O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

1. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.10-17

УДК 512.554

Локальные дифференцирования естественным образом градуированной не Лиевой алгебры Лейбница

Алауадинов А.К., Курбанбаев Т.К.

Ushbu maqolada tabiiy ravishda graduirlangan Li bo'lmagan Leybnits algebralari lokal differentsiallashlari o'rganilgan.

In this work we study local derivations of the naturally graded non-Lie Leibniz algebras.

1. Введение

Изучение дифференцирований на неограниченных операторных алгебрах, в частности, на различных алгебрах измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, является одной из важных задач общей теории неограниченных дифференцирований на операторных алгебрах.

В то же время актуальной является задача изучения различных классов линейных операторов типа дифференцирования. Важный класс таких операторов составляют локальные дифференцирования, впервые введенные Кэйдисоном в 1990 году [9]. В работах Р.Кэйдисона, Д.Ларсона и А.Соуроура были получены некоторые условия, при которых локальное дифференцирование является дифференцированием. В своей работе Р.Кэйдисон рассматривал локальные дифференцирования на алгебрах фон Неймана и в некоторых полиномиальных алгебрах. Было доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана в дуальный бимодуль является дифференцированием. Этот результат был обобщен в работе М.Брешара для более широкого класса линейных операторов. В 1997 году П.Сэмрил ввел понятие 2-локального дифференцирования [8]. Он описал 2-локальные дифференцирования алгебры $B(H)$ - всех ограниченных линейных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Аналогичное описание для конечномерного случая появилось позже, в 2003 году, в работе корейских математиков С.Ким и Ж.Ким [10]. В 2012 году в работе Ш.А.Аюпова и К.К.Кудайбергенова было получено описание 2-локальных дифференцирований на алгебре $B(H)$ -

всех ограниченных линейных операторов на произвольном гильбертовых пространстве H. Отметим, что многочисленние работы посвящены изучению локальных и 2-локальных дифференцировании на алгебр измеримых операторов [3], [4], [5], [6].

Исследование локальных и 2-локальных дифференцирование конечномерных алгебр Ли было рассмотрено в работах Ш.А.Аюпова, К.К.Кудайбергенова и И.С.Рахимова [1], [2]. Локальные дифференцирования конечномерных алгебр Лейбница в настоящее время не рассмотрены. Поэтому в этом работе исследованы локальные дифференцирования на естественным образом градуированных алгебрах Лейбница.

2. Предварительные сведения

Определение 2.1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

где [,] - умножение в L.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим последовательность:

$$L^1 = L, \;\; L^{k+1} = [L^k, L^1], k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L размерности n, называется:

нуль-филиформной, если $dimL^i = (n+1) - i, 1 \leq i \leq n+1$;

филиформной, если $dimL^i = n - i, 1 \leq i \leq n+1$.

Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной*, если существует $s \in N$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности или нильиндексом алгебры L.

Пусть L - конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $gr(L)_i := L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, где s - нильиндекс алгебры L, и обозначим $grL = gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus ... \oplus gr(L)_{s-1}$. Тогда $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$, и мы получим градуированную алгебру grL.

Определение 2.2. Градуировку, построенную таким образом, мы назовем естественной градуировкой. Если алгебра Лейбница L изоморфна алгебре grL, то L называется *естественным образом градуированной алгеброй Лейбница.*

Теорема 2.1 [11]. *Любая n-мерная комплексная естественным образом градуированная не Лиевая алгебра Лейбница изоморфна одной из* *следующих попарно неизоморфных алгебр*

$$F_n^1 : [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1},\ 2 \leq i \leq n-1,$$

$$F_n^2 : [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1},\ 3 \leq i \leq n-1,$$

(*отсутствующие произведения равны нулю*).

Напомним, что линейный оператор $D : L \to L$ называется *дифференцированием алгебры Лейбница* L, если $D[x, y] = [D(x), y] + [x, D(y)]$ при всех $x, y \in L$ (правило Лейбница).

Предложение 2.1 [7]. *Всякое дифференцирование алгебр F_n^1 и F_n^2, соответственно, имеет следующие матричные формы*:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 2\alpha_1+\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_3 & 3\alpha_1+\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \beta & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & (n-1)\alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_3 & 3\alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \gamma & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & (n-1)\,\alpha_1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

.

3.Основной результат

3.1. Локальные дифференцирование алгебры типа F_n^1.

Линейное отображение $\Delta : L \to L$ называется *локальным дифференцированием* алгебра Лейбница, если для каждого $x \in L$ существует дифференцирование (зависящее от x) $D_x : L \to L$ такое, что $\Delta(x) = D_x(x)$.

Лемма 3.1. *Пусть L - n-мерная алгебра Лейбница. Если всякое дифференцирование алгебры L при заданном базисе имеет нижне-треугольный вид, тогда всякое локальное дифференцирование также име-*

ет нижне-треугольный вид.

Доказательство. Пусть Δ - локальное дифференцирование алгебры L с матрицей $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Для каждого $k \in \overline{1,n}$ возьмем дифференцирование D_k на L такое, что

$$\Delta(e_k) = D_k(e_k).$$

Так как матрица оператора D_2 имеет нижне-треугольный вид, то

$$b_{1i} = \Delta(e_i)_1 = D_i(e_i)_1 = 0$$

при всех $i > 1$. Далее

$$b_{2i} = \Delta(e_i)_2 = D_i(e_i)_2 = 0$$

при всех $i > 2$.

Аналогично, $b_{ki} = 0$ при всех $i > k$. Лемма доказана.

В этом разделе мы приведем общий вид локальных дифференцирований алгебра F_n^1.

Рассмотрим Δ – линейный оператор на алгебре F_n^1 с матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{11}+b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ b_{41} & b_{41} & b_{43} & b_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,1} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Оператор вида* (3.1) *является локальным дифференцированием алгебры* F_n^1.

Доказательство. Рассмотрим следующий оператор с матрицей

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n-1,3} & c_{n-1,4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n) \in F_n^1$. Тогда координаты $\Theta(x)$ имеют вид

$$\Theta(x)_1 = \Theta(x)_2 = 0, \quad \text{и} \quad \Theta(x)_i = \sum_{s=3}^{n} c_{is}\xi_i, \quad \text{где} \ \ i \geq 3.$$

Нам требуется найти такое дифференцирование D вид (2.1) алгебры F_n^1, что

$$\Theta(x)_i = D(x)_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.3}$$

Пусть D – дифференцирование с таким свойством и $\alpha_1 = 0$.

Тогда (2.1) влечет, что

$$D(x)_1 = 0, \quad D(x)_2 = \alpha_2(\xi_1 + \xi_2),$$

и

$$D(x)_i = \sum_{s=2}^{i-1} \alpha_s \xi_{i-s+2} + \alpha_i(\xi_1 + \xi_2), \quad i \geq 3.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получим

$$\alpha_2(\xi_1 + \xi_2) = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{i-1} \alpha_s \xi_{i-s+2} + \alpha_i(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{s=3}^{n} c_{is}\xi_i, \quad i \geq 3. \tag{3.4}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$. В этом случае из (3.4) видно, что параметры $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ определяются однозначным образом.

2. $\xi_1 + \xi_2 = 0, \ \xi_3 \neq 0$. В этом случае параметры $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ также определяются однозначно.

3. $\xi_1+\xi_2=0,\ \xi_3=\xi_4=...=\xi_r=0,\ \xi_{r+1}\neq 0$, где $r\geq 3$. Тогда из (3.4) вытекает, что числа $\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n-r+1}$ определяются однозначно, а $\alpha_{n-r+2},...,\alpha_n$ могут быть произвольным, $r\geq 3$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть Δ оператор с матрицей (3.1). Тогда Δ представляется в виде $\Delta=D+\Theta$, где D оператор с матрицей вида (2.1), а Θ вида (3.2). Так как D дифференцирования, а по лемме 3.2 Θ локальная дифференцирования, то Δ является локальным дифференцированием. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Всякое локальное дифференцирование алгебры F_n^1 имеет вид* (3.1).

Доказательство. Пусть Δ – локальное дифференцирование алгебры F_n^1 с матрицей $\Delta=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. По Лемме 3.1, Δ имеет прямоугольный вид, т.е. $b_{ij}=0,\ \ 1\leq i<j\leq n$. Теперь возьмем точку $x_0=(1,-1,0,0,...,0)\in F_n^1$ и дифференцирование D такое, что $\Delta(x_0)=D(x_0)$. Тогда

$$\Delta(x_0)_1=b_{11},\, \Delta(x_0)_2=b_{21}-b_{22},$$

$$\Delta(x_0)_i=b_{i1}-b_{i2},\ 3\leq i\leq n$$

и

$$D(x_0)_1=\alpha_1,\ \ D(x_0)_2=-\alpha_1\, D(x_0)_i=0,$$
$$D(x_0)_n=\alpha_n-\beta_n,\, 3\leq i\leq n-1.$$

Приравнивая коэффициенты $\Delta(x_0)$ и $D(x_0)$ имеем

$$b_{21}-b_{22}=-\alpha_1,\ \ b_{i1}-b_{i2}=0,\ \ 3\leq i\leq n-1.$$

Поэтому $b_{22}=b_{11}+b_{21},\ b_{i2}=b_{i1},\ 3\leq i\leq n-1$. Это показывает, что матрица оператора Δ имеет вид (3.1). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Линейный оператор на алгебре F_n^1 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда он имеет вид* (3.2).

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 3, а достаточность из леммы 2.

3.2. Локальные дифференцирование алгебры типа F_n^2
Рассмотрим линейный оператор Δ алгебре F_n^2 с матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ b_{41} & 0 & b_{43} & b_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n-11} & 0 & b_{n-13} & b_{n-14} & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.3. *Линейный оператор на алгебре F_n^2 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда он имеет вид* (3.5).

Доказательство. Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству теоремы 3.2.

Литература

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S., 2-*Local derivations on finite-dimensional Lie algebras.* Linear Algebra and its Applications. 474 (2015), P. 1-11.

2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., *Local derivations on finite-dimensional Lie algebras.* Linear Algebra and its Applications. 493 (2016), P. 381-398.

3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K, Alauadinov A.K., *2-local derivations on matrix algebras over commutative regular algebras.* Linear Algebra and its Applications, Vol. 395 (2013), P.1294-1311.

4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K., Alauadinov A.K., *Local and 2-local derivations on Arens algebras.* arxiv.math.1109/5157 (2011).

5. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K., 2-*Local derivations on algebras of measurable operators*, Annnals of Functional Analysis, N 2 (4) (2013). P 111-118.

6. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K., Nurjanov B.O., *Local and* 2-*local derivations on Arens algebras.* Journal Math. Slovaca, 64 (2014), N2, P.423-432.

7. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. *Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical.* Linear Algebra and its Applications. Vol 438 (2013), N 7, P. 2973-3000.

8. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **125** (1997) 2677–2680.

9. Kedison R.V., *Local derivations*, J.Algebra 130 (1990), P. 494-509.

10. Kim S.O., Kim J.S., *Local automorphisms and derivations on* M_n, Proc.Amer.Math.Soc. 132 (2004), P. 1389-1392.

11. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А., *О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница.* Сиб. Мат. Журнал. т. 42(1) (2001), С. 15–24.

Институт математики при НУУз

Mundarija