

**O'ZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HA'M ORTA
ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

QARAQALPAQ MA'MLEKETLIK UNIVERSITETI

**FIZIKA MATEMATIKA FAKULTETI
FUNKSIONAL ANALIZ. ALGEBRA HA'M GEOMETRIYA
KAFEDRASI**

u'lken oqitiwshısı Begjanova Kamilanın'

Itimallıqlar teoriyası ha'm matematikalıq
statistika pa'ninen
Leksiya tekstleri toplamı

No'kis 2018

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Itimallı'qlar teoriiyası' pa'ni. Elementar waqı'yalar ken'isligi» teması'na arnalg'an bolı'p, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz (joqarı' matematika) kursı'nı'n' ko'plikler ha'm olar u'stinde a'meller tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli mı'sallar keltirilgen.

1-lekciya (2s.)

Itimallı'qlar teoriiyası' pa'ni. Elementar waqı'yalar ken'isligi

Tayanı'sh so'zler

Waqı'ya, elementar waqı'ya, elementar waqı'yalar ken'isligi, tosı'nnanlı' waqı'ya, isenimli waqı'ya, mu'mkin emes waqı'ya.

Itimallı'qlar teoriiyası' tosı'nnanlı' qubı'lı'slardag'ı' (ha'diyselerdegi) nı'zamlı'qlardı' izertlewshi matematikalı'q ilim bolı'p tabı'ladı'.

Tosı'nnanlı' ha'diyse (waqı'ya) degende ju'zege ası'wı' ha'm aspawı' mu'mkin bolg'an ha'r qanday waqı'yanı' tu'sinemiz.

Ha'r qı'yılı' fizikalı'q ha'm texnikalı'q ma'selelerdi ilimiy jaqtan izertlegende tosı'nnanlı' qubı'lı'slar dep atalı'wshı' ayrı'qsha tu'rdegi qubı'lı'slar menen ushı'rası'wg'a tuwra keledi.

Tosı'nnanlı' qubı'lı's-bir sı'nawdı' (ta'jiriybeni, eksperimentti) bir neshe ma'rte ta'kirarlag'anda ha'r ret ha'r qı'yılı' o'tetug'ı'n qubı'lı's bolı'p tabı'ladı'.

Mı'sallar:

1. Bir deneni bir neshe ma'rte analitikalı'q ta'rezide o'lsheiw.

2. Samoletti'n' berilgen biyiklikte ushı'wı' ha'm t.b.

Ta'biyatta tosı'nnanlı'q elementleri qatnaspaytug'ı'n bir de fizikalı'q qubı'lı's joq desek qa'telespeymiz.

Ha'zirgi waqı'tta itimallı'lı'q metodları' qollanı'lmaytug'ı'n ta'biyat ilimleri derlik joq...

Itimallı'qlar teoriiyası' basqa matematikalı'q ilimler sı'yaqlı' praktikanı'n' talabı'nan kelip shı'qqan ha'm rawajlanbaqta.

Massalı'q tosı'nnanlı' qubı'lı'slarg'a baylanı'slı' ma'selelerdi sistemalı' tu'rde izertlep baslaw ha'm sa'ykes matematikalı'q apparattı'n' payda bolı'wı' XVII a'sirge tiyisli. Ataqlı' fizik Galiley XVII a'sirdin' bası'nda fizikalı'q o'lshewlerdegi qa'teliklerdi tosı'nnanlı' qubı'lı's dep qarap ha'm olardı'n' itimallı'qları'n' bahalap, onı' ilimiy jaqtan izertlewge ha'reket etken.

Itimallı'qlar teoriiyası'nı'n' ha'zirgi so'z mag'anası'nda payda bolı'wı' XVII a'sirdin' ortaları'na tiyisli bolı'p, Paskal, Ferma ha'm Gyuygenslerdin' **QUMAR** oyınlar teoriiyası' oblasti'ndag'ı' izertlewlerge baylanı'slı'.

Son'gı'ı' jı'lları' texnikalı'q mashqalalardı' sheshiwge baylanı'slı' itimallı'qlar teoriiyası'nı'n' taza tarawları' pa'n sı'patı'nda o'z aldı'na payda bolı'p atı'r. Ma'selen «Massalı'q xızmet ko'rsetiw teoriiyası'», «Informaciya teoriiyası'», «Tosı'nnanlı' processler teoriiyası'» h.t.b.

Sı'nawg'a qoyı'latug'ı'n tiykarg'ı' sha'rt, onı'n' mu'mkin bolatug'ı'n na'tiyjesin (aqı'betin) ko'rsete biliwimizden ibarat. Biz sı'nawdı'n' na'tiyjesin waqı'ya dep tu'sinemiz. Sı'naw ju'rgizilgende mu'mkin bolatug'ı'n na'tiyjelerdin' tek birewi g'ana ju'zege ası'wı'n *elementar waqı'ya* deymiz ha'm onı' ω_i arqalı' belgileybiz. Elementar waqı'yalar

jiklenbeytug'ı'n (ajı'ratı'lmaytug'ı'n) waqı'yalar, al sı'naw na'tiyjesi tek bir g'ana elementar waqı'ya menen ko'rsetiledi.

Sı'nawdı'n' mu'mkin bolatug'ı'n na'tiyjelerinin' ko'pligin, yag'nı'y barlı'q elementar waqı'yalar ko'pligin *elementar waqı'yalar ken'isligi* dep ataymı'z.

Onı' $\Omega = \{\omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ arqalı' belgileymiz.

Mı'sallar:

1. Monetanı' bir ret taslayı'q. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{G, C\} = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_G, \omega_C\}.$$

2. Kubikti bir ma'rte taslayı'q. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

3. Monetanı' u'sh ma'rte taslayı'q. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{GGG, GGC, GCG, CGG, CCC, CGC, GCC, CCC\}.$$

Elementar waqı'yalar Ω ko'pliginin' qa'legen u'les ko'pligine to'sı'nnanlı' waqı'ya yaki waqı'ya dep ataladı'. Bul tasta'yı'qlaw Ω shekli yamasa bolg'an jag'dayda ko'pliklerdin' ayrı'm klassı' ushı'n g'ana durı's boladı'.

Waqı'yalardı' A, B, C, ... ha'ripleri menen belgileymiz. Ma'selen, kubikti taslag'anda barlı'q mu'mkin bolg'an na'tiyjeler ko'pligi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ -elementar waqı'yalar ken'isligi. Usı' Ω ko'plikte anı'qlang'an wag'ı'yalardı' qarastı'rayı'q:

a) Jup nomerli ochkolar $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ waqı'yası'n (ko'pligin) quraydı' $A \subset \Omega$.

v) Taq nomerli ochkolar $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ waqı'yası'n (ko'pligin) quraydı' $B \subset \Omega$ h.t.b.

Elementar waqı'yalar ken'isliginin' geometriyalı'q su'wretleniwi qanday da bir ken'islik desek, onda elementar waqı'yalar usı' ken'isliktin' noqatları' boladı'.

Biz baqlaytug'ı'n waqı'yalardı' mı'naday u'sh tu'rge bo'liw mu'mkin: Isenimli waqı'yalar, mu'mkin emes waqı'yalar ha'm to'sı'nnanlı' waqı'yalar.

Isenimli waqı'ya dep anı'q bir S sha'rtler kompleksi (jı'ynag'ı') orı'nlang'anda so'zsiz ju'zege asatug'ı'n waqı'yag'a aytı'ladı'.

Ma'selen $+20^0$ temperturada «ı'dı'stag'ı' suw suyı'q jag'dayı'nda boladı'» degen isenimli waqı'ya. Bul jerde normal atmosfera bası'mı' ha'm suwdı'n' temperaturası' S sha'rtler kompleksin quraydı'.

Mu'mkin emes waqı'ya dep S sha'rtler kompleksi orı'nlang'anda hesh waqı'tta ju'zege aspaytug'ı'n waqı'yag'a aytı'ladı'.

Ma'selen, joqarı'dag'ı' mı'saldag'ı' sha'rtlerde «ı'dı'stag'ı' suw muz jag'dayı'nda boladı'» degen waqı'ya mu'mkin emes waqı'ya.

Tosı'nnanlı' waqı'ya dep S sha'rtler kompleksi (jı'ynag'ı') orı'nlang'anda ju'zege ası'wı' da ju'zege aspawı' da mu'mkin bolg'an waqı'yag'a aytı'ladı'.

Ma'selen monetanı' taslag'anda «gerb jag'ı'nı'n' shı'g'ı'wı'»-tosı'nnanlı' waqı'ya.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Waqı'ya tu'sinigin kiritin'.
2. Elementar waqı'ya terminin qalay tu'sinesiz?
3. Elmentar waqı'yalar ken'isligi dep nege aytamı'z?
4. Tosı'nnanlı' waqı'ya degenimiz ne?
5. Isenimli waqı'ya dep qanday waqı'yalarg'a aytı'ladı'? Mı'sallar keltirin'.
6. Mu'mkin emes waqı'ya dep qanday waqı'yalarg'a aytı'ladı'? Mı'sallar keltirin'.

A'debiyatlar: [1], I bap §1;2;3, [2]- [8].

Annotaciya

Bul lekciya teksti « Waqı'yalar algebrası' ha'm σ -algebrasi. Aksiomalar. Itimallı'q ken'isligi» teması'na arnalg'an bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, sızıqlı algebra (joqarı' matematika) kursları'nı'n' ko'plikler ha'm olar u'stinde a'meller, algebranin' anıqlaması tu'sinikleri menen tolı'q tanısqan bolıwları' kerek. Lekciyada waqı'yalar u'stinre a'meller geometriyalıq su'wretlep ko'rsetilgen.

2-lekciya (2s.)

Waqı'yalar algebrası' ha'm σ -algebrasi. Aksiomalar. Itimallı'q ken'isligi

Tayanı'sh so'zler

Waqı'yalar algebrası', waqıyaların qosindisi, ayırması, ko'beymesi, σ -algebrasi, itimallı'q, itimallı'q ken'isligi.

Da'slep bazı' bir qosı'msha tu'siniklerdi kiritelik. Bir neshe waqı'yalar berilgen sı'nawda waqı'yaların' tolı'q gruppası'n hasıl etedi dep aytıladı', eger de sı'naw na'tijesinde bul waqı'yalardan en' bolmag'anda birewi so'zsiz ju'zege assa.

Bir neshshe waqı'yalar berilgen sı'nawda birgeliksiz delinedi, eger de olardı'n' qa'legen ekewi bir waqı'tta ju'zege aspasa.

Bir neshshe waqı'yalar berilgen sı'nawda ten'dey imkaniyatlı' delinedi, eger de bul waqı'yaların' hesh biri qalg'an basqaları'na salı'stırg'anda ju'zege ası'wı' artı'qmash dep qarawg'a tiykar bolmasa.

Mr'sallar:

1. Monetanı' taslag'anda gerb yaki cıfr kelip shı'g'ı'wı'.

2. Kubıktı taslag'anda 1,2,4,6 ochkoları'nı'n' kelip shı'g'ı'wı' h.t.b.

Endi waqı'yalar u'stinde a'mellerdi ko'rip o'teyik. Bul a'meller ko'plikler u'stindegı a'meller sı'yaqlı' anı'qlanadı'.

1) A ha'm B waqı'yaları'nı'n' qosı'ndı'sı' dep, bul waqı'yaların' en' keminde birewine derek bolg'an elementar waqı'yalardan du'zilgen waqı'yalarg'a aytıladı'. Onı' $A+B$ yamasa $A \cup B$ arqalı' belgileydi.

Solay etip, waqı'yaların' qosı'ndı'sı' degende yaki A waqı'yası' yaki B waqı'yası', yaki A ha'm B ekewi de ju'zege asatug'ın waqı'yanı' tu'sinemiz.

2) A ha'm B waqı'yaları'nı'n' ko'beymesi dep, bir waqı'ttı'n' o'zinde ha'm A ha'm B g'a derek bolg'an elementar waqı'yalardan du'zilgen waqı'yag'a aytıladı'. Onı' $A \cdot B$ yamasa $A \cap B$ arqalı' belgileydi.

Demek, waqı'yaların' ko'beymesi degende ha'm A waqı'yası' ha'm B waqı'yası' ekewinin' de bir waqı'tta ju'zege ası'wı'n tu'sinemiz.

3) A ha'm B waqı'yaları'nı'n' ayırması' dep, A g'a derek, al B g'a derek bolmag'an elementar waqı'yalardan du'zilgen waqı'yag'a aytıladı'. Onı' $A-B$ yamasa $A \setminus B$ arqalı' belgileydi.

Demek $A-B$ waqı'yası' A waqı'yası'nı'n' ju'zege asıp, B waqı'yası'nı'n' ju'zege aspawı'n bildiredi.

Barlı'q elementar waqı'yalar ko'pligi yag'nı'y Ω waqı'yası' **isenimli waqı'ya**, al bir de elementke iye bolmag'an $\emptyset$ bos ko'pligi **mu'mkin emes waqı'ya** dep ataladı'.

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ waqı'yası' A waqı'yası'na qarama-qarsı' waqı'ya dep ataladı'. $\bar{A}$ waqı'yası' waqı'yası'nı'n' ju'zege aspawı'n bildiredi.

Qarama-qarsı' waqı'yalardı'n' qosı'ndı'sı' isenimli waqı'ya, al ko'beymesi mu'mkin emes waqı'ya boladı':

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A \cdot \bar{A} = \emptyset.$$

Eger de $A \cdot B = \emptyset$ bolsa, onda A ha'm B waqı'yaları' birgeliksiz dep ataladı'.

A waqı'yası' ju'zege asqanda B waqı'yası' da so'zsiz ju'zege assa, onda A nı'n' ju'zege ası'wı' B nı'n' ju'zege ası'wı'n ta'miynleydi yamasa B waqı'sı' A waqı'yası'nı'n' saldarı' dep ataladı' ha'm onı' $B \subset A$ arqalı' belgileydi.

Eger de $A \subset B$ ha'm $B \subset A$ bolsa, onda A ha'm B waqı'yaları' ten' ku'shli yamasa ekvivalent waqı'yalar dep ataladı'. Onı' $A = B$ dep belgileydi.

Waqı'yalardı'n' qosı'ndı'sı' ha'm ko'beymesinin' anı'qlamaları'nan tikkeley to'mendegi ten'liklerdin' durı'slı'gı' kelip shı'g'adı':

$$A + A = A$$

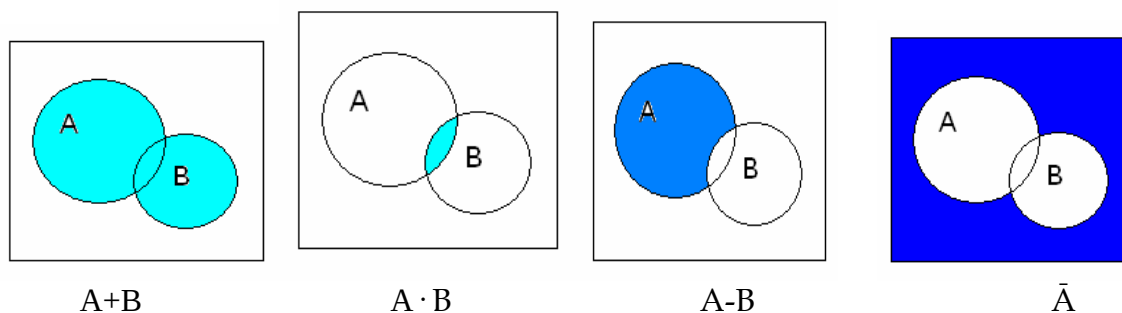
$$A \cdot A = A$$

Eger ha'm $B \subset A$ bolsa, onda

$$A + B = A$$

$$A \cdot B = B$$

Joqarı'dagı' waqı'yalar u'stinde keltirilgen tu'siniklerdi to'mendegi geometriyalı'q tu'rde su'wretlewge boladı':



1-su'wret

Meyli Ω -qa'legen elementar waqı'yalar ken'isligi, al F onı'n' u'les ko'pliklerinin' bazı' bir klası' bolsı'n.

Eger de qa'legen $A \in F$, $B \in F$ waqı'yaları' ushı'n $\Omega \in F$, $A+B \in F$, $A \cdot B \in F$, $A \setminus B \in F$ bolsa, onda F waqı'yalar algebrası' dep ataladı'. Bunnan $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in F$ ekenligi kelip shı'g'adı'. Eger de $A_n \in F$, $n=1,2,\dots$ bolg'anda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

bolsa, onda waqı'yalar algebrası' F waqı'yalardı'n' σ -algebrası' dep ataladı'.

Endi biz itimallı'q tu'sinigin kiritiwimizge boladı'. *Itimallı'q*-waqı'yanı'n' ju'zege ası'wı'nı'n' mu'mkinshilik da'rejesin xarakterleytugı'n san.

Waqı'yalar algebrası' F ke derek bolg'an qa'legen A waqı'yası'nı'n' itimallı'gı' dep to'mendegi aksiomalar orı'nlanatugı'n $P(A)$ sanlı' funkciyası'na aytı'ladı'.

A1. Qa'legen $A \in F$ ushı'n $P(A) \geq 0$.

A2. $P(\Omega) = 1$

A3. Shekli additivlik aksioması'. Eger de A ha'm B waqı'yaları' birgeliksiz, yag'nı'y $A \cdot B = \emptyset$ bolsa, onda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

A4. U'zliksizlik aksioması'. Qa'legen kemiwshi F ten alı'ng'an $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ izbe-izligi ushı'n $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ bolsa, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ boladı'.

Itimallı'q P A1-A4 aksiomaları'n qanaatlandı'ratug'ı'n bolsa ha'm waqı'yalar ko'pligi F algebra bolı'w menen birge σ -algebra da bolsa, onda (Ω, F, P) u'shligi itimallı'q ken'isligi dep ataladı'.

Endi A2-A4 aksiomalardan kelip shı'g'atug'ı'n itimallı'qtı'n' bazı' bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $A + \bar{A} = \Omega$ bolg'anlı'qtan $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. Eger de bunda $A = \Omega$ desek $P(\emptyset) = 0$.
3. Qa'legen A ha'm B waqı'yaları' ushı'n $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
Bug'an itimallı'qlardı' qosı'w teoreması' delinedi.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Waqı'yalar algebrası' dep nege aytamı'z?
2. Itimallı'q terminininn' anı'qlaması'n berin'.
3. Waqı'yalardı'n' qosı'ndı'sı'nı'n' anı'qlaması'n aytı'n' ha'm geometriyalı'q su'wretleniwin ko'rsetin'.
4. Waqı'yalardı'n' aı'yrması'nı'n' anı'qlaması'n aytı'n' ha'm geometriyalı'q su'wretleniwin ko'rsetin'.
5. Waqı'yalardı'n' ko'beymesinin' anı'qlaması'n aytı'n' ha'm geometriyalı'q su'wretleniwin ko'rsetin'.
6. Itimallı'q ken'isligi dep nege aytamı'z?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi. Itimallı'qtı'n' klassikalı'q, statistikalı'q ha'm geometriyalı'q anı'qlamaları'» teması'na arnalg'an bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirilip, al formulalalar bolsa qatan' matematikalıq iz-izlikte yesaplap shig'arip keltirilgen. Kiritilgen ha'r bir formulag'a tiyisli misallar sheship ko'rsetilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz (joqarı matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek.

3-lekciya (2s.)

Elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi. Itimallı'qtı'n' klassikalı'q, statistikalı'q ha'm geometriyalı'q anı'qlamaları'

Tayanı'sh so'zler

Elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi, itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması', itimallı'qtı'n' statistikalı'q anı'qlaması', itimallı'qtı'n' geometriyalı'q anı'qlaması'.

Eger elementar waqı'yalar ken'isligi shekli yamasa sanaqlı' sandag'ı' elementar waqı'yalardan turatug'ı'n' bolsa, onda bul ken'islik elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi dep ataladı'.

Meyli Ω -elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi bolsı'n. Eger de Ω da

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$$

bolatug'ı'n' teris emes $P(\omega_i)$ sanlı' funkciyası' berilgen bolsa, onda elementar waqı'yalardı'n' itimallı'qları' berilgen dep aytı'ladı'.

A waqı'yası'nı'n' itimallı'g'ı' dep, $A \subset \Omega$ bolg'anda to'mendegi formula menen anı'qlanatug'ı'n' $P(A)$ sanı'na aytı'ladı':

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), A \neq \emptyset \quad (3.1)$$

Egerde $A = \emptyset$ bolsa, onda $P(A) = 0$ boladı'. $P(\omega_i)$ itimallı'qları'n' elementar itimallı'qlar dep ataymız.

Solay etip, A waqı'yası'nı'n' itimallı'g'ı' A waqı'yası'na derek elementar waqı'yalardı'n' itimallı'qları'nı'n' qosı'ndı'sı'na ten'. Usı'layı'nsha anı'qlang'an itimallı'q A1-A4 aksiomaları'n qanaatlandı'radı'.

Meyli elementar waqı'yalar ken'isligi Ω o'z-ara ten'dey mu'mkinshilikli (ten'dey itimallı'qlarg'a iye bolg'an) n elementar waqı'yalardan ibarat bolsı'n, yag'nı'y $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$

A waqı'yası' ($A \subset \Omega$) k elementar waqı'yalardan ibarat bolsı'n, yag'nı'y $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$.

Onda (3.1) formula boyı'nsha

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Bunda k A g'a derek elementar waqı'yalar sanı', n Ω g'a derek elementar waqı'yalar sanı'. Sonlı'qtan joqarı'dag'ı' formulanı' qa'legen $A \subset \Omega$ waqı'yası' ushı'n to'mendegishe jazı'wg'a boladı'

$$P(A) = \frac{\text{A g'a derek elem. waqı'yalar sanı' } |A|}{\text{\Omega g'a derek elem. waqı'yalar sanı' } |\Omega|}. \quad (3.2)$$

Solay etip, A waqı'yası'nı'n itimallı'g'ı' A g'a derek elementar waqı'yalardı'n' sanı'nı'n ulı'wma elementar waqı'yalardı'n' sanı'na qatnası'na ten' eken. (3.2) formula boyı'nsha anı'qlang'an itimallı'qtı'n' anı'qlaması' itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması' dep ataladı'.

Mr'sallar:

1. Abonent qon'ı'raw qı'lmaqshı' bolı'p, telefonnı'n' nomerinin' son'g'ı' eki cifrı'n umı'tı'p qaldı'. Bul cifrlardı' ha'r qı'yılı' ekenligin esine tu'sirip, olardı' ta'wekelge aladı'. Alı'ng'an cifrlardı'n' kerekli cifrlar bolı'w itimallı'g'ı'n tabı'n'.
2. Eki kubik taslang'an. SHı'qqan ochkolardı'n' qosı'ndı'sı'nı'n' 8 ge ten' bolı'w itimallı'g'ı'n tabı'n'.
3. YAshiktegi 10 detaldı'n' 7 detalı' jaramlı'. Ta'wekelge alı'ng'an 6 detaldı'n' ishinde 4 detalı' jaramlı' bolı'w itimallı'g'ı'n tabı'n'.

Itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması'nda sı'nawdag'ı' elementar waqı'yalar sanı' shekli dep uyg'arı'lı'p ha'm bul elementar waqı'yalar birdey imkaniyatlı' edi. Biraq praktikada mu'mkin bolg'an elementar waqı'yalardı'n' sanı' sheksiz bolg'an sı'nawlar da ushı'rasadı'. Sonday-aq, sı'nawdı'n' juwmag'ı'n, ha'tte elementar waqı'yalardı'n' sanı' shekli bolg'anda da, birdey imkaniyatlı' elementar waqı'yalardı'n' qosı'ndı'sı' tu'rinde ko'rsetiwge mu'mkinshilik беретug'ı'n ulı'wma metodlar joq. Sonı'n' ushı'n da itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması' ju'da' sheklengen.

Biz endi qollanı'wg'a geyde qolaylı'raq bolg'an itimallı'qtı'n' basqasha anı'qlaması'n beremiz. A waqı'yası'nı'n' salı'stı'rmalı' jiyiligi dep, A waqı'yası' ju'zege asqan sı'nawlar sanı' k nı'n' ulı'wma sı'nawlar sanı' n ge qatnası'na aytı'ladı'.

Solay etip, eger de $W_n(A)$ arqalı' A waqı'yası'nı'n' n sandag'ı' sı'nawlardag'ı' salı'stı'rmalı' jiyiligin belgilesek, mı'na formulag'a iye bolamı'z:

$$W_n(A) = \frac{k}{n}, \text{ bunda } 0 \leq W_n(A) \leq 1 \text{ ayqı'n.}$$

Itimallı'qtı'n' ha'm salı'stı'rmalı' jiyiliktin' anı'qlamaları'n salı'stı'rsaq mı'nanı' bayqaymı'z: Itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması' sı'nawlar haqı'yqattan da ju'rgiziliwi kerek ekenligin talap etpeydi; Salı'stı'rmalı' jiyiliktin' anı'qlaması' bolsa sı'nawlar haqı'yqattan da ju'rgiziliwi kerek ekenligin talap etedi.

Basqasha aytqanda, itimallı'q sı'nawg'a shekem esaplanı'ladı', al salı'stı'rmalı' jiyiliktı' sı'nawdan keyin esaplaydı'.

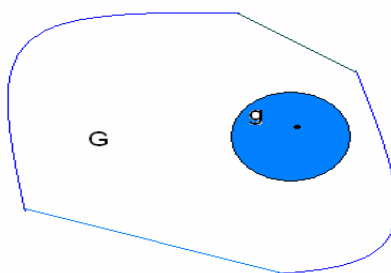
Birdey tu'rdegi massalı'q sı'nawlarda ko'pshilik jag'daylarda waqı'yanı'n' salı'stı'rmalı' jiyiliginin' turaqlı'lı'g'ı' bayqaladı', yag'mı'y sı'nawlar sanı' n jeterli da'rejede ulken bolg'anda waqı'yanı'n' salı'stı'rmalı' jiyiligi $W_n(A)$ bazı' bir turaqlı' P sanı'nı'n' jani'nda terbeletug'ı'nlı'g'ı' bayqaladı'. Usı' P sanı'na statistikalı'q mag'anadag'ı' A waqı'yası'nı'n' itimallı'g'ı' delinedi.

Mi'sali': Monetani' taslawlardi'n' si'nawları' bir neshe ret ju'rgizilip, ondag'ı' gerb jag'ı'nı'n' kelip shı'g'ı'wları'nı'n' sanı' esaplang'an. Bir qansha si'nawlardı'n' na'tiyjeleri mı'na tablicada ko'rsetilgendeı:

Si'naw ju'rgiziwshi	Si'nawlar sanı'	Gerb shı'g'ı'w sanı'	Jiyilik
Byuffon	4040	2048	0,5069
K.Pirson	12000	6019	0,5016
K.Pirson	24000	12012	0,5005

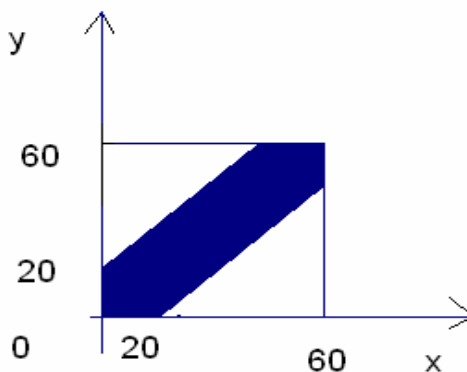
Itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması'n si'naw na'tiyjesinin' sanı' sheksiz, ten'dey mu'mkinshilikli ta'jiriybege qollanı'wg'a bolmaydı'. Bunday jag'daylarda itimallı'qtı'n' geometriyalı'q anı'qlaması' qolaylı'. Onı'n' ushı'n biz G ko'pliginde noqat ten' o'lsheqli bo'listirilgen dep uyg'aramız, al onı'n' qanday da u'les ko'pligin g dep belgileyik. Onda ko'p G oblastı'na dushman taslang'an noqattı'n' g oblastı'na tu'siwin A waqı'yası' dep belgilep, onı'n' itimallı'g'ı'na mı'nanday anı'qlama beriwge boladı': g oblastı'na dushman taslang'an noqattı'n' (A waqı'yası') usı' oblastqa tu'siw itimallı'g'ı' g nı'n' o'lsheeminin' G oblastı'nı'n' o'lsheimine (uzı'nlı'q, maydan, ko'lem) qatnası'na ten', yag'nı'y

$$P(A) = \frac{\text{o'lsheqler } g}{\text{o'lsheqler } G} = \frac{|g|}{|G|}$$



2-su'wret

Mi'salı': (Ushı'rası'w haqqı'ndag'ı' ma'sele): Eki joldas bir saat dawamı'nda ushı'rası'wg'a kelirken. Ushı'rası'w ornı'na burı'n kelgen adam ekinshisin 20 minut dawamı'nda ku'tip turadı', al onnan keyin ketip qaladı'. Eger de olardı'n' ha'r qaysısı' ushı'rası'w ornı'na bir saat aralı'g'ı'ndag'ı' qa'legen waqı't momentlerinde keliwi mu'mkin bolsa, eki joldastı'n' ushı'rası'w itimallı'g'ı' nege ten'.



3-su'wret

Eki joldastı'n' ushı'rası'w ornı'na keliw waqı'tları'n sa'ykes x ha'm y arqalı' belgileyik:

$$0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60.$$

Sonda $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$. A waqı'yası' eki joldastı'n' ushı'rası'wı'n bildiretug'ı'n bolsa, onda olar tek $|x - y| \leq 20$ min. bolg'anda ushı'rasadı'.

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Elementar waqı'yalardı'n' diskret ken'isligi dep nege aytamı'z?
2. Itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması'n keltirin'.
3. Itimallı'qtı'n' statistikalı'q anı'qlaması'n keltirin' ha'm onı'n' klassikalı'q anı'qlamadan parqı'n tu'sindirin'.
4. Itimallı'qtı'n' geometriyalı'q anı'qlaması'n tu'sindirin'.

Annotaciya

Bul lekciya teksti «SHA'rtli itimallı'qlar. Ko'beytiw teoreması'. Waqı'yalardı'n' g'a'rezsizligi » teması'na arnalg'an bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli mı'sallar keltirilgen.

4-lekciya (2s.)

SHA'rtli itimallı'qlar. Ko'beytiw teoreması'. Waqı'yalardı'n' g'a'rezsizligi

Tayanı'sh so'zler

SHA'rtli itimallı'q, ko'beytiw teoreması', g'a'rezsiz waqı'yalar.

Ayrı'm jag'daylarda A waqı'yası'nı'n' bazı' bir B waqı'yası' ju'zege asqandag'ı' itimallı'g'ı'n esaplawg'a tuwra keledi. Bunday itimallı'qtı' *sha'rtli itimallı'q* deydi ha'm onı' $P(A/B)$ yamasa $P_B(A)$ tu'rinde belgileydi.

Mı'sallar:

1. Qutı'da 2 aq shar ha'm 1 qara shar bar. Eki Adam bir birden shar aladı'. To'mendegi waqı'yalar qarastırıladı':

A- birinshi adamda aq shardı'n' shı'g'ı'wı',

B-ekinshi adamda aq shardı'n' shı'g'ı'wı'.

Eger de B waqı'yası' jo'ninde hesh na'rse belgili bolmasa, onda A waqı'yası'nı'n' itimallı'g'ı' $\frac{2}{3}$ ge ten'. Eger de B waqı'yası'nı'n' ju'zege asqanlı'g'ı' belgili bolsa, onda A waqı'yası'nı'n' itimallı'g'ı' $\frac{1}{2}$ ge ten' boladı'. Solay etip, $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A/B)=\frac{1}{2}$

2.Eki kubik bir waqı'tta taslang'an. Kelip shı'qqan ochkolardı'n' qosı'ndısı' jup ekenligi ma'lim bolg'anda, olardı'n' qosı'ndısı' 8 ge ten' ekenliginin itimallı'g'ı'n tabı'n'.

Ochkolardı'n' qosı'ndısı'nı'n' 8 ge ten' bolı'wı'n bildiretug'ın waqı'yanı' A arqalı', ochkolardı'n' qosı'ndısı'nı'n' jup ekenligin bildiretug'ın waqı'yanı' B arqalı' belgileyik. Sonda:

$$\Omega=\{(i,j): i,j=1,2,3,4,5,6\},$$

$$A=\{(i,j): i+j=8, i,j=\overline{1,6}\},$$

$$B=\{(i,j): i+j=2k, i,j=\overline{1,6}; k=\overline{1,6}\}.$$

$|\Omega|=36$, $|A|=5$, $|B|=18$ bolg'anlı'qtan, itimallı'qtı'n' klassikalı'q anı'qlaması' boyı'nsha

$$P(A)=\frac{5}{36}, \quad P(B)=\frac{18}{36}, \quad P(A/B)=\frac{5}{18}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

Bul jerde $AB=A$ bolg'anlı'qtan $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ dep jazı'wg'a boladı'.

Meyli elementar waqı'yalar ken'isligi o'z-ara ten'dey mu'mkinshilikli n elementar waqı'yalardan turatug'ın bolsın, yag'ni'y $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $P(\omega_i)=\frac{1}{n}$, $i=\overline{1,n}$. Olardı'n' ishinde $|\Omega|=n$, $|B|=k$, $|AB|=r$ bolsın. Eger de B waqı'yası' ju'zege asqan bolsa, onda og'an derek k elementar waqı'yalardı'n' birewi ju'zege asadı'. Sol waqı'tta A waqı'yası' ası'wı' ushı'n AB g'a derek bolg'an r elementar waqı'yalardı'n' birewi ju'zege asadı'. Sonlı'qtan klassikalı'q anı'qlama boyı'nsha

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Meyli $\{\Omega, F, P\}$ itimallıq ken'isligi berilgen bolıp, $A, B \in F$ ha'm $P(A) > 0$ bolsın. A waqı'yası'nı'n B waqı'yası' ju'zege asqandaqı' sha'rtli itimallı'g'ı dep

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (4.1)$$

formulası' menen anı'qlanatug'ı'n itimallı'qqa aytamız.

(4.1) formula sı'yaqlı' $P(A) > 0$ bolg'anda

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (4.2)$$

formulası'na iye bolamız. Bul formulalardan

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (4.3)$$

ekenligi kelip shı'g'adı'. Bul ten'lik ko'beytiw teoreması' dep ataladı' ha'm onı' to'mendegishe aytı'wg'a boladı'.

Qa'legen eki waqı'yanı'n ko'beymesinin' itimallı'g'ı olardı'n birewinin' itimallı'g'ı'n ekinshisinin' birinshisi ju'zege asqandag'ı' sha'rtli itimallı'g'ı'na ko'beytkenge ten'.

Ko'beytiw teoreması'n indukciya boyı'nsha qa'legen sandag'ı' waqı'yalardı'n ko'beymesi ushı'n ulı'wmalastır'ı'wg'a boladı'.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Bul ten'likin' da'lillileniwin oqı'wshılardı'n o'zlerine usı'namız.

A waqı'yası' B waqı'yası'nan g'a'rezsiz delinedi, eger de $P(A/B) = P(A)$ ten'ligi orı'nlanısa. Eger A waqı'yası' B dan g'a'rezsiz bolsa, onda B waqı'yası' da A dan g'a'rezsiz boladı'. Bul jag'dayda $P(B/A) = P(B)$.

G'a'rezsiz waqı'yalar ushı'n ko'beytiw teoreması' a'piwayı' ko'rinske iye boladı', atap aytqanda, eger de A ha'm B waqı'yaları' o'z-ara g'a'rezsiz bolsa, onda

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Bul teoremanı' to'mendegishe ulı'wmalastır'ı'wg'a boladı'.

Eger de $A_1, A_2, \dots, A_n$, waqı'yaları' g'a'rezsiz bolsa, onda

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Mr'salı': Qutı'da 2 aq ha'm 3 qara sharlar bar. Qutı'dan ta'wekelge qatarı'na eki shar alı'nadı'. Alı'ng'an eki shardı'n da aq shar bolı'w itimallı'g'ı'n tabı'n'.

A arqalı' alı'ng'an eki shar da aq boladı' degen waqı'yana belgileyik. A waqı'yası' eki waqı'yanı'n ko'beymesinen ibarat boladı':

$A = A_1 \cdot A_2$, bunda A_1 – birinshi ma'rte alı'ng'an shar aq shar, A_2 -ekinshi ma'rte alı'ng'an shar aq shar boladı' degen waqı'ya.

Ko'beytiw teoreması' boyı'nsha:

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1$$

Usı' sha'rtlerde, biraq birinshi ma'rte alı'ng'an shar qutı'g'a qaytarılı'p salı'nıp, qutı'dag'ı' sharlar aralastır'ı'ladı'. Bul jag'dayda A_1 ha'm A_2 waqı'yaları' g'a'rezsiz bolıp,

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,16$$

Bekkemlew ushi'n sorawlar:

1. SHa'rtli itimallı'q dep qanday itimallı'qqa aytı'ladı'?
2. ko'beytiw teoreması'n aytı'p berin' ha'm jazı'p ko'rsetin'.
3. G'a'rezsiz waqı'yalar dep qanday waqı'yalarg'a aytı'ladı'?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Waqi'yalardi'n' toli'q gruppasi'. Toli'q itimalliq'ti'n' formulasi'. Bayes formulasi'» temasi'na arnalg'an bolip, lekciyada tiykarg'i' tu'sinikler ani'qlamalari' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temani' tu'siniw ushi'n studentler matematikalı'q analiz (joqari' matematika) kursı'nı'n' ko'plikler ha'm olar u'stinde a'meller tu'sinikleri menen toli'q tani'sqan bolı'wlari' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli mi'sallar keltirilgen.

5-lekciya (2s.)

Waqi'yalardi'n' toli'q gruppasi'. Toli'q itimalliq'ti'n' formulasi'. Bayes formulasi'

Tayani'sh so'zler

Waqi'yalardi'n' toli'q gruppasi', birgeliksiz waqi'yalar, gipotezalar, toli'q itimalliq'ti'n' formulasi', Bayes formulasi'.

Eger de $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqi'yalari' jup-juptan birgeliksiz bolsa ha'm $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ bolsa, onda birgeliksiz $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqi'yalari' waqi'lardi'n' toli'q gruppasi'n hasıl etedi deymiz.

Joqari'dag'i' tiykarg'i' teoremlar- itimallı'qlardi' qosı'w ha'm ko'beytiw teoremlari'ni'n' saldarları' retinde toli'q itimallı'q formulasi' dep atalı'wshı' formulani' keltirip shı'g'arayı'q.

Meyli $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqi'yalari' birgeliksiz waqi'yalardi'n' toli'q gruppasi'n hasıl etip, bul waqi'yalardan birewi menen birge ju'zege asatug'ı'n bazı' bir A waqi'yasi'ni'n' itimallı'g'ı'n tabı'w talap etiledi. Bul gruppanı'n' waqi'yalari'na a'dette gipotezalar dep ataydı'. Bul jag'dayda mı'na formula ori'nli' boladı':

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(\text{A}/H_i) \quad (5.1)$$

(5.1) formulag'a toli'q itimallı'q'ti'n' formulasi' delinedi.

Da'lillew: SHa'rt boyı'nsha $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$, $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ ha'm $A = \Omega \cdot A =$

$H_1A + H_2A + \dots + H_nA$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ waqi'yalari' birgeliksiz bolg'anlıqtan, $H_1A, H_2A, \dots, H_nA$ waqi'yalari' da birgeliksiz boladı'. Onda itimallı'qlardi' qosı'w ha'm ko'beytiw teoremlari' boyı'nsha

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + \dots + H_nA) = \sum_{i=1}^n P(H_iA) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(\text{A}/H_i)$$

Usı'nı' da'lillew talap etilgen edi.

Mi'sallar:

1. Birdey u'sh qutı' berilgen. Birinshi qutı'da 2 aq ha'm 1qara shar, ekinshi qutı'da 3 aq ha'm 1 qara shar, u'shinshi qutı'da 2 aq ha'm 2 qara sharlar bar. Birew ta'wekelge qutı'dan birewin tan'lap aladı' ha'm onnan bir shar aladı'. Usı' alı'ng'an shardı'n' aq bolı'wı'nı'n' itimallı'g'ı'n tabı'n'.

Mı'na u'sh boljawdı' (gipotezani') qarayı'q

H_1 –birinshi qutı’nı’ tan’law, H_2 -ekinshi qutı’nı’ tan’law, H_3 -u’shinshi qutı’nı’ tan’law ha’m A-aq shar shı’g’ı’wshı’ waqı’yanı’ an’latsı’n. Ma’selenin’ sha’rti boyı’nsha boljawlar birdey imkaniyatlı’ bolg’anlı’qtan

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

A waqı’yası’nı’n’ usı’ boljawlardag’ı’ itimallı’g’ı’ sa’ykes:

$$P(A/H_1)=\frac{2}{3}, P(A/H_2)=\frac{3}{4}, P(A/H_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

Tolı’q itimallı’qtı’n’ formulası’ boyı’nsha

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{36}$$

2. Oqı’tı’wshı’ joqarı’ matematikadan sı’naq alı’w ushı’n 50 ma’sele tayarlag’an. Olardı’n’ ishinde differencial esabı’nan 20 ma’sele, integral esabı’nan a’h ma’sele, itimallı’qlar teoriyası’nan 12 ma’sele bar. Student differencial esabı’nan a’h ma’sele, integral esabı’nan 15 ma’sele, itimallı’qlar teoriyası’nan 10 ma’sele sheshe alatug’ı’n bolsa, onı’n’ dus kelgen bir ma’seleni sheship, sı’naq tapsı’rı’wı’nı’n’ itimallı’g’ı’n tabı’n’.

To’mendegi boljawlardı’ kiritelik:

H_1 –studentke ma’sele differencial esabı’nan tu’ssti,

H_2 - studentke ma’sele integral esabı’nan tu’ssti,

H_3 - studentke ma’sele itimallı’qlar teoriyası’nan tu’ssti.

A- student sı’naq tapsı’rdı’.

$$\text{Sonda } P(H_1)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}, P(H_2)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}, P(H_3)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$$

Sa’ykes sha’rtli itimallı’qlar:

$$P(A/H_1)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}, P(A/H_2)=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}, P(A/H_3)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},$$

Sonlı’qtan (5.1) formula boyı’nsha

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{10}+\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{6}+\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{6}=\frac{43}{50}=0,86$$

Endi itimallı’qlardı’ ko’beytiw teoreması’ ha’m tolı’q itimallı’qtı’n’ formulası’nı’n’ saldarı’ retinde Bayes formulası’ dep atalı’wshı’ formulanı’ keltirip shı’g’arayı’q. Mı’naday ma’seleni qarastı’rayı’q: O’z-ara birgeliksiz waqı’yalarđı’n’ gruppası’ $H_1, H_2, \dots, H_n$ berilgen. Bul boljawlardı’n’ sı’nawg’a shekemgi itimallı’qları’ belgili bolı’p, olar sa’ykes $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Sı’naw ju’rgizilip, na’tiyjede bazı’-bir A waqı’yası’nı’n’ ju’zege ası’wı’ bayqaladı’. Usı’ A waqı’yası’ ju’zege ası’wı’ menen bul boljawlardı’n’ itimallı’qları’ qalay o’zgeredi, basqasha aytqanda ha’r bir boljaw ushı’n $P(H_i/A)$ sha’rtli itimallı’qlardı’ tabayı’q.

Itimallı’qlardı’ ko’beytiw formulası’ boyı’nsha:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

Bunnan

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, (i=1,2,\dots,n)$$

Bundag’ı’ $P(A)$ nı’ tolı’q itimallı’qtı’n’ formulası’ menen an’latsaq

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}. \quad (5.2)$$

Bul formulag’a Bayes formulası’ dep ataladı’.

Mı’salı’:

1. Eki atqı’sh bir-birinen g’a’rezsiz bir nı’shanag’a ha’r qaysı’sı’ bir retten atadı’. Birinshi atqı’shtı’n’ nı’shanag’a tiygiziw itimallı’g’ı’ 0,8; ekinshisiniki 0,4. Atı’w tamam bolg’annan

keyin nı'shanada bir tesik tabı'lg'an (A waqı'yası'). Usı' tesiktin' birinshi atqı'shqa tiyisli bolı'w itimallı'g'ı'n tabı'n'. Sı'nawg'a shekem mı'naday boljawlar bolı'wı' mu'mkin:

H₁ –birinshi atqı'shtiki de, ekinshi atqı'shtiki de tiymeydi.

H₂- eki atqı'shtiki de tiyedi,

H₃- birinshisiniki tiyedi, ekinshisiniki tiymeydi

H₄ –birinshisiniki tiymeydi, ekinshisiniki tiyedi.

Bul boljawlardı'n' itimallı'qları':

$$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12;$$

$$P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32;$$

$$P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48;$$

$$P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

Baqlang'an A waqı'yası'nı'n' usı' boljawlardag'ı' sha'rtli itimallı'qları':

$$P(A/H_1) = 0; \quad P(A/H_2) = 0;$$

$$P(A/H_3) = 1; \quad P(A/H_4) = 1.$$

Demek H₁ ha'm H₂ boljawları' joqqa shı'g'adı',al H₃ ha'm H₄ boljawları'nı'n' sha'rtli itimallı'qları' Bayes formulası' boyı'nsha esaplanı'ladı':

$$P(H_3/A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7}; \quad P(H_4/A) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7}$$

Solay etip, tesiktin' birinshi atqı'shqa tiyisli bolı'w itimallı'g'ı' $\frac{6}{7}$ g'a ten' eken.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Waqı'yalardı'n' tolı'q gruppası' dep qanday sha'rtler orı'nlang'anda aytı'ladı'?
2. Birgeliksiz waqı'yalar dep qanday waqı'yalarg'a aytı'ladı'?
3. Gipotezalar degenimiz ne?
4. Toli'q itimallı'qtı'n' formulası'n jazı'p ko'rsetin'?
5. Bayes formulası'n kelitirip shı'g'arı'n'.

Annotaciya

Bul lekciya teksti «G'a'rezsiz si'nawlar izbe-izligi. Bernulli sxeması'. Binomial ha'm polinomial formulalar» temasi'na arnalg'an bolı'p, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushi'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli mı'sallar keltirilgen.

6-lekciya (2s.)

G'a'rezsiz si'nawlar izbe-izligi. Bernulli sxeması'. Binomial ha'm polinomial formulalar

Tayanı'sh so'zler

G'a'rezsiz si'nawlar izbe-izligi, Bernulli formulası', binomial formula, binomial bo'listiriw, polinomial.

Praktikada si'nawlar tu'rli-tu'rli qaytalanı'p, ta'kirarlanı'p turadı'. Bunda eki jag'day bolı'wı' mu'mkin: ju'rgizilgen si'naw na'tiyjesi aldı'ng'ı' yaki kelesi si'naw na'tiyjesine ya g'a'rezsiz, ya g'a'rezli boladı'. Birinshi jag'dayda-g'a'rezsiz si'nawlar dep atalsa, ekinshi jag'dayda-g'a'rezli si'nawlar dep ataladı'.

Itimallı'qlardı' qosı'w ha'm ko'beytiw qa'deleri waqı'yalardı'n' a'dewir quramalı' kombinaciya itimallı'qları'n tabı'wg'a imkaniyat beredi. Biz ha'zir tanı'satug'ı'n en' a'piwayı', sonı'n' menen birge en' ken' taqalg'an sxemalardan biri g'a'rezsiz si'nawlardı'n' ta'kirarlanı'w sxeması' yamasa Bernulli sxeması' dep atalı'wshı' sxema bolı'p esaplanadı'.

Birer si'naw na'tiyjesinde A waqı'yası' ju'zege ası'wı' yaki aspawı' da mu'mkin. A waqı'yası'nı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı'n $P(A)=p$, ju'zege aspawı'nı'n' itimallı'g'ı'n $P(\bar{A})=1-p=q$ dep belgileyik.

Izbe-iz o'tkerilgen eki g'a'rezsiz si'nawdı'n' mu'mkin bolg'an na'tiyjelerin ko'reyik (1-tablica).

Si'nawdı'n' na'tiyjeleri	AA	A $\bar{A}$	$\bar{A}A$	$\bar{A} \bar{A}$
Itimallı'qlar	p^2	pq	qp	q^2

1-tablica

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$$

Si'nawlar sanı', ma'selen u'shew bolg'anda da tap usı'layı'nsha pikir ju'ritip, joqarı'dag'ı'g'a uqsas

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$$

ekenligine iye bolamı'z.

Endi ma'seleni ulı'wma tu'rde anı'qlawg'a boladı'.

Bernulli formulası'. Eger ha'r bir si'nawda waqı'yanı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' turaqlı' ha'm ol p g'a ten' bolsa, onda n ret g'a'rezsiz si'nawlar ju'rgizgende usı' waqı'yanı'n' da'l m ret ju'zege ası'w itimallı'g'ı':

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (6.1)$$

formulası' menen esaplanadı'.

Bunı' da'lillew ushi'n n ret g'a'rezsiz si'nawlar ju'rgizgende A waqı'yası'nı'n' da'l m ret ju'zege ası'wı'nı'n' ha'm n-m ret aspawı'nı'n' barlı'q mu'mkin bolg'an izbe-izligin du'zeyik:

$$\underbrace{AA \cdots A}_{m(pem)} \underbrace{BB \cdots B}_{n-m(pem)}, \dots, \underbrace{BB \cdots B}_{n-m(pem)} \underbrace{AA \cdots A}_{m(pem)}.$$

Bul izbe-izlik ag'zalarini'n' bir-birinen ayirmashi'li'g'i' tek ornalasi'w ta'rtibinde g'ana bolip tur, sonli'qtan oni' A waqi'yasi' m ret, $\bar{A}$ waqi'yasi' n-m ret ta'kirarlani'p almasadi' dep qarawg'a boladi'. Olardi'n' sani' C_n^m ge ten' bolg'anli'qtan

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Kelip shi'qqan formula binomial formula dep te ataladi'. Sebebi (6.1) ten'liktin' on' jag'i' $(p+q)^n$ binomi'ni'n' jayi'lmasi'ndag'i' x^m shamasini'n' koefficienti boladi'. $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ itimalli'qlari'ni'n' izbe-izligi binomial bo'listiriw dep ataladi'.

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1,$$

yamasa

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1$$

Endi biz o'tkergen n si'nawda A_1 waqi'yasi'ni'n' m_1 ret, A_1 waqi'yasi'ni'n' m_2 ret, ..., A_k waqi'yasi'ni'n' m_k ret ju'zege asi'wi'ni'n' itimalli'g'i'n tabayi'q ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$). Bul itimalli'qtu' $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ dep belgileyik. Bul itimalli'q

$$\underbrace{\{A_1 \cdots A_1\}}_{m_1(pem)} \underbrace{\{A_2 \cdots A_2\}}_{m_2(pem)} \cdots \underbrace{\{A_k \cdots A_k\}}_{m_k(pem)}$$

tu'rindagi elementar waqi'yalardi'n' itimalli'qlari'ni'n' qosi'ndi'si'na ten'. Bunday ha'r bir elementar waqi'yanin' itimalli'g'i' $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ ko'beymesine ten', al elementar waqi'yalardi'n'

$$\text{sani'} \quad \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \quad \text{polinomial koefficientine ten' bolg'anli'qtan}$$

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} \quad (6.2)$$

(6.2) formula polinomial formula dep ataladi'. Sebebi bul ten'liktin' on' jag'i' $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k)$ polinomi'ni'n' jayi'lmasi'ndag'i' $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_k^{m_k}$ an'latpasi'ni'n' koefficientleri boladi'.

Mr'sallar:

1. Elektroenergiyani'n' bir sutka dawami'nda sari'plani'wi'ni'n' belgilengen normadan asi'p ketpew itimalli'g'i' $p=0,75$ ke ten'. Jaqi'n 6 sutkani'n' 4 sutkasi' dawami'nda elektroenergiyani'n' sari'plani'wi'ni'n' normadan asi'p ketpew itimalli'g'i'n tabi'n'.
2. Bazi' bir elatli' punkte sentyabr ayi'nda orta esap penen 12 ku'n jawi'n jawadi'. Sentyabr ayi'nda dushman aling'an 8 ku'nnin' ishinde 3 ku'nde jawi'n jawatug'i'ni'li'g'i'ni'n' itimalli'g'i'n tabi'n'.
3. Moneta 6 ma'rte taslanadi'. Gerb jag'i'ni'n' 0,1,...,6 ma'rte kelip shi'g'i'wi'ni'n' itimalli'g'i' nege ten'?
4. Eki ten' ku'shli shaxmatshi' oynag'anda 4 partiyadan 3 partiyani' uti'w itimalli'g'i' ko'p pe yamasa 8 partiyadan 5 partiyani' uti'w itimalli'g'i' ko'p pe?

Bekkemlew ushi'n sorawlar:

1. G'a'rezsiz sı'nawlar izbe-izligi dep qay waqı'tta aytı'ladı'?
2. Bernulli formulası'n jazı'n'.
3. Binomial formula dep ne ushı'n aytı'ladı'?
4. Binomial bo'listiriw degenimiz qanday bo'listiriw?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Bernulli sxemasi» ushi'n shek teoremlari'. Muavr-Laplasti'n' lokalliq ha'm integralliq teoremlari. Puasson teoremasi» temasi'na arnalg'an bolip, lekciyada tiykarg'i' tu'sinikler aniqlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temani' tu'siniw ushi'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionalliq analiz (joqari' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i' tu'sinikleri menen tolı'q tanısqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli m'sallar keltirilgen.

7-lekciya (2s.)

Bernulli sxemasi' ushi'n shek teoremlari'. Muavr-Laplasti'n' lokalliq ha'm integralliq teoremlari. Puasson teoremasi

Tayani'sh so'zler

Asimptotikalı'q juwı'qlası'w, Muavr-Laplas teoremasi', Laplasti'n' lokallı'q teoremasi', Laplasti'n' integrallı'q teoremasi', Laplas funkciyası', Puasson formulası'.

Biz joqarı'da n sı'lawda waqı'yanı'n' m ma'rte ju'zege ası'wı'n esaplaw ushi'n Bernulli formulası'n keltirip shı'g'ardı'q. Bul formulani' keltirip shı'g'arg'anda biz ha'r bir sı'lawda waqı'yanı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı'n turaqlı' dep uyg'ardı'q. Bernulli formulası'nan, n nin' u'lken ma'nislerinde paydalani'w a'dewir qı'yı'n ekenligin an'sat ko'riwge boladı', sebebi og'ada u'lken sanlar menen a'meller ju'rgiziwge tuwra keledi. Ma'selen, eger $n=50$, $m=30$, $p=0,1$ bolsa. Onda

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} (0,1)^{30} (0,9)^{20} \quad \text{bolı'p, bunda}$$

$$50! = 30\,414\,093 \cdot 10^{57}, \quad 30! = 26\,525\,286 \cdot 10^{25}, \quad 20! = 24\,329\,020 \cdot 10^{11}$$

Arnawlı' tablicalardan paydalani'p esaplawdı' a'dewir a'piwayı'lastırır'wg'a boladı', degen menen bul joldı'n' o'zi de biraz quramalı', sonday-aq aytarlı'qtay kemshilikke iye: tablicalar juwı'q ma'nislerdi o'z ishine aladı', sonı'n' ushi'n da esaplaw procesinde qa'telikler jı'ynalı'p, en' juwmag'ındag'ı' na'tiyje da'l ma'nisinen a'dewir parq qı'lı'wı' mu'mkin. Mı'naday soraw tuwadı': bizdi qı'zı'qtı'rı'wshı' itimallı'qtı' Bernulli formulası'nan paydalanbay-aq esaplaw mu'mkin emes pe? Mu'mkin eken. Laplasti'n' lokallı'q teoremasi' sı'lawlar sanı' jeterli ko'p bolg'anda n sı'lawda waqı'yanı'n' m ma'rte ju'zege ası'wı'nı'n' itimallı'g'ı'n juwı'q tabı'wg'a mu'mkinshilik beretug'ı'n asimptotikalı'q formulani' sı'patlaydı'. ($\varphi(x)$ funkciyası' $f(x)$ funkciyası'nı'n' asimptotikalı'q juwı'qlası'wı' delinedi, eger de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ bolsa). $p = \frac{1}{2}$ bolg'an jag'day ushi'n asimptotikalı'q formula 1730-jı'lı' Muavr ta'repinen tabı'lg'an;

1783 j. Laplas onı' 0 ha'm 1 den o'zgeshe qa'legen p ushi'n ulı'wmalastır'gan. Sonı'n' ushi'n ga'p etip atır'gan teoremani' geyde Muavr-Laplas teoremasi' dep te ataydı'.

Laplasti'n' lokallıq teoreması'nı'n' da'llileniwi a'dewir quramalı' bolg'anlıqtan onı'n' tek g'ana formulirovkası'n berip, mı'sal ko'rsetiw menen sheklenemiz.

Laplasti'n' lokallıq teoreması'. Eger A waqı'yası'nı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' p ha'r bir sı'nawda turaqlı' ha'm ol 0 ha'm 1 den o'zgeshe bolsa, onda A waqı'yası'nı'n' n sı'nawdı' da'l m ma'rtesinde ju'zege ası'w itimallı'g'ı' shama menen

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad (7.1)$$

funkciyası'nı'n' $X = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ bolg'andag'ı' ma'nisine ten' (n qanshelli u'lken bolsa, sonshelli da'l boladı').

Argument x tı'n' on' ma'nislerine sa'ykes keliwshi $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funkciyası'nı'n' ma'nisleri jaylastı'rı'lg'an tablicalar bar. $\varphi(x)$ funkciyası' jup funkciya bolg'anlıqtan, yag'nı'y $\varphi(-x) = \varphi(x)$, x tı'n' teris ma'nisleri ushı'n da tap sol tablicalardan paydalanamı'z.

Solay etip,

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{bunda} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Mı'salı': Eger A qı'yası'nı'n' ha'r bir sı'nawda ju'zege ası'w itimallı'g'ı' 0,2 ge ten' bolsa, 400 sı'nawdı'n' da'l 80 ma'rtesinde onı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı'n tabı'n'.

SHa'rt boyı'nsha n=400, m=80, p=0,2; q=0,8.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{4000,20,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$$

Tablicadan $\varphi(0) = 0,3989$ ekenin tabamı'z. Demek $P_{400}(80) = 0,04986$.

Eger de Bernulli formulası' boyı'nsha esaplasaq $P_{400}(80) = 0,0498$.

Meyli ja'ne n sı'naw ju'rgizilgen bolı'p, olardı'n' ha'r birinde A waqı'yası'nı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' p turaqlı' bolsı'n ($0 < p < 1$).

$P_n(m_1, m_2)$ itimallı'qtı', yag'nı'y A waqı'yası' n sı'nawda « m₁ den m₂ ge shekem » ju'zege asadı' degen itimallı'qtı' qalay esaplasa boladı'? Bug'an Laplasti'n' integrallıq teoreması' juwap beredi.

Laplasti'n' integrallıq teoreması': Eger A waqı'yası'nı'n' bir sı'nawdag'ı' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' p turaqlı' ha'm ol 0 ha'm 1 den o'zgeshe bolsa, onda $P_n(m_1, m_2)$ itimallıq shama menen mı'na anıq integraldı'n' ma'nisine ten':

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^I}^{x^{II}} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (7.2)$$

$$\text{bunda } x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ha'm} \quad x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Bul jerde de arnawlı' tablicalardan paydalanamı'z; tablica

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

funkciyası' ushı'n keltirilgen (bug'an Laplas funksiyası' delinedi). Tablicada $F(x)$ funksiya'sını'n' $x>0$ ha'm $x=0$ bolg'andag'ı' ma'nisleri berilgen; $x<0$ ushı'n da sol tablicadan ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ekenligin esapqa alı'p) paydalanamı'z.

Tablicadan paydalanı'w mu'mkin bolı'wı' ushı'n (7.2) an'latpanı' to'mendegishe tu'rlandiremiz:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^I}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^{II}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

Solay etip

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

$$\text{bunda } x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ha'm} \quad x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Mı'salı': Detaldı'n' texnikalı'q qadag'alow bo'liminen o'tpew itimallı'g'ı' $p=0,2$ ge ten'. Tosı'nnan alı'ng'an 400 detaldı'n' ishinde tekserilmegenleri 70 ten 100 ge shekem bolı'wı'nı'n' itimallı'g'ı'n tabı'n'. SHa'rt boyı'nsha $n=400$, $m_1=80$, $m_2=100$, $p=0,2$; $q=0,8$.

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

$$x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25$$

$$x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5$$

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

$$\text{Tablica boyı'nsha: } \Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

$$\text{Izlep atı'rg'an itimallı'q: } P_{400}(70, 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Puasson formulası'. Meyli g 'a'rezsiz n sı'nawlar ju'rgizilgen bolsı'n. Olardı'n' ha'r birinde A waqı'yası'nı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' p g 'a ten' bolsı'n. $P_n(m)$ itimallı'qtı' anı'qlaw ushı'n Bernulli formulası'nan paydalanamı'z.

Eger de n jeterli u'lken bolsa, onda Laplastı'n' asimptotalı'q formulası'nan paydalanamı'z. Biraq, eger de waqı'yanı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' ju'da' kishi (ma'selen $p<0,1$) bolsa, bul formula jaramsı'z. Bunday jag'daylarda (n u'lken, p kishi) Puassonni'n' asimptotikalı'q formulası'nan paydalang'an qolaylı'. Demek, mı'naday ma'seleni qaraymı'z: Sı'nawlar sanı' og'ada ko'p bolg'anda ha'm ha'r bir sı'nawda waqı'yanı'n' ju'zege ası'w itimallı'g'ı' ju'da' az bolsa, waqı'yanı'n' da'l m ma'rte ju'zege ası'w itimallı'g'ı'n tabı'w talap etiledi. Mı'na sha'rt orı'nlandsı'n dep uyg'aramı'z: np ko'beyme turaqlı' ma'nisin saqlası'n, yag'nı'y $np=\lambda$ bolsı'n.

Bizdi qı'zı'qtı'rı'wshı' itimallı'qtı' tabı'w ushı'n Bernulli formulası'nan paydalanamı'z:

$$\begin{aligned} P_n(m) &= C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-m) [n-(n-m)] \cdots (n-2)(n-1)n}{m! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-m)} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots [n-(m-1)]}{m!} \cdot p^m (1-p)^{n-m}. \end{aligned}$$

Bizde $np=\lambda$, yag'nı'y $p=\frac{\lambda}{n}$ bolg'anlı'qtan

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m)$ di tabayiq. Sonda $P_n(m) \approx$

$$\begin{aligned} &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}\right] = \\ &\frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Solay etip (a'piwayi'li'q ushi'n $\approx$ belgisin qaldi'rami'z)

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (7.3)$$

Bug'an Puasson formulasi' delinedi (massali'q (n u'lken) siyrek (p kishi) waqi'yalar itimallig'i').

Mi'sali': Zavod bazag'a 5000 si'patli' buyi'm jo'neltken. Jolda buyi'mni'n' za'lelleniw itimallig'i' 0,0002 ge ten'. Bazag'a 3 jaramsi'z buyi'mni'n' kelip tu'siwinin' itimallig'i'n tabi'n'.

SHa'rt boyi'nsha $n=5000$, $m=3$, $p=0,0002$. Onda $\lambda=np=5000 \cdot 0,0002=1$ Demek

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m=1,2,\dots$ itimalliq'larini'n' izbe-izligi Puasson bo'listiriliwi dep ataladi'.

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = 1 \text{ ekenligin an'sat ko'riwge boladi'}$$

Bekkemlew ushi'n sorawlar:

1. $f(x)$ funkciyasi'ni'n' asimptotikalig' juwi'qlasi'w'i' dep qasi' funkciyag'a ayti'ladi'?
2. Muavr-Laplas teoremasi'n ayti'n'.
3. Laplasti'n' lokallig' teoremasi', Laplasti'n' integrallig' teoremalari' qanday mag'anag'a iye?
4. Laplas funkciyasi'n jazip ko'rsetin'.
5. Puasson formulasi'n jazin'.

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Tosi'nnanli' shamalar. Bo'listiriw funkciyası' ha'm bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'» teması'na arnal'g'an bolı'p, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'ı' tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a terminge tiyisli mı'sallar keltirilgen.

8-lekciya (2s.)

Tosi'nnanli' shamalar. Bo'listiriw funkciyası' ha'm bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'

Tayanı'sh so'zler

Tosi'nnanli' shama, diskret tosi'nnanli' shama, u'zliksiz tosi'nnanli' shama, bo'listiriw nı'zami', bo'listiriw qatarı', Puasson bo'listiriwi, bo'listiriw funkciyası', binomial bo'listiriw, bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'.

Biz burı'n,yag'nı'y itimallı'qlar teoriyası'nı'n' tiykarg'ı' tu'siniklerin bayanlag'anı'mızda og'ada a'hmiyetli tu'sinik bolı'p esaplanatug'ı'n tosi'nnanli' shama tu'sinigin kiritken edik.

Ma'selen, kubikti taslag'anda 1,2,3,4,5,6 sanları'nan birewi shı'g'ı'wı' mu'mkin edi. Tosi'nnanli' sebeplerge baylanı'slı' shı'qqan ochkolardı'n' sanı'n aldı'n-ala anı'qlaw mu'mkin emes. Usı' mag'anada ochkolar sanı' tosi'nnanli' shama bolı'p esaplanadı'; 1,2,3,4,5,6 sanları' bul tosi'nnanli' shamanı'n' qabı'l etiwı' mu'mkin bolg'an ma'nisler bolı'p tabı'ladı'.

Tosi'nnanli' shama dep sı'naw na'tiyjesinde a'welden belgili bolg'an ma'nislerden anaw yamasa mı'naw ma'nisti tosinnan qabı'l etiwı' mu'mkin bolg'an shamag'a aytı'ladı'.

Mr'sallar:

1. U'sh ma'rtebe nı'shanag'a atqandag'ı' tiyiwler sanı';
2. Jan'adan tuwı'lg'an 100 na'restenin' ishinde er balalar sanı';
3. Bir sutka dawamı'nda telefon stanciyası'na kelip tu'sken shaqı'rı'qlar sanı'.

Bul keltirilgen mı'sallardı'n' u'shewinde de tosi'nnanli' shamaları'mız sanap shı'g'ı'wg'a bolatug'ı'n bo'lek-bo'lek ma'nislerdi qabı'l etedi. Bunday tosi'nnanli' shamalarg'a diskret yamasa u'zilikliz tosi'nnanli' shamalar delinedi.

Basqa tu'rdegi tosi'nnanli' shamalar da ushı'rasadı', ma'selen: 1.Deneni analitikalı'q ta'rezide o'lshegendegi qa'telik;2.uslı'w apparatı'nı'n' berilgen biyiklikke ko'terilgen momenttegi tezligi.

Bunday tosi'nnanli' shamalardı'n' qabı'l etiwı' mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazı'-bir aralı'qtı' toltı'radı'. Bunday tosi'nnanli' shamalarg'a u'zliksiz tosi'nnanli' shamalar delinedi. Solay etip:

Diskret tosi'nnanli' shama dep, onı'n' qabı'l etiwı' mu'mkin bolg'an ma'nislerin sanap shı'g'ı'w yamasa nomerlep shı'g'ı'w mu'mkin bolg'an shamag'a aytı'ladı'.

U'zliksiz tosi'nnanli' shama dep, onı'n' qabı'l etiwı' mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazı' bir shekli yamasa sheksiz aralı'qtı' u'zliksiz toltı'ratug'ı'n sh aytı'ladı'.

Tosi'nnanli' shamalardı' $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ha'ripleri menen, mu'mkin bolg'an ma'nislerin $x, y, z, \dots$ ha'ripleri menen belgileyemiz. Ma'selen, eger de ξ - u'sh ma'rte atqandag'ı' tiyiwler sanı'n an'latsa, onda onı'n' mu'mkin bolg'an ma'nisleri: $x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3$ boladı'.

Meyli diskret ξ tosi'nnanli' shaması' berilgen bolı'p, ol $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma'nislerden birewin qabı'llası'n, yag'nı'y ju'p-juptan birgeliksiz waqı'yalardı'n' tolı'q gruppası'n asaytug'ı'n:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x_1, \\ \xi &= x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi &= x_n \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Waqı'yalardan birewi ju'zege assı'n. Bul waqı'yalardı'n' itimallı'qları'n sa'ykes indeksli p lar menen belgileyik: $P\{\xi = x_1\} = p_1, P\{\xi = x_2\} = p_2, \dots, P\{\xi = x_n\} = p_n$.

Biregliksiz (9.1) waqı'yaları', waqı'yalardı'n' tolı'q gruppası'n jasag'anlı'q tan

$$\sum_{i=1}^n P\{\xi = x_i\} = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Bul qosı'ndı' itimallı'q tosi'nnanli' shamanı'n' (dara) x_i ma'nisleri boyı'nsha qanday da bir jollar menen bo'listirilip, taratılı'p turadı'.

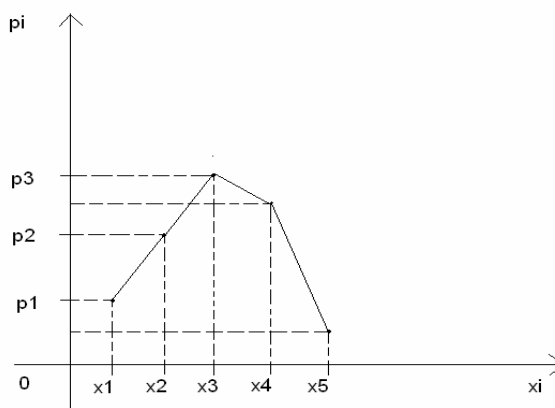
Tosi'nnanli' shamanı'n' bo'listiriw nı'zamı' dep tosi'nnanli' shamanı'n' ma'nisleri menen olarg'a sa'ykes itimallı'qlardı' baylanı'stı'rı'wshı' qa'dege aytı'ladı'.

Tosi'nnanli' shama'g'a usı' nı'zam'g'a boysı'nadı' dep ataymız. Bul nı'zam tablicalı'q, grafikalı'q ha'm analitikalı'q usı'llarda beriliwi mu'mkin.

ξ	x_1	x_2	x_3		x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Bunday tablicag'a tosi'nnanli' ξ shaması'nı'n' bo'listiriw qatarı' delinedi. Bo'listiriw qatarı'n anı'g'ı'raq ko'z aldı'mız'g'a keltiriw ushı'n onı'n' grafigin sı'zg'an qolaylı' boladı':



4-su'wret.

Binomial bo'listiriw, Puasson bo'listiriwleri bo'listiriw nı'zamı'nı'n' analitikalı'q usı'lda beriliwi bolı'p esaplanadı'.

Mı'salı': Atqı'sh nı'shag'a 3 ma'rte oq atadı'. Ha'r bir atqandag'ı' nı'shanag'a tiyiw itimallı'g'ı' 0,4 ke ten'. Ha'r bir tiygizgeni ushı'n atı'wshı'g'a 5 ochko jazı'ladı'. Payda bolg'an ochkolardı' bo'listiriliw qatarı'n du'zin'.

x_i	0	5	10	15
P	0,9'a'6	0,432	0,288	0,064

Bo'listiriv funkciyasi'. U'zliksiz tosi'nnanli' shama bazı' bir aralı'qtı' tutas toltı'rı'wshı' sheksiz ko'p (sanaqsı'z ko'plik) mu'mkin bolg'an ma'nislerge iye. Bunday tosi'nnanli' shamalar ushı'n tablica (bo'listiriv qatarı'n) du'ziw mu'mkin emes.

Tosi'nnanli' ξ shaması'nı'n bo'listiriv funkciyası' dep

$$F(x) = P\{\xi < x\} \quad (8.2)$$

funkciyag'a aytı'ladi'. Bo'listiriv funkciyası' tosi'nnanli' shamanı'n' universal xarakteristikası' bolı'p tabı'ladi'. Ol barlı'q tosi'nnanli' shamalar ushı'n bar boladı'. Onı'n' bazı' bir qa'siyetlerin keltireyik:

1. $F(x)$ kemeymeytug'ı'n funkciya, yag'nı'y $x_1 > x_2$ bolg'anda $F(x_1) \geq F(x_2)$
2. $F(-\infty) = 0$.
3. $F(+\infty) = 1$

Eger de ξ diskret tosi'nnanli' shama bolsa, onda ol shekli yamasa sheksiz ko'p ma'nislerdi qabı'llaydı' ha'm onı'n' ha'r bir x_i ma'nisti qabı'l etiw itimallı'g'ı' $P\{\xi = x_i\} = p_i$ boladı'. Sonlı'qtan $F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i$.

Mı'salı': Tosi'nnanli' ξ shaması' bir ma'rte oq atqanda tiyiwler sanı' bolı'p, nı'shanag'a tiyiw itimallı'g'ı' 0,3 ke ten'. Onı'n' bo'listiriv funkciyası'n du'zin' ha'm grafigin jasan'.

Bo'listiriv qatarı' mı'na ko'riniste boladı':

x_i	0	1
p	0,7	0,3

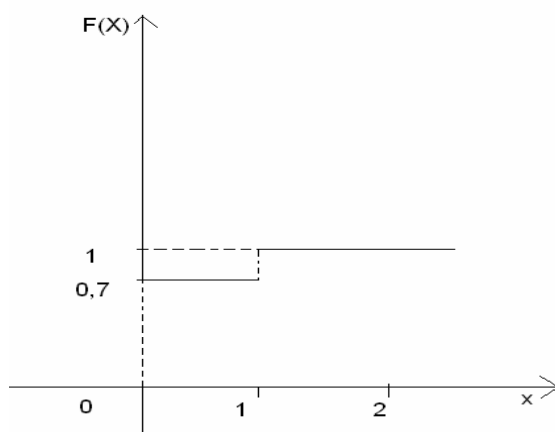
Tosi'nnanli' ξ shaması'nı'n bo'listiriv funkciyası'n anı'qlayı'q:

$x \leq 0$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = 0$;

$0 < x \leq 1$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0,7$;

$x > 1$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 1$

Bo'listiriv funkciyası'nı'n grafigi mı'na su'wrette ko'rsetilgendey:



5-su'wret.

Bo'listiriv ti'g'ı'zlı'g'ı'. Tosi'nnanli' ξ shaması'nı'n bo'listiriv funkciyası'n bilgen jag'dayda onı'n' $\alpha < \xi < \beta$ ten'sizliklerdi qanaatlardı'rı'wshı' itimallı'g'ı'n tabı'wg'a boladı'. Itimallı'qlardı' qosı'w teoreması' boyı'nsha

$$P\{\xi < \beta\} = P\{\xi < \alpha\} + P\{\alpha \leq \xi < \beta\}.$$

Bunnan

$$P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = P\{\xi < \beta\} - P\{\xi < \alpha\},$$

yamasa

$$P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha).$$

Bul ten'likten $P\{\xi = \alpha\}$ itimallı'qtı' tabı'wg'a boladı'.

$$P\{\xi = \alpha\} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]$$

Eger $F(x)$ funkciya u'zliksiz bolsa, aqı'rg'ı' shek nolge ten'. Demek,

$$P\{\xi = \alpha\} = 0.$$

Tosı'nnanlı' shamanı'n' bo'listiriw funkciyası' u'zliksiz bolsa, onda tosı'nnanlı' shamanı'n' qa'legen bo'lek bir ma'nisti qabı'l etiw itimallı'g'ı' nolge ten' boladı'.

Bo'listiriw funkciyası'nı'n tuwı'ndı'sı'

$$f(x) = F'(x) \quad (8.3)$$

bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı' yamasa bo'listiriwdin' differenciallı'q funkciyası' delinedi.

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

yamasa

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

ten'likti jaza alamı'z. Bizde

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Sunday-aq, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ ekenligi kelip shı'g'adı'. Bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'

mı'naday qa'siyetlerge boysı'nadı':

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\text{Mı'salı: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = ?, \quad a = ?, \quad P\{0,25 < \xi < 0,5\} = ?$$

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Tosı'nnanlı' shama dep qanday shamg'a aytamı'z?
2. Diskret tosı'nnanlı' shama dep qanday tosı'nnanlı' shamalarg'a aytı'ladı'?
3. U'zliksiz tosı'nnanlı' shamanı'n' anı'qlaması'n keltirin'.
4. Bo'listiriw nı'zamı' dep nege aytı'ladı'?
5. Bo'listiriw qatarı' degenimiz ne?
6. Puasson bo'listiriwin jazı'p ko'rsetin'.
7. Bo'listiriw funkciyası' dep nege aytamı'z ha'm onı'n' formulası' qanday?
8. Bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı' degenimiz ne ha'm onı' qanday anı'qlaymı'z?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Tosi'nnanli' shamalardi'n' sanli' xarakteristikaları' ha'm olardi'n' qa'siyetleri» temasi'na arnalg'an bol'p, lekciyada tiykarg'i' tu'sinikler ani'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temani' tu'siniw ushi'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i' tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mı'sallar keltirilgen.

9-lekciya (2s.)

Tosi'nnanli' shamalardi'n' sanli' xarakteristikaları' ha'm olardi'n' qa'siyetleri

Tayani'sh so'zler

Matematikalı'q ku'tiliw, dispersiya, orta kvadratlı'q awı'sı'w.

Praktikanı'n' ko'pshilik ma'selelerinde tosi'nnanli' shamani' tolı'q xarakterlew sha'rt bolmay, al onı'n' tek g'ana ayrı'm sanli' parametrlerin ko'rsetiw jetkilikli boladı'. Bunday xarakteristikaları' tosi'nnanli' shamani'n' sanli' xarakteristikaları' delinedi.

Meyli ξ -diskret tosi'nnanli' shama bolı'p, onı'n' qabıl' etiwı mu'mkin bolg'an ma'nisleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olardı' qabıl' etiw itimallı'qları' $p_1, p_2, \dots, p_n$ bolsı'n.

Tosi'nnanli' ξ shaması'nı'n' matematikalı'q ku'tiliwi dep

$$M\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (9.1)$$

sani'na aytı'ladı'. Diskret tosi'nnanli' shamani'n' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' sani' sheksiz bolı'wı' da mu'mkin. Bul jag'dayda

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (9.2)$$

Bunda (10.2) qatardı' absolyut ji'ynaqlı' dep uyg'arı'ladı'.

Bo'listiriw ti'g'ı'zlı'g'ı' $f(x)$ bolg'an u'zliksiz tosi'nnanli' ξ -shaması'nı'n' matematikalı'q ku'tiliwi dep

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (9.3)$$

sani'na aytı'ladı'. Bunı' bı'lay jazı'wg'a da boladı':

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (9.4)$$

Mı'sallar:

1. Meyli ξ shaması' $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma'nislerdi $\frac{1}{n}$ itimallı'q penen qabıl' etsin. Onda

$$M\xi = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} \quad f(x)=? \quad M\xi = ?$$

3. Meyli ξ shaması' $[a;b]$ aralı'qta ten' o'lsheqli bo'listirilgen bolsı'n. Onda

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases} \quad M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Endi matematikalı'q ku'tiliwdin' bazı' bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $MC=C$, C -turaqlı' san.

2. $M(C\xi)=CM\xi$

3. Eki g'a'rezsiz tosi'nnanlı' shamani'n' ko'beymesinin' matematikalı'q ku'tiliwi olardı'n' matematikalı'q ku'tiliwlerinin' ko'beymelerine ten':

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$$

4. Eki tosi'nnanlı' shamani'n' qosı'ndı'sı'nı'n' matematikalı'q ku'tiliwi, qosı'lı'wshı'lardı'n' matematikalı'q ku'tiliwlerinin' qosı'ndı'sı'na ten':

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$$

5.

$$M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$$

Bul qa'siyetlerdin' durı'slı'gı'n tekseriw oqı'wshı'lardı'n' o'zlerine usı'nı'ladı'.

Meyli ξ -tosi'nnanlı' shama, al $M\xi$ -onı'n' matematikalı'q ku'tiliwi bolsı'n.

$\xi - M\xi$ ayı'rmag'a tosi'nnanlı' shamani'n' o'zinin' matematikalı'q ku'tiliwinen awı'sı'wı' dep ataladı'. Awı'sı'wdı'n' matematikalı'q ku'tiliwi nolge ten':

$$M(\xi - M\xi) = 0$$

Praktikada ko'pshilik jag'daylarda tosi'nnanlı' shamani'n' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' o'zinin' orta ma'nisi do'gereginde shashı'ran'qı'lı'gı'n bahalaw talap etiledi.

Tosi'nnanlı' shamani'n' dispersiyası' dep, bul tosi'nnanlı' shamani'n' onı'n' matematikalı'q ku'tiliwinen awı'sı'wı'nı'n' kvadratı'nı'n' matematikalı'q ku'tiliwine aytı'ladı':

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (9.5)$$

Eger de $M\xi = m$ desek, onda

$$D\xi = M(\xi - m)^2$$

Solay etip, eger de ξ diskret tosi'nnanlı' shama bolsa, onda

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m)^2 p_k, \quad (9.6)$$

al eger de ξ bo'listiriw tı'g'ı'zlı'gı' f(x) bolg'an u'zliksiz tosi'nnanlı' shama bolsa, onda

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (9.7)$$

Geyde tosi'nnanlı' ξ shaması'nı'n' dispersiyası'n to'mendegi formula boyı'nsha esaplag'an qolaylı' boladı'.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (9.8)$$

Endi dispersiyanı'n' bazı' bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $DC=C$, C -turaqlı' san.

2. $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$

3. Eki g'a'rezsiz tosi'nnanlı' shamani'n' qosı'ndı'sı'nı'n' dispersiyası' bul shamalardı'n' dispersiyaları'nı'n' qosı'ndı'sı'na ten':

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

4. Eger de ξ ha'm η lar g'a'rezsiz tosi'nnanlı' shamalar bolsa,

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$$

Bul qa'siyetlerdin' durı'slı'gı'n tekseriw oqı'wshı'lardı'n' o'zlerine usı'nı'ladı'.

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} \quad (9.9)$$

-orta kvadratlı'q awı'sı'w delinedi.

Mr'sallar:

1. Tosı'nnanlı' ξ shaması' to'mendegi bo'listiriw nı'zımı' menen berilgen:

ξ	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Matematikalı'q ku'tiliwin, dispersiyası'n ha'm orta kvadratlı' awı'sı'wı'n tabı'n'. Dispersiyadan alı'ng'an kvadrat koreng'e orta kvadratlı' awı'sı'w yamasa standart awı'sı'w dep ataladı'

$$\text{yag'ni'y } \sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$$

$$M\xi = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 - (6,4)^2 = 54 - (6,4)^2 = 13,04$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = \sqrt{13,04} \approx 3,61$$

2. Meyli ξ shaması' [a;b] aralı'qta ten'o'lsheqli bo'listirilgen bolsı'n. $M\xi = \frac{a+b}{2}$ bolg'anlı'qtan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Matematikalı'q ku'tiliw dep nege aytamı'z ha'm onı'n' formulası'n jazı'p ko'rsetin'.
2. Tosı'nnanlı' shamanı'n' dispersiyası' dep qanday shamag'a aytamı'z ha'm onı'n' formulası'nı'n' ko'rinishi qanday?
3. Oрта kvadratlı'q awı'sı'w dep nege aytamı'z?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Bazi bir a'h'miyetli bo'listiriwler h'a'm olardin' sanli xarakteristikaları» teması'na arnalg'an bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Ha'r bir bo'listiriwdin' anıqlaması h'a'm olardı'n' sanli xarakteristikaları esaplap ko'rsetilgen. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mı'sallar keltirilgen.

10-lekciya (2s.)

Bazi bir a'h'miyetli bo'listiriwler h'a'm olardin' sanli xarakteristikaları

Tayanı'sh so'zler

Binomial bo'listiriw, ten' o'lsheмли bo'listiriw, Puasson bo'listiriwi, ko'rsetkishli bo'listiriw , normal bo'listiriw .

1. Binomial bo'listiriliw

Bernulli sxemasında tosınnanlı ξ shaması ha'r birinde A waqıyasının` ju`zege asıw itimallıg'ı birdey ha'm p g'a ten` bolg'an  $n$  g'a'rezsiz sınawda bul waqıyanın` ju`zege asıwlar sanın an`latsın.

Bul jag`dayda,

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (10.1)$$

yag`nıy  $\xi$  shama binomial bo'listiriliwge iye. Tosınnanlı  $\xi$  shamasının` bo'listiriliw qatarı

X	0	1	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

ko`riniste bolıp,

$$q^n + npq^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + p^n = (p + q)^n = 1$$

ekenligi ayqın.

Binomial bo'listirilgen tosınnanlı ξ shamasın ha'r birinde A waqıyanın` ju`zege asıw itimallıg'ı p g'a ten` bolg'an g'a'rezsiz  $n$  sınawda ju`zege asıwlar sanı dep qaraw mu'mkin bolg'anlıg'ı ushın onı g'a'rezsiz tosınnanlı shamalardıń qosındısı ko`rinisinde to`mendegishe an`latamız:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

bul jerde X_i -usı A waqıyasının`  $i$ - sınawda ju`zege asıw sanı ($i = 1, 2, \dots, n$). Bizde

$$MX_i = p, \quad DX_i = pq \text{ bolg'anlıg'ı ushın}$$

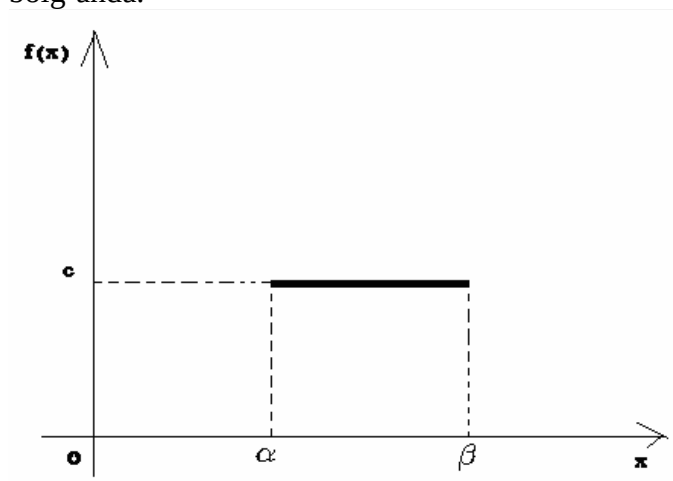
$$\begin{aligned}
 M\xi &= M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \\
 &= M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = p + p + \dots + p = np, \\
 D\xi &= D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \\
 &= D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n = pq + pq + \dots + pq = npq, \\
 \sigma_\xi &= \sqrt{npq}.
 \end{aligned}$$

2. Ten`o`lshewli bo`listiriw

Tosinnanli ξ shaması (a, b) aralıqta ten`o`lshewli bo`listirilgen delinedi, eger de onnı bo`listiriw tıg`ızlıg`ı to`mendegi formula menen anıqlansa:

$$f(x) = \begin{cases} c, & \alpha < x < \beta \\ 0, & x < \alpha \text{ ha'm } x > \beta \end{cases} \quad (10.2)$$

bolg`anda.



13-su`wret.

Bizde bo`listiriw tıg`ızlıg`ının belgili qa`siyeti boyınsha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

yamasa

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Demek,

$$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = 1$$

yag`nıy

$$c(\alpha - \beta) = 1,$$
$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Solay etip,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & x < \alpha \text{ ha'm } x > \beta \end{cases} \quad (10.3)$$

bolg`anda.

(4.1) formula ten` o`lshewli tug`izlıq nızamın an`latadı.

Bo`listiriw tug`izlıg`ı  $f(x)$  boyınsha bo`listiriw funktsiyası $F(x)$ tı anıqlayıq.

Eger $x < a$ bolsa, onda

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0;$$

$a < x < b$ bolg`anda

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t) dt + \int_{\alpha}^x f(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^x \frac{dt}{\beta - \alpha} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}; \end{aligned}$$

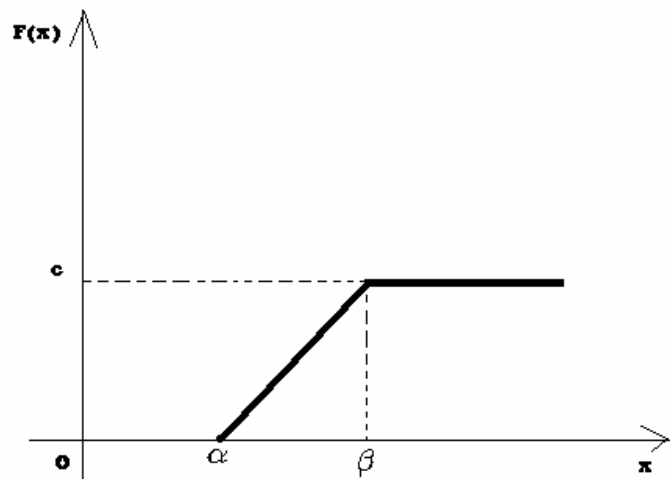
$x > b$ bolg`anda

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \int_{\beta}^x f(t) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\beta - \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Demek,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$

bolg`anda.



6-su`wret.

Endi (a, b) aralıqta ten` o`lshewli bo`listirilgen tosinnanlı  $\xi$  shamasının` tiykarg`ı sanlı xarakteristikaların anıqlayıq.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\begin{aligned} D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} dx - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta - \alpha)} - \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}.$$

Ten` o`lshewli tıg`ızlıq nızamı praktikada ko`p qollanıladı, ma`selen, poezdı ku`tiw waqtı ten` o`lshewli bo`listirilgen tosinnanlı shama bolıp esaplanadı.

3. Puasson bo`listiriwi

Eger tosinnanlı ξ shama $0, 1, 2, \dots, m, \dots$ ma`nislerdi

$$P\{\xi = m\} = p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

(10.4)

itimallıqlar menen qabıl qılsa, yag`nıy onın` bo`listiriliwi

x	0	1	2	. . .	m	. . .
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	. . .	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	. . .

ko`riniste bolsa, onda ol Puasson nizamı boyınsha bo`listirilgen dep ataladı.

Endi Puasson nizamı boyınsha bo`listirilgen tosinanlı  $\xi$  shamasının` tiykarg`ı sanlı xarakteristikaların anıqlayıq.

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} = \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \\
 D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} - \lambda^2.
 \end{aligned}$$

Bul jerde

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1) + 1] \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \\
 &+ \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.
 \end{aligned}$$

Demek,

$$\begin{aligned}
 D\xi &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \\
 \sigma_{\xi} &= \sqrt{D\xi} = \sqrt{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Solay etip,

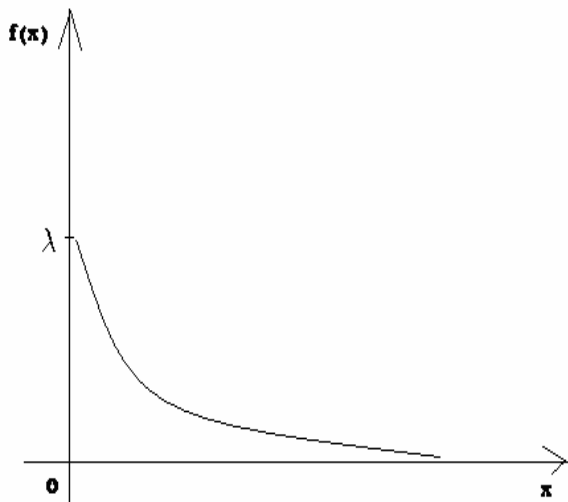
$$M\xi = D\xi = \lambda, \quad \sigma_{\xi} = \sqrt{\lambda}.$$

4. Ko`rsetkishli bo`listiriw

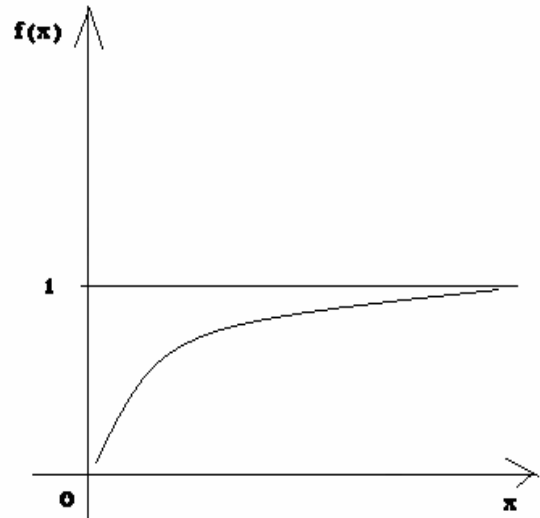
Bo`listiriw tug`ızlıg`ı

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x < 0 \text{ bolsa,} \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa} \end{cases} \quad (10.5)$$

ko`riniske iye bolg`an tosinnanli ξ shaması ko`rsetkishli bo`listiriwge iye delinedi, bul jerde λ - bazı bir on`san (15-su`wret).



7-su`wret.



8-su`wret.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

sha`rtinin` orinlanatug`ının tekseriyik. Haqıyqattan da,

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Ko`rsetkishli bo`listiriwdin` bo`listiriw funksiyaşının` to`mendegi ko`riniste ekenin tekseriw qıyın emes:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{eger } x < 0 \text{ bolsa,} \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa} \end{cases}$$

(16-su`wret).

Endi ko`rsetkishli bo`listiriwdin` tiykarğ`ı sanlı xarakteristikaların anıqlayıq.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Bo`leklep integrallaw qa`desin qollanıp ha`m  $u=x, dv=e^{-\lambda x} dx$  dep alıp, to`mendegige iye bolamız:

$$M\xi = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Solay etip,

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bo`leklep integrallaw qa`desin eki ma`rte qollang`annan keyin to`mendegini hasil etemiz:

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Onda

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\lambda}.$$

5. Normal` bo`listiriw

Bo`listiriwdin` normal` yamasa Gauss nızamı itimallıqlar teoriyasında ha`m onın` qollanılıwında ayırıqsha orındı iyeleydi. Onın` basqa nızamlardan ayırmashılıg`ı – bazı bir sha`rtler orınlang`anda basqa bo`listiriw nızamları juwıqlanatuğ`ın sheklik nızam bolıp tabıladı.

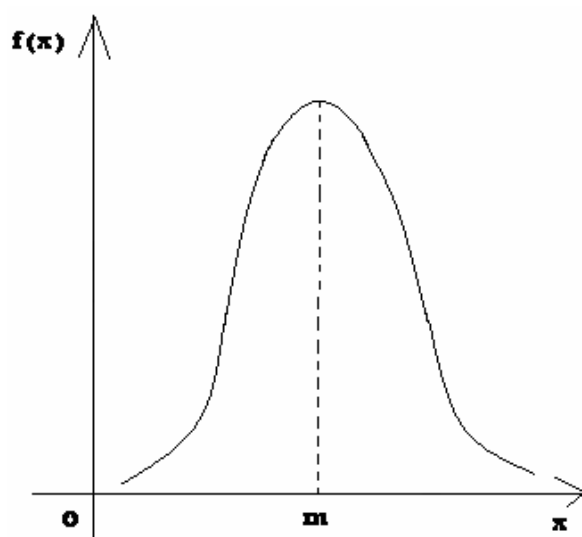
Tosınnanlı ξ shamasının` bo`listiriw tıg`ızlıg`ı

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (10.6)$$

ko`riniste bolsa, ol normal` nızam boyınsha bo`listirilgen dep ataladı. Bundayg`ı m - matematikalıq ku`tiliw,  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) - orta kvadratlı awısıw dep atalatug`ın parametrler.

$f(x)$ funksiyaının` grafigi normal` iymek yamasa Gauss iymegi dep ataladı. Ol du`mpeshik ko`riniske iye bolıp, $x = m$ noqatqa sa`ykes keliwshi iymektin` maksimal`

ordinatası $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$ ge ten` boladı.



9-su`wret.

$f(x)$ funktsiyası mınaday qa`siyetlerge iye:

1⁰. $f(x)$ funktsiyası pu`tkil  $Ox$  ko`sheri boyında anıqlang`an.

2⁰. x tın` qa`legen ma`nisinde  $f(x)$  funktsiyası ha`mme waqıt on` boladı, sonın` ushın da onın` grafigi  $Ox$  ko`sherinin` joqarısında jaylasqan (17-su`wret).

3⁰. Ox ko`sheri  $f(x)$  funktsiyasının` grafiginin` gorizontal` asimptotası boladı, sebebi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

4⁰. $f(x)$ funktsiyasının` grafigi $x = m$ tuwrısına qarata simmetriyalı.

5⁰. $f(x)$ funktsiyasının` grafiginin` iyiliw noqatları $\left(m - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ ha`m

$\left(m + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ noqatları ekenin $f(x)$ tın` ekinshi ta`rtipli tuwındısın alıp, onı nol`ge ten`lestiriw arqalı anıqlawg`a boladı.

6⁰. Parametr m nin` o`zgeriwi normal` iymektin` formasın o`zgertpeydi, tek  $m$  nin` ma`nisine baylanıslı grafiktin` on`g`a qaray (m o`skende) ha`m solg`a qaray (m kemigende) jılıwın bayqaymız.

7⁰. Parametr σ nın` o`zgeriwi normal` iymektin` formasın o`zgertedi,  $\sigma$  o`skен sayın normal` iymek ordinatasının` kemiwin, yag`nıy normal` iymektin` jalpayıwın, al  $\sigma$  kemigen sayın normal` iymek ordinatasının` o`siwin, yag`nıy normal` iymektin` sopaq ko`riniske iye bolıwın bayqaymız.

8⁰. m menen σ nın` ha`r qanday ma`nislerinde normal` iymegi menen ha`m  $Ox$  ko`sheri menen shegaralang`an maydan ha`mme waqıt 1 ge ten`, yag`nıy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Haqıyqattan da,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

Sebebi, eger $\frac{x-m}{\sigma} = z$ dep almastırsaq, onda $dx = \sigma dz$ ha'm $x = -\infty$ bolg'anda

$z = -\infty$, al $x = +\infty$ bolg'anda $z = +\infty$ boladı. Bul ma'nislerdi integralg'a qoysaq jetkilikli. Bundag'ı $\Phi(x)$ Laplas funktsiyası, yag'nıy

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

9⁰. Bo'listiriv funktsiyası

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Haqıyqattan da,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Eger $\frac{z-m}{\sigma} = t$ dep o'zgeriwshini almastırsaq, onda

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

10⁰. Normal nızam boyınsha bo'listirilgen tosınnanlı ξ shamasının (α, β) aralıqqa tu'siw itimallıg'ı

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

formulası menen esaplanadı. Bunın durıslıg'ı

$$P\{\alpha < x < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$$

ten'likten kelip shıg'adı.

Eger $\alpha = m - 3\sigma$, $\beta = m + 3\sigma$ desek, onda

$$P\{m - 3\sigma < \xi < m + 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Bul tastıyqlawdı u'sh sigma qa'desi dep ataydı, yag'nıy normal nızamg'a boysınıwshı tosınnanlı shamanın $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ aralıg'ınan shıqpawın qa'legenshe 1 ge (0,9973) jaqın itimallıq penen ayta alamız.

Endi normal bo'listirivdin tiykarg'ı sanlı xarakteristikaların anıqlayıq.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Eger $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$ dep o'zgeriwshini almasirsaq to'mendegige iye bolamiz:

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma\sqrt{2}t + m)e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Bundag'i birinshi integral nol'ge ten', al ekinshisi bizge belgili Eyler-Puasson integralın an'latadı:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Demek,

$$M\xi = m,$$

Yag'niy m -parametr tosinanlı ξ shamasının matematikalıq ku'tiliwin an'latadı eken.

Tosinnalı ξ shamasının dispersiyasın anıqlayıq:

$$D\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ja'ne $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$ dep o'zgeriwshini almasirsaq to'mendegige iye bolamiz:

$$D\xi = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Bul integraldı bo'leklep integrallayıq. Sonda

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2t e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ -te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right\}.$$

Bundag'i figuralı skobkadag'i birinshi qosılıwshı nol'ge ten', al ekinshi qosılıwshı $\sqrt{\pi}$ ge ten'. Demek,

$$D\xi = \sigma^2.$$

Solay etip, σ -parametr tosinanlı ξ shamasının orta kvadratlı awısıwın an'latadı eken.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Binomial bo'listiriwdin' analitikalı'q ko'rinsin jazı'p berin'.
2. Ko'rsetkishli bo'listiriwdin' tı'g'ı'zlı'q funkciyası' qanday jazı'ladı'?
3. Puasson bo'listiriwdin' analitikalı'q ko'rinsin jazı'p berin'.
4. Ten' o'lsheimli bo'listiriwdin' tı'g'ı'zlı'q funkciyası'n jazı'n'.
5. Normal nı'zam ha'm onı'n parametrlerge baylanı'slı' tı'g'ı'zlı'q funkciyası'n jazı'n'.

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Tosınnanlı shamalardıń momentleri» teması'na arnalǵ'an bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anıqlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalıq analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz, analitikaliq geometriya (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolıq tanısqan bolıwları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mı'sallar keltirilgen.

11-lekciya (2s.) Tosınnanlı shamalardıń momentleri

Tayanı'sh so'zler

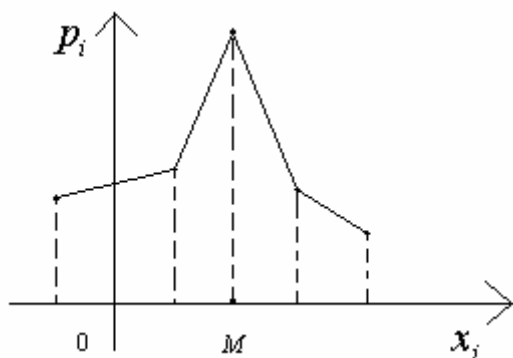
Moda, mediana, baslang'ı'sh moment, oraylıq moment, asolyut baslang'ı'sh moment, asolyut oraylıq moment

Tosınnanlı shamanın' en' a'hmiyetli xarakteristikaları bolǵ'an matematikalıq ku'tiliw ha'm dispersiyadan tısqarı basqa xarakteristikalarǵ'a da, ma'selen tosınnanlı shamanın' *modası* ha'm *medianası* xarakteristikaları da qollanıladı.

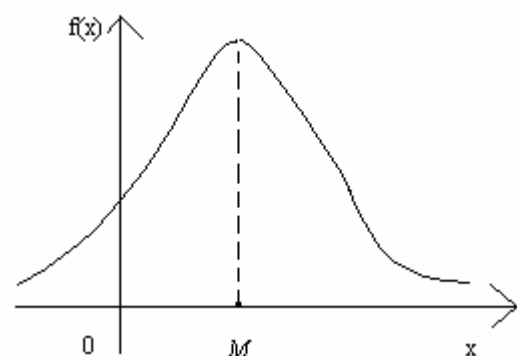
Tosınnanlı shamanın' *modası* dep, onıń en' ko'p itimallıqqa iye ma'nisine aytıladı.

«En' ko'p itimallıqqa iye ma'nisi» termini qatal aytqanda diskret tosınnanlı shamalarg'a tiyisli; u'zliksiz tosınnanlı shamalar bolǵ'an jag'dayda bo'listiriw tıǵ'ızlıǵı maksimal bolatug'ın ma'nisine aytıladı.

Modanı M ha'ribi menen belgilewdi sha'rtlesemiz. X_i



10-su'wret

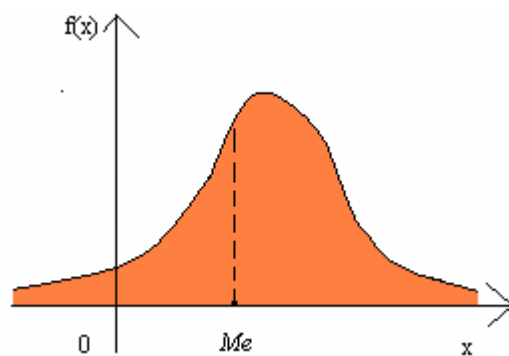


11-su'wret

Eger bo'listiriw ko'pmu'yeshligi (bo'listiriw iymegi) birewden artıq maksimumǵ'a iye bolsa, onda bo'listiriwge «polimodal'lıq» delinedi.

Tosınnanlı ξ shamasının' *medianası* dep, onıń sonday Me ma'nisine aytılıp, bul ma'nis ushın

$$P\{\xi < Me\} = P\{\xi > Me\} \quad (11.1)$$



12-su'wret

Basqasha aytqanda, bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x)$ bolg'an tosınnanlı ξ shamasının Me medianası mına ten'lik penen anıqlanadı:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \quad (11.2)$$

Tosınnanlı shamanın tiykarg'ı sanlı xarakteristikaların uılıwmalasqan jag'dayı sıpatında *momentler* tu'sinigi kiritiledi.

Moment tu'sinigi massanın bo'listiriliwin su'wretlew ushın mexanikada ken` qollanıladı (statikalıq momentler, inertsiya momentleri ha'm t.b.). Tap usı sıyaqlı tosınnanlı shamanın bo'listiriliwinin tiykarg'ı qa'siyetlerin su'wretlew ushın itimallıqlar teoriyasında da momentler jiyyı paydalanıladı.

Itimallıqlar teoriyasında eki tu'rdegi momentler qollanıladı: baslang'ısh ha'm oraylıq momentler.

Tosınnanlı ξ shamanın S -shi ta'rтіpli baslang'ısh momenti dep, ξ^s shamanın matematikalıq ku'tiliwine ayıladı:

$$\alpha_s = M\xi^s \quad (11.3)$$

Diskret tosınnanlı ξ shaması ushın

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i \quad (11.4)$$

U'zliksiz tosınnanlı ξ shaması ushın

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx \quad (11.5)$$

bunda

$$\alpha_1 = M\xi \quad (11.6)$$

ekenligi ayqın.

Tosınnanlı ξ shamanın S -shi ta'rтіpli oraylıq momenti dep, $(\xi - M\xi)^s$ shamanın matematikalıq ku'tiliwine ayıladı:

$$\mu_s = M(\xi - m_\xi)^s \quad (11.7)$$

bunda $m_\xi = M\xi$

Diskret tosınnanlı ξ shaması ushın

$$\mu_s = \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^s p_i \quad (11.8)$$

U'zliksiz tosınnanlı ξ shaması ushın

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)^s f(x)dx \quad (11.9)$$

Qa`legen tosınnanlı  $\xi$  shaması ushın birinshi ta`rtipli oraylıq momenttin` nol`ge ten` ekenligin ko`rsetiw qıyın emes. Haqıyqattan da,

$$\mu_1 = M(\xi - m_\xi) = M\xi - m_\xi = m_\xi - m_\xi = 0.$$

Ekinshi ta`rtipli oraylıq moment dispersiyanı beredi:

$$\mu_2 = M(\xi - m_\xi)^2 = D\xi.$$

Itimallıqlar teoriyasında u`shinshi ha`m to`rtinshi ta`rtipli oraylıq momentler de qollanıladi.

Joqarıda qarastırğ`an baslang`ısh ha`m oraylıq momentlerden tısqarı geyde praktikada absolyut momentler de (baslang`ısh ha`m oraylıq) qollanıladi.

Tosınnanlı ξ shamasının`  $S$ -ta`rtipli absolyut baslang`ısh momenti

$$\beta_s = M|\xi|^s, \quad (11.10)$$

al S -ta`rtipli absolyut baslang`ısh momenti

$$\nu_s = M|\xi - m_\xi|^s \quad (11.11)$$

formulaları menen anıqlanadi.

Absolyut momentlerden ko`birek qollanılaturğ`ını birinshi ta`rtipli absolyut oraylıq moment

$$\nu_1 = M|\xi - m_\xi| \quad (11.12)$$

bolıp, og`an orta arifmetikalıq awısıw dep ataladı. Dispersiya ha`m orta kvadratlı awısıw menen bir qatarda orta arifmetikalıq awısıw geyde shashılıw xarakteristikası sıpatında qollanıladi.

1-mısal. Bir sınav ju`rgizilip, na`tiyjede A waqıyası ju`zege asıwı da, ju`zege aspawı da mu`mkin.  $A$  waqıyasının` ju`zege asıw itimallıg`ın p deyik. Tosınnanlı ξ shaması A waqıyasının` ju`zege asıwlar sanın an`latsın. Usı tosınnanlı shamanın` matematikalıq ku`tiliwin, dispersiyan, orta kvadratlı awısıwın anıqlaw talap etiledi.

Sheshiliwi. Tosınnanlı ξ shamasının` bo`listiriw qatarı to`mendegi ko`riniske iye:

x_i	0	1
p_i	q	p

bunda $q = 1 - p$ A waqıyasının` ju`zege aspaw itimallıg`ı.

$$M\xi = m_\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

$$D\xi = D_\xi = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq,$$

bunnan

$$\sigma_\xi = \sqrt{pq}.$$

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Baslang`ı'sh moment dep nege aytamı'z?
2. Oraylı'q moment dep nege aytamı'z?
3. Asolyut baslang`ı'sh moment dep nege aytamı'z?
4. Absolyut oraylı'q moment dep nege aytamı'z?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Normal bo'listiriv nı'zami'nı'n' joqarı' ta'rtpili momentleri» teması'na arналg'an bolı'p, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anı'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz, analitikaliq geometriya (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mı'sallar keltirilgen.

12-lekciya (2s.)

Normal bo'listiriv nı'zami'nı'n' joqarı' ta'rtpili momentleri

Tayanı'sh so'zler

Parametrler, rekkurent formula, s-ta'rtpili oraylı'q moment

Parametrleri (m, σ^2) bolg'an normal nızamnın S - ta'rtpili oraylıq momentin anıqlaw talap etiledi. Anıqlama boyınsha:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^s e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Eger de $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$ dep o'zgeriwshini almasırsaq,

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^s e^{-t^2} dt. \quad (12.1)$$

(12.1) an'latpag'a bo'leklep integrallaw formulasın qollanayıq:

$$\mu_s = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-1} t e^{-t^2} dt = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} t^{s-1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{s-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt \right].$$

Qawsırma ishindegi birinshi qosılıwshının nol'ge ten' ekenligin esapqa alsaq to'mendegige iye bolamız:

$$\mu_s = \frac{(s-1)(\sigma\sqrt{2})^s}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt. \quad (12.2)$$

(8.1) formuladan μ_{s-2} ushın to'mendegi an'latpa kelip shıg'adı:

$$\mu_{s-2} = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt. \quad (12.3)$$

(12.2) ha'm (12.3) formulalarinin' on' jaqlarin salıstırsaq olar bir birinen tek : $(s-1)\sigma^2$ ko'beytiwshige pari qılatug'ının bayqaymız, demek,

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2}. \quad (12.4)$$

(12.4) formula joqarı ta'rtipli momentlerdi to'men ta'rtipli momentler arqalı an'latıwshı rekkurent formula bolıp tabıladı. Bul formuladan paydalanıp ha'm $\mu_0=1, \mu_1=0$ ekenligin esapqa alıp, barlıq ta'rtiptegi oraylıq momentlerdi esaplawg'a boladı. Eger $\mu_1=0$ ekenin inabatqa alsaq (12.4) formuladan normal' bo'listiriwdin' barlıq taq ta'rtiptegi momentlerinin' nol'ge ten' ekenligi kelip shıg'adı.

Jup S ler ushın (12.4) formuladan to'mendegige iye bolamız:

$$\mu_2 = \sigma^2, \quad \mu_4 = 3\sigma^4, \quad \mu_6 = 15\sigma^6$$

ha'm t.b.

Solay etip, S jup bolg'anda qa'legen S - shi ta'rtipli moment ushın mına to'mendegi ulıwma formulag'a iye bolamız:

$$m_s = (s-1)!! \sigma^s,$$

bunda $(s-1)!!$ simvolı 1 den $s-1$ ge shekemgi barlıq taq sanlardın' ko'beymesin bildiredi.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Normal bo'listiriw ni'zami'nı'n' rparametrlerge baylanı'slı' ha'r qı'yılı' ko'rinslerin jazı'n'
2. s-ta'rtipli oraylı'q moment qalay esaplanadı'?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Tosi'nnanlı' shamalar sisteması'. Tosi'nnanlı' shamalardı'n' g'a'rezsizligi» temasına arnalğan bolıp, lekciyada tiykarg'ı' tu'sinikler anıqlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temanı' tu'siniw ushı'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz, analitikalıq geometriya (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i tu'sinikleri menen tolı'q tanısqan bolıwları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mısallar keltirilgen.

13-lekciya (2s.)

Tosi'nnanlı' shamalar sisteması'. Tosi'nnanlı' shamalardı'n' g'a'rezsizligi

Tayanı'sh so'zler

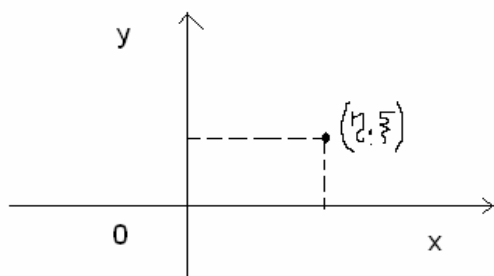
Tosi'nnanlı' shamalar sisteması', g'a'rezsiz tosi'nnanlı' shamalar, birgelikte bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'.

Itimallıqlar teoriyası'nı'n' praktikalı'q qollanı'lı'wları'nda sı'nawdı'n' na'tiyjesi bir tosi'nnanlı' shama menen emes, al eki yamasa onnan da ko'p tosi'nnanlı' shamalar menen su'wretlenetug'ı'n ma'seleler menen jiyi ushı'rası'wg'a tuwra keledi.

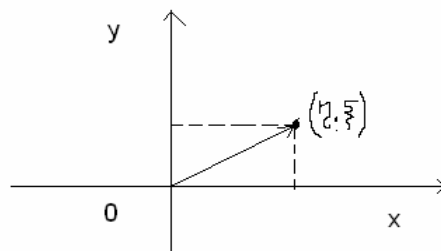
Birgelikte qaralatug'ı'n eki tosi'nnanlı' (ξ, η) shamalar jı'ynag'ı'n eki tosi'nnanlı' shamalar sisteması' deymiz.

Tosi'nnanlı' shamalar sisteması'na baylanı'slı' ma'selelerdi qarastı'rg'anda sistemanı'n' geometriyalı'q interpretaciyası'n paydalang'an qolaylı' boladı'.

Ma'selen, eki tosi'nnanlı' (ξ, η) shamalar sisteması'n koordinataları' ξ ha'm η bolg'an shamalar xoy tegisligindegi tosi'nnanlı' noqat, yamasa qurawshı'ları' ξ ha'm η shamaları'nan ibarat koordinata bası'nan (ξ, η) noqatqa bag'ı'tlang'an tosi'nnanlı' vektor dep qarawg'a boladı'.



13-su'wret



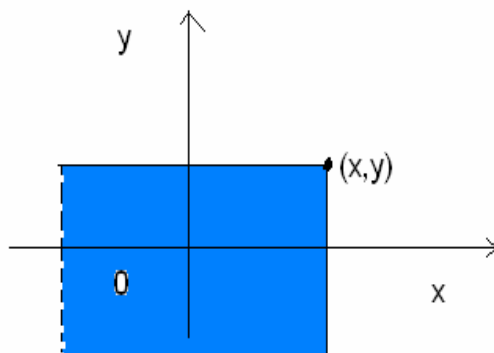
14-su'wret

U'sh tosi'nnanlı' (ξ, η, ζ) shamalar sisteması'n u'sh o'lsheмли ken'isliktegi tosi'nnanlı' noqat yamasa tosi'nnanlı' vektor ha'm t.b. dep qarawg'a boladı'.

Tosi'nnanlı' eki (ξ, η) shamalar sisteması'nı'n' birgelikte bo'listiriw funkciyası' dep, $\{\xi < x\}$ ha'm $\{\eta < y\}$ waqı'yaları'nı'n' bir waqı'tta ju'zege ası'w itimallı'g'ı'na aytı'ladı', yag'ni'y

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}. \quad (13.1)$$

Geometriyalı'q jaqtan $F(x,y)$ funkciya to'si'nnanli' (ξ, η) noqatti'n' to'besi (x,y) noqatta bolg'an sheksiz kvadratqa tu'siwinin' itimallı'g'ı'n bildiredi.



15-su'wret

Tosi'nnanli' shamalar sisteması'nı'n' bo'listiriliw funkciyası' mı'naday qa'siyetlerge boysı'nadı' (geometriyalı'q intepretaciyası'nan an'sat ko'riwge boladı').

1. Bo'listiriliw funkciyası' $F(x,y)$ o'zinin' eki argumentine qarata da kemeymeytug'ı'n funkciya, yag'nı'y $x_2 > x_1$ bolg'anda $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$;

$y_2 > y_1$ bolg'anda $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

3. Tosi'nnanli' ξ ha'm η shamaları'nı'n' birgelikte bo'listiriliw funkciyası'n bile otı'rı'p ha'r bir ξ ha'm η shamaları'nı'n' bo'listiriliw funkciyası'n tabı'wg'a boladı'. Haqı'yqatı'nda da

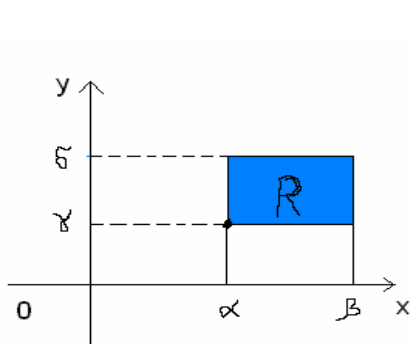
$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi < x, \eta < +\infty\} = F(x, +\infty);$$

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi < +\infty, \eta < y\} = F(+\infty, y)$$

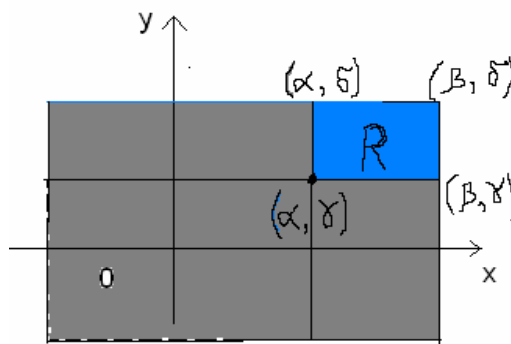
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$

Meyli D - tegisliktegi qa'legen oblast bolsı'n. Tosi'nnanli' noqatti'n' berilgen oblastqa tu'siw itimallı'g'ı', bul oblast ta'repinen koordinata ko'sherlerine parallel bolg'an tuwrı' mu'yeshlik bolg'an jag'dayda an'sat esaplanadı'.

Tosi'nnanli' (ξ, η) noqatti'n' $x=\alpha$, $x=\beta$ ha'm $y=\gamma$, $y=\delta$ tuwrı'ları' menen shegaralang'an tuwrı' mu'yeshlikke tu'siw itimallı'g'ı'n sisteması'n' bo'listiriw funkciyası' arqalı' an'latayı'q. Bir to'si'nnanli' shamadag'ı' sı'yaqlı', R tuwrı' mu'yeshlikke onı'n' to'mengi ha'm sol shegaraları'n kiritiwdi, al onı'n' joqarg'ı' ha'm on' shegaraları'n kiritpewdi sha'rtlesemiz.



16-su'wret



17-su'wret

$(\xi, \eta) \in R$ waqı'yası' mı'na eki waqı'yanı'n' ko'beymesine ten': $\alpha \leq \xi < \beta$ ha'm $\gamma \leq \eta < \delta$.

Bul waqı'yanı'n' itimallı'g'ı'n sisteması'n' bo'listiriw funkciyası' arqalı' an'latayı'q. To'mendegi formula orı'nlı' ekenligi ayqı'n:

$$P\{(\xi, \eta) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \quad (13.2)$$

Endi sistemani'n bo'listiriv t'g'izli'g'i' tu'sinigin kiritayik.

XOY tegisliginde ta'replari Δx ha'm Δy bolg'an kishkene R_Δ tuwri'mu'yeshligin alayiq. Dara jag'dayda,

$$P\{a \leq \xi < b, c \leq \eta < d\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy, \quad \text{ha'm}$$

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

Tosi'nnanli' ξ ha'm η shamalarini'n birgelikte bo'listiriv t'g'izli'g'i' boyi'nsha ha'r bir ξ ha'm η shamalarini'n bo'listiriv t'g'izli'g'i'n an'lati'wg'a boladi'. Mi'na formula ori'nli' boladi':

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Eger x ha'm y ler qanday bolg'anda da $\{\xi < x\}$ ha'm $\{\eta < y\}$ waqi'yalari' g'a'rezsiz bolsa, onda tosi'nnanli' ξ ha'm η shamalarini' g'a'rezsiz delinedi. Bul jag'dayda

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = F_\xi(x) F_\eta(y)$$

Demek, g'a'rezsiz tosi'nnanli' shamalardi'n birgelikte bo'listiriv funkciyasi' bul shamalardi'n bo'listiriv funkciyalari'ni'n ko'beymesine ten'.

Bekkemlew ushi'n sorawlar:

1. Tosi'nnanli' shamalar sistemasi' dep qanday shamalarg'a ayti'ladi'?
2. G'a'rezsiz tosi'nnanli' shamalar degenimiz ne?
3. Birgelikte bo'listiriv t'g'izli'g'i' tu'sinigin ayti'n'.

Аннотация

Бұл лекция тексті «Корреляция моменті және корреляция коэффициенті» темасына арналған болып, лекцияда тиісінше туындылар анықтамалары менен туындиріп келтірілген. Бұл теманы туындиріп ұшынан студенттер математикалық анализ, дискрет математика және логика, функционалдық анализ, аналитикалық геометрия (жоғары математика) курстарының тиісінше туындылары менен толық танысқан болулары керек. Лекцияда келтірілген әрбір жаңа формулаға тиісінше мысалдар келтірілген.

14-лекция (2с.)

Корреляция моменті және корреляция коэффициенті

Тағаныш сөздер

Корреляция моменті, корреляция коэффициенті, сызықты корреляция

Біз алдыңғы бapta бір тосыннанлы X шамасының санлы характеристикалары – әр қылы таңрытегі басланғыш және оралық моменттерді қарастырдық. Бұл характеристикалардан ең аһмиеілілері математикалық күтілім m_ξ және дисперсия D_ξ болып есепленеді.

Усы сыяқты характеристикаларды – әр қылы таңрытегі басланғыш және оралық моменттерді екі тосыннанлы шамалар системасы үшін да келтіруге болады.

(ξ, η) системасының k, s - таңрыілі басланғыш моменті деп, $\xi^k \cdot \eta^s$ көбеіменің математикалық күтіліміне айтылады:

$$\alpha_{k,s} = M(\xi^k \cdot \eta^s) \quad (14.1)$$

(ξ, η) системасының k, s - таңрыілі оралық моменті деп, саыкес оралысқан шамалардың k - ші және s - ші дәрежелерінің көбеімесінің математикалық күтіліміне айтылады:

$$\mu_{k,s} = M(\xi - m_\xi)^k (\eta - m_\eta)^s \quad (14.2)$$

Дискрет тосыннанлы шамалар үшін

$$\alpha_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij} \quad (14.3)$$

$$\mu_{k,s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_\xi)^k (y_j - m_\eta)^s p_{ij} \quad (14.4)$$

бұнда $p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$

Узліксіз тосыннанлы шамалар үшін

$$\alpha_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy \quad (14.5)$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (x - m_\xi)^k (y - m_\eta)^s f(x, y) dx dy \quad (14.6)$$

bunda $f(x, y)$ - sistemanın bo'listiriv tıg'ızlıg'ı.

Ekinshi ta'rtipli aralas oraylıq moment ayırıqsha rol oynaydı:

$$\mu_{1,1} = M(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)$$

Tosinnanlı shamalar sistemasında bul moment ayırıqsha rol oynag'anlıqtan, onın ushın o'z aldına ayırıqsha belgilew qabıl etilgen:

$$k_{\xi\eta} = M(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta). \quad (14.7)$$

$k_{\xi\eta}$ - xarakteristikag'a tosinnanlı X, h shamalarının korrelyatsiyalıq momenti dep ataladı.

Diskret tosinnanlı shamalar ushın korrelyatsiyalıq moment to'mendegi formula menen an'latıladi:

$$k_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_\xi)(y_j - m_\eta) p_{ij} \quad (14.8)$$

U'zliksiz tosinnanlı shamalar ushın korrelyatsiyalıq moment

$$k_{\xi\eta} = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x, y) dx dy \quad (14.9)$$

Bul xarakteristikanın mag'anasi to'mendegiden ibarat:

Korrelyatsiyalıq moment – tosinnanlı shamalar sistemasının xarakteristikası bolıp, ol ξ ha'm η shamalarının jayılıwın su'wretlew menen birge, olar arasındag'ı baylanısı da su'wretleydi.

Haqıyqattan da, g'a'rezsiz tosinnanlı shamalar ushın korrelyatsiyalıq momenttin nol'ge ten' ekenin da'lilleyik.

Da'lilleniwin u'zliksiz tosinnanlı shamalar ushın keltireyik.

Meyli ξ ha'm η - g'a'rezsiz tosinnanlı shamalar bolıp, bo'listiriv tıg'ızlıg'ı $f(x, y)$ bolsın. G'a'rezsiz tosinnanlı shamalar ushın

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (14.10)$$

bunda $f_1(x)$ ha'm $f_2(y)$ - sa'ykes ξ ha'm η shamalarının bo'listiriv tıg'ızlıqları.

(14.10) an'latpanı (14.9) formulag'a aparıp qoysaq (4.9) integral eki integraldın ko'beymesine aylanadı:

$$k_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_\eta) f_2(y) dy$$

bundag'ı ma'selen,

$$k_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx - m_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = m_\xi - m_\xi = 0$$

Demek, g'a'rezsiz tosinnanlı shamalar ushın $k_{\xi\eta} = 0$ eken. Eger (ξ, η) shamalardan, ma'selen birewi, o'zinin matematikalıq ku'tiliwinen ju'da az parıq qılsa (derlik tosinnanlı emes), onda (ξ, η) shamaları qanday tıg'ız baylanısta bolmasın, korrelyatsiyalıq moment ju'da kishi boladı.

Sonın` ushın da  $(\xi, \eta)$  shamalar arasındag`ı baylanıs xarakteristikası ushın $k_{\xi\eta}$ korrelyatsiyalıq momentten

$$r_{\xi\eta} = \frac{k_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} \quad (14.11)$$

o`lshemsiz xarakteristikag`a o`tedi, bunda  $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}$  -  $\xi$  ha`m η shamalarının` orta kvadratlı awısıwları. Bul xarakteristika  $X$  ha`m h shamalarının` *korrelyatsiya koeffitsienti* dep ataladı. Korrelyatsiya koeffitsienti korrelyatsiyalıq moment penen bir waqıtta nol`ge aylanadı; demek, g`a`rezsiz tosınnanlı shamalar ushın korrelyatsiya koeffitsienti nol`ge ten`, yag`nıy $k_{\xi\eta} = 0$.

Eger ξ ha`m  $\eta$  tosınnanlı shamaları sıızqlı funksiional` baylanısqa bolsa, yag`nıy

$$\eta = a\xi + b,$$

onda a koeffitsientinin` belgisine qaray $r_{\xi\eta} = \pm 1$. Haqıyqattan da, bizde

$$\begin{aligned} k_{\xi\eta} &= M(\xi - m_{\xi})(\eta - m_{\eta}) = M(\xi - m_{\xi})(a\xi + b - am_{\xi} - b) = \\ &= aM(\xi - m_{\xi})^2 = aD_{\xi}. \\ D_{\eta} &= D(a\xi + b) = a^2 \cdot D_{\xi}, \\ \sigma_{\eta} &= |a| \cdot \sigma_{\xi}. \end{aligned}$$

Demek,

$$r_{\xi\eta} = \frac{aD_{\xi}}{|a|\sigma_{\xi}^2} = \frac{a}{|a|}.$$

Bundag`ı  $\frac{a}{|a|}$  shaması  $+1$  ge ten`, eger $a > 0$ bolsa, ha`m  $-1$  ge ten`, eger $a < 0$ bolsa.

Usını da`lillew talap etilgen edi.

Qa`legen tosınnanlı shamalar ushın

$$|r_{\xi\eta}| \leq 1$$

ekenligin ko`rsetiwge boladı.

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Корреляция моменти деген не?
2. Корреляция моментиниң әхмийети неде?
3. Корреляция коэффиценти деп неге айтамыз?
4. Ғәрезсиз тосыннанлы шамалар ушын корреляция коэффиценти неге тең?
5. Сызықлы байланыста корреляция коэффиценти неге тең?

Annotaciya

Bul lekciya teksti «Tosi'nnanli' shamani'n' funkciyasi'» temasi'na arnalg'an boli'p, lekciyada tiykarg'i' tu'sinikler ani'qlamaları' menen tu'sindirip keltirilgen. Bul temani' tu'siniw ushi'n studentler matematikalı'q analiz, diskret matematika ha'm logika, funkcionallıq analiz, analitikaliq geometriya (joqarı' matematika) kursları'nı'n' tiykarg'i' tu'sinikleri menen tolı'q tanı'sqan bolı'wları' kerek. Lekciyada kiritilgen ha'r bir jan'a formulag'a tiyisli mı'sallar keltirilgen.

15-lekciya (2s.) Tosi'nnanli' shamani'n' funkciyasi'

Tayani'sh so'zler
Tosi'nnanli' shamani'n' funkciyasi', Koshi nı'zamı'.

Itimallı'qlar teoriiyası'nı'n' bir qatar a'meliy ma'selelerinde ξ tosi'nnanli' shama menen baylanı'sqan

$$\eta = \varphi(\xi) \quad (15.1)$$

tosi'nnanli' shamani' u'yreniwge tuwra keledi, bul jerde $u = \varphi(x)$ berilgen funkciya.

Meyli ξ -diskret tosi'nnalı' shama bolsı'n:

ξ	x_1	x_2	x_3		x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n

Onda $\eta = \varphi(\xi)$ tosi'nnanli' shamani'n' matematikalı'q ku'tiliwi ha'm dispersiyası' to'mendegi formulalar menen ani'qlanadı':

$$m_\eta = M\eta = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i$$

$$D_\eta = D\eta = M(\eta - m_\eta)^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - m_\eta]^2 \cdot p_i$$

Eger η u'zliksiz tosi'nnanli' shama bolsa, onda $\eta = \varphi(\xi)$ tosi'nnanli' shamani'n' matematikalı'q ku'tiliwi ha'm dispersiyası' to'mendegi formulalar menen ani'qlanadı':

$$m_\eta = M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

$$D_\eta = D\eta = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_\eta]^2 f(x) dx.$$

Praktikanı'n' ko'pshilik ma'selelerinde, a'sirese matematikalı'q statistikada, tosi'nnanli' argumenttin' funkciyası'nı'n' matematikalı'q ku'tiliwi ha'm dispersiyası'n tabı'wdı'n' o'zi ko'binese jetkilikli bolmaydı', onı'n' bo'listiriw nı'zamı'n da tabı'w za'ru'r boladı'.

Bul jerde mı'naday ma'sele qoyı'ladı': bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı' belgili ha'm ol $f(x)$ qa ten' bolg'an ξ tosi'nnanli' shama berilgen; basqa η tosi'nnanli' shama menen onı'n' menen $\eta = \varphi(\xi)$ funkciyalı'q baylanı's arqalı' baylanı'sqan, bul jerde $\varphi(\xi)$ funkciya ξ

shamani'n' barli'q mu'mkin bolg'an ma'nisleri jaylasqan bazı' bir (a,b) aralı'qta u'zliksiz funkciya ($a=-\infty$, $b=+\infty$ bolı'wı' da mu'mkin). Tosı'nnanlı' η shamani'n' $g(y)$ bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'n tabı'w talap etiledi.

Bul ma'seleni sheshiwde eki jag'daydı' qarastı'ramı'z:

1. Monoton funkciya bolg'an jag'day.

Da'slep $\varphi(x)$ funkciya joqarı'da ko'rsetilgen aralı'qta monoton o'siwshi ha'm og'an keri $x=\psi(y)$ funkciya tiyisli aralı'qta monoton o'siwshi, u'zliksiz ha'm differenciallanı'wshı' bolsı'n. OY ko'sherinde $(y, y+\Delta y)$ intervaldı' aladı'z ha'm onı' $x=\psi(y)$ fnkciya ja'rdeminde OX ko'sherge sa'wlelendirip $(x, x+\Delta x)$ intervaldı' hası'l qı'lamı'z.

($y < \eta < y+\Delta y$) ha'm ($x < \xi < x+\Delta x$) waqı'yalar ekvivalent, yag'nı'y

$$P(y < \eta < y+\Delta y) = P(x < \xi < x+\Delta x).$$

Demek,

$$g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < \eta < y+\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < \xi < x+\Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < \xi < x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x) \cdot x'_y = f(x) \cdot \psi'(y).$$

Eger $\varphi(x)$ funkciya monoton kemeyiwshi bolsa, onda joqarı'dag'ı' talqı'lawlar sı'yaqlı'

$$g(y) = -f(\psi(y)) \cdot \psi'(y).$$

ekenligine iye boladı'z. Eki jag'daydı' birllestirsek

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|. \quad (15.2)$$

dep jazı'wg'a boladı'.

Mı'salı': Tosı'nnanlı' ξ shaması' bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'

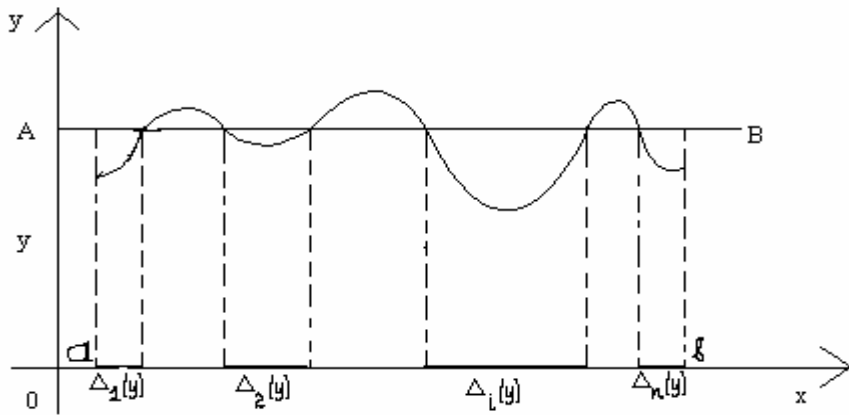
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

bolg'an Koshi nı'zamı'na boysı'nadı'. Tosı'nnanlı' η shaması' ξ shaması' menen $\eta = 1 - \xi^3$ tu'rinde baylanı'sqan. Tosı'nnanlı' η shaması'nı'n' $g(y)$ bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'n tabı'n'.

SHeshiw: $y = 1 - x^3$ funkciyası' $(-\infty, +\infty)$ aralı'qta monoton bolg'anlı'qtan joqarı'dag'ı' formulanı' qollanı'wg'a boladı'. Ma'selenin' sheshimin to'mendegi eki bag'ana tu'rinde jaylastı'rayı'q: sol jaqtag'ı' bag'ana ma'selenin' ulı'wma sheshiminde qabı'l qı'lı'ng'an funkciyalar. On' jaqtag'ı' bag'ana qaralı'p atı'rg'an ma'selege sa'ykes anı'q funkciyalar jaylastı'rı'ladı'.

$f(x)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y = \varphi(x)$	$y = 1 - x^3$
$x = \psi(y)$	$x = \sqrt[3]{1-y}$
$\psi'(y)$	$\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$ \psi'(y) $	$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$g(y) = f(\psi(y)) \psi'(y) $	$g(y) = \frac{1}{3\pi(1+\sqrt[3]{(1-y)^2})^3 \sqrt[3]{(1-y)^2}}.$

Meyli endi bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı' $f(x)$ bolg'an u'zliksiz tosı'nnanlı' ξ shama berilgen bolı'p, tosı'nnanlı' η shaması' onı'n' menen $\eta = \varphi(\xi)$ funkciyalı'q baylanı's penen baylanı'sqan ha'm $y = \varphi(x)$ funkciyası' argumentin' (a,b) aralı'qtag'ı' mu'mkin bolg'an ma'nislerinde monoton emes bolsı'n. Tosı'nnanlı' η shaması'nı'n' bo'listiriw funkciyası' $G(y)$ ti tabayı'q. Onı'n' ushı'n OX ko'sherinen y aralı'qta jaylasqan ha'm OX ko'sherine parallel AB tuwrı'sı'n ju'rgizeyik ha'm $y = \varphi(x)$ iymeginin' $\eta < y$ sha'rti orı'nlanatug'ı'n aralı'qları'n ajı'ratı'p alayı'q.



18-su'wret

Bul aralı'qlarg'a abscissa ko'sherinin' $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots$ aralı'qları' sa'ykes kelsin. $\eta < y$ waqı'yası' tosi'nnanlı' ξ shaması'nı'n' $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots$ aralı'qlardan birewine-qaysı'sı'na bolı'wı'na parı'qsı'z ten' ku'shli.

Sonı'n' ushı'n

$$G(y) = P(\eta < y) = P(\xi \in \Delta_1(y) + \xi \in \Delta_2(y) + \dots) = \sum_i P(\xi \in \Delta_i(y)) = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f(x) dx$$

Solay etip, $\eta = \varphi(\xi)$ shaması'nı'n' bo'listiriw funkciyası' ushı'n to'mendegi formulag'a iye bolamı'z:

$$G(y) = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f(x) dx \quad (15.3)$$

$\Delta_i(y)$ intervallardı'n' shegaraları' y ke baylanı'slı' bolı'p, $y = \varphi(x)$ funkciyası'nı'n' konkret ko'rinishinde y tin' anı'q funkciyası' sı'patı'nda an'latı'lı'wı' mu'mkin. $G(y)$ funkciyası'n' integrallardı'n' shegaraları'nda qatnası'wshı' y shaması' boyı'nsha differenciallap η shaması'nı'n' $g(y)$ bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'na iye bolamı'z:

$$g(y) = G'(y)$$

Mı'salı': Tosı'nnanlı' ξ shaması' parametrleri m ha'm σ bolg'an normal bo'listiriw ge iye. Tosı'nnanlı' $\eta < \xi^2$ shaması'nı'n' bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'n tabı'n'.

SHeshiw: Bul jag'dayda $\varphi(x) = x^2$, $a = -\infty$, $b = +\infty$; $y = \varphi(x) = x^2$ funkciya $(-\infty, +\infty)$ aralı'qta monoton emes. Biraq $x \in (-\infty, 0)$ bolg'anda kemeyedi ha'm $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$ kerı funkciyag'a iye, $x \in (0, +\infty)$ bolg'anda o'sedi ha'm $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ kerı funkciyag'a iye. Tosı'nnanlı' ξ shaması'nı'n' bo'listiriw tı'g'ı'zlı'g'ı'

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ko'riniste ekenligin esapqa alsaq, to'mendegini hası'l qı'lamı'z:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y > 0).$$

Bekkemlew ushı'n sorawlar:

1. Tosı'nnanlı' shamanı'n' funkciyası' degenimiz ne?
2. Koshi nı'zamı'n jazı'p ko'rsetin'.