

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATAMATIKA FAKULTETI

Seydullaev K. X.

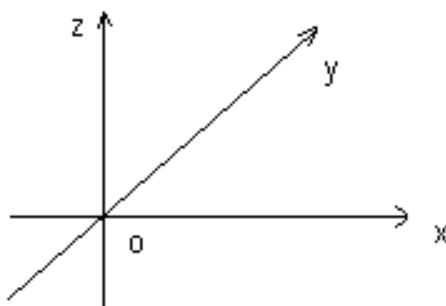
ANALITIK GEOMETRIYA

NUKUS 2018

Dekart koordinatalari sistemasi

Fizik jarayonlar aslida fazoda sodir bo'lib, ularning matematik modellari fazoviy geometriyaning tushunchalari orqali ifodalanadi. Biz yashayotgan fazo uch o'lchamli bo'lib, unda o'rganilayotgan masalaning mohiyatiga qarab, turli koordinatalar sistemasini kiritish mumkin. Evklid geometriyasini algebraik usullar bilan o'rganishga moslashgan sistemalardan biri to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidir.

Fazoda uchta o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar biror O umumiy nuqtaga ega bo'lib, bu to'g'ri chiziqlarda yo'nalishlar aniqlangan va sonlar o'qidagi kabi ulardagi nuqtalar haqiqiy sonlar bilan belgilangan bo'lsin.



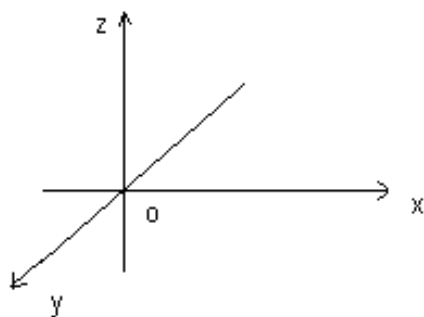
1-chizma

Bu to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari: Ox – absissalar, Oy – ordinatalar, Oz – applikatalar o'qlari deyiladi.

Endi fazoda ixtiyoriy M nuqta olib, undan $Ox, Oy, va Oz$ o'qlarga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazaylik. Perpendikulyarning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini ifodalovchi haqiqiy sonlar mos ravishda $x_0, y_0, va z_0$ bo'lsin. Bu sonlar M nuqtaning fazoviy koordinatalari deyiladi va $M(x_0; y_0; z_0)$ kabi ifodalanadi.

Biz uchun eng muhimi: fazodagi har bir nuqtaga yagona tartiblangan uchta son mos qo'yiladi va aksincha, har qanday tartiblangan uchta son fazodagi yagona nuqtani aniqlaydi.

Keyinchalik gap koordinatalar sistemasini almashtirish haqida ketganda biz ikki xil yo'nalgan sistemalarni, ya'ni chap va o'ng koordinatalar sistemasini farq qilishfa majbur bo'lamiz. 1-chizmada ko'rsatilgan sistema **o'ng** koordinatalar sistemasi, agar unda koordinata o'qlaridan biri teskari yo'nalishda bo'lsa, **chap** koordinatalar sistemasi hosil bo'ladi (2-chizma).



2-chizma

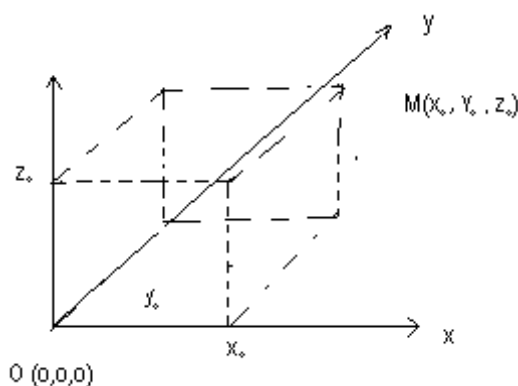
Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin. Koordinata o'qlaridan ikkitasi orqali o'tuvchi xOy , xOz va yOz tekisliklar koordinata tekisliklari deyiladi. Koordinata tekisliklari fazoni 8 ta qismga ajratadi. Bu qismlar ortantlar deyilib, ular o'zlariga tegishli nuqtalarning koordinatalari ishoralari bilan aniqlanadi.

Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

$M(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan koordinatalar boshi $O(0;0;0)$ nuqttagacha bo'lgan masofa

$$OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

tenglikdan topiladi, chunki 3-chizmaga ko'ra,



3-chizma

OM kesma, qirralari $|x_0|$, $|y_0|$ va $|z_0|$ ga teng to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalidan iborat.

Xuddi shunday $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa AB kesma, ya'ni qirralari $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ va $|z_2 - z_1|$ bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini bo'lib, uning uzunligi bizga ma'lum bo'lgan

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formuladan topiladi.

Misol. $M(3; -4; 12)$ nuqtadan koordinatalar boshi, koordinata o'qlari va koordinata tekisliklarigacha bo'lgan masofalarni toping.

◁ 1) Koordinatalar boshi $O(0; 0; 0)$ nuqtagacha masofa

$$OM = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

2) $M(3; -4; 12)$ nuqtadan Ox o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar Ox o'qni, yuqorida aytilgandek, $N(3; 0; 0)$ nuqtada kesadi. Demak, $M(3; -4; 12)$ nuqtadan Ox o'qqacha masofa

$$MN = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-0)^2 + (12-0)^2} = 4\sqrt{10}.$$

Xuddi shunday Oy o'qqacha masofa

$$\sqrt{(3-0)^2 + (-4+4)^2 + (12-0)^2} = 3\sqrt{17}.$$

va Oz o'qqacha masofa

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5.$$

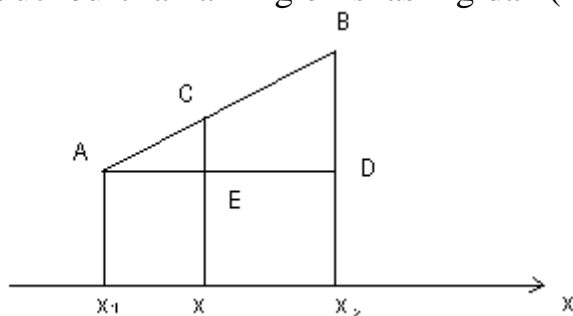
3) $M(3; -4; 12)$ nuqtadan xOy tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar tekislikni $P(3; -4; 0)$ nuqtada kesadi. Demak, $M(3; -4; 12)$ nuqtadan xOy tekislikkacha bo'lgan masofa $MP = 12$.

Xuddi shunday xOz tekislikkacha masofa 4 ga va xOy tekislikkacha masofa 3 ga teng. ▷

Uchlari $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ bo'lgan kesma va AB to'g'ri chiziqda yotuvchi $C(x; y; z)$ nuqta berilgan bo'lsin.

Agar $\frac{AC}{CB} = \lambda$ bo'lsa, C nuqta AB kesmani λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

Tekislikdagi kabi yana uchburchaklarning o'xshashligidan (4-chizma)



4-chizma

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

tenglikni, undan esa x koordinatani

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

topamiz. Demak, AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x; y; z)$ nuqta koordinatalari:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

tengliklardan topiladi. Xususan, $\lambda = 1$ bo'lganda kesma o'rtasining koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Tekislik va uning tenglamalari.

Ravshanki, xOy tekisligida yotuvchi ixtiyoriy nuqta $M(x; y; 0)$ ko‘rinishda bo‘ladi, ya‘ni $z=0$ shart bajariladi. Aksincha, $z=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to‘plami xOy tekislikni tashkil etadi. Shuning uchun $z=0$ munosabatni xOy tekislikni aniqlovchi tenglama deb atash maqsadga muvofiq. Shu kabi $x=0$ tenglama yOz tekislikni, $y=0$ tenglama esa xOz tekislikni aniqlaydi deyish o‘rinlidir. Endi a, b, c, d tayinlangan sonlar bo‘lib, a, b, c sonlardan kamida biri noldan farqli bo‘lsin.

Ta’rif. Koordinatalari

$$ax + by + cz + d = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $M(x; y; z)$ nuqtalar to‘plami tekislik, $ax + by + cz + d = 0$ ifoda esa shu tekislikning tenglamasi deyiladi.

Izoh. Bu tenglik aniqlangan geometrik shakl haqiqatdan ham (geometrik) tekislik ekanligi vektorlar yordamida osonlikcha isbotlanadi.

$M(x_0; y_0; z_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) + d = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Demak, keltirilgan tenglama nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar (ularning soni cheksiz ko‘p) tenglamasi bo‘ladi. Bu yerda a, b, c – ixtiyoriy sonlar.

Ma’lumki, bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin. Bu tekislikning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

ko‘rinishda. Chunki, uchala nuqtaning koordinatalari tenglikni qanoatlantiradi (determinantning qiymati 0 ga teng bo‘ladi) va determinant yoyilmasi x, y, z o‘zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiyadir.

Eslatma. Determinantning ikki satri (yoki ikki ustuni) proporsional sonlardan iborat bo‘lsa, xususan o‘zaro teng bo‘lsa, determinant qiymati nolga teng.

Yuqoridagi (*) ifodadan foydalanib, koordinata o‘qlarini $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ nuqtalarda kesib o‘tuvchi tekislik tenglamasini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a, b, c \neq 0)$$

ko‘rinishda yozish mumkinligini tekshirishni o‘quvchiga havola qilamiz. Oxirgi tenglama tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb ataladi.

Fazodagi ikki tekislik:

a) ustma-ust tushishi;

b) kesishmasligi (parallel bo'lishi);

v) kesishishi – bu holda umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lishi ma'lum. Ikki tekislik tenglamasi

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

berilgan bo'lsin.

Ravshanki,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

shart bajarilsa, ikkala tenglama teng kuchli bo'lib, demak, tekisliklar ustma-ust tushadi. Agar

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

bo'lsa, tenglamalar birorta ham umumiy yechimga ega emas, ya'ni tekisliklar o'zaro parallel bo'ladi. Nihoyat,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

tengliklardan birortasi bajarilmasa

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimga (cheksiz ko'p) ega. Demak, bu holda tekisliklar o'zaro kesishadi.

Shunday qilib, fazodagi to'g'ri chiziq tenglamasini ikki tekislik kesishishi sifatida, ya'ni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Xususan, $M(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni shu nuqtadan o'tuvchi ikki

$$\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0, \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

tekisliklar kesishish chizig'i sifatida yozib, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini $x - x_0$ va $y - y_0$ noma'lumlarga nisbatan yechib,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

tenglamani hosil qilish mumkin. Bu tenglama to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Vektorlar algebrasi va uning tadbiqlari

Tekisliklar va to'g'ri chiziqlar hamda ular orasidagi bog'lanishlarni o'rganish uchun vektor tushunchasi qo'l keladi.

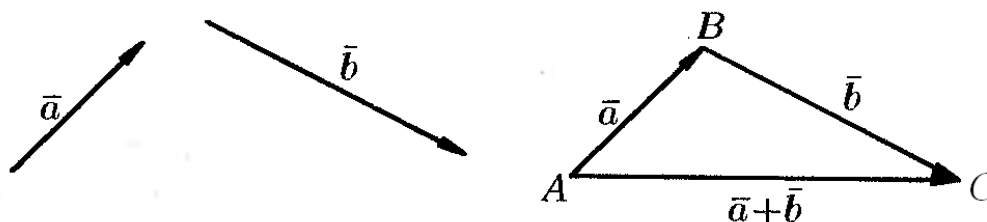
Fazoda (yoki tekislikda) AB kesma va unda biror yo'nalish, masalan A nuqtadan B nuqtaga qarab, aniqlangan bo'lsa, \overrightarrow{AB} vektor berilgan deyiladi.

Fizikadagi tezlik, tezlanish, kuch, kuch moment kabi kattaliklar o'z yo'nalishlari bilan aniqlanib, ular matematik vektorga misol bo'ladi. Yo'nalishga ega bo'lmagan miqdorlar, masalan, masofa, massa, temperatura, energiya – **skalyar miqdorlar** deyiladi.

Vektorlar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?

Avvalo, biri ikkinchisini parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan vektorlarni biz o'zaro teng deb hisoblaymiz. Demak, \overrightarrow{AB} vektorni boshi ixtiyoriy C nuqta bo'lgan \overrightarrow{CD} vektorga parallel ko'chirish mumkin. \overrightarrow{AB} va \overrightarrow{BC} vektorlarning yig'indisi deb \overrightarrow{AC} vektorga aytiladi:

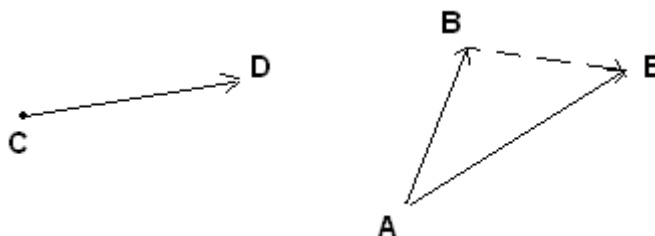
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



1-chizma

Umuman, bir necha vektorni qo'shish uchun birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektor parallel ko'chiriladi, ko'chirilgan ikkinchi vektor oxiriga uchinchi vektor parallel ko'chiriladi va hokazo, nihoyat birinchi vektorning boshidan so'nggi vektorning oxiriga yo'naltirilgan vektor berilgan vektorlarning yig'indisi deb ataladi.

Keltirilgan qoida vektorlarni ko'p burchak usulida qo'shish deyiladi. Masalan, samalyotning tezligi \overrightarrow{AB} vektor, havo oqimining tezligi \overrightarrow{CD} vektor bo'lsa, samalyotning asldagi tezligi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ vektor bilan aniqlanadi (2-chizma)



2-chizma

Chizmada \overrightarrow{CD} vektorni B nuqtaga parallel ko'chirib, \overrightarrow{AB} va \overrightarrow{BE} vektorlar yig'indisini ko'pburchak usulida qo'shib, natija sifatida \overrightarrow{AE} javobni hosil qildik.

Parallel ko'chirish vektorning qiymatini o'zgartirmaganligi uchun, vektorning boshi A nuqtani tanlashning ahamiyati yo'q. Shuning uchun vektorni faqat bitta harf bilan ham belgilash mumkin: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

AB kesmaning uzunligi \overrightarrow{AB} vektorining ham uzunligi deb atash tabiiydir. Vektor uzunligi $|AB|$ yoki $|a|$ ko'rinishda yoziladi.

Bir nechta vektorlar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ berilgan bo'lsa, ularning yig'indisini $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$ ko'rinishda yozish qulay. Bevosita uchburchak tengsizligidan

$$\left| \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i|$$

munosabat kelib chiqadi.

Albatta $\vec{a} + \vec{a}$ yig'indini $2\vec{a}$ ko'rinishida yozish tabiiy. Bu holda $2\vec{a}$ vektor \vec{a} vektorni 2 songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan deyiladi. Umuman, \vec{a} vektorni λ songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi: \vec{a} vektor uzunligini λ marta ko'paytiriladi. Hosil bo'lgan kesmada $\lambda > 0$ holda \vec{a} ning yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda < 0$ holda \vec{a} ning yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalish olinadi. Natijada hosil bo'lgan vektor $\lambda \cdot \vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor nol-vektor deb yuritiladi va $\vec{0}$ ko'rinishda yoziladi. Bu holda $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ bo'ladi. $-1 \cdot \vec{a}$ vektor \vec{a} ga qarama-qarshi vektor deyiladi. Ravshanki, $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

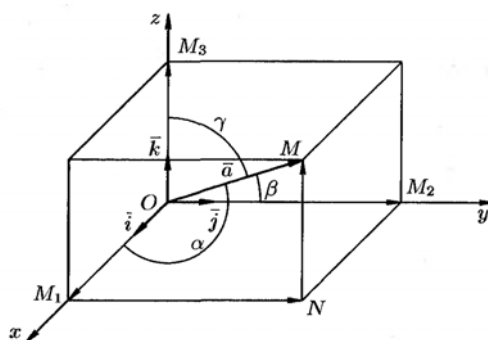
Koordinatalar sistemasidagi vektorlar.

Vektorlarga taaluqli hisoblashlarni koordinatalar sistemasida bajarish qulay. To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida \vec{a} vektorning boshini $O(0;0;0)$ nuqtaga joylashtiraylik. Vektorning oxiri esa $M(x_0; y_0; z_0)$ bo'lsin. U holda $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ vektorni ham $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ ko'rinishda belgilash mumkin. Bunda \overrightarrow{OM} – radius-vektor, x_0, y_0, z_0 sonlar – \vec{a} vektorning Dekart koordinatalari bo'ladi. Ravshanki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

va $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ hamda $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ko'rinishda, $\lambda\vec{a}$ esa $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi \vec{a} vektorning Ox, Oy, Oz koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda α, β, γ bo'lsin (1-chizma)



1-chizma

Ma'lumki, $\cos \alpha = \frac{|x_0|}{|\vec{a}|}$; $\cos \beta = \frac{|y_0|}{|\vec{a}|}$; $\cos \gamma = \frac{|z_0|}{|\vec{a}|}$. Demak,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Odatda $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ sonlar \vec{a} vektorning **yo'naltiruvchi kosinuslari** deb ataladi.

Endi Ox, Oy, Oz o'qlarning musbat yo'nalishlarida uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlar olib, ularni mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orqali belgilaylik. Tanlanishiga ko'ra bu vektorlarning koordinatalari

$$\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)$$

U holda $\vec{a}(x_0, y_0, z_0)$ vektorni

$$\vec{a} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Oxirgi tenglik \vec{a} vektorni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar bo‘yicha yoyish, $x_0 \cdot \vec{i}, y_0 \cdot \vec{j}, z_0 \cdot \vec{k}$ vektorlar esa \vec{a} vektorning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalari deyiladi. Masalan, $\vec{a}(2, -3, 5)$ bo‘lsa, $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}$ va $2 \cdot \vec{i}, -3 \cdot \vec{j}$ va $5 \cdot \vec{k}$ vektorlar \vec{a} vektorning proektsiyalari.

Agar \vec{a} va \vec{b} vektorlar bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, bu vektorlar **kollinear vektorlar** deb ataladi. Demak, kollinearlik sharti $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ tenglikni qanoatlantiruvchi λ sonning mavjudligidan iborat. Koordinatalari ko‘rsatilgan $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar uchun kollinearlik shartini

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu holda $\vec{a} \parallel \vec{b}$ belgilashdan foydalanamiz.

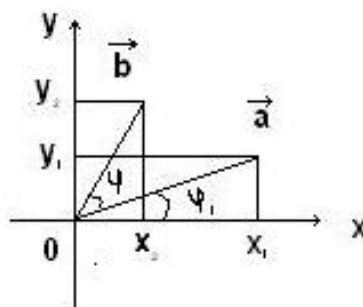
Masala. $\vec{a}(2, \alpha + \beta, \alpha)$ va $\vec{b}(\beta, 3, 2)$ vektorlar α va β sonlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘ladi?

◁ Kollinearlik shartiga ko‘ra: $\frac{2}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{\alpha}{2}$, ya‘ni $\alpha\beta = 4$; $\alpha\beta + \beta^2 = 6$.

Demak, $\beta^2 = 4$, $\beta = \pm\sqrt{2}$ va $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.

Javobi: 1) $\alpha = 2\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$ va 2) $\alpha = -2\sqrt{2}$, $\beta = -\sqrt{2}$. ▷

Endi tekislikda ikkita $\vec{a}(x_1, y_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2)$ vektorlar olib ular orasidagi burchakni topishga harakat qilamiz.



2-chizma

Chizmada φ_1 burchak – \vec{a} va Ox orasidagi, φ_2 burchak – \vec{b} va Ox orasidagi (chizmada belgilanmagan) va φ burchak – \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchaklar. U holda $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ravshanki

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{|\vec{a}|}; \sin \varphi_1 = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \cos \varphi_2 = \frac{x_2}{|\vec{b}|}; \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{|\vec{b}|}.$$

Demak,

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

ya'ni

$$\varphi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Kasrning suratidagi $x_1 x_2 + y_1 y_2$ ifoda muhim fizik ma'noga ega bo'lib, u $\vec{a}(x_1, y_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi va $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ yoki

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Fazodagi $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar uchun ham

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

ifoda **skalyar ko'paytma** deyiladi.

Fazoda ham \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchak

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

formuladan topilishini isbotlash mumkin.

Ikki vektor orasidagi burchak 90° bo'lsa, vektorlar **perpendikular** deyiladi va $\vec{a} \perp \vec{b}$ ko'rinishda yoziladi.

Bu holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Xullas vektorlarning perpendikulyarlik sharti

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

tenglikdan iborat.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar o'zaro perpendikular ($\varphi = 90^\circ$) bo'lgani uchun ularning skalar ko'paytmasi:

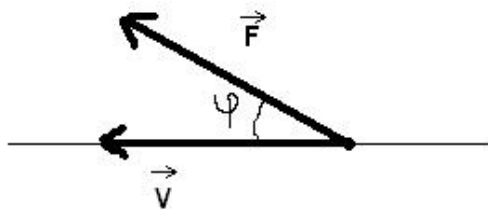
\cdot	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

jadvaldan topiladi.

Skalyar ko'paytma tushunchasi texnika va fizikada ko'p ishlatiladi. Masalan, o'zgarmas \vec{F} kuch ta'sirida \vec{V} tezlikda harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqtda bajargan ishi

$$A = \vec{F} \cdot \vec{V} = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \varphi$$

formuladan topiladi (3-chizma).



3-chizma

Yana bir misol sifatida o'zgaruvchan tokli zanjiri.

Bu holda kuchlanishning eng katta qiymati erishiladigan vaqt bilan tok kuchining eng katta qiymati erishiladigan vaqt orasidagi farq fazalarning siljishi deyiladi va φ bilan belgilanadi. Agar kuchlanish vektorini \vec{U} va tok kuchi vektorini \vec{I} orqali belgilasak, o'zgaruvchan tokning quvvati:

$$N = \vec{U} \cdot \vec{I} = |\vec{U}| \cdot |\vec{I}| \cdot \cos \varphi$$

formuladan topiladi. Xususan, o'zgaruvchan tokli zanjirda $\varphi = 0$, ya'ni $N = |\vec{U}| \cdot |\vec{I}|$ bo'ladi.

Fazodagi ikki vektor uchun yana bir amal – vektor ko'paytma tushunchasini kiritish mumkin.

Agar $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ bo'lsa,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \cdot \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \cdot \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot \vec{k}$$

tenglik bilan aniqlangan vektor \vec{a} va \vec{b} vektorlarning **vektor ko'paytmasi** deyiladi.

Oxirgi tenglikni ushbu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

ko'rinishini eslab qolish uchun qulay shaklda yozish mumkin.

Bu tenglik

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni **birinchi satri bo'yicha yoyish** deyiladi.

Masalan, $\vec{a}(1, 2, -3)$ va $\vec{b}(-2, 1, 5)$ bo'lsa,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

kelib chiqadi.

Uchinchi tartibli determinantning ikkita satri (yoki ustun) o'zaro almashib yozilsa, determinant qiymatida faqat ishora teskarisiga almashadi (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

bo'lgani uchun $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ tenglik kelib chiqadi. Shunday qilib, vektor ko'paytmada ko'paytuvchilarning o'rnini almashganda ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi.

Endi $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor bilan \vec{a} vektorning skalyar ko'paytmasini hisoblaylik.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

va $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + \\ &+ x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_2 = 0. \end{aligned}$$

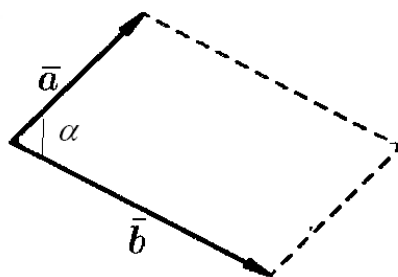
Demak, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b}$ va \vec{a} vektorlar o'zaro perpendikular:

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$. Xuddi shunday hisoblash $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ natijaga olib keladi.

Shunday qilib, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor \vec{a} va \vec{b} vektorlarga perpendikular ekan:

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}.$$

Ushbu



4-chizma

chizmadagi parallelogramm \vec{a} va \vec{b} vektorlarga qurilgan parallelogramm deyiladi va uning yuzasi o'quvchiga ma'lum bo'lgan

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

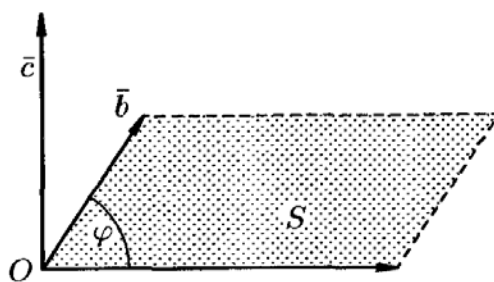
formuladan topiladi.

Qizig'i shundaki vektorning uzunligi ham shu parallelogramm yuzasining son qiymatiga teng. Haqiqatan ham (sodda hisoblashlarni o'quvchiga qoldiramiz):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha.$$

Demak, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor \vec{a} va \vec{b} vektorlarga perpendikular va uzunligi $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ songa teng.

Ammo, fazoda bu shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlar ikkita bo'lib, ular bir-biridan faqat ishorasi bilan farq qiladi, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorning yo'nalishi kiritilgan ta'rifga mos kelishi uchun, u quyidagicha tanlanadi: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektorning oxiridan qaralganda \vec{a} vektordan \vec{b} vektorgacha bo'lgan qisqa burilish soat strelkasiga teskari bo'lishi kerak (37-chizma)



5-chizma

Yuqorida \vec{a} va \vec{b} vektorlarning perpendikulyarlik sharti skalyar ko'paytma orqali ifodalangan edi, ya'ni

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Kollinear vektorlar orasidagi burchak 0° yoki 180° (qarama-qarshi yo'nalish). Ikkala holda ham $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$. Demak, \vec{a} va \vec{b} vektorlarning kollinearlik shartini vektor ko'paytma orqali ifodalash mumkin:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0,$$

chunki $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$.

Vektor ko'paytma ta'rifidan ushbu jadvalni hosil qilamiz:

\times	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	0	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	0	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	0

Jadvalda 1-ko'paytuvchi ustundan, 2-ko'paytuvchi satrdan topiladi. Masalan,

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}) \times (0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \vec{k}$$

Jadvaldan foydalanib vektor ko'paytmani ko'phadlarni ko'paytirgandek bajarish mumkin. Masalan,

$$(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = 2\vec{i} \times \vec{i} + 2\vec{i} \times \vec{j} - 4\vec{i} \times \vec{k} - 3\vec{j} \times \vec{i} - 3\vec{j} \times \vec{j} + 6\vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} - 2\vec{k} \times \vec{k} = 5\vec{k} + 3\vec{j} + 5\vec{i} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Endi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchta vektor berilgan bo'lsin. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor bilan \vec{c} vektorning skalyar ko'paytmasini ko'raylik: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Bu ifoda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning **aralash ko'paytmasi** deyiladi.

Agar $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ va $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ bo'lsa, ta'riflarga (vektor va skalyar ko'paytma ta'riflari) ko'ra:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Tenglikning chap tomonidagi ifoda

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr boyicha yoyilmasidan iborat. Demak,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Ikkinchi tomondan

$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \cdot |\vec{c}| \cos \beta = S \cdot |\vec{c}| \cos \beta = V$, bu yerda α – \vec{a} va \vec{b} vektorlar orasidagi burchak, β – \vec{c} vektorning $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor bilan hosil qilgan burchagi, S – \vec{a} va \vec{b} vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzasi, V – $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning balandligi bo'lib, $V = S_{as} \cdot h$.

Bir tekislikda yotuvchi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar **komplanar vektorlar** deyiladi. Ravshanki, komplanar vektorlar uchun parallelepiped hajmi V nolga teng. Demak,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

shart uchta vektorning komplanarlik sharti ekan.

Ushbu $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ tenglikni tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz.

Bundan tashqari

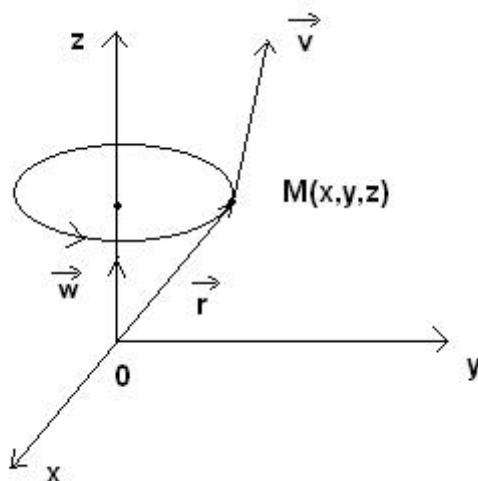
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

va

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{d})$$

(Lagranj ayniyati) formulalar o'rinli.

Vektor ko'paytma tushunchasi ham fan va texnikaning turli sohalarida uchraydi. Masalan, Oz o'qi atrofida o'qqa perpendikular tekislikda aylanayotgan $M(x; y; z)$ moddiy nuqtaning aylanma harakatdagi burchak tezligining vektori \vec{w} bo'lsin (6-chizma)



6-chizma

Ma'lumki, \vec{w} vektor Oz oqi bo'yicha yo'nalgan. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ vektor M nuqtaning radius vektori, \vec{V} esa moddiy nuqtaning chiziqli tezligi vektori (u harakat traektoriyasi, ya'ni aylanaga urinma bo'yicha yo'nalgan) bo'lsin. U holda \vec{V} chiziqli tezlik

$$\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r}$$

tenglikdan topiladi. Agar $\vec{w} = (0; 0; w) = w \cdot \vec{k}$, $\vec{r} = (x; y; z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ekanligini hisobga olsak,

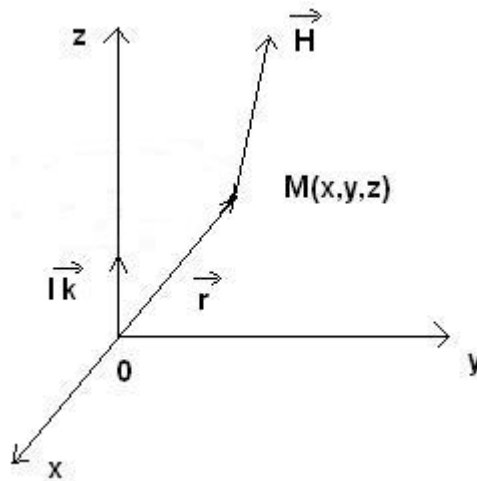
$$\vec{V} = \vec{w} \times \vec{r} = w \cdot \vec{k} \times (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = w(-y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j})$$

tenglik kelib chiqadi (tekshirib ko'ring). Demak,

$$|\vec{V}| = w \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

tenglikdan chiziqli tezlikning absolyut qiymatini topish mumkin.

Yana bir misol sifatida Oz o'qi bo'yicha quyidan yuqoriga qarab oqayotgan va qiymati I ga teng bo'lgan tok kuchi hosil qilgan magnit maydoning $M(x; y; z)$ nuqtadagi kuchlanganligini topaylik (7-chizma)



7-chizma

Agar, magnit maydonining $M(x; y; z)$ nuqtadagi kuchlanganligi vektorini \vec{H} , M nuqtaning radius-vektorini $\vec{OM} = \vec{r}$ va tok kuchi vektorini $I \cdot \vec{k}$ deb belgilasak, Bio– Savar qonuniga ko‘ra

$$\vec{H} = \frac{2}{(x^2 + y^2)} (I\vec{k} \times \vec{r}) = \frac{2I}{(x^2 + y^2)} (-y\vec{i} + x\vec{j})$$

formuladan topiladi.

Fazodagi to'g'ri chiziq va tekisliklarning vektor tenglamalari

Fazoda $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta va $\vec{a}(m; n; p)$ vektor berilgan bo'lsin. Ravshanki, M_0 nuqtadan \vec{a} vektorga parallel bo'lgan yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. $M(x; y; z)$ shu to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Demak, $\overrightarrow{MM_0} \parallel \vec{a}$, ya'ni

$$\overrightarrow{MM_0} \times \vec{a} = 0$$

tenglama M_0 nuqtadan o'tuvchi va \vec{a} vektorga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi. Uning koordinatalardagi tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

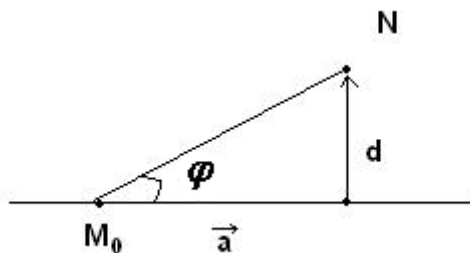
ko'rinishda bo'lib, $\vec{a}(m; n; p)$ vektor to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi vektori** deb ataladi.

Parallel ko'chirishda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak o'zgarmaydi. Demak, yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1)$ va $\vec{a}_2(m_2; n_2; p_2)$ bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \arccos \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi (kasr suratidagi absolyut qiymat ishorasiga ahamiyat bering).

$N(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani hisoblaylik (1-chizma).



1-chizma

Ravshanki, $d = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \sin \varphi$ yerda φ — \vec{a} va $\overrightarrow{M_0N}$ vektorlar orasidagi burchak. Vektor ko'paytma uchun keltirilgan formuladan

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0N}|}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{M_0N}|}$$

Demak,

$$d = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0N}|}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{M_0N}|} = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0N}|}{|\vec{a}|}$$

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini affin almashtirish. Ikkinchi tartibli sirtlar

$M(x; y; z)$ nuqtaning biror yangi koordinatalar sistemasidagi yangi koordinatalari $M(x'; y'; z')$ bo'lsin. Agar bu sonlar orasida ushbu munosabatlar

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3\end{aligned}$$

o'rinli bo'lib,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa, (x, y, z) sistemadan (x', y', z') sistemaga o'tish **affin almashtirish** deyiladi.

Affin almashtirishda to'g'ri chiziq, tekisliklar yana to'g'ri chiziq, tekisliklarga o'tadi. Parallelik xossasi ham saqlanadi.

Koordinatalari ushbu

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $M(x; y; z)$ nuqtalar to'plami **2-tartibli sirt** deyiladi. Affin almashtirish yordamida tenglamani ushbu asosiy ko'rinishlardan biriga keltirish mumkin (ba'zi aynigan hollar ko'rsatilmagan):

$$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = 1 \tag{1}$$

$$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = 0 \tag{2}$$

$$\pm x^2 \pm y^2 = 1 \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \tag{4}$$

Buning uchun o'quvchiga ma'lum bo'lgan to'la kvadratlar hosil qilish usulidan foydalanish kifoya. Masalan,

$$\begin{aligned}& ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + e = \\&= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{d}{a} xy + 2 \cdot \frac{e}{a} xz + 2 \cdot \frac{g}{a} x \right) + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2hy + 2kz + e = \\&= a \left(\left(x + \frac{d}{a} y + \frac{e}{a} z + \frac{g}{a} \right)^2 \right) + \dots \quad (x \text{ qatnashmagan hadlar}).\end{aligned}$$

Demak,

$$x' = \sqrt{|a|} \cdot \left(x + \frac{d}{a} y + \frac{e}{a} z + \frac{g}{a} \right)$$

almashtirish bilan $\pm x'^2$ hadni hosil qilamiz.

So'ngra, faqat y va z qatnashgan hadlardan y o'zgaruvchiga nisbatan to'la kvadrat hosil qilamiz.

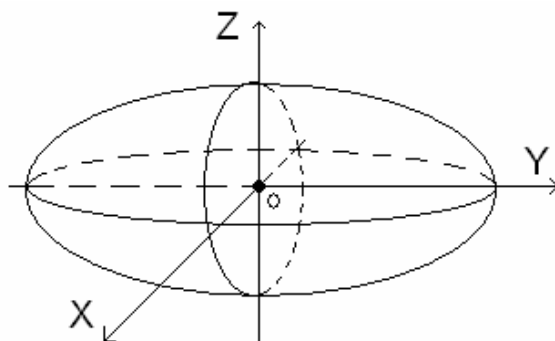
1.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ holga sfera

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

va ellipsoidlar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

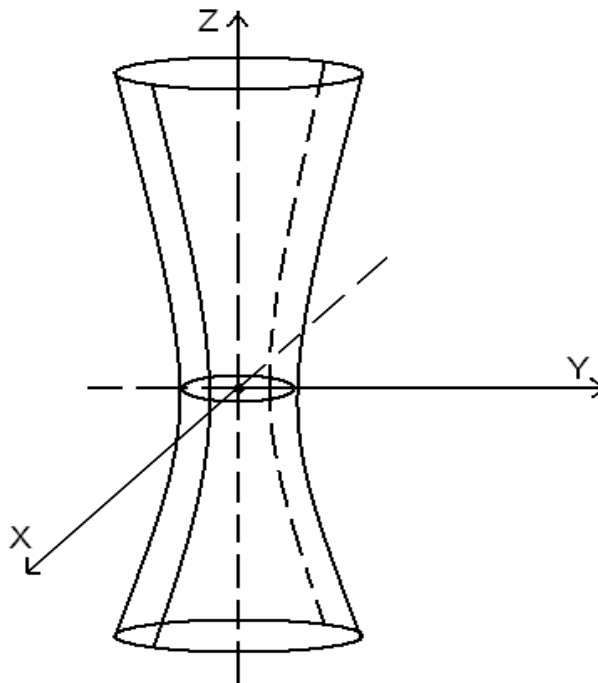
kiradi (1-chizma)



1-chizma

Ular chegaralangan va kamida uchta simmetriya tekisligiga ega bo'lgan sirtlar.

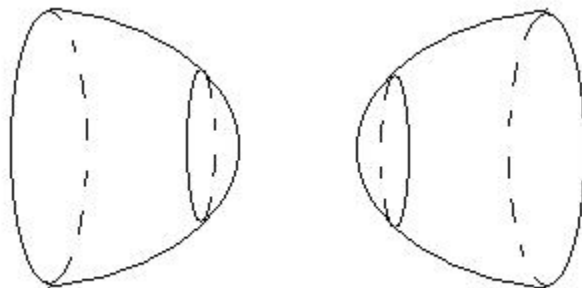
1.2. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ holga bir yaproqli giperboloidlar kiradi (2-chizma).



2-chizma

Bir yaproqli giperboloid chegaralanmagan Oz simmetriya o'qiga ega va uning $z = const$ tekislik bilan kesimi aylanalardan (ellipslardan) iborat sirt.

1.3. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ holga ikki yaproqli giperboloidlar kiradi (3-chizma)

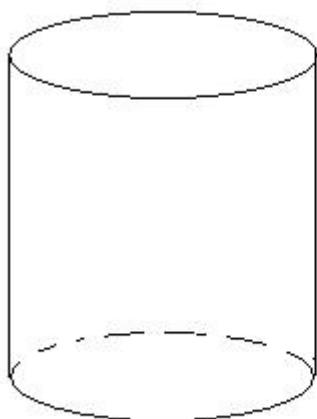


3-chizma

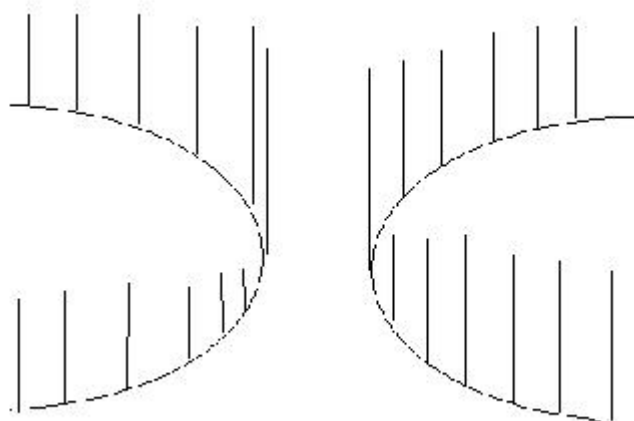
Ikki yaproqli giperboloid ham chegaralanmagan, uning $z = const$ tekisliklar bilan kesimi giperbolalardan, $x = const > 1$ tekisliklar bilan kesimi aylanalardan (ellipslardan) iborat bo'lgan sirt.

3. Agar tenglamada birorta o'zgaruvchi qatnashmasa, bu tenglama bilan aniqlangan sirt **silindrik sirt** deyiladi

Masalan, $x^2 + y^2 = 1$ – **elliptik silindr**, $x^2 - y^2 = 1$ – **giperbolik silindr** deyiladi. Ularning chizmasi xOy tekislikdagi ellips va giperbolani Oz o'qi bo'ylab parallel ko'chirishda hosil bo'ladi (4-chizma)



Elliptik silindr



4-chizma

giperbolik silindr

Demak (4) tenglama bilan aniqlangan sirt **parabolik silindr** bo'ladi. Nihoyat, $x^2 + y^2 + z = 0$ sirt **elliptik paraboloid**, $x^2 - y^2 + z = 0$ sirt **giperbolik paraboloid** deb ataladi. Bir jinsli bo'lgan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ sirt **konussimon sirt** deyiladi.

Endi $\vec{a}(m;n;p)$ va $\overline{M_0N}(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$ vektorlarni bilgan holda d masofani koordinatalar orqali ifodalashni o'quvchiga havola qilamiz.

Yana $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $\vec{a}(m;n;p)$ vektor berilgan bo'lsin.

Ma'lumki M_0 nuqtadan \vec{a} vektorga perpendikular bo'lgan yagona tekislik o'tkazish mumkin. Demak, $M(x;y;z)$ shu tekislikdagi biror nuqta bo'lsa, $\overline{MM_0}$ vektor \vec{a} vektorga perpendikular bo'ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra

$$\overline{MM_0} \cdot \vec{a} = 0$$

tenglik tekislikning vektor tenglamasi bo'ladi. Bu tenglamani skalyar ko'paytma ta'rifi ko'ra

$$m(x-x_0) + n(y-y_0) + p(z-z_0) = 0$$

shaklda yozish mumkin.

$\vec{a}(m;n;p)$ vektor tekislikning **normal vektori** deyiladi.

Ravshanki, ikki tekislik orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchak orqali aniqlanadi. Normal vektorlari $\vec{a}_1(m_1;n_1;p_1)$ va $\vec{a}_2(m_2;n_2;p_2)$ bo'lgan tekisliklar orasidagi burchak

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \arccos \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi.

$N(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan

$$m(x-x_0) + n(y-y_0) + p(z-z_0) = 0$$

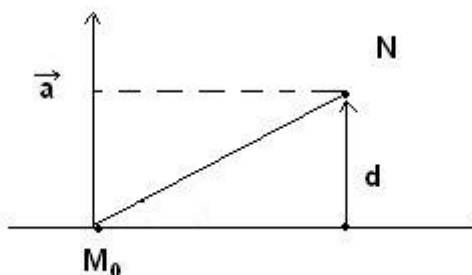
tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|m(x_1-x_0) + n(y_1-y_0) + p(z_1-z_0)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

ifodaga teng. Chunki 42-chizmadan

$$d = |\overline{M_0N}| \cdot \cos \varphi = |\overline{M_0N}| \cdot \frac{\overline{M_0N} \cdot \vec{a}}{|\overline{M_0N}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|m(x_1-x_0) + n(y_1-y_0) + p(z_1-z_0)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

tenglik kelib chiqadi.



2-chizma

Nihoyat fazodagi to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishini ko'ramiz.

To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}_1(m_1, n_1, p_1)$ tekislikning normal vektori $\vec{a}_2(m_2, n_2, p_2)$ bo'lsin. Agar \vec{a}_1 va \vec{a}_2 vektorlar orasidagi (o'tkir) burchak φ bo'lsa, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ga teng (shaklini chizib tekshiring). Demak, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi ψ burchak

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \arcsin \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \arcsin \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi.

Xususan, $\varphi = 0$, ya'ni to'g'ri chiziq va tekislikning parallel sharti ($\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$)

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

tenglikdan iborat.

Xuddi shunday $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya'ni to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti ($\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

tenglikdan iborat.