкой и с иррациональным числом вращения алгебраического типа;
3. Доказана предельная теорема для числовых показателей сингулярной вероятностной инвариантной меры для критических отображений с одной кубической критической точкой и иррациональным числом вращения с почти периодическим разложением в непрерывную дробь;
4. Доказано существование предельного распределения для последовательности функций распределений соответствующие времени первого попадания в убывающие ренормализационные окрестности критической точки, а также непрерывность предельного распределения $\Phi_k^{(1)}(t)$ на прямой;
5. Доказано, что предельная распределения $\Phi_k^{(1)}(t)$ является сингулярной функцией на отрезке [0,1];

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

POSHAKHODJAEVA GULNORA DJABBORKHANOVNA

THERMODYNAMICAL FORMALISM AND LIMIT LAWS OF ENTRANCE TIMES FOR CRITICAL CIRCLE MAPS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM211

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Dzhalilov Akhtam Abdurakhmanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Shoimkulov Bakhodir Allaberdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khakimov Otabek Norbuta ugli PhD on Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Karakalpak State University**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

V.I.Chilin
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is the study of singular invariant measure and entrance times for the critical maps of a circle.

The object of the research work is critical maps of a circle, rotation number, invariant measure, entrance time, waiting function, distribution function.

Scientific novelty of the research work is as follows:

it is proved the formula for Poincare first return map corresponding to critical circle map with irrational rotation number of algebraic type and unique cubic critical point;

it is constructed the potential corresponding to critical circle map with one cubic critical point and irrational rotation number of algebraic type;

it is proved the limit theorem for the numerical characteristics of the singularity of a probabilistic invariant measure for critical maps with one cubic critical point and an irrational rotation number with almost periodic decomposition into a continued fraction;

it is proved the existence a limit distribution for the sequence of the distribution functions corresponding to the first entrance times in decreasing renormalization neighborhoods of the critical point, and the continuity of the limit distribution $\Phi_k^{(1)}(t)$ on the straight line;

it is proved that the limit distribution $\Phi_k^{(1)}(t)$ is a singular function on the interval [0,1];

it is proved the existence of a limit distribution for a sequence of the distribution functions corresponding to the normalized waiting time functions for a linear irrational rotation.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The results on the critical circle homeomorphisms and thermodynamic formalism obtained in the dissertation have been widely used in the research project FRGS/1/2018/stg06/UUM/02/13 titled “Solutions of Nonlinear Fractional DifferentialEquations via a Generalized Fixed Point Method and Homotopy Analysis Method” of Universiti Utara Malaysia, approved by Ministry of Education of Malaysia (Certificated date May 15, 2019).

The results of the dissertation work have been used in research project “Fractional- Order Differential Equations with Neural Networks”, UPAR-Project, Fund # 31S167-UPAR(11) (Certificated date May 10, 2019)

The results of the dissertation work on the construction of thermodynamic formalism, on limit theorems and on numerical characteristics of singular probabilistic invariant measures were used in foreign journal (IOPSCIENCE.iop.org 2017 J. Phys., Conf. Ser. 819 012014). The application of these scientific results opens up the possibility for the study of other mappings which are periodic points of the renormalization group transformation.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 82 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Пошаходжаева Г. Термодинамический формализм для критических отображений окружности // Узбекский математический журнал. 2004, № 4, стр.32-40. (01.00.00; №1).
2. Джалилов А., Пошаходжаева Г. Метрические свойства критических отображений окружности // Доклады академии наук республики Узбекистана. 2011 г, № 5, стр.16-20. (01.00.00; №7).
3. Poshaxodjayeva G. Critical circle maps and thermodynamic formalism // IOPSCIENCE.iop.org 2017 J. Phys., Conf. Ser. 819 012014. (№ 40. Research Gate IF=0.66).
4. Пошаходжаева Г., Каримов Ж. Функции времени ожидания для иррационального поворота интервала // УзМУ хабарлари. 2017, № 2, стр. 109-117. (01.00.00; №8).
5. Poshaxodjayeva G. The numerical characteristics of invariant measure of critical circle maps // Узбекский математический журнал 2018, №2, стр. 116-127. (01.00.00; №1).
6. Пошаходжаева Г. Времени попадания для некоторых критических гомеоморфизмов окружности // Доклады академии наук республики Узбекистан 2018, №2, стр. 11-15. (01.00.00; №7).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Пошаходжаева Г. Предельные теоремы для времени возвращения критических отображений окружности // Тезисы Международная конференция «Дифференциальные уравнения» Алматы, Казахстан. 2003. Стр 50-51.
8. Пошаходжаева Г. Построение термодинамического формализма для критического отображения окружности // Abstracts of the international conference on differential equations and dynamical systems. Suzdal. Russia. 2010. P.156-157.
9. Пошаходжаева Г. Показатели сингулярности инвариантной меры критических отображений окружности // Abstracts of the international conference on differential equations and dynamical systems. Suzdal. Russia. 2012. P.130-132.
10. Пошаходжаева Г. Свойства траектории критической точки в единичной окружности. // Ўсиб келаётган ёш авлоднинг таълим ва тарбиясининг Ўзбек моделида олима аёлларнинг ўрни. Конференция материаллари. Самарканд. 2012. 91 – 95 бетлар.
11. Пошаходжаева Г., Джалилов А. Предельные теоремы для критических отображений окружности // Материалы международной конференции по современным проблемам топологии. Ташкент. 2013 г. Стр.85- 86.

12. Пошаходжаева Г. Функции первого линейного поворота интервала. // Abstracts of the international conference Algebra, Analysis and Quantum Probability 2015. pp 183-185.
13. Пошаходжаева Г., Джалилов А. Функции ожидания и динамические разбиения. // Abstracts of the republican scientific conference Turin Polytechnic University in Tashkent. 2017. pp. 208-210.
14. Poshaxodjayeva G. Dzhalilov A. The singularity exponents of critical circle maps // Abstracts The second USA- Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical physics 2017, pp.34.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (.0 .2019 йил).

Босишга рухсат этилди: .0.2019 йил
Ҳажми 2,5. «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2.25. Адади: 100. Буюртма: № 71.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди