ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSC.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚАЛАНДАРОВ АЗИЗ АБДУҚАЮМОВИЧ

ИЗОТРОП ВА АНИЗОТРОП ЖИСМЛАР УЧУН ТЕРМОЭЛАСТИК МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07-Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ - 2019

УДК: 519.63 (575.1)

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSC.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ҚАЛАНДАРОВ АЗИЗ АБДУҚАЮМОВИЧ

ИЗОТРОП ВА АНИЗОТРОП ЖИСМЛАР УЧУН ТЕРМОЭЛАСТИК МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07- Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ - 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида №B2019.1.PhD/FM323 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Халджигитов Абдували Абдисаматович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Абиров Рустам Абдуллаевич физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси,4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz.)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «___»_________ куни тарқатилди.
(2019 йил 29 июндаги 13 рақамли реестр баённомаси).

А.Р.Марахимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р.Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

М.Арипов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда, изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ёки боғлиқ бўлмаган чегаравий масалаларни ечиш, иссиқликнинг тарқалишини ва унинг жисмларнинг кучланганлик ва деформацияланиш ҳолатларига таъсирини баҳолаш масалаларига келтирилади. Термоэластик жараёнлар ва уларнинг математик моделлари, амалий математика, ҳисоблаш математикаси, математик моделлаштириш ва объектга йўналтирилган дастурлаш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Чекли-айирмали усуллар термоэластик масалаларни сонли ечишда ва конструкциялар элементларининг ишончлилигини аниқлашда асос сифатида хизмат қилади. Шу сабабли, жисмларда иссиқлик тарқалиши жараёнини кучланишлар, деформациялар ва температурани, ҳамда электромагнит ва пьезоэлектрик хусусиятларни назарда тутган ҳолда сонли ечиш алгоритмлари ва амалий дастурлар мажмуасини яратиш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда термоэластик масалаларни сонли ечишда чекли-айирмали усуллардан, ошкор ва ошкормас айирмали схемалардан фойдаланган ҳолда ҳисоблашларни амалга ошириш амалий математиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бу ҳолда жисмларда иссиқликнинг тарқалиши ва бунинг натижасида кучланишлар, деформациялар ва бошқа майдонларнинг пайдо бўлишини ҳисоблашни чекли-айирмали усуллар воситасида амалга ошириш муҳим аҳамият касб этмоқда. Шу сабабли изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик масалаларнинг сонли моделларини қуриш ва кенг доирадаги фойдаланувчиларга мўлжалланган қулай интерфейсга эга дастурлар мажмуасини яратиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган амалий математиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, эластиклик ва термоэластиклик назариялари масалаларини сонли ечишда чекли айирмали методлар, ошкор ва ошкормас айирмали схемалардан фойдаланиш, чекли-айирмали тенгламаларни итерацион усулда ечишга алоҳида эътибор қаратилди. Термоэластик жараёнларни тадқиқ қилиш ва долзарб назарий ҳамда амалий масалаларни ечишда республика ва чет элдаги мутахассислар томонидан долзарблиги эътироф этилган натижалар олинди. “Математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда термоэластик жараёнларни математик моделлаштириш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантриш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М.Мирзиёевнинг 2019 йил 24 май куни Ўзбекистон Миллий университетида таълим ва илм-фан соҳаси вакиллари билан бўлиб ўтган учрашувидаги маърузаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологияларни ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Иссиқлик тарқалиш жараёнини ифодаловчи математик моделлар энг аввал Дюгамель–Нейманнинг ишларида қаралган, ва бунда тўлиқ деформация эластик деформация ва иссиқлик кенгайишидан иборат деб фараз қилинган. Термоэластикликнинг асосий моделлари ва методларини ўрганишга В.Г.Карнаухов, А.Д.Коваленко ва бошқаларнинг ишлари бағишланган. Деформацияланувчи қаттиқ жисмларнинг термомеханик ҳолатини ташқи механик кучлар, иссиқлик ва электромагнит майдонларни ҳисобга олган ҳолда ўрганиш масалалари С.А.Амбарцумян, А.Н.Гузь, Ф.Г.Махорт, В.Новацкий, В.З.Партон, Б.А.Кудрявцев, В.И.Дресвянников ва бошқаларнинг илмий ишларида тадқиқ қилинган.

Термо қовушқоқэластик муҳитлар учун термоэластик масалалар А.А.Ильюшин, Б.Е.Победря, В.Г.Карнаухов, И.К.Сенченков, Б.П.Гуменюк, И.Ф.Киричок, Ю.Н.Шевченко, Ю.Г.Савченко, А.Д.Коваленко ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. Хусусан тешик ва ёриқлари мавжуд бўлган изотроп ва анизотроп жисмлар учун иссиқлик тарқалиши ва термоэластик масалаларни турли хил аналитик ва сонли усуллар асосида ечиш билан В.В.Дудко, В.А.Клименко, Г.С.Кит, А.С.Космодамианский, Г.Н.Савин, В.Н.Шоповалов ва бошқалар шуғулланган. Термопластик ва термоқовушқоқпластик масалаларнинг назарияси ва ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқишга Ю.Н.Шевченко ва бошқаларнинг ишлари бағишланган.

Термодинамик қонуниятлар доирасида, термоэластик боғлиқ масалалар M.Biot, В.Новацкий, Б.Е.Победря, В.Г.Карнаухов, H.M.Youssef ва бошқаларнинг ишларида кўриб чиқилган. Термоэластикликнинг боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган масалалари техник жараёнларни ўрганишда муҳим аҳамиятга эга. Вариацион–айирмали усуллар ва чекли айирмали тенгламаларни итерацион усулда ечишни тадқиқ қилишда А.А.Самарский, Е.С.Николаев, И.Г.Белухина, Б.Е.Победря ва бошқалар илмий изланишлар олиб боришган. Ўзбекистонда амалий математика ва механиканинг масалаларини математик моделлаштириш, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйилган масалаларни ечиш билан таниқли академиклар В.Қ.Қобулов, Т.Б.Бўриев ва М.Мирсаидов, профессорлар Ф.Б.Бадалов, М.М.Арипов, Р.Д.Алоев, Н.Равшанов, А.А.Халджигитов, Б.Э.Хусанов, Р.А.Абиров ва бошқалар шуғулланишган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг «Амалий математика масалаларини ечишнинг алгоритмлари ва дастурий таъминоти» илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган масалаларни сонли ечиш усуллари, алгоритмлари ва дастурий таъминотини яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

термоэластик чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас чекли айирмали тенгламаларни қуриш;

боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик чегаравий масалаларни сонли ечишнинг самарадор усулини қуриш;

боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик масалаларни сонли ечиш алгоритмлари ва дастурий таъминотини ишлаб чиқиш;

турли иссиқлик ва механик чегаравий шартларда изотроп ва ортотроп параллелепипед, тўғри тўртбурчак ва стержень учун боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик масалаларни сонли ечиш;

иссиқликнинг тарқалиши ва унинг изотроп ва анизотроп жисмларнинг кучланганлик-деформацияланиш ҳолатларига таъсирини баҳолаш.

Тадқиқотнинг объекти термоэластик изотроп ва анизотроп материаллардан ташкил топган конструкцияларнинг динамик деформацияланиш жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети термоэластикликнинг боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалалари кўринишида ифодаланган, изотроп ва анизотроп жисмларнинг чизиқли деформацияланиш жараёнларини сонли моделлаштиришдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида сонли моделлаштириш усулллари, ошкор ва ошкормас чекли-айирмали схемалар, чекли-айирмали тенгламаларни ечишнинг итерацион усуллари, прогонка усули, алгоритмлар назарияси, объектга йўналтирилган дастурлаш технологиялари ва ҳисоблаш экспериментидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

термоэластик чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас чекли-айирмали схемалар қурилган;

изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ҳамда боғлиқ бўлмаган масалаларни сонли ечиш учун янгича ёндашув таклиф қилинган ва асосланган;

турли иссиқлик ва механик чегаравий шартларда изотроп ва ортотроп параллелепипед, тўғри тўртбучак ва стержень учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалалар сонли ечилган;

боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик масалаларни сонли ечиш имконини берувчи алгоритмлар ва дастурий таъминот ишлаб чиқилган;

иссиқликнинг тарқалиши ва унинг изотроп ва анизотроп жисмларнинг кучланганлик-деформацияланиш ҳолатига таъсири баҳоланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари изотроп ва анизотроп материаллардан ташкил топган конструкциялар ва уларнинг элементларининг статик ва динамик термомеханик кучлар таъсиридаги мустаҳкамлигини аниқлашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги эластиклик назариясининг чегаравий масаласини сонли ечиш билан олинган ечимни аниқ ечим билан таққослаш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказилганлиги ва математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти таклиф қилинган сонли усуллар изотроп ва анизотроп жисмлар учун пластик ва термопластик чегаравий масалаларни сонли ечишда фойдаланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти таклиф қилинган сонли ечиш усуллари ва олинган натижалар замонавий техник объектлар ва композицион материаллардан ташкил топган иншоотларнинг турли термомеханик кучлар таъсиридаги деформацияланиш жараёнларини сонли моделлаштириш ва уларнинг мустаҳкамлиги ва ишончлилигини аниқлаш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик масалаларни сонли моделлаштиришга оид олинган илмий натижалар асосида:

термоэластик масалалар учун ишлаб чиқилган ошкор ва ошкормас чекли-айирмали схемалар Ф4-ФА-Ф049 рақамли «Разработка бимоментной теории изгиба и колебания толстых пластин и оболочек с учетом анизотропных свойств материалов» грант лойиҳасида анизотроп пластиналарнинг чекли-айирмали ҳаракат тенгламаларини қуришда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг 2019 йил 19 мартдаги 2/1255-854-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши бимоментларни ҳисобга олган ҳолда анизотроп пластиналарнинг мажбурий тебраниши масаласини сонли ечиш имконини берган;

термоэластик масалаларни сонли ечиш ва уларнинг натижаларини визуаллаштириш учун ишлаб чиқилган дастурий таъминоти «Сирдарё савдо қурилиш лойиҳа» МЧЖ ва «Мирзачўл агро қурилиш лойиҳа» МЧЖларнинг маъмурий биноларни лойиҳалаштириш ишларида фойдаланилган

(Ўзбекистон Республикаси Қурилиш вазирлигининг 2019 йил 4 мартдаги 1511/06-18-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши лойиҳалаш ишларининг аниқлиги ва самарадорлигини ошириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 13 та, жумладан 5 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича 25 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 9 та мақола, жумладан 1 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган, 1 та ЭҲМ учун дастурий маҳсулотга гувоҳнома олинган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 113 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожлантиришнинг устувор йўналишларига мос келиши асосланган. Диссертация мавзуси бўйича чет элдаги илмий тадқиқотларнинг қисқача таҳлили ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси мухокама қилинган, тадқиқотнинг мақсад, вазифалари шакллантирилган, унинг объекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқотнинг амалий натижалари ва илмий янгиликлари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг қўлланилиши, диссертация тузилиши ва нашр қилинган илмий ишлар тўғрисида маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «**Эластиклик ва термоэластиклик назариялари масалаларини сонли ечиш усуллари**» эластиклик назариясининг чегаравий масаласини сонли ечишга янгича ёндашувни таклиф қилиш ва боғлиқ бўлмаган, бундан ташқари қисман боғлиқ термоэластик чегаравий масалалар учун умумлаштиришга бағишланган.

1.1 параграфда изотроп жисмлар учун эластиклик назарияси масаласининг математик ва сонли моделлари икки ўлчовли ҳолда қараб чиқилган. Эластиклик назариясининг чегаравий масалаларини сонли ечиш учун итерация методининг модификацияланган варианти таклиф қилинган. Чегаравий масала мувозанат тенгламаси

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad , \quad i=1,2,3 \qquad (1)$$

изотроп жисмлар учун Гук қонуни

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

Коши муносабати

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

ва чегаравий шартлардан

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^o \quad , \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^o \tag{4}$$

ташкил топган. Бу ерда σ_{ij}- кучланишлар тензори, ε_{ij}- деформациялар тензори, u_i- кўчишлар вектори, X_i- хажмий кучлар, λ, μ- Ламе эластик доимийлари, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, δ_{ij}- Кронекер символи, n_j- Σ_2 сиртга ўтказилган ташқи нормал, S_1, S_2, S_3-ташқи кучлар векторининг элементлари.

(1)-(4) тенгламаларни тўғри тўртбурчак $\Omega = \{0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2\}$ соҳа учун қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X_1 = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + X_2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Ω соҳанинг чегарасида кўчишларга нисбатан берилган мос чегаравий шартлар

$$\begin{aligned} &u(x,y)\big|_{y=0} = 0, \quad v(x,y)\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{l_1}, \quad u(x,y)\big|_{y=l_2} = 0, \quad v(x,y)\big|_{y=l_2} = -\sin\frac{\pi x}{l_1}, \\ &u(x,y)\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{l_2}, \quad v(x,y)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,y)\big|_{x=l_1} = -\sin\frac{\pi y}{l_2}, \quad v(x,y)\big|_{x=l_1} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Эластиклик назариясининг (5-6) масаласи учун чекли-айирмали схема қурамиз.

Тўғри тўртбурчакнинг l_k тамонларини N_k га бўлиб, $h_k = \dfrac{l_k}{N_k}$ ни аниқлаймиз, бу ерда $k = 1,2$. Бу ҳолда тугун нуқталар қуйидагича бўлади $x_i = h_1 \cdot i$, $\quad y_j = h_2 \cdot j$, $i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$.

(5) тенгламалардаги ҳосилаларни мос айирмали муносабатлар билан алмаштириб, қуйидаги чекли-айирмали тенгмаларга эга бўламиз

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\ &+\mu\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + X_1 = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\ &+\mu\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + X_2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

(7) тенгламаларни $u_{i,j}$ ва $v_{i,j}$ кўчишларга нисбатан ечамиз, яъни

$$u_{i,j}=(4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+4h_1^2\mu(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+h_1h_2(\lambda+\mu)*$$
$$*(v_{i+1,j+1}-v_{i-1,j+1}-v_{i+1,j-1}+v_{i-1,j-1})+X_1)/(8h_2^2(\lambda+2\mu)+8h_1^2\mu) \tag{8}$$
$$v_{i,j}=(4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i,j+1}+v_{i,j-1})+4h_2^2\mu(v_{i+1,j}+v_{i-1,j})+h_1h_2(\lambda+\mu)*$$
$$*(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})+X_2)/(8h_1^2(\lambda+2\mu)+8h_2^2\mu).$$

(8)- муносабатлар асосида $k=0,1,2,...$ индекс бўйича қуйидаги итерацион жараённи ташкил қиламиз

$$u_{i,j}^{(k+1)}=(4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)})+4h_1^2\mu(u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)*$$
$$*(v_{i+1,j+1}^{(k)}-v_{i-1,j+1}^{(k)}-v_{i+1,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}^{(k)})+X_1)/(8h_2^2(\lambda+2\mu)+8h_1^2\mu) \tag{9}$$
$$v_{i,j}^{(k+1)}=(4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i.j+1}^{(k)}+v_{i,j-1}^{(k)})+4h_2^2\mu(v_{i+1,j}^{(k)}+v_{i-1,j}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)*$$
$$*(u_{i+1,j+1}^{(k)}-u_{i-1,j+1}^{(k)}-u_{i+1,j-1}^{(k)}+u_{i-1,j-1}^{(k)})+X_2)/(8h_1^2(\lambda+2\mu)+8h_2^2\mu).$$

(6)- чегаравий шартлар тугун нуқталарга нисбатан қуйдагича ёзилади

$$u_{i0}^{(0)}=0,\quad v_{i0}^{(0)}=\sin\frac{\pi x_i}{l_1},\ u_{iN_2}^{(0)}=0,\ v_{iN_2}^{(0)}=-\sin\frac{\pi x_i}{l_1},$$
$$u_{0j}^{(0)}=\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{0j}^{(0)}=0,\ u_{N_1j}^{(0)}=-\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{N_1j}^{(0)}=0. \tag{10}$$

Нолинчи яқинлашишда, яъни $k=0$ бўлганда қидирилаётган $u_{ij}^{(0)}$ ва $v_{ij}^{(0)}$ катталикларнинг Ω соҳанинг чегарасидаги тугун нуқталардаги қийматлари (10) чегаравий шартларга асосан аниқланади. Ички тугун нуқталарда эса, нолинчи $(k=0)$ яқинлашишда кўчишларнинг қийматлари нолга тенг деб ҳисобланади. Итерацион жараённи давом эттириб, қидирилаётган u_{ij} ва v_{ij} кўчишларнинг қийматларини ε аниқликда топиш мумкин.

Қуйидаги функциялар

$$u=\cos\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}\quad,\qquad v=\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2} \tag{11}$$

(6)-чегаравий шартларни ва ҳажмий кучлар қуйидагича бўлганда (5) мувозанат тенгламаларини қаноатлантиради

$$X_1=-(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_1^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_2^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2} \tag{12}$$
$$X_2=-(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_2^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_1^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}.$$

Модель масала параметрларнинг қуйидаги қийматларида ечилган $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $l_1=l_2=1$, $N1=N2=10$.

1-жадвал

***u(x,y)* кўчишнинг $\varepsilon=0.001$ бўлгандаги тақрибий қийматлари**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2939	0.2499	0.1816	0.0955	0
y=0.2	0.5877	0.5593	0.4754	0.3451	0.1813	0
y=0.3	0.8090	0.7706	0.6554	0.4757	0.2498	0
y=0.4	0.9510	0.9068	0.7717	0.5603	0.2943	0

2-жадвал

u(x,y) **аниқ ечимнинг қийматлари**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2938	0.2500	0.1816	0.0954	0
y=0.2	0.5877	0.5590	0.4755	0.3454	0.1816	0
y=0.3	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0
y=0.4	0.9510	0.9045	0.7694	0.5590	0.2938	0

Чегаравий масаланинг сонли натижаларини аниқ ечим билан солиштириш кўчишларнинг қийматлари етарлича яқинлигини кўрсатди, бу эса олинган натижаларнинг ишончлилигини ва таклиф қилиган сонли ечиш методининг тўғрилигини таъминлайди.

Шундай қилиб, методнинг моҳияти дастлабки тенгламалар ва чегаравий шартлар учун марказий тугун нуқталардаги асосий кўчишларга нисбатан ечилган чекли-айирмали схемалар қуриш ва итерацион жараённи ташкил қилишдан иборат. Бунда, нолинчи яқинлашишда ички нуқталардаги кўчишларнинг қийматлари нолга тенг деб ҳисобланади.

1.2 параграфда термоэластик боғлиқ бўлмаган масала шакллантирилган, уни (1)-(4) масаладаги (2)-муносабат ўрнига Дюгамель-Нейман муносабатидан фойдаланиш орқали олиш мумкин

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \qquad (13)$$

бу ерда *T*-температура, T_0-бошланғич температура, α-иссиқлик кенгайиши коэффициенти. Икки ўлчовли ҳолда, мос равишда, томонлари “маҳкамланган” ва “кучдан холи” тўғри тўртбурчаклар учун чекли-айирмали тенгламалар тузилган. Бу тенгламалар биринчи параграфдаги каби қидирилаётган кўчишлар компонентларига нисбатан ечилади ва $\varepsilon = 0.0001$ аниқликда итерацион усулда сонли ечилган.

1.3 параграфда адабиётлардан маълум бўлган, термоэластик параллелепипед ҳақидаги масала, таклиф қилинган итерацион усул асосида сонли ечилган. Бунда, параллелепипеднинг сирти кучлардан холи ва ичкарисида қуйидаги қонуният асосида тарқалган температура берилган деб қаралган

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0 \sin\frac{\pi x_1}{l_1} \sin\frac{\pi x_2}{l_2} \sin\frac{\pi x_3}{l_3} .$$

Олинган сонли натижалар Цаплиннинг ишида келтирилган натижаларга мос келади, бу билан яна бир бор тадбиқ қилинаётган итерацион ёндашувнинг тўғрилиги ўз тасдиқини топади.

1.4 параграфда қисман боғлиқ динамик чегаравий масала шакллантирилган, у қуйидаги ҳаракат тенгламаси

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (14)$$

Дюгамель-Неймана муносабати

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \tag{15}$$

Коши муносабати

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{16}$$

иссиқлик тарқалиши тенгламаси

$$c_\varepsilon \dot{T} = \lambda_0 T_{,ii} \tag{17}$$

бошланғич

$$u_i\Big|_{t=t_0} = \phi_i, \quad \dot{u}_i\Big|_{t=t_0} = \psi_i \;, \; T\Big|_{t=0} = f \tag{18}$$

ва чегаравий

$$u_i\Big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_2} = S_i^o \;, \; T\Big|_{\Sigma} = \varphi(t) \tag{19}$$

шартлардан иборат. Бу ерда $c_\varepsilon -$доимий деформацияда иссиқлик сиғими ва $\lambda_0 -$иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти.

Бир ўлчовли ҳолда, чегаравий масала мос равишда, гиперболик ва параболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасига келтирилган. Ошкор ва ошкормас чекли-айирмали тенгламалар қурилган. Ошкор чекли-айирмали схемаларни ечишда рекуррент муносабатлар қўлланилган, ошкормас схемалар учун эса 1.1 параграфда таклиф қилинган итерацион жараён тадбиқ қилинган. Иккита метод билан олинган сонли натижаларни таққослаб уларнинг яқинлиги кўрсатилган, бу билан яна бир бор таклиф қилинган янгича ёндашувнинг тўғрилиги тасдиқланади.

Икки ўлчовли статик қисман боғлиқ чегаравий масала учун чекли-айирмали тенгламалар қурилган. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига мос чекли-айирмали тенглама фақат температурага боғлиқлигини эътиборга олсак, уни биринчи тенгламадан алоҳида ечиш имконияти мавжуд. Лекин, диссертацияда бу тенгламалар биргаликда қаралган ва бу тенгламаларни ечиш учун таклиф қилинган итерацион усул тадбиқ қилинган. Олинган сонли натижалар жадвалларда келтирилган ва улар асосида температура ва кўчишларнинг қаралаётган соҳада тарқалишини кўрсатувчи графиклар қурилган.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Изотроп жисмлар учун динамик термоэластикликнинг боғлиқ масаларини сонли ечиш**» деб номланган ва боғлиқ термоэластик динамик масалани сонли моделлаштиришга бағишланган. Чегаравий масала бир, икки ва уч ўлчовли ҳолларда қараб чиқилган, ошкор ва ошкормас айирмали схемалар қурилган. Стержен, тўғри тўртбурчак ва параллелепипеднинг термик-деформацияланган ҳолати ҳақида масалалар турли термомеханик чегаравий шартлар асосида сонли ечилган.

2.1 параграфда термоэластик боғлиқ масала шакллантирилган. Бу ҳолда, (14)-(19) масалада (17)-иссиқлик тарқалиши тенгламаси қуйидаги изотроп жисмлар учун иссиқлик оқими тенгламаси билан алмаштирилади

$$\lambda_0 T_{,ii} - c_\varepsilon \dot{T} - \gamma T \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \tag{20}$$

бу ерда $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Бу тенгламалар бир ўлчовли ҳолда ёзииб олинган ва улар учун ошкор ва ошкормас айирмали схемалар қурилган. Бу схемалар мос равишда рекуррент муносабатлар ва прогонка усули билан ечилган. Олинган сонли натижаларнинг бир бирига яқинлиги кўрсатилган. Шу параграфда термоэластик боғлиқ масаладаги чизиқли Дюгамель-Нейман тенгламаси ўрнига, ночизиқли Ильюшин тенгламасини олиб термопластик боғлиқ масала қаралган

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{ij} \tag{21}$$

бу ерда μ'-уринма модули, e_{ij}-деформациялар тензори девиатори, $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ - деформациялар тензори интенсивлиги, ε_u^*-деформациялар бўйича эластиклик чегараси. Бу масала ҳам бир ўлчовли ҳолда қараб чиқилган. Ошкор ва ошкормас схемалар асосида сонли ечимлар олинган ва улар асосида четлари маҳкамланган стерженда иссиқлик таъсирида пайдо бўладиган кўчишлар ва температура тарқалишининг графиклари чизилган.

2.2 параграфда олдинги параграфда шакллантирилган термоэластик боғлиқ динамик масала, икки ўлчовли ҳолда тўғри тўрбурчак соҳа учун қараб чиқилган. Бу ҳолда масала қуйидаги кўринишни олади

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22}$$

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{23}$$

$$\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) = 0 \tag{24}$$

мос бошланғич ва чегаравий шартлар билан.

Бу тенгламалардаги ҳосилаларни чекли-айирмали муносабатлар билан алмаштириб, ҳосил бўлган ошкор айирмали тенгламаларни мос равишда $u_{i,j}^{k+1}$, $v_{i,j}^{k+1}$, $T_{i,j}^{k+1}$ ларга нисбатан ечиб қуйидагига эга бўламиз

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho}\Bigg(& (\lambda + 2\mu)\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \mu\frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + \\ & + (\lambda + \mu)\frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} - \gamma\frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2h_1}\Bigg) + \\ & + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho}\Bigg(& (\lambda + 2\mu)\frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + \mu\frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \\ & + (\lambda + \mu)\frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} - \gamma\frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2h_2}\Bigg) + \\ & + 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1} \end{aligned} \tag{26}$$

$$T_{i,j}^{k+1}=\frac{\tau}{c_\varepsilon}\left(\lambda_0\left(\frac{T_{i+1,j}^k-Tu_{i,j}^k+T_{i-1,j}^k}{h_1^2}+\frac{T_{i,j+1}^k-2T_{i,j}^k+T_{i,j-1}^k}{h_2^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma T_{i,j}^k\left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1}-u_{i-1,j}^{k+1}-u_{i+1,j}^{k-1}+u_{i-1,j}^{k-1}}{4h_1\tau}+\frac{v_{i,j+1}^{k+1}-v_{i,j-1}^{k+1}-v_{i,j+1}^{k-1}+v_{i,j-1}^{k-1}}{4h_2\tau}\right)\right)+T_{i,j}^k \qquad (27)$$

(25)-(27) тенгламалар ёрдамида $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $T(x,y,t)$ функцияларнинг t^{k+1} қатламдаги қийматларини олдинги иккита ($k=0$ *ва* $k=1$) қатламлардаги қийматлар, бошланғич ва чегаравий шартларга асосланиб аниқлаш мумкин.

Энди, биринчи бобда келтирилган итерацион жараённи динамик термоэластик боғлиқ масалани сонли ечишга тадбиқ қиламиз. Итерацион жараённи қўллаш учун биз ошкормас чекли айирмали схемалардан фойдаланамиз. Ҳосил бўлган айирмали тенгламаларни мос равишда $u_{i,j,k+1}$, $v_{i,j,k+1}$, $T_{i,j,k+1}$ ларга нисбатан ечиб, қуйидаги итерацион жараённи қурамиз

$$u_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j,k+1}^{(n)}+u_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}+(\lambda+\mu)\frac{v_{i+1,j+1,k}-v_{i-1,j+1,k}-v_{i+1,j-1,k}+v_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{u_{i,j+1,k+1}^{(n)}+u_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j,k}-T_{i-1,j,k}}{2h_1}+\rho\frac{2u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}}{\tau^2}\right]/\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{h_1^2}+\frac{2\mu}{h_2^2}+\frac{\rho}{\tau^2}\right] \qquad (28)$$

$$v_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[(\lambda+2\mu)\frac{v_{i,j+1,k+1}^{(n)}+v_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{u_{i+1,j+1,k}-u_{i-1,j+1,k}-u_{i+1,j-1,k}+u_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{v_{i+1,j,k+1}^{(n)}+v_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i,j+1,k}-T_{i,j-1,k}}{2h_2}+\rho\frac{2v_{i,j,k}-v_{i,j,k-1}}{\tau^2}\right]/\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{h_2^2}+\frac{2\mu}{h_1^2}+\frac{\rho}{\tau^2}\right] \qquad (29)$$

$$T_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[\lambda_0\left(\frac{T_{i+1,j,k+1}^{(n)}+T_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}+\frac{T_{i,j+1,k+1}^{(n)}+T_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}\right)+c_\varepsilon\frac{T_{i,j,k-1}}{2\tau}-\right.$$

$$-\gamma T_{i,j,k}\left(\frac{u_{i+1,j,k+1}-u_{i-1,j,k+1}-u_{i+1,j,k-1}+u_{i-1,j,k-1}}{4h_1\tau}+\right. \qquad (30)$$

$$\left.\left.+\frac{v_{i,j+1,k+1}-v_{i,j-1,k+1}-v_{i,j+1,k-1}+v_{i,j-1,k-1}}{4h_2\tau}\right)\right]/\left[\frac{2\lambda_0}{h_1^2}+\frac{2\lambda_0}{h_2^2}+\frac{c_\varepsilon}{2\tau}\right].$$

Тўғри тўртбурчак соҳа учун боғлиқ термоэластик масалани ечишда бошланғич ва чегаравий шартларнинг дискрет шакли қуйидагича бўлади:

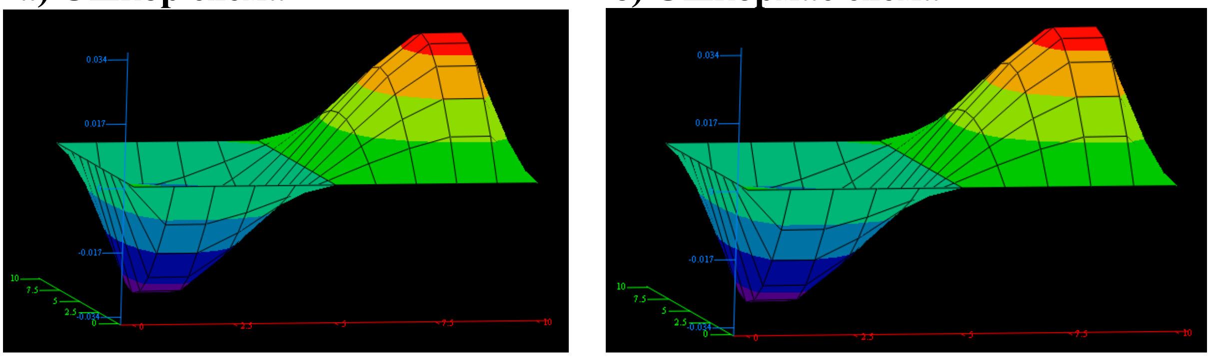
$$u_{ij}^0=0,\quad \frac{u_{ij}^1-u_{ij}^0}{\tau}=0,\quad v_{ij}^0=0,\quad \frac{v_{ij}^1-v_{ij}^0}{\tau}=0,$$

$$u_{0j}^k=0,\quad u_{N_1j}^k=0,\quad u_{i0}^k=0,\quad u_{iN_2}^k=0, v_{0j}^k=0,\quad v_{N_1j}^k=0,\quad v_{i0}^k=0,\quad v_{iN_2}^k=0,$$

$$T_{ij}^0=T_0+T_0\sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right),\ T_{0j}^k=0,\quad T_{N_1j}^k=0,\quad T_{i0}^k=0,\quad T_{iN_2}^k=0.$$

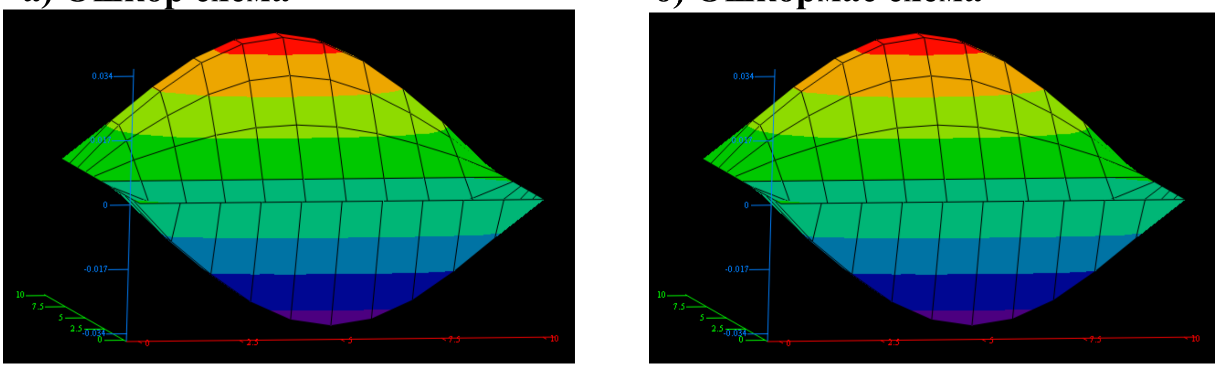
Бошланғич параметрлар сифатида қуйидаги қийматлар олинган $\lambda = 0.78$, $\lambda_0 = 0.06$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 0.5$, $\rho = 0.86$, $c_\varepsilon = 3.4$, $T_0 = 15$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.1$, $\tau = 0.01$, $\ell_i = 1$.

а) Ошкор схема **б) Ошкормас схема**



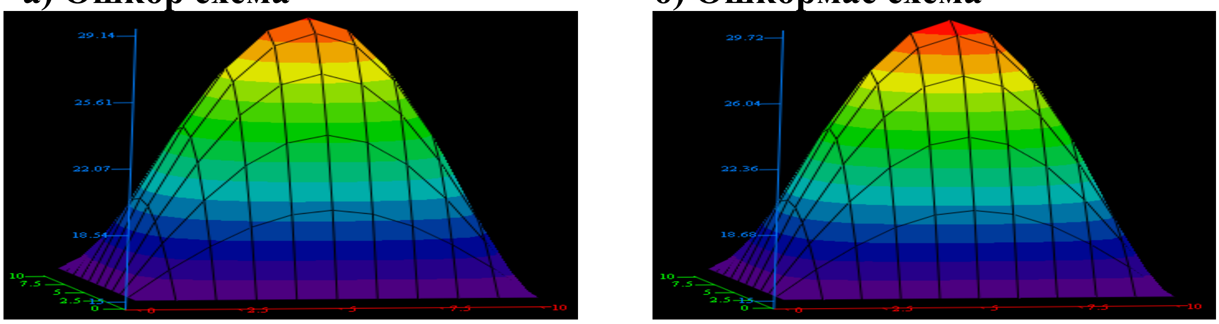
1-расм. Тўғри тўртбурчак соҳада *u(x,y,t)* **кўчишларнинг тарқалиши ($t = 0.1$ бўлганда)**

а) Ошкор схема **б) Ошкормас схема**



2-расм. Тўғри тўртбурчак соҳада *v(x,y,t)* **кўчишларнинг тарқалиши ($t = 0.1$ бўлганда)**

а) Ошкор схема **б) Ошкормас схема**



3-Расм. Тўғри тўртбурчак соҳада *T(x,y,t)* **температуранинг тарқалиши ($t = 0.1$ бўлганда)**

Кўчишлар вектори ва температуранинг қийматлари учун 1-3- расмларни таққослаш, ошкор ва ошкормас схемалар асосида $t = 0.1$ бўлгандаги олинган сонли ечимлар бир-бирига яқинлигини ва катта аниқликда усма-уст тушишини кўрсатмоқда.

2.3 параграфда изотроп параллелепипед учун боғлиқ динамик термоэластик масала қараб чиқилган. Бу жараённи ифодаловчи тенгламалар тўртта хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат системани ташкил қилади, уларнинг дастлабки учтаси гиперболик ва тўртинчиси параболик типга тегишли. Ошкор ва ошкормас чекли айирмали тенгламалар қурилган. Ошкор схемалар кўчишлар ва температуранинг мос тугун нуқталардаги қийматларига нисбатан ечилган, бу эса қидирилаётган катталикларни ҳисоблаш имкониятини беради. Ошкормас айирмали тенгламалар прогонка ва итерация усуллари билан ечилган. Таққослаш учун параллелепипеднинг айрим кесимларидаги кўчишларнинг қийматлари асосида графиклар қурилган.

Учинчи боб «**Анизотроп жисмлар учун термоэластикликнинг боғлиқ динамик масалалари**» анизотроп жисмлар учун боғлиқ динамик термоэластик масалаларни сонли ечишга бағишланган. Ортотроп тўғри тўртбурчак, марказида тўғри тўртбурчак шаклидаги тешик мавжуд тўғри тўртбурчак ва параллелепипед учун боғлиқ термоэластик масалалар қаралган. Бундан ташқари, боғлиқ ва боғлиқмас термоэластик масалаларни турли термомеханик чегаравий шартларда сонли ечишга мўлжаллаб ишлаб чиқилган дастурий таъминотдан фойдаланиш бўйича кўрсатма келтирилган.

3.1 параграфда ортотроп тўғри тўртбурчак ҳақидаги термоэластикликнинг икки ўлчовли боғлиқ масаласи шакллантирилган ва сонли ечилган.

Бу ҳолда анизотроп жисмлар учун Дюгамель-Нейман муносабати ва иссиқлик оқими тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(T - T_0)\delta_{ij} \tag{31}$$

$$\lambda_{ij}T_{,ij} - c_{\varepsilon}\dot{T} - T\cdot\beta_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \tag{32}$$

бу ерда C_{ijkl} −жисмнинг механик хоссаларини билдирувчи тензор ва β_{ij} −иссиқлик кенгайиши тензори.

Ошкор ва ошкормас чекли-айирмали тенгламамлар қурилган. Ошкормас айирмали тенгламаларни ечиш учун итерация ва прогонка усуллари қўлланилган. Ошкор айирмали тенгламаларни ечишда эса, рекурент формулалардан фойдаланилган. Олинган сонли ечимлар асосида қаралаётган соҳада кўчишлар ва температуранинг тарқалишининг графиклари қурилган ва солиштирилган.

3.2 параграфда мураккаб тузилишга эга жисм учун боғлиқ термоэластик динамик масала ечилган. Тўғри тўртбурчакнинг марказида тўғри тўртбурчак шаклидаги тешик соҳа учун икки ўлчовли термоэластик боғлиқ чегаравий масала қараб чиқилган. Олинган сонли ечимлар асосида марказида тўғри тўртбурчак шаклидаги тешик бўлган тўғри тўртбурчак соҳада кучланишларнинг тарқалиши келтирилган.

3.3 параграфда термомеханик кучлар таъсири остидаги, четлари маҳкамланган термоэластик ортотроп параллелепипед ҳақидаги масала сонли ечилган. Кўчишлар ва температурага нисбатан ёзилган ортотроп жисмлар учун умумлашган термоэластик боғлиқ динамик чегаравий масала қуйидагича ифодаланади: ҳаракат тенгламаси

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(C_{1122}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(C_{1133}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\beta_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(C_{2211}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(C_{2233}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\beta_{22}\dfrac{\partial T}{\partial y}=\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(C_{3311}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(C_{3322}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}-\beta_{33}\dfrac{\partial T}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (33)$$

иссиқлик оқими тенгламаси

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\lambda_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-c_{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial t}-T_0\left(\beta_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\beta_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}+\beta_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}\right)=0 \quad (34)$$

ва мос бошланғич ва чегаравий шартлар.

Ошкор ва ошкормас чекли-айирмали тенгламалар қурилган ва итерацион усулда, прогонга усулида ва рекурент муносабатлардан фойдаланиб сонли ечилган. Температура ва кўчишларнинг тарқалишини ифодаловчи графиклар вақтга боғлиқ равишда координата ўқлари бўйича қурилган.

Модель масала қуйидаги бошланғич,

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,\ v(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,\ w(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0 \ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_3,\quad T(x,y,z,t)\big|_{t=0}=T_0$$

чегаравий шартлар

$$u(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ v(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ w(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ T(x,y,z,t)\big|_{y=0}=T_0,$$

$$T(x,y,z,t)\big|_{y=l_2}=T_0,\ T(x,y,z,t)\big|_{z=0}=T_0,\ T(x,y,z,t)\big|_{z=l_3}=T_0,$$

$$T(x,y,z,t)\big|_{x=0}=T_0+T_0\sin(\frac{\pi y}{l_2})\sin(\frac{\pi z}{l_3}),\ T(x,y,z,t)\big|_{x=l}=T_0+T_0\sin(\frac{\pi y}{l_2})\sin(\frac{\pi z}{l_3})$$

ва қуйидаги параметрлардан фойдаланган ҳолда сонли ечилган

$\lambda_{11}=0.3,\quad \lambda_{11}=0.7,\ \lambda_{11}=1.1,\ \beta_{11}=1.5,\ \beta_{22}=0.5,\ \beta_{33}=0.9,\ Ce=3.5,\ T_0=10,$ $h_1=0.1,\ h_2=0.1,\ h_3=0.1,\ \tau=0.01,\ \rho=1,\ \ell_1=\ell_2=\ell_3=1,\ C_{1111}=1.8,\ C_{2222}=2{,}02,$ $C_{3333}=2.76,\quad C_{1122}=0.998,\quad C_{1133}=1.01,\quad C_{2211}=C_{1122},\quad C_{3311}=C_{1133},\quad C_{2233}=1.07,$ $C_{3322}=C_{2233},\ C_{2323}=0.623,\ C_{1313}=0.561,\ C_{1212}=0.452.$

3-жадвал

***u(x,y,z,t)* кўчишларнинг *z=0.4* ва *t=0.05* бўлгандаги қийматлари**

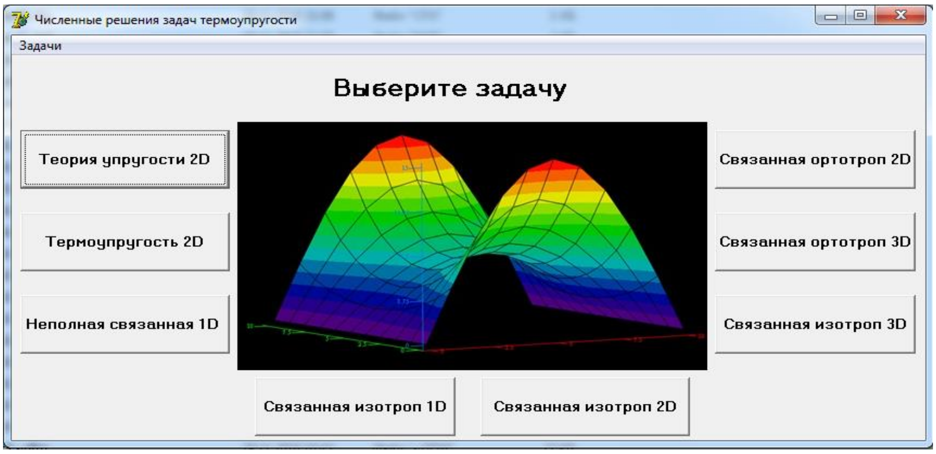
	x=0.1, y=0.9	x=0.4, y=0.4	x=0.2, y=0.3
Ошкор схема	0.02441	0.00044	0.01003
Ошкормас схема	0.02337	0.00043	0.01125

4-жадвал

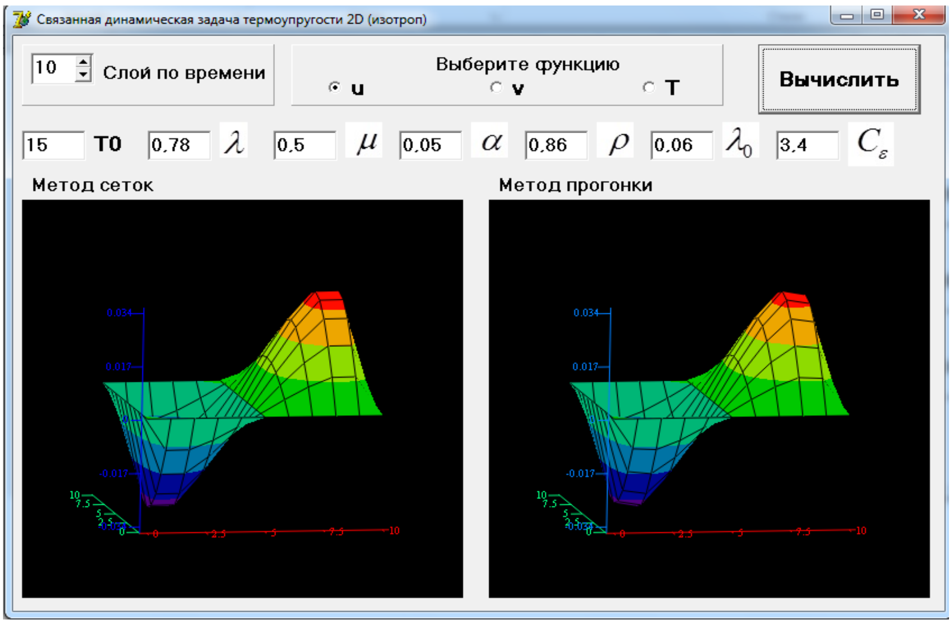
$T(x,y,z,t)$ **температуранинг** $z=0.7$ **ва** $t=0.08$ **бўлгандаги қийматлари**

	x=0.1, y=0.9	x=0.5, y=0.5	x=0.2, y=0.3
Ошкор схема	10.72266	10.38824	10.24647
Ошкормас схема	10.75615	10.17778	10.20100

3.4 параграфда Delphi7 муҳитида яратилган дастурлар мажмуидан фойдаланиш бўйича кўрсатмалар келтирилган «*Комплекс программ для численного решения задач термоупругости*».



4-расм. Бош ойна (масалани танлаш)



5-расм. 2D изотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ масалаларни ечиш модули

Мазкур дастурлар мажмуидан, композицион материаллардан ташкил топган конструкциялар ва улар элементларининг турли иссиқлик ва механик кучлар таъсиридаги мустаҳкамлик захираларини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин.

ХУЛОСА

Диссертация изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган масалаларни сонли моделлаштиришга бағишланган. Диссертация ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалаларнинг математик моделлари шакллантирилган.
2. Изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалаларнинг сонли моделлари ишлаб чиқилган.
3. Изотроп ва анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас чекли-айирмали схемалар қурилган.
4. Термоэластик боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган чегаравий масалаларни сонли ечиш учун янгича ёндашув таклиф қилинган ва асосланган.
5. Турли иссиқлик ва механик чегаравий ва бошланғич шартларда изотроп ва ортотроп параллелепипед, тўғри тўртбурчак ва стержень учун боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик чегаравий масалалар сонли ечилган.
6. Ильюшин деформацион назариясига асосланган бир ўлчовли термопластик боғлиқ динамик масала сонли ечилган.
7. Боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган термоэластик масалаларни сонли ечишга мўлжалланган алгоритмлар ва дастурий таъминот ишлаб чиқилган.
8. Иссиқлик ва кўчишларнинг тарқалиши ва уларнинг изотроп ва анизотроп жисмларнинг кучланганлик ва деформацияланиш ҳолатларига таъсири баҳоланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

КАЛАНДАРОВ АЗИЗ АБДУКАЮМОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

05.01.07- Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.1.PhD/FM323.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Халджигитов Абдували Абдисаматович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Абиров Рустам Абдуллаевич доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» ________ 2019 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___»_________ 2019 года.
(протокол рассылки № 13 от 29 июня 2019 года).

А.Р.Марахимов
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

М.Арипов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность диссертации. В мире во многих областях науки и техники, научные и практические исследования часто сводятся к решению связанных или несвязанных задач термоупругости и оценке влияния распределения температуры на напряжённо-деформированное состояние изотропных и анизотропных тел. Термоупругие процессы и их математические модели являются объектом прикладной математики, вычислительной математики, математического моделирования и объектно-ориентированного программирования. Во многих случаях для численного решения задач термоупругости и опреления надёжности элементов конструкций используются конечно-разностные методы. Поэтому исследование процесса распространения тепла с учетом напряжения, деформации и температуры, а также электромагнитных и пьезоэлектрических свойств, с целью построения алгоритмов численного решения и создания комплекса прикладных программ является одной из важнейших задач.

Мировой опыт показывает что, при численном решении связанных и несвязанных задач термоупругости проведение вычислений с использованием конечно-разностных методов, явных и неявных разностных схем, являются актуальными задачами прикладной математики. В этом случае, особое значение приобретают конечно-разностные методы, как средство вычисления распространения тепла вызывающее возникновение в теле напряжений, деформаций и других полей. В этой связи актуальной является задача построения численных моделей термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел, а также задача создания соответствующего комплекса программ, ориентированный на широкий круг пользователей, имеющий удобный интерфейс.

В нашей стране усилено внимание научным направлениям прикладной математики, которые имеют важное научное и прикладное значение для фундаментальных наук. Широкое применение конечно-разностные методы, явные и неявные разностные схемы, итерационные методы решения конечно-разностных уравнений нашли в задачах теории упругости и термоупругости. Здесь получены результаты по решению задач теории и практики термоупругости признанные, как актуальные, со стороны отечественных и зарубежных специалистов. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям «Математической физики, прикладной математики и математического моделирования» выделено как основная задача фундаментальных исследований[1]. Важное значение для обеспечения исполнения данного постановления имеет развитие теории математического моделирования задач термоупругости.

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №-УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлении №-ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №-ПП-2909 от 20 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему системы высшего образования», №-ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», доклад Президента Республики Узбекистан Ш.Мирзиёева 24 мая 2019 года на встрече с представителями науки и образования в Национальном университете Узбекистана, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Математические модели описывающие процесс распространения тепла были впервые рассмотрены в работе Дюгамеля–Неймана, в которой предполагалось, что полная деформация состоит из упругой деформации и теплового расширения. Обзору основных моделей и методов термоупругости посвящены работы В.Г.Карнаухова, А.Д.Коваленко и др. Термомеханическое поведение деформируемых твёрдых тел с учетом внешних механических сил, тепловых и электромагнитных полей исследованы в работах С.А.Амбарцумяна, А.Н.Гузя, Ф.Г.Махорта, В.Новацкого, В.З.Партона, Б.А.Кудрявцева, В.И.Дресвянникова и др.

Термоупругие задачи для термовязкоупругих тел рассмотрены в работах А.А.Ильюшина, Б.Е.Победри, В.Г.Карнаухова, И.К.Сенченкова, Б.П.Гуменюка, И.Ф.Киричка, Ю.Н.Шевченко, Ю.Г.Савченко, А.Д.Коваленко и др. Особенно широкое развитие получили задачи теплопроводности и термоупругости в случае изотропных и анизотропных пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями и трещинами на основе различных аналитических и приближенных методов, которыми занимались В.В.Дудко, В.А.Клименко, Г.С.Кит, А.С.Космодамианский, Г.Н.Савин, В.Н.Шоповалов и другие. Разработке теории и методов расчета задач термопластичности и термовязкопластичности посвящены работы Ю.Н.Шевченко и др.

Связанные задачи термоупругости, в рамках термодинамических законов, были рассмотрены в работах M.Biot, В.Новацкого, Б.Е.Победри, В.Г.Карнаухова, H.M.Youssef и других. Связанные и несвязанные задачи термоупругости очень важны для технических приложений. Исследованию вариационно–разностного метода и итерационных процессов решения разностных уравнений посвящены работы А.А.Самарского, Е.С.Николаева, И.Г.Белухиной, Б.Е.Победри и других. В Узбекистане вопросами математического моделирования и численными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных прикладной математики и механики сплошных сред занимались известные ученые, как академики В.К.Кабулов, Т.Б.Буриев и М.Мирсаидов, профессора Ф.Б.Бадалов, М.М.Арипов, Р.Д.Алоев, Н.Равшанов, А.А.Халджигитов, Б.Э.Хусанов, Р.А.Абиров и другие.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Работа выполнена в соответствии с плановой тематикой «Алгоритмы и программное обеспечение решения задач прикладной математики» Национального университета Узбекистана.

Целью исследования является разработка численных методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения связанных и несвязанных задач для изотропных и анизотропных термоупругих тел.

Задачи исследования состоят в следующем:

построение явных и неявных сеточных уравнений для термоупругих краевых задач;

построение эффективного численного метода решения связанных и несвязанных термоупругих краевых задач;

разработка алгоритмов и программного обеспечения для численного решения связанных и несвязанных термоупругих задач;

численное решение термоупругих связанных и несвязанных краевых задач для изотропного и ортотропного параллелепипеда, прямоугольника и стержня при различных тепловых и механических краевых условиях;

оценка влияния распределения температуры на напряжённо-деформированное состояние изотропных и анизотропных тел.

Объектом исследования являются процессы динамического деформирования конструкций из термоупругих изотропных и анизотропных материалов.

Предметом исследования является численное моделирование процесса линейного деформирования изотропных и анизотропных тел сформулированных в виде связанных и несвязанных краевых задач термоупругости.

Методы исследований. В процессе исследования применены методы численного моделирования, явные и неявные разностные схемы, итерационные методы решения разностных уравнений, метод прогонки, теория алгоритмизации, технологии объектно ориентированного программирования, а также вычислительные эксперименты.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построены явные и неявные конечно-разностные схемы для термоупругих краевых задач;

предложен и обоснован новый подход для численного решения связанных и несвязанных термоупругих краевых задач для изотропных и анизотропных тел;

решены численно термоупругие связанные и несвязанные краевые задачи для изотропного и ортотропного параллелепипеда, прямоугольника и стержня при различных тепловых и механических краевых условиях;

разработаны алгоритмы и программное обеспечение для численного решения связанных и несвязанных задач термоупругости;

оценено влияние распределения температуры на напряжённо-деформированное состояние изотропных и анизотропных тел.

Практические результаты исследования использованы при определении запасов прочности и надёжности конструкций и их элементов из изотропных и анизотропных материалов под действием статических и динамических термомеханических сил.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, численным решением краевой задачи теории упругости и сравнением с точным решением тестовой задачи и проведением численных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что предложенные численные методы могут быть использованы для решения пластических и термопластических краевых задач для изотропных и анизотропных тел.

Практическая значимость результатов исследований определяется тем, что предложенный численный метод решения термоупругих краевых задач и полученные результаты могут быть использованны при численном моделировании и определении запасов прочности и надежности современных технических объектов и сооружений из композиционных материалов находящихся под действием тепломеханических воздействий.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов при исследовании численного моделирования термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел:

разработанные в диссертации явные и неявные конечно-разностные схемы для задач термоупругости использованы в рамках гранта Ф4-ФА-Ф049 “Разработка бимоментной теории изгиба и колебания толстых пластин и оболочек с учетом анизотропных свойств материалов” для построения конечно-разностных уравнений движения анизотропных пластин (справка № 2/1255-854 от 19 марта 2019 года Академии Наук Республики Узбекистан). Использование научных результатов дало возможность решить динамические задачи о вынужденных колебаниях анизотропных пластин с учетом бимоментов;

разработанная расчетная программа для численного решения задач термоупругости и визуализации их результатов использовалась в проектных работах ООО «Сирдарё савдо қурилиш лойиха» и ООО «Мирзачўл агро қурилиш лойиха» (справка № 1511/06-18 от 4 марта 2019 года Министерства Строительства Республики Узбекистан). Использование научных результатов позволило повысить точность и эффективность проектных работ.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 13 научно-практических конференциях, в том числе на 5 международных и 8 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 25 научных работ, из них 9 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликовано в зарубежных журналах и 8 в республиканских научных изданиях. Получено 1 свидетельство о регистрации программных продуктов для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 113 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и обсуждена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации «**Численные методы решения задач теории упругости и термоупругости**» посвящена предложению нового подхода к численному решению краевой задачи теории упругости и обобщению для несвязанных, а также для частично-связанных краевых задач термоупругости.

В параграфе 1.1 рассматриваются математическая и численная модели двухмерной задачи теории упругости для изотропных тел. Предложен модифицированный вариант итерационного метода для численного решения краевых задач теории упругости. Задача состоит из уравнений равновесия

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad , \quad i=1,2,3 \tag{1}$$

закона Гука для изотропных материалов

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

и граничных условий

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^o \quad , \qquad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^o\,, \tag{4}$$

где σ_{ij}- тензор напряжений, ε_{ij}- тензор деформаций, u_i- компоненты перемещений, X_i- объёмные силы, λ,μ- упругие постоянные Ламе, $\theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ шаровая часть тензора деформаций, δ_{ij}- символ Кронекера, n_j- внешняя нормаль к поверхности Σ_2, S_1,S_2,S_3-компоненты вектора внешней нагрузки.

Уравнения (1)-(4) для прямоугольной области $\Omega=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le l_2\}$ можно привести к следующему виду

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+X_1=0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+X_2=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

с соответствующими краевыми условиями на границе области Ω относительно перемещений

$$
\begin{aligned}
&u(x,y)\big|_{y=0}=0,\quad v(x,y)\big|_{y=0}=\sin\frac{\pi x}{l_1},\quad u(x,y)\big|_{y=l_2}=0,\quad v(x,y)\big|_{y=l_2}=-\sin\frac{\pi x}{l_1},\\
&u(x,y)\big|_{x=0}=\sin\frac{\pi y}{l_2},\quad v(x,y)\big|_{x=0}=0,\quad u(x,y)\big|_{x=l_1}=-\sin\frac{\pi y}{l_2},\quad v(x,y)\big|_{x=l_1}=0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Для изложения нового численного метода решения, сначала построим конечно-разностную схему для двухмерной краевой задачи теории упругости (5-6).

Разделяя длины сторон прямоугольной области l_k на N_k можно найти, что $h_k=\dfrac{l_k}{N_k}$, где $k=1,2$. Тогда узловые точки имеют вид $x_i=h_1\cdot i$, $y_j=h_2\cdot j$, $i=\overline{0,N_1}$, $j=\overline{0,N_2}$.

Далее, заменяя производные в уравнениях (5) соответствующими разностными отношениями можно найти следующие конечно-разностные уравнения

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+(\lambda+\mu)\frac{v_{i+1,j+1}-v_{i-1,j+1}-v_{i+1,j-1}+v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2}+\\
&+\mu\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_2^2}+X_1=0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{v_{i,j+1}-2v_{i,j}+v_{i,j-1}}{h_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2}+\\
&+\mu\frac{v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j}}{h_1^2}+X_2=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Уравнения (7) разрешим относительно перемещений $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ т.е.

$$
\begin{aligned}
u_{i,j} &= (4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+4h_1^2\mu(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(v_{i+1,j+1}-v_{i-1,j+1}-v_{i+1,j-1}+v_{i-1,j-1})+X_1)/(8h_2^2(\lambda+2\mu)+8h_1^2\mu) \\
v_{i,j} &= (4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i,j+1}+v_{i,j-1})+4h_2^2\mu(v_{i+1,j}+v_{i-1,j})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1})+X_2)/(8h_1^2(\lambda+2\mu)+8h_2^2\mu).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Далее, на основе соотношений (8) организуем следующий итерационный процесс по индексу $k=0,1,2,...$

$$
\begin{aligned}
u_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)})+4h_1^2\mu(u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(v_{i+1,j+1}^{(k)}-v_{i-1,j+1}^{(k)}-v_{i+1,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}^{(k)})+X_1)/(8h_2^2(\lambda+2\mu)+8h_1^2\mu) \\
v_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i.j+1}^{(k)}+v_{i,j-1}^{(k)})+4h_2^2\mu(v_{i+1,j}^{(k)}+v_{i-1,j}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(u_{i+1,j+1}^{(k)}-u_{i-1,j+1}^{(k)}-u_{i+1,j-1}^{(k)}+u_{i-1,j-1}^{(k)})+X_2)/(8h_1^2(\lambda+2\mu)+8h_2^2\mu)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

со следующими краевыми условиями (6)

$$
\begin{aligned}
&u_{i0}^{(0)}=0, \quad v_{i0}^{(0)}=\sin\frac{\pi x_i}{l_1},\ u_{iN_2}^{(0)}=0,\ v_{iN_2}^{(0)}=-\sin\frac{\pi x_i}{l_1}, \\
&u_{0j}^{(0)}=\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{0j}^{(0)}=0,\ u_{N_1j}^{(0)}=-\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{N_1j}^{(0)}=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

При нулевом приближении т.е. при $k=0$ узловые значения искомых величин $u_{ij}^{(0)}$ и $v_{ij}^{(0)}$ на границе прямоугольной области Ω известны по краевым условиям (10). Во внутренних узлах, значения перемещений в нулевом приближении $(k=0)$ считаются тривиальными. Далее, продолжая итерационный процесс можно найти искомые значения перемещений u_{ij} и v_{ij} с заданной точностью ε.

Заметим, что следующие функции

$$
u=\cos\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}\quad,\qquad v=\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}
\tag{11}
$$

удовлетворяют краевые условия (6) и уравнения (5), при следующих значениях объёмных сил

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_1^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_2^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2} \\
X_2 &= -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_2^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_1^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Модельная задача решалась при следующих значениях параметров $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $l_1=l_2=1$, $N1=N2=10$.

Таблица 1.

Приближенные значения перемещений *u(x,y)* при $\varepsilon=0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2939	0.2499	0.1816	0.0955	0
y=0.2	0.5877	0.5593	0.4754	0.3451	0.1813	0
y=0.3	0.8090	0.7706	0.6554	0.4757	0.2498	0
y=0.4	0.9510	0.9068	0.7717	0.5603	0.2943	0

Таблица 2.

Значения точного решения $u(x,y)$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2938	0.2500	0.1816	0.0954	0
y=0.2	0.5877	0.5590	0.4755	0.3454	0.1816	0
y=0.3	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0
y=0.4	0.9510	0.9045	0.7694	0.5590	0.2938	0

Сравнения численных результатов краевой задачи с точным решением показывают, что значения перемещений достаточно близки, что обеспечивает достоверность результатов и справедливости предложенного численного метода решения.

Таким образом, суть метода состоит в построении конечно-разностной схемы для исходных уравнений и краевых условий и разрешении их относительно главных перемещений в центральных узловых точках, и организацией итерационного процесса. При этом, во внутренних точках значения перемещений при нулевом приближении считаются тривиальными.

В параграфе 1.2 сформулирована несвязанная краевая задача термоупругости, которая может быть получена из уравнений (1-4) рассматривая вместо (2), следующее определяющее соотношение Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \tag{13}$$

где T-температура, T_0-начальная температура, α-коэффициент теплового расширения. Составлены конечно-разностные уравнения для двухмерной задачи для прямоугольной области с защемленными и свободными границами, соответственно. Аналогично, первому параграфу эти уравнения разрешены относительно искомых компонентов перемещений и решены численно итерационным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$.

В параграфе 1.3 численно решена известная в литературе, задача о термоупругом параллелепипеде, согласно рассмотренному итерационному методу. При этом поверхность параллелепипеда свабодна от нагрузок, и внутри которого дано температурное поле по синусоидальной форме.

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0 \sin\frac{\pi x_1}{l_1} \sin\frac{\pi x_2}{l_2} \sin\frac{\pi x_3}{l_3}$$

Полученные численные результаты совпадают с результатами работы Цаплина, и тем самым подтверждается справедливость применяемого в работе итерационного подхода.

В параграфе 1.4 сформулирована частично связанная динамическая краевая задача термоупругости, состоящая из уравнения движения

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = \rho \ddot{u}_i \tag{14}$$

соотношения Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \qquad (15)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (16)$$

и уравнения теплопроводности

$$c_\varepsilon \dot{T} = \lambda_0 T_{,ii} \qquad (17)$$

с начальными

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i,\quad \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i\ ,\ T\big|_{t=0} = f \qquad (18)$$

и краевыми условиями

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0,\quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_2} = S_i^o\ ,\ T\big|_{\Sigma} = \varphi(t) \qquad (19)$$

где, c_ε – теплоёмкость при постоянной деформации и λ_0 – коэффициент теплопроводности.

В одномерном случае, краевая задача сведена к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов, соответственно. Построены явные и неявные конечно-разностные уравнения. Для решения явных разностных схем применены рекуррентные соотношения, а для неявной схемы применён рассмотренный в параграфе 1.1 итерационный подход. Сравнение полученных численных результатов с двумя методами, показывают, что результаты достаточно близки, чем также подтверждается справедливость предложенного нового подхода.

Далее, построены конечно-разностные уравнения для двухмерной статической частично связанной краевой задачи. Заметим, что разностное уравнение соответствующие уравнению теплопроводности зависит только от температуры, что позволяет решить его отдельно от первого уравнения. Но в работе, эти уравнения рассмотрены и решены совместно, согласно итерационному методу. Полученные численные результаты приведены в таблицах и построены графики демонстрирующие распределение температуры и компонентов перемещений в рассматриваемой области.

Вторая глава диссертации «**Численное решение связанных задач динамической термоупругости изотропных тел**» посвящена численному моделированию связанной динамической термоупругой краевой задачи. Рассмотрены одномерные, двухмерные и трехмерные случаи краевой задачи, построены явные и неявные разностные схемы. Решены численные примеры о термически деформированном состоянии стержня, прямоугольника и параллелепипеда при различных термомеханических краевых условиях.

В параграфе 2.1 сформулирована связанная краевая задача термоупругости. Для получения этой задачи, в соотношениях (14)-(19) уравнение теплопроводности (17) заменяется уравнением притока тепла для изотропных тел

$$\lambda_0 T_{,ii} - c_\varepsilon \dot{T} - \gamma T \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \qquad (20)$$

где $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Эти уравнения записаны в одномерном случае и построены для них явные и неявные разностные схемы, которые решены соответственно на основе рекуррентных соотношений и методом прогонки. Полученные численные результаты совпадают. Далее, в связанной термоупругой задаче вместо линейного модельного уравнения Дюгамеля-Неймана рассмотрена нелинейное модельное уравнение Ильюшина

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u})e_{ij} \qquad (21)$$

где μ'-касательный модуль, e_{ij}-девиатор тензора деформаций, $\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ - интенсивность тензора деформаций, ε_u^*-предел упругости по деформациям. Эта задача также рассмотрена в одномерном случае. Численные результаты полученные на основе явных и неявных схем сравнены и построены соответствующие графики описывающие распределение температуры и перемещений вдоль жестко закрепленного стержня под действием тепловых воздействий.

В параграфе 2.2 сформулированная в предыдущем параграфе связанная динамическая краевая задача термоупругости, рассмотрена в двухмерном случае для прямоугольной области. В этом случае задача принимает следующий вид

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (22)$$

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\lambda + \mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (23)$$

$$\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) = 0 \qquad (24)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями.

Заменяя производные конечно разностными отношениями и, разрешив полученные явные разностные уравнения относительно $u_{i,j}^{k+1}, v_{i,j}^{k+1}, T_{i,j}^{k+1}$ соответственно получим

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho}\left((\lambda + 2\mu)\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \mu\frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + \right.$$
$$\left. + (\lambda + \mu)\frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} - \gamma\frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2h_1}\right) + \qquad (25)$$
$$+ 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}$$

$$v_{i,j}^{k+1}=\frac{\tau^2}{\rho}\left((\lambda+2\mu)\frac{v_{i,j+1}^k-2v_{i,j}^k+u_{i,j-1}^k}{h_2^2}+\mu\frac{v_{i+1,j}^k-2v_{i,j}^k+v_{i-1,j}^k}{h_1^2}+\right.$$

$$\left.+(\lambda+\mu)\frac{u_{i+1,j+1}^k-u_{i-1,j+1}^k-u_{i+1,j-1}^k+u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2}-\gamma\frac{T_{i,j+1}^k-T_{i,j-1}^k}{2h_2}\right)+ \tag{26}$$

$$+2v_{i,j}^k-v_{i,j}^{k-1}$$

$$T_{i,j}^{k+1}=\frac{\tau}{c_\varepsilon}\left(\lambda_0\left(\frac{T_{i+1,j}^k-Tu_{i,j}^k+T_{i-1,j}^k}{h_1^2}+\frac{T_{i,j+1}^k-2T_{i,j}^k+T_{i,j-1}^k}{h_2^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma T_{i,j}^k\left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1}-u_{i-1,j}^{k+1}-u_{i+1,j}^{k-1}+u_{i-1,j}^{k-1}}{4h_1\tau}+\frac{v_{i,j+1}^{k+1}-v_{i,j-1}^{k+1}-v_{i,j+1}^{k-1}+v_{i,j-1}^{k-1}}{4h_2\tau}\right)\right)+T_{i,j}^k \tag{27}$$

С помощью уравнений (25)-(27) можно найти значения функций $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $T(x,y,t)$ на слое t^{k+1}, основываясь на известные значения функций на двух предыдущих начальных слоях ($k=0$ и $k=1$) по начальным и краевым условиям.

Далее, для численного решения связанной динамической задачи термоупругости применен итерационный метод рассмотренный в первой главе. Для того чтобы применить итерационный процесс мы будем использовать неявные конечно-разностные отношения. Разрешив полученные разностные уравнения относительно $u_{i,j,k+1}$, $v_{i,j,k+1}$, $T_{i,j,k+1}$ соответственно, построим следующий итерационный процесс

$$u_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j,k+1}^{(n)}+u_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}+(\lambda+\mu)\frac{v_{i+1,j+1,k}-v_{i-1,j+1,k}-v_{i+1,j-1,k}+v_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{u_{i,j+1,k+1}^{(n)}+u_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j,k}-T_{i-1,j,k}}{2h_1}+\rho\frac{2u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}}{\tau^2}\right]\Big/\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{h_1^2}+\frac{2\mu}{h_2^2}+\frac{\rho}{\tau^2}\right] \tag{28}$$

$$v_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[(\lambda+2\mu)\frac{v_{i,j+1,k+1}^{(n)}+v_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{u_{i+1,j+1,k}-u_{i-1,j+1,k}-u_{i+1,j-1,k}+u_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{v_{i+1,j,k+1}^{(n)}+v_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i,j+1,k}-T_{i,j-1,k}}{2h_2}+\rho\frac{2v_{i,j,k}-v_{i,j,k-1}}{\tau^2}\right]\Big/\left[\frac{2(\lambda+2\mu)}{h_2^2}+\frac{2\mu}{h_1^2}+\frac{\rho}{\tau^2}\right] \tag{29}$$

$$T_{i,j,k+1}^{(n+1)}=\left[\lambda_0\left(\frac{T_{i+1,j,k+1}^{(n)}+T_{i-1,j,k+1}^{(n)}}{h_1^2}+\frac{T_{i,j+1,k+1}^{(n)}+T_{i,j-1,k+1}^{(n)}}{h_2^2}\right)+c_\varepsilon\frac{T_{i,j,k-1}}{2\tau}-\right.$$

$$-\gamma T_{i,j,k}\left(\frac{u_{i+1,j,k+1}-u_{i-1,j,k+1}-u_{i+1,j,k-1}+u_{i-1,j,k-1}}{4h_1\tau}+\right. \tag{30}$$

$$\left.\left.+\frac{v_{i,j+1,k+1}-v_{i,j-1,k+1}-v_{i,j+1,k-1}+v_{i,j-1,k-1}}{4h_2\tau}\right)\right]\Big/\left[\frac{2\lambda_0}{h_1^2}+\frac{2\lambda_0}{h_2^2}+\frac{c_\varepsilon}{2\tau}\right]$$

При решении связанной задачи термоупругости для прямоугольной области дискретные аналоги начальных и граничных условий имеют вид:

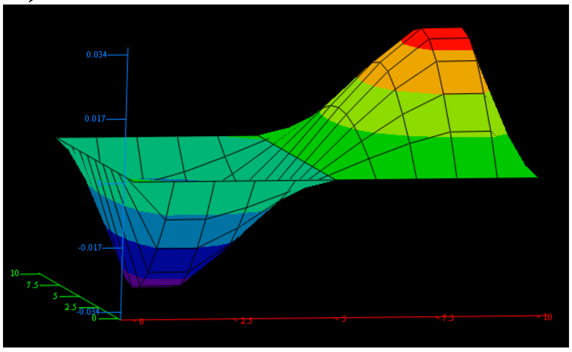
$$u_{ij}^{0}=0,\quad \frac{u_{ij}^{1}-u_{ij}^{0}}{\tau}=0,\ \ v_{ij}^{0}=0,\quad \frac{v_{ij}^{1}-v_{ij}^{0}}{\tau}=0,$$

$$u_{0j}^{k}=0,\ \ u_{N_1 j}^{k}=0,\ \ u_{i0}^{k}=0,\ \ u_{iN_2}^{k}=0, v_{0j}^{k}=0,\ \ v_{N_1 j}^{k}=0,\ \ v_{i0}^{k}=0,\ \ v_{iN_2}^{k}=0,$$

$$T_{ij}^{0}=T_0+T_0\sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right),\ T_{0j}^{k}=0,\ \ T_{N_1 j}^{k}=0,\ \ T_{i0}^{k}=0,\ \ T_{iN_2}^{k}=0.$$

В качестве исходных параметров использовались следующие значения $\lambda=0.78$, $\lambda_0=0.06$, $\alpha=0.05$, $\mu=0.5$, $\rho=0.86$, $c_\varepsilon=3.4$, $T_0=15$, $h_1=0.1$, $h_2=0.1$, $\tau=0.01$, $\ell_i=1$.

а) Явная схема **б) Неявная схема**



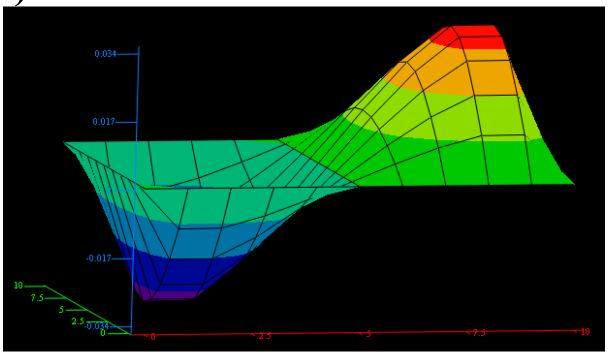
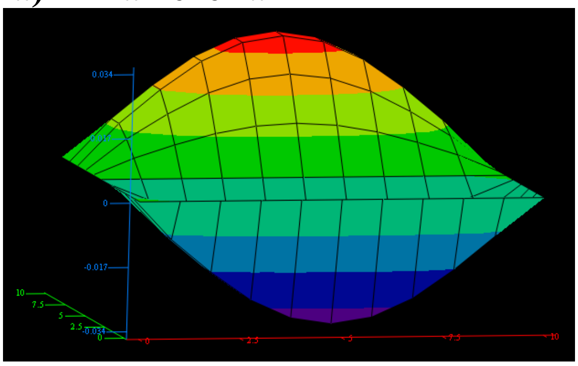


Рис.1. Распределение перемещения *u(x,y,t)* в прямоугольной области при $t=0.1$

а) Явная схема **б) Неявная схема**



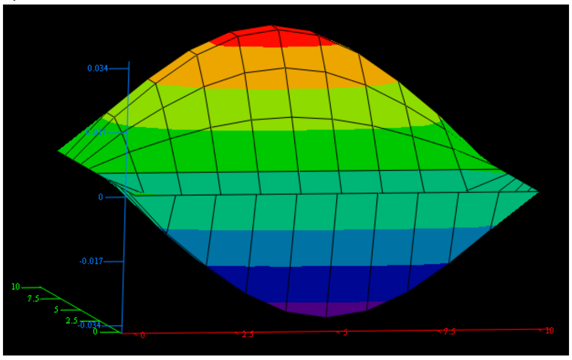
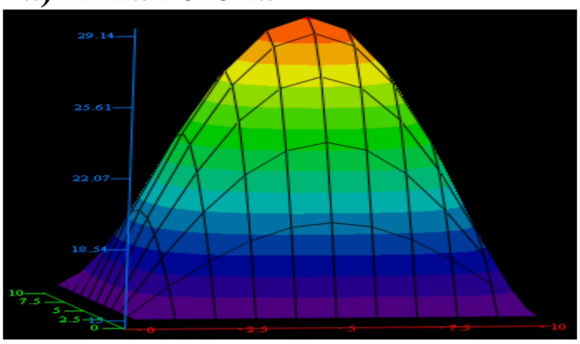


Рис.2. Распределение перемещения *v(x,y,t)* в прямоугольной области при $t=0.1$

а) Явная схема **б) Неявная схема**



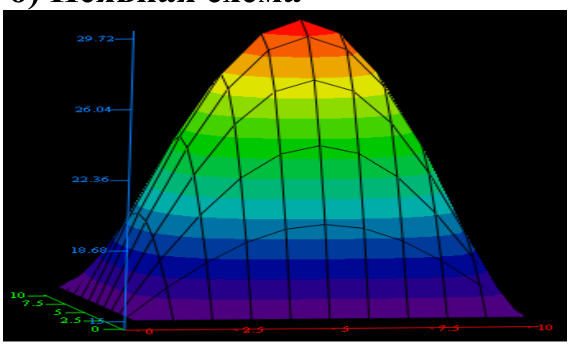


Рис.3. Распределение температуры *T(x,y,t)* в прямоугольной области при $t=0.1$

Сравнение рисунков 1-3 для компонент вектора перемещений и температуры показывают что, численные результаты полученные на основе явных и неявных схем при $t = 0.1$ очень близки, и совпадают с высокой точностью.

В параграфе 2.3 рассмотрена связанная динамическая термоупругая краевая задача для изотропного параллелепипеда. Модельные уравнения описывающие этот процесс состоят из системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных, первые три из них относятся гиперболическому, а последнее параболическому типу. Построены конечно-разностные уравнения явного и неявного типов. Явные разностные уравнения разрешены относительно соответствующих компонентов перемещений и температуры, что даёт возможность вычислить значения искомых функций. Неявные разностные уравнения решены методом прогонки и итерационным методом. Для сравнения на основе численных результатов построены графики распределения перемещений и температуры по некоторым сечениям параллелепипеда.

Третья глава «**Связанные динамические задачи термоупругости для анизотропных тел**» посвящена численному решению связанных задач термоупругости для анизотропных тел. Рассмотрены связанные задачи термоупругости для ортотропного прямоугольника, прямоугольника с прямоугольным отверстием в центре и параллелепипеда при различных термомеханических краевых условиях. Также приведена инструкция по использованию разработанного программного обеспечения для численного решения связанных и несвязанных задач термоупругости для изотропных и анизотропных тел при различных термомеханических краевых условиях.

В параграфе 3.1 сформулирована и решена численно двухмерная связанная задача термоупругости об ортотропном прямоугольнике. В этом случае соотношения Дюгамеля-Неймана для анизотропных тел и уравнение притока тепла для анизотропных тел принимают следующий вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(T - T_0)\delta_{ij} \qquad (31)$$

$$\lambda_{ij}T_{,ij} - c_{\varepsilon}\dot{T} - T\cdot\beta_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (32)$$

где C_{ijkl} −тензор четвёртого ранга определяющий механические свойства материала и β_{ij} −тензор теплового расширения.

Построены конечно-разностные уравнения явного и неявного типов. Для их решения применены итерационный метод, метод прогонки и рекуррентные формулы основанные на явные схемы. На основе численных результатов построены и сравнены соответствующие графики распределения температуры и перемещений в заданной области.

В параграфе 3.2 решена двухмерная связанная динамическая задача термоупругости для тела со сложной конфигурацией. Рассмотрена двухмерная связанная краевая задача о термоупругом прямоугольнике с центральным прямоугольным отверстием. Построены конечно-разностные уравнения в явной и неявной формах. На основе полученных численных результатов показаны распределения напряжений внутри рассматриваемой области содержащей в середине прямоугольное отверстие.

В параграфе 3.3 решена связанная задача о термоупругом ортотропном защемленном параллелепипеде находящегося под воздействием термомеханических факторов. Обобщенная связанная динамическая краевая задача термоупруости для ортотропных тел, записанная относительно перемещений и температуры, состоит из: уравнений движения

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(C_{1122}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(C_{1133}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\beta_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(C_{2211}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(C_{2233}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\beta_{22}\dfrac{\partial T}{\partial y}=\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(C_{3311}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(C_{3322}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}-\beta_{33}\dfrac{\partial T}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (33)$$

уравнения притока тепла

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\lambda_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-c_{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial t}-T_0\left(\beta_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\beta_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}+\beta_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}\right)=0 \quad (34)$$

и соответствующих начальных и граничных условий.

Построены явные и неявные разностные уравнения, которые решены применением итерационного метода, метода прогонки и рекуррентных соотношений. Построены графики иллюстрирующие распределения температуры и перемещений по координатным переменным в зависимости от времени.

Модельная задача решалась при следующих начальных

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,\ v(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,\ w(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_2,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_3,\quad T(x,y,z,t)\big|_{t=0}=T_0$$

краевых условиях

$$u(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ v(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ w(x,y,z,t)\big|_{\Sigma}=0,\ T(x,y,z,t)\big|_{y=0}=T_0,$$

$$T(x,y,z,t)\big|_{y=l_2}=T_0,\ T(x,y,z,t)\big|_{z=0}=T_0,\ T(x,y,z,t)\big|_{z=l_3}=T_0,$$

$$T(x,y,z,t)\big|_{x=0}=T_0+T_0\sin(\frac{\pi y}{l_2})\sin(\frac{\pi z}{l_3}),\ T(x,y,z,t)\big|_{x=l}=T_0+T_0\sin(\frac{\pi y}{l_2})\sin(\frac{\pi z}{l_3})$$

и константах

$\lambda_{11}=0.3$, $\lambda_{11}=0.7$, $\lambda_{11}=1.1$, $\beta_{11}=1.5$, $\beta_{22}=0.5$, $\beta_{33}=0.9$, $Ce=3.5$, $T_0=10$, $h_1=0.1$, $h_2=0.1$, $h_3=0.1$, $\tau=0.01$, $\rho=1$, $\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$, $C_{1111}=1.8$, $C_{2222}=2{,}02$, $C_{3333}=2.76$, $C_{1122}=0.998$, $C_{1133}=1.01$, $C_{2211}=C_{1122}$, $C_{3311}=C_{1133}$, $C_{2233}=1.07$, $C_{3322}=C_{2233}$, $C_{2323}=0.623$, $C_{1313}=0.561$, $C_{1212}=0.452$.

Таблица 3.

Значения перемещения *u(x,y,z,t)* **при** *z=0.4* **и** *t=0.05*

	x=0.1, y=0.9	x=0.4, y=0.4	x=0.2, y=0.3
Явная схема	0.02441	0.00044	0.01003
Неявная схема	0.02337	0.00043	0.01125

Таблица 4.

Значения температуры *T(x,y,z,t)* **при** *z=0.7* **и** *t=0.08*

	x=0.1, y=0.9	x=0.5, y=0.5	x=0.2, y=0.3
Явная схема	10.72266	10.38824	10.24647
Неявная схема	10.75615	10.17778	10.20100

В параграфе 3.4 приведена инструкция по использованию комплекса программ под названием «*Комплекс программ для численного решения задач термоупругости»,* разработанного в среде Delphi7 с интеграцией 3D графики из среды Mathlab.

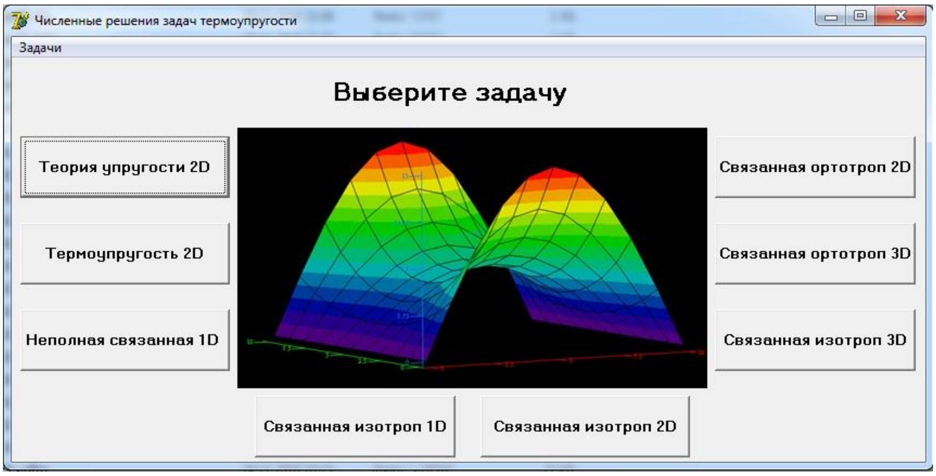


Рис.4. Главное окно (выбор задачи)

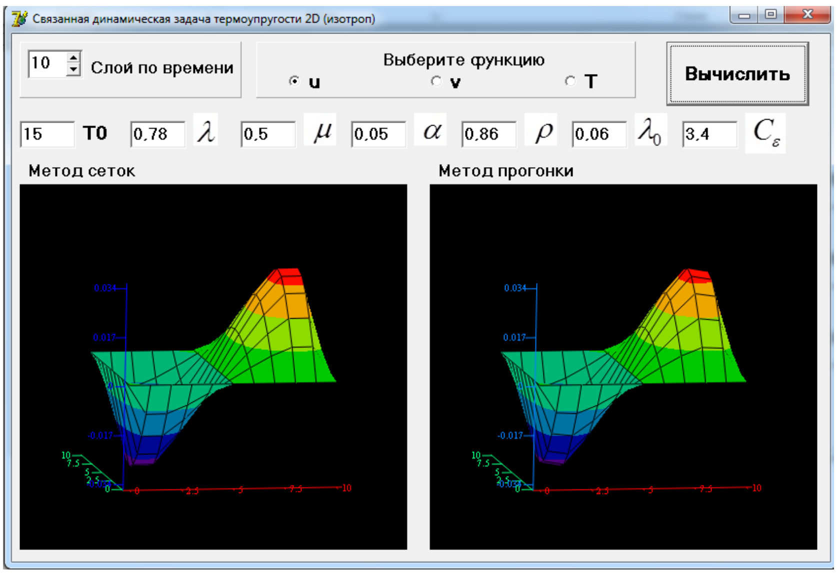


Рис.5. Модуль для решения связанной задачи термоупругости 2D для изотропных тел

Данный комплекс программ может быть использован при расчете и определении запасов прочности конструкций и их элементов из композиционных материалов находящихся под действием тепломеханических воздействий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена численному моделированию связанных и несвязанных задач термоупругости для изотропных и анизотропных тел. В диссертации получены следующие научные результаты:

1. Сформулированы математические модели связанных и несвязанных задач термоупругости для изотропных и анизотропных тел.
2. Разработаны численные модели связанных и несвязанных краевых задач термоупругости для изотропных и анизотропных тел.
3. Построены явные и неявные конечно-разностные схемы для связанных и несвязанных краевых задач термоупругости для изотропных и анизотропных тел.
4. Предложен и обоснован новый подход для численного решения связанных и несвязанных термоупругих краевых задач.
5. Решены численно связанные и несвязанные краевые задачи термоупругости для изотропного и ортотропного параллелепипеда, прямоугольника и стержня при различных тепловых и механических краевых и начальных условиях.
6. Решена численно одномерная связанная задача термопластичности основанная на деформационной теории Ильюшина.
7. Разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения связанных и несвязанных задач термоупругости.
8. Оценено влияние распределения температуры и перемещений на напряжённо-деформированное состояние изотропных и анизотропных тел.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KALANDAROV AZIZ ABDUKAYUMOVICH

NUMERICAL MODELING OF THERMOELASTIC PROBLEMS FOR ISOTROPIC AND ANISOTROPIC BODIES

05.01.07-Mathematical simulation. Numerical methods and software

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.PhD/FM323.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khaldjigitov Abduvali Abdisamatovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Aloev Rakhmatillo Djuraevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Abirov Rustam Abdullaevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Karshi State University**

Defense will take place «___»_______ 2019 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «___»__________ 2019 year
(Mailing report No 13 on 29 june 2019 year).

A. R.Marakhimov
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

M.Aripov
Chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to develop numerical methods, algorithms and software for solving coupled and uncoupled problems for isotropic and anisotropic thermoelastic bodies.

The object of the research work is the processes of dynamic deformation of structures made of thermoelastic isotropic and anisotropic materials.

Scientific novelty of research work is as follows:

explicit and implicit finite difference schemes for thermoelastic boundary problems are constructed;

a new approach was proposed and substantiated for the numerical solution of coupled and uncoupled thermoelastic boundary value problems for isotropic and anisotropic bodies;

numerically thermoelastic coupled and uncoupled boundary value problems for isotropic and orthotropic parallelepiped, rectangle and rod are solved under various thermal and mechanical boundary conditions;

numerical algorithms and software have been developed for the numerical solution of coupled and uncoupled thermoelasticity problems;

the effect of temperature distribution on the stress-strain state of isotropic and anisotropic bodies.

Implementation of the research results. Based on the scientific results obtained in the study of numerical modeling of thermoelastic problems for

the explicit and implicit finite-difference schemes developed in the dissertation for problems of thermoelasticity were used within the framework of grant F4-FA-F049 to build the finite-difference equations of motion of anisotropic plates (reference No. 2/1255-854 of March 19, 2019 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan). The use scientific results made it possible to solve dynamic problems of forced oscillations of anisotropic plates taking into account bimoments;

the developed calculation program for the numerical solution of the problems of thermoelasticity and visualization of their results was used in the design work of LLC “Sirdaryo Savdo Kurilish Loyiha” and LLC “Mirzachul Agro Kurilish Loyiha” (reference No. 1511 / 06-18 dated March 4, 2019 of the Ministry of Construction of the Republic of Uzbekistan). The use of research results has improved the accuracy and efficiency of design work.

The structure and volume of the thesis: The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, a list of used literature and applications. The volume of the thesis is 113 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I бўлим (1 часть; part 1)

1. Каландаров А.А., Адамбаев У., Худазаров Р.С. Связанные и несвязанные задачи термо-упруго-пластичности // Вестник НУУз. – Ташкент, 2010. – №3. –С. 92-95. (01.00.00 №8)
2. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Сагдуллаева Д., Юсупов Ю. Численное решение связанной задачи термоупругости для ортотропного параллелепипеда // Проблемы механики. – Ташкент, 2012. – №4. –С. 9-14. (01.00.00 №4)
3. Адамбаев У.Э., Каландаров А.А., Бабажанов М.Р. Итерационный метод типа Либмана для численного решения двухмерных задач теории упругости // Вестник НУУз. – Ташкент, 2013. – №2. –С. 23-25. (01.00.00 №8)
4. Каландаров А.А. Численное решение двухмерной связанной задачи термоупругости для изотропных тел // Вестник НУУз. – Ташкент, 2013. – №2. –С. 75-77. (01.00.00 №8)
5. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю.С., Сагдуллаева Д.А. Численное моделирование одномерной связанной термопластической задачи для изотропных тел // Вестник ТУИТ. – Ташкент, 2013. – №1-2. – С. 76-82. (05.00.00 №31)
6. Юсупов Ю.С., Каландаров А.А., Сагдуллаева Д., Худазаров Р. Численное решение двухмерной связанной термопластической задачи, основанной на деформационной теории // Проблемы механики. – Ташкент, 2014. – №3-4. –С. 48-53. (01.00.00 №4)
7. Каландаров А.А., Адамбаев У.Э., Каландаров А. Связанная задача термоупругости для изотропного параллелепипеда // Вестник НУУз. – Ташкент, 2017. – №2/1. –С. 92-99. (01.00.00 №8)
8. Адамбаев У.Э., Каландаров А.А., Каландаров А. Численное решение связанной задачи термоупругости для анизотропных тел // Вестник НУУз. – Ташкент, 2017. – №2/1. –С. 48-53. (01.00.00 №8)
9. Qalandarov A.A., Khaldjigitov A.A. Computer simulation of the coupled dynamic thermoelasticity problem for a two-dimensional isotropic bodies. The international journal of science and technoledge, 2019. Vol. 7, Issue 5, pp. 24-32. DOI:10.24940/theijst/2019/v7/i5/ST1905-020. ((6) International Impact Factor Services. IF=1.002)

II бўлим (2 часть; part 2)

10. Каландаров А.А., Каландаров А. Использование компьютеров при решении граничных задач. // Материалы международной научно-практической конференции «Казахстан в новом мире и проблемы

Национального образования». Том III, – Шымкент, 16-18 мая 2008 г. – С. 99-101
11. Қаландаров А.А. Стержень учун боғлиқ термоэластик динамик масалани сонли ечиш // ГулДУ ахборотномаси. – Гулистон, 2010. – №4. – 3-6 б.
12. Қаландаров А.А., Қаландаров А., Тишликов С.А. Боғлиқ термоэластик динамик масала. Ҳалқ хўжалиги тармоқларида жараёнларни математик моделлаштириш ва бошқариш муаммолари мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани. –Қарши, 2011. – 177-179 б.
13. Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A.Asri Long., Eshquvatov Z. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International Journal of Modern Physics: Conference Series , 2012. Vol. 9, pp. 503-510. DOI:10.1142/S2010194512005594.
14. Каландаров А.А., Каландаров А. Связанная задача термоупругости. «Инновация 2012: таълим, фан ва ишлаб чиқариш ўртасида инновацион ҳамкорликлар” мавзусида Республика илмий-амалий анжумани материаллари. Гулистон, 20-21 апрель 2012 йил.
15. Халджигитов А.А., Каландаров А.А., Юсупов Ю., Сагдуллаева Д. Численное решение связанной задач термоупругости для ортотропных тел. Математика, математик моделлаштириш ва ахборот технологияларининг долзарб масалалари мавзусидаги республика илмий конференцияси материаллари. –Термиз,. 21-22 ноябрь 2012 й. 256-259 б.
16. Khaldjigitov A.A., Nik M.A.Asri Long., Qalandarov A., Eshquvatov Z. Mathematical and numerical modelling of the thermoplastic coupled problem. International conference on mathematical sciences and statistics 2013. Selected Papers. Singapore. Springer, pp. 69-75. DOI:10.1007/978-981-4585-33-0_8.
17. Қаландаров А.А., Қаландаров А. Анизотроп жисмлар учун икки ўлчовли термоэластик боғлиқ масалани сонли моделлаштириш. Аниқ фанларни ўқитишнинг долзарб муаммолари мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари. – Гулистон, 22-23 ноябрь 2013 йил. 137-138 б.
18. Қаландаров А.А., Адамбаев У.Э. Термоэластик боғлиқ динамик масалани итерацион усулда сонли ечиш. Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари - Ал-Хоразмий -2016. Халқаро илмий конференция материаллари. – Бухоро, 2016 йил 9-10-ноябрь. –120-122 б.
19. Каландаров А.А. Компьютерное моделирование связанной задачи термоупругости. XVII международная конференция «Информатика:проблемы, методология, технологии». – Воронеж, 9-10 февраля 2017 г.
20. Халджигитов А.А., Каландаров А.А. Новый подход к численному решению задач теории упругости. Республиканская конференция на тему «Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования». – Ташкент, 17-18 сентября 2018г. –С. 546-550.
21. Каландаров А.А., Каландаров А. Конечно-разностный метод решения двухмерной задачи теории термоупругости. Аниқ фанларни касбга

йўналтириб ўқитиш муаммолари ва ечимлари мавзусидаги Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. –Навоий, 23 ноябрь 2018 й. 29-32 б.

22. Каландаров А.А. Численное решение двухмерной связанной динамической задачи термоупругости для изотропных тел // Вестник ГулДУ. – Гулистан, 2018. – №4. –С. 3-9.
23. Қаландаров А.А., Қаландаров А., Мавлонов Ш.Ҳ. Анизотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ масалани сонли ечиш. Замонавий архитектура, бинолар ва иншоотларнинг мустахкамлиги, ишончлилиги ва сейсмик хавфсизлик муаммолари мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари. –Наманган, 2-4 май 2019 йил. 77-79 б.
24. Қаландаров А.А., Қаландаров А., Мавлонов Ш.Ҳ. Изотроп жисмлар учун термоэластик боғлиқ масалани компьютерли моделлаштириш. Математика ва информатиканинг замонавий муаммолари мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материалалари. –Фарғона, 22-23 май 2019 йил. 144-146 б.
25. Каландаров А.А. Комплекс программ для численноготрешения задач термоупругости // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 05853, 13.12.2018.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида 2019 йил __ ______да таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат рухсат этилди __.________.2019. Ҳажми 2,75 босма табоқ.
Бичими 60x84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма .
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.