

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW
MINISTRLOGI**

**BERDAQ ATÍNDAGÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BÒLIMI**

**Qol jazba huqıqında
UDK 517.9**

QAYPOV AZIZ SHAMSHETDINOVISH

**Tórtinshi tártipli parabolalıq teńlemeler ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq
máselelerdi sheshiw hám spektral qásiyetlerin izertlew**

5A 130202 – Ámeliy matematika hám informaciyalıq texnologiyalar

**Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın jazılǵan
DISSERTACIYA**

MAK da jaqlawǵa ruxsat

Magistratura bólimi baslıǵı:

doc. A.Gulimov

Kafedra baslıǵı:

doc. M.K. Berdimuratov

Ilimiy basshı:

f.-m. i.k. A.B. Bekiev

Nókis 2018

MAZMUNI

KIRISIW.....	3
I BAP. TO’RTINSHI TÁRTIPLI DARA TUWINDILI TEÑLEMELER HÁM OLARDIÑ QOLLANILIWI.....	7
1.1-§. Tórtinshi tártipli dara tuwındılı teñlemeler hám olardıń qollanıwı.....	7
1.2-§. Tórtinshi tártipli teñlemelerdi túrlerge ajratıw.....	9
II BAP. TO’RTINSHI TÁRTIPLI TEÑLEME USHIN SHEGARALIQ MÁSELELERDIÑ SHESHILIWI.....	13
2.1-§. Tórtinshi tártipli teñleme ushın bir shegaralıq máseleniń sheshiliwi.....	13
2.2-§. Tórtinshi tártipli teñleme ushın qoyılğan aralas-shegaralıq máseleni Ritc usılı menen sheshiw	22
2.3-§. Tórtinshi tártipli teñleme ushın qoyılğan aralas-shegaralıq máseleni Galerkin usılı menen sheshiw.....	30
2.4-§. Tórtinshi tártipli parabolalıq teñleme ushın qoyılğan aralas máseleni shekli ayırmalar usılı menen sheshiw.....	33
2.5-§. Tórtinshi tártipli parabolalıq teñleme ushın qoyılğan aralas máseleniń volterra máselesi ekenligi.....	36
III BAP. NELOKAL SHÁRTLİ TO’RTINSHI TÁRTIPLI TEÑLEMELER USHIN SHEGARALIQ MÁSELELERDIÑ SHESHILIWI	
3.1-§. Nelokal shártli tórtinshi tártipli teñleme ushın bir shegaralıq máseleniń sheshiliwi.....	44
3.2-§. Nelokal shártli tórtinshi tártipli teñleme ushın bir kerı máseleniń sheshiliwi.....	51
JUWMAQLAW.....	57
PAYDALANILĞAN ÁDEBIYATLAR.....	59
QOSIMSHALAR.....	66

KIRISIW

Temaniń tiykarlanıwı hám aktuallıǵı. Haqıyqıy dunyada bolatuǵın birneshe processler matematikalıq modellestirilgende, klassikalıq matematikalıq fizikanıń máseleleri bolmaǵan, dara tuwındılı teńlemeler ushın standart emes tuwrı hám keri máselelerdi úyreniwge keltiriledi. Gaz dinamikasınıń dawıs tezligine jaqın hám onnan joqarı tezlikli máseleleri hám t.b. máseleler, qaralıp atırǵan oblasttıń túrli bóleginde hár túrli tipke derek bolǵan aralas túrdegi teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdi úyreniwge keltiriledi. Geofizikanıń, okeanologıyanıń birneshe máseleleri, texnikada kriogen suyıqlıqlardı paydalanıw máseleleri, sonday-aq, sterjnniń hám balkanıń terbelisi hám t.b tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan shegaralıq, baslanǵısh-shegaralıq máselelerdi sheshiwge keltiriledi.

Izertlew jumısınıń predmeti hám izertlew obykti. Izertlew obykti – tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler hám olar ushın qoyılǵan aralas shegaralıq máseleler. Izertlew predmeti ol teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdi sheshiwdiń analitikalıq hám juwıq usılları (ózgeriwshilerdi ajratıw usılı, Ritc usılı, Galerkin usılı, shekli ayırmalar usılı).

Ilimiy izertlew jumısınıń maqseti hám wazıypaları. Dissertaciyanıń tiykarǵı maqseti tuwrımúyeshli oblastta sızıqlı, tórtinshi tártipli dara tuwındılı teńlemelerdi sheshiwdi úyreniw.

Dissertaciya jumısınıń wazıypaları tómendegilerden ibarat:

- Tórtinshi tártipli teńlemelerdi sheshiw boyınsha oqıw hám ilimiy ádebiyatlarda bar bolǵan maǵlıwmatlardı úyrenip, bir sistemaǵa keltiriw;
- Tórtinshi tártipli teńlemelerdi sheshiwdiń ózgeriwshilerdi ajratıw, Ritc hám Galerkin, shekli ayırmalar usıllarına tiykarlanıp, tuwrı múyeshli oblastta jańa máselelerdi sheshiw.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı. Tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq máseleler izertlendi. Bul teńlemelerdiń qollanıwları, olardı túrlerge ajratıw máseleleri kórip shıǵıldı. Máseleniń sheshiminiń birden-birliǵi

hám bar bolıwı kórsetildi, sheshim ushın apriorlıq baha alındı, bazı bir máseleler ushın juwıq sheshim alınadı, máselelerdiń spektral qásiyetleri izertlendi.

Izertlewdiń tiykarǵı máseleleri hám boljawlar. Geofizika, okeanologiya, fizika atmosferası máseleleri menen baylanıslı túrde birtekli emes suıqlıqlardıń dinamikası úyreniw máselesi, tiykarınan, stratificirlengen suıqlıqlar dinamikası máselesi tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan baslanǵısh-shegaralıq mäseleni sheshiwge keltiriledi.

Izertlew teması boyınsha ádebiyatlarǵa sholıw. Bir ólshemli aǵımlardıń dinamikası teńlemesi, qısılatuǵın eksponencial stratificirlengen suıqlıqlardıń dinamikası teńlemesi, dispergirirlengen ortalıqta tarqalatuǵın tolqın teńlemesi, jıńışke iyiliwshen sterjnniń boyına tolqını teńlemesi, sterjnniń hám balkanıń kese tolqının teńlemesi hám t.b tórtinshi tártipli teńlemeler boladı. Bunday máseleler A.V. Bicadzeniń [25], M.M. Smirnovtıń [39], M.M. Meredovtıń [34], S.A. Gabovtıń, B.B. Orazovtıń hám A.G. Sveshnikovtıń [26-28], Yu.D. Pletnerdiń [40] jumıslarında qaralǵan. T.D.Djuraev hám A.Sopuevtıń [29] jumısında tórtinshi tártipli teńlemelerdi túrlerge ajratıw máseleleri qaralǵan. Ya.Megralievtiń [32-33] jumıslarında tórtmúyeshli oblastta tórtinshi tártipli teńlemelerdi sheshiwdiń bazı bir usılları qaralǵan. D.Amanovtıń [22] hám J.Otarovanıń [36] jumıslarında ózgeriwshilerdi ajratıw usılı menen tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq máseleler sheshilgen hám olardıń spektral qásiyetleri izertlengen.

Izertlew alıp barıw usılları. Tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan aralas hám aralas shegaralıq máselelerdi ózgeriwshilerdi ajratıw, Ritc hám Galerkin usılları, shekli ayırmalar hám t.b usıllar menen sheshiw. Bul máselelerdiń spektral qásiyetlerin izertlew.

Izertlewdiń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti. Dissertaciya jumısında alınǵan nátiyjeler:

- 1) Bul taraw boyınsha ilimiy–izertlew jumısların orınlaw ushın tiykar bolıp xızmet etedi, bir neshe ilimiy maqala hám tezisler jazıw ushın maǵlıwmatlar bola aladı;

- 2) Matematika, Ámeliy matematika hám informatika qánigeligi studentlerine hám Ámeliy matematika hám informaciyalıq texnologiyalar qánigeligi magistrantlarına arnawlı kurslar oqıtıw ushın maǵlıwmatlar boladı;
- 3) Studentlerge bakalavrdı pitkeriw qánigelik jumıların jazıwda, magistrler magistrlik dissertaciýaların jazıwda hám ilimiy izertlew jumıların orınlaw ushın maǵlıwmat bolıp xızmet etedi;
- 4) Oqıw hám arnawlı ádebiyatlarǵa kirgiziliwi múmkin.

Dissertaciyalıq jumıstı orınlawdıń barısında alınǵan tiykarǵı nátiyjeler boyınsha «Ámeliy matematika» kafedrasınıń ilimiy seminarlarında bayanatlar etildi. Sonday-aq, Berdaq atındaǵı QMU dıń 2017-2018 oqıw jılındaǵı «Magistrantlardıń ilimiy miynetleriniń toplamında», O'zbekistan Respublikası ilimler akademiyası Qaraqalpaqstan bólimi Xabarshı jurnalında, 29-30 mayda Ájiniyaz atındaǵı NMPI de «Ilim hám tálim-tárbiyanıń áhmiyetli máseleleri» atamada ótkizilgen Respublikalıq ilimiy teoriyalıq konferenciya dissertaciya jumısınıń ayırım nátiyjeleri basılıp shıqtı.

Jumıstıń dúzilisi hám kólemi. Dissertaciya kirisiw bóliminen, paragraflarǵa ajratılǵan úsh baptan, juwmaqlaw bóliminen, dissertaciya jumısın jazıwda paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen hám qosımshalardan turadı, onıń ulıwma kólemi 70 betti quraydı.

Kirisiw bo`liminde jumıstıń temasınıń áhmiyetliligi, magistrlik dissertaciyanıń maqseti hám wazıypaları, izertlew obykti, izertlewlerdi ju`rgiziw usılları, izertlewdiń ilimiy jańalıqları, orınlǵan izertlew jumıslarlardıń ámeliy áhmiyeti hám alınǵan tiykarǵı nátiyjelerdiń aprobaciyası máseleleri bayanlandı.

Dissertaciyanıń birinshi babında dara tuwındılı tórtinshi tártipli differenciallıq teńlemelerdiń qollanıwı, olar ushın máselelerdiń qoyılıwı, olardıń túrleri hám de olardı túrlerge ajratıw máseleleri keltirildi.

Dissertaciyanıń ekinshi babında dara tuwındılı tórtinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın aralas-shegaralıq lokal máseleler qaralǵan. Qaralıp atırǵan máseleler ózgeriwshilerdi ajratıw usılı, variaciyalıq-proekciyalıq usıllar bolǵan Ritc usılı, Galerkin usılı menen sheshilgen. Sonday-aq, shekli

ayırmalar usılı járdeminde sanlı nátiyjeler alıńan. Bul máselelerdiń spektral qásiyetleri izertlengen. Bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın apriorlıq baha alıńan. Bul apriorlıq bahadan sheshimniń birden-birligi, ornıqlılıǵı kelip shıǵadı. Ayırım máselelerdiń sheshimi $L_2(\Omega)$ keńislikte bahalandırılǵan. Bazı bir máselelerdiń volterra máselesi ekenligi kórsetilgen.

Dissertaciyanıń úshinshi babında dara tuwındılı tórtinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın nelokal tuwrı hám kerı máseleler qaraldı. Sheshimniń barlıǵı hám birden birligi kórsetildi. Máseleniń sheshimi Riss bazisin payda etiwshi funkciyalardan dúzilgen qatar túrinde izlendi hám máseleniń dál sheshimi alındı.

Juwmaqlaw bóliminde dissertaciya jumısında keltirilgen teoriyalıq maǵlıwmatlar tiykarında alıńan ilimiy hám ámeliy nátiyjeler qısqasha bayanlanadı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar bóliminde dissertaciyanıń teması boyınsha 19 atamadaǵı tiykarǵı ádebiyatlar kirgizilip, olardıń arasında 12 ilimiy maqalalar hám 4 ilimiy monografiya, dissertaciylar bar.

Dissertaciyaǵa qosımshalarda jeke kompyuter ushın C++ algoritmlik tilinde dúzilgen baǵdarlamalardıń hám olardıń iske asırılıwınan alıńan sanlı nátiyjelerdiń basıp shıǵarılǵan nusqaları qosıp tigilgen.

I BAP. TO'RTINSHI TÁRTIPLI DARA TUWINDILI TEŃLEMELER, OLARDIŃ KLASSIFIKACIYASI, QOLLANILIWI HÁM OLARDI TÚRLERGE AJIRATIW

1.1-§. Tórtinshi tártipli dara tuwındılı teńlemeler hám olardıń qollanılıwı

Haqıyqıy dunyada bolatuǵın birneshe processler matematikalıq modellestirilgende, klassikalıq matematikalıq fızikanıń máseleleri bolmaǵan, dara tuwındılı teńlemeler ushın standart emes tuwrı hám kerı máselelerdi úyreniwge keltiriledi. Gaz dinamikasınıń dawıs tezligine jaqın hám onnan joqarı tezlikli máseleleri hám t.b. máseleler, qaralıp atırǵan oblasttıń túrli bóleginde hár túrli tipke derek bolǵan aralas túrdegi teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdi úyreniwge keltiriledi. Máselen, gáwek ortalıq menen qorshalǵan kanaldaǵı gazdıń háreketi haqqındaǵı másele, elektrik terbelisleriniń tarqalıwı máseleleri, jıllılıq hám massa ótkiziwshilik (massoperenos) máseleleri másele sheshilip atırǵan oblasttıń bir bóleginde parabolalıq túrge, ekinshi bóleginde giperbolalıq túrge derek boladı.

Geofızikanıń, okeanologıyanıń birneshe máseleleri, texnikada kriogen suyıqlıqlardı paydalanıw máseleleri, sonday-aq, sterjnnıń hám balkanıń terbelisi hám t.b tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan baslanǵısh-shegaralıq máselelerdi sheshiwge keltiriledi.

Tórtinshi tártipli teńlemelerge misal retinde tómendegilerdi keltiriw múmkin:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - \beta^2 u) + w_0^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} - \beta^2 u \right) - w_0^2 u_{xx} = 0, \quad (2)$$

bunda, β - stracifikaciya hádisesin (payda bolıwın) xarakterleytuǵın oń san, w_0 - Vyaysyal-Brent parametri, c - dawıs tezligi. (1) teńlemege bir ólshemli aǵımlardıń dinamikası teńlemesi, (2) teńlemege bolsa qısılatuǵın eksponencial

stratificirlengen suyıqlıqlardıń dinamikası teńlemesi delinedi. Bunday teńlemeler [23] jumıslarda úyrenilgen.

Dispergirirlengen ortalıqta tarqalatuǵın tolqın teńlemesin úyrenilgende

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = mc_0^2 \tau u_{xxt} - mc_0^2 \tau^2 u_{xxtt} \quad (3)$$

tórtinshi tártipli dara tuwındılı, sıızıqlı birtekli teńleme ushın shegaralıq máseleler úyreniledi, bunda u - tıǵızlıq, c_0 - dawıstıń tezligi, τ - relaksaciya waqıtı. (3) teńlemenin óń tárepindegi birinshi dissipativ aǵza hálsiz dispersiyalıq effektlerdi ańlatadı. (3) teńlemenin dara jaǵdayı tómendegi Bussineska-Lyav teńlemesi dep atalatuǵın

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = 0$$

teńleme boladı. Bul teńleme kese inerciyanıń effektlerin esapqa alǵanda jıńışke iyiliwshen sterjnnin boyına (prodolnıy) tolqının ańlatadı.

Sterjnnin hám balkanın kese tolqının úyreniw

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0$$

kórinistegi tórtinshi tártipli teńlemenin izertlewge keltiriledi.

Joqarıda keltirilgenlerdi hám basqa da buǵan uqsas túrli ilimiy texnikalıq máselelerdi esapqa alsaq, tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan shegaralıq hám aralas máselelerdi izertlewdiń zárúrligi kórinedi. A.V. Bicadze tórtinshi tártipli teńlemelerdi izertlewdiń zárúrligin kórsetti. Ol bunday teńlemelerden mısıl retinde

$$u_{xxxx} + 2 \operatorname{sgn} y u_{xyyy} + u_{yyyy} = 0$$

model teńlemenin usınıs etti. Bul teńleme M.M. Smirnovtıń, M.M. Meredovtıń, V.I. Jegalovtıń jumıslarında izertlengen.

Bundan basqa da [22, 36] jumıslarda

$$au_t(x, t) + bu_{tt}(x, t) + cu_{xx}(x, t) + du_{xxxx}(x, t) = f(x, t)$$

teńlemeler ushın shegaralıq máseleler izertlengen, bunda a, b, c, d san koefficientler bolıp, olar 0 yaki 1 ge teń, bazı bir jaǵdaylarda $d = \operatorname{sgn} t$ teń. Qaralıp atırǵan máselelerdin sheshiminiń birden birligi, bar bolıwı hám spektral

qásiyetleri izertlengen. Bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın $W_2^{k,m}(\Omega)$ sobolev keńisliginde apriorlıq baha alınǵan, bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın $L_2(\Omega)$ keńislikte sheshim bahalandırılǵan. Bazı bir máseleler ushın túyinles máseleler hám de kerı máseleler izertlengen. Olardıń sheshiminiń bar bolıwı, birden birligi kórsetilgen.

[32-33] jumislarda tórtmúyeshli oblastta

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= a(t)u(x,t) + f(x,t), \\ u_{tttt}(x,t) + 2u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) &= a(t)u(x,t) + f(x,t) \end{aligned}$$

teńlemeler ushın aralas-shegaralıq máseleler qaralǵan. Sheshimniń birden-birligi hám bar bolıwı kórsetilgen. Bul teńlemeler ushın qoyılǵan máseleler kerı máseleler boladı. Sebebi bunda $u(x,t)$ funkciya menen birge $a(t)$ funkciya da belgisiz funkciya boladı. Tiykarınan bul jumislarda shegaralıq shártler integrallıq shártler túrinde berilgen. Bunday shártler plazma fizikasınıń (fizikoy plazmı), jıllılıq tarqalıw máselelerinde, kapilyar ortalıqta ıǵal kóshiw processlerinde, demografiya hám matematikalıq biologiya máselelerinde hám t.b. qollanıladı.

[24] jumısta

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) = f(x,t)$$

teńlemeler ushın birneshe aralas-shegaralıq máseleler qaralǵan. Sheshimniń birden-birligi, bar bolıwı kórsetilgen. Máseleniń regulyar sheshimi ushın apriorlıq baha alınǵan, bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın $L_2(\Omega)$ keńisliginde baha alınǵan. Bazı bir máselelerdiń spektral qásiyetleri izertlengen. Qaralıp atırǵan máselelerdiń kúshli sheshiminiń barlıǵı hám birden-birligi kórsetilgen.

1.2-§. Tórtinshi tártipli teńlemelerdi túrlerge ajratıw

Meyli bazı bir Ω oblastta tómendegi tórtinshi tártipli dara tuwındılı, sıızıqlı, birtekli emes differenciallıq teńleme berilgen bolsın:

$$\begin{aligned}
& Au_{xxxx} + Bu_{xxxxy} + Cu_{xxxyy} + Du_{xyyy} + Eu_{yyyy} + \\
& + Fu_{xxx} + Ku_{xxy} + Lu_{xyy} + Mu_{yyy} + \\
& + Nu_{xx} + Pu_{xy} + Qu_{yy} + Ru_x + Su_y + Tu = G(x, y)
\end{aligned} \tag{1}$$

bunda $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, ..., $T = T(x, y)$ berilgen úzliksiz funkciyalar bolıp, olar teńleme koefficientleri, $G = G(x, y)$ teńlemenin saltań aǵzası dep ataladı.

Lemma. Eger $z = \varphi(x, y)$ funkciya

$$Az_x^4 + Bz_x^3z_y + Cz_x^2z_y^2 + Dz_xz_y^3 + Ez_y^4 = 0$$

teńlemenin sheshimi bolsa, onda hám tek sol jaǵdayda $\varphi(x, y) = \text{const}$ qatnas

$$A(dy)^4 - B(dy)^3dx + C(dy)^2(dx)^2 - Ddy(dx)^3 + E(dx)^4 = 0 \tag{2}$$

tórtinshi tártipli ádettegi differencial teńlemenin ulıwma integralı boladı.

(2) teńlemege (1) teńlemenin xarakteristikalıq teńlemesi, onın integralı xarakteristikalar dep ataladı.

(2) teńleme ushın

$$A\lambda^4 - B\lambda^3 + C\lambda^2 - D\lambda + E = 0 \tag{3}$$

xarakteristikalıq teńlemede

$$\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{A}} + \frac{B}{4A}$$

ornına qoyıwda paydalanamız. Onda

$$\mu^4 + p\mu^2 + q\mu + r = 0 \tag{4}$$

teńlemege iye bolamız, bunda

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{8A}(8AC - 3B^2), \quad q = \frac{1}{8A\sqrt{A}}(4ABC - 8A^2D - B^3), \\
r &= \frac{1}{256A^2}(256A^3E + 16AB^2C - 64A^2BD - 3B^4)
\end{aligned}$$

(4) teńlemenin diskriminantın tómendegi kóriniste jazıw múmkin:

$$\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3.$$

(1) teńlemini klasslarga ajıratıw ushın (3) yamasa (4) teńlemelerdiń korenlerinen paydalanamız.

Lemma. (4) teńleme:

1.
 - a) bir tórt eseli haqıyqıy sheshimge;
 - b) bir úsh eseli hám bir ápiwayı haqıyqıy sheshimge;
 - v) eki hár túrli eki eseli haqıyqıy sheshimge;
 - g) eki hár túrli kompleks-túyinles sheshimge iye;
 - d) bir eki eseli hám eki hár túrli haqıyqıy sheshimge iye;
 - e) bir eki eseli haqıyqıy hám eki kompleks-túyinles sheshimge iye;
2. tórt hár túrli haqıyqıy sheshimge iye;
3. tórt hár túrli kompleks-túyinles sheshimge iye;
4. eki hár túrli haqıyqıy hám eki kompleks-túyinles sheshimge iye bolıwı ushın, sáykes túrde tómendegi qatnaslardıń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli:

$$\Delta = 0, p = 0, r = 0, \quad (5)$$

$$\Delta = 0, p < 0, p^2 - 12r = 0, \quad (6)$$

$$\Delta = 0, p < 0, q = 0, r > 0, \quad (7)$$

$$\Delta = 0, p > 0, q = 0, r > 0, \quad (8)$$

$$\Delta = 0, p < 0, -p^2 < 12r < 3p^2, \quad (9)$$

$$\Delta = 0, p > -2\sqrt{r}, r \geq 0, \quad (10)$$

$$\Delta > 0, p < 0, -p^2 < 12r < 3p^2, \quad (11)$$

$$\Delta > 0, p > -2\sqrt{r}, r > 0, p \neq 2\sqrt{r}, \quad (12)$$

$$\Delta < 0. \quad (13)$$

Saldar. (1) teńleme P noqatta

- 1) parabolik túrge derek boladı, eger (5) shárt orınlı bolsa, yaǵnıy (4) teńleme bir tórt eseli haqıyqıy sheshimge iye bolsa;

- 2) giperbolik túrge sáykes keledi, eger (6), (7) yamasa (9) shárt orınlansa, yaǵnıy (4) teńleme tek haqıyqıy sheshimlerge iye bolıp, olardan biri yamasa eki eseli yamasa úsh eseli bolsa;
- 3) qatań giperbolik túrge sáykes keledi, eger (11) shárt orınlansa, yaǵnıy (4) teńleme hár túrli haqıyqıy sheshimlerge iye bolsa;
- 4) elliptik túrge sáykes boladı, eger (8) yamasa (12) shártler orınlansa, yaǵnıy (4) teńleme eki hár túrli eki eseli yamasa tórt hár túrli kompleks-túyinles sheshimlerge iye bolsa;
- 5) Sostavnoy túrge sáykes boladı, eger (10) yamasa (13) shártler orınlansa, yaǵnıy (4) teńleme hám haqıyqıy hám kompleks-túyinles sheshimlerge iye bolsa.

Differencial teńlemelerdiń túrin anıqlaw ular ushın korrektli máselelerdi qoyıw ushın hám olardı sheshiw usılların tańlaw ushın qolay boladı.

I bap boyınsha juwmaqlaw

Jumıstıń birinshi babında tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler hám olardıń qollanılıwı, sonday-aq, xarakteristik teńlemenıń diskriminantı hám koefficientlerine qarata olardı túrlerge ajırıtıw usılları qaraldı.

II BAP. TO'RTINSHI TÁRTIPLI TEÑLEME USHIN SHEGARALIQ MÁSELELERDİN SHESHILIWI

2.1-§. Tórtinshi tártipli teñleme ushın bir shegaralıq máseleń sheshiliwi

Bul paragrafta tórtinshi tártipli parabolalıq túrdegi teñleme ushın bir aralas-shegaralıq másele qaralǵan. Máseleń sheshimi ushın apriorlıq baha alıńǵan, sheshimnıń birden birliǵı hám bar ekenliǵı kórsetilgen.

Dáslep bazı bir anıqlamalardı keltiremiz.

1-anıqlama. Eger evklid keńisliginde f hám g elementleriniń (funkciyalardıń) (f, g) skalyar kóbeymesi nólge teń bolsa, yaǵnıy $(f, g) = 0$ bolsa, onda olarǵa ortogonal delinedi. Eger $\|f\| = 1$ bolsa, onda onı normallanǵan delinedi.

Meyli sheksiz ólshemli evklid keńisliginde $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ elementlerdin izbe-izliǵı berilgen bolsın. Eger bul sistemanıń elementleri jup-juptan ortogonal hám norması birge teń bolsa, onda bul sistemanı ortonormallanǵan dep ataymız.

Eger $\{\psi_k\}$ sistemanıń bárshe ψ_k elementlerine ortogonal bolǵan, nol elementten basqa hesh qanday f element tabılmasa, onda bul ortonormallanǵan sistema tolıq dep ataymız,

1-másele. $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < q\}$ oblastta

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xxxx}(x, t) - b^2 u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

teñlemenin

$$u(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0 \quad (2)$$

hámde

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0 \quad (3)$$

shártlerdegi sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Dáslep tómendegi belgilewlerdi kirgizemiz.

$$V(\Omega) = \left\{ u(x, t) : u \in C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega), (2) - (3) \right\}$$

$$W(\Omega) = \left\{ f(x, t) : f(x, t) \in C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega}), f_{xxx} \in L_2(\Omega), \right. \\ \left. f(0, t) = f(p, t) = 0, f_{xx}(0, t) = f_{xx}(p, t) = 0 \right\}$$

Aprior baha

Endi (4), (2), (3) máseleniń sheshimi ushın aprior baha alıwǵa háreket etemiz. (4) teńlemeniniń eki tárepiniń hám u funkciyaǵa kóbeytirip Ω oblast boyınsha integrallaymız.

$$\int_0^p \int_0^q [uu_{tt} - uu_{xxxx} - b^2 u^2] dx dt = \int_0^p \int_0^q f u dx dt$$

Integral astındaǵı funkciyalardı bólekler boyınsha integrallaw ushın qolay túrge alıp kelemiz.

$$u \cdot u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u_t) - u_t^2$$

$$u \cdot u_{xxxx} = \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_x \cdot u_{xx}) + u_{xx}^2$$

Bulardı ornına qoyıp tómendegilerge iye bolamız.

$$\int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u_t) dt dx - \int_0^p \int_0^q u_t^2 dt dx - \int_0^q \int_0^p \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u_{xxx}) dx dt + \\ \int_0^q \int_0^p \frac{\partial}{\partial x} (u_x \cdot u_{xx}) dx dt - \int_0^q \int_0^p u_{xx}^2 dx dt - b^2 \int_0^q \int_0^p u^2 dx dt = \int_0^q \int_0^p f u dx dt$$

Birinshi integraldı esaplaymız.

$$\int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u_t) dt dx = \int_0^p \left[\int_0^q \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot u_t) dt \right] dx = \int_0^p [u \cdot u_t]_0^q dx = \\ = \int_0^p [u(x, q)u_t(x, q) - u(x, 0)u_t(x, 0)] dx = 0 \quad ((3) \text{shárt boyınsha})$$

Solay etip qalǵan integralların integrallap hám esaplap ápiwaylastırǵannan keyin

$$\int_0^q \int_0^p u_t^2 dx dt + \int_0^q \int_0^p u_{xx}^2 dx dt + b^2 \int_0^q \int_0^p u^2 dx dt = - \int_0^q \int_0^p f_n dx dt$$

yamasa

$$\|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + b^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_0^p \int_0^q (-fu) dx dt$$

boladı.

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0$$

teńsizlikten paydalansaq onda

$$\|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + b^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

teńsizligine iye bolamız.

$$\|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(b^2 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|f\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$b^2 - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = b^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2}{2b^2 - 1}$$

$$\|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{2b^2 - 1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Normanıń anıqlaması boyınsha

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_0^p \int_0^a u_x^2 dx dt$$

boladı. Normanıń oń tárepindegi integral astındaǵı funkciyanı bólekler boyınsha integrallaymız.

$$\int_0^q \int_0^p u_x^2 dx dt = \int_0^q \int_0^p u_x u_x dx dt = \int_0^q \int_0^p \left[\frac{\partial}{\partial x} (uu_x) - uu_{xx} \right] dx dt = - \int_0^q \int_0^p uu_{xx} dx dt$$

Onda

$$\|u_x\|_{L_2(\pi)}^2 = \int_0^q \int_0^p (-uu_{xx}) dx dt$$

yamasa

$$\|u_x\|_{L_2(\pi)}^2 \leq \varepsilon_1 \|u\|_{L_2(\pi)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|u_{xx}\|_{L_2(\pi)}^2$$

$$\varepsilon_1 \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon_1^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Onda

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon_1^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{2b^2 - 1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ & \frac{1}{2} - \varepsilon_1^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon_1^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{3} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{2b^2 - 1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

teńsizliktiń shep tárepindegi ekinshi hám úshinshi qosılıwshını taslaymız, bul jaǵdayda

$$\|u_x\|^2 \leq \frac{2\sqrt{b}}{2b^2 - 1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2$$

boladı. Demek

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\frac{2\sqrt{b} + 4}{2b^2 - 1} \right] \|f\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Eger $\frac{2\sqrt{b} + 4}{2b^2 - 1} = c$ dep belgilesek, onda

$$\|u\|_{w_2^{2,1}(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (5)$$

boladı.

Aluǵan (5) aprior bahadan (4), (2), (3) mäseleniń sheshiminiń birden-birligi hám baslanǵısh berilgenlerden úzliksiz ǵárezliligi kelip shıǵadı.

1-anıqlama. 1) Ω oblastta úzliksiz; 2) Ω oblastta t boyınsha 2-tártipke shekem hám x boyınsha 4-tártipke shekem úzliksiz tuwındılarǵa iye; 3) (1) teńlemenini hám (2)-(3) shártlerdi klassikalıq mániste qanaatlandıratuǵın $u(x, t)$ funkciya (1)-(3) mäseleniń regulyar sheshimi delinedi.

Bul mäseleni Furiye usılı menen sheshemiz. (4) teńlemeniniń dara sheshimi

$$u(x, t) = T(t)X(x)$$

kóriniste izleyemiz. Bunı (4) ge sáykes bir tekli teńlemege qoyıp alamız.

$$T''(t)X(x) - X^{IV}(x)T(t) - b^2X(x)T(t) = 0$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - b^2 = \frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = \lambda^4$$

bunnan $X^{IV}(x) - \lambda^4 X(x) = 0$ hám $T''(t) - (\lambda^4 + b^2)T(t) = 0$ ádettegi differencial teńlemelerge iye bolamız. (2) hám (3) shártler bolsa sáykes túrde

$$X(0) = X(p) = X''(0) = X''(p) = 0$$

hám

$$T(0) = T(p) = 0$$

boladı. Biz dáslep

$$X^{IV}(x) - \lambda^4 X(x) = 0$$

$$X(0) = X(p) = X''(0) = X''(p) = 0$$

máseleni qaraymız. Bul máseleniń sheshimi

$$X_n(x) = C_n \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}$$

boladı. $X_n(x)$ sheshimin normallaymız, yaǵnıy $\|X_n\| = 1$ dep alamız. onda

$$1 = \|X_n\|^2 = \int_0^p C_n^2 \sin^2 \lambda_n x dx = C_n^2 \int_0^p \frac{1 - \cos 2\lambda_n x}{2} dx = \frac{C_n^2}{2} \left[x - \frac{\sin 2\lambda_n x}{4\lambda_n} \right]_0^p = \frac{C_n^2 p}{2}$$

boladı. Bunnan $C_n = \sqrt{\frac{2}{p}}$. onda $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x$ boladı. Endi (6) nıń ekinshi

teńlemesin qaraymız.

$$T_n''(t) - (\lambda^4 + b^2)T_n(t) = 0$$

Eger $\lambda_n^4 + b^2 = \nu_n^2$ dep belgilew kiritsek, onda

$$T_n''(t) - \nu_n^2 T_n(t) = 0$$

boladı. Bul teńlemenin sheshimi

$$T_n(t) = a_n e^{\nu_n t} + b_n e^{-\nu_n t}$$

boladı. (4) teńlemenin sheshimin

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (7)$$

kóriniste izlep, bunı (4) ge aparıp qoyıp, bul teńlemenıń oń tárepindegi $f(x, t)$ funkciyanı $X_n(x)$ sistema boyınsha Furiye qatarına jikleymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) X_n(x) - T_n(t) X_n^{IV}(x) - b^2 T_n(t) X_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

yamasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) - \lambda_n^4 T_n(t) - b^2 T_n(t)] X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x).$$

Bunnan $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x$ funkciyalar sistemasın ortogonalılıǵın esapqa alsaq

$$T_n''(t) - (\lambda_n^4 + b^2) T_n(t) = f_n(t)$$

teńlemege kelemiz.

$$T_n''(t) - \nu_n^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (8)$$

Dáslep birtekli teńlemenı sheship alıp, onıń sheshiminde turaqlı variaciyalaw usulnan paydalanamız, yaǵnıy

$$T_n(t) = a_n(t) e^{\nu_n t} + b_n(t) e^{-\nu_n t} \quad (9)$$

dep alamız. Onda

$$\begin{cases} a_n'(t) e^{\nu_n t} + b_n'(t) e^{-\nu_n t} = 0 \\ a_n'(t) e^{\nu_n t} - b_n'(t) e^{-\nu_n t} = \frac{1}{\nu_n} f_n(t) \end{cases}$$

sistemaǵa iye bolamız. Bul sistemani sheship alamız:

$$a_n'(t) = -\frac{1}{2\nu_n} f_n(t) e^{-\nu_n t} \quad b_n'(t) = -\frac{1}{2\nu_n} f_n(t) e^{\nu_n t}$$

Alınǵan koefficienttiń ańlatpaların 0 dan t ǵa shekem integrallasaq, onda

$$a_n(t) = a_n + \frac{1}{2\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) e^{-\nu_n \tau} d\tau, \quad b_n(t) = b_n - \frac{1}{2\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) e^{\nu_n \tau} d\tau$$

boladı. Bul tabılǵan mánislerdi (9) aparıp qoysaq

$$T_n(t) = a_n e^{\nu_n t} + b_n e^{-\nu_n t} + \frac{1}{2\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) [e^{\nu_n(t-\tau)} - e^{-\nu_n(t-\tau)}] d\tau$$

yaki

$$T_n(t) = a_n e^{\nu_n t} + b_n e^{-\nu_n t} + \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(t - \tau) d\tau \quad (10)$$

sheshimge iye bolamiz. onda

$$T(0) = T(q) = 0$$

shártlerinen paydalansaq, a_n hám b_n koefficientlerin tabıw ushın

$$\begin{cases} a'_n + b'_n = 0 \\ a'_n e^{\nu_n t} - b'_n e^{-\nu_n t} + \frac{1}{\nu_n} \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - \tau) d\tau = 0 \end{cases}$$

teńlemeler sistemasına iye bolamiz. Sistemanı sheship

$$a_n = \frac{-1}{2\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - \tau) d\tau$$

$$b_n = \frac{1}{2\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - \tau) d\tau$$

Bulardı (10) ğa qoyamiz.

$$T_n(t) = \left[\frac{-e^{\nu_n t}}{2\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} + \frac{e^{-\nu_n t}}{2\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} \right] \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - \tau) d\tau + \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(t - \tau) d\tau$$

yaki

$$T_n(t) = -\frac{\operatorname{sh} \nu_n t}{\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - \tau) d\tau + \frac{1}{\nu_n} \int_0^t f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(t - \tau) d\tau$$

Bul alınğan sheshimdegı birinshi integraldı 0 den t ğa, t dan q ğa shekem dep ekige bólip, ekinshi integral menen biriktirsek

$$T_n(t) = -\frac{1}{\nu_n \operatorname{sh} \nu_n q} \left\{ \int_0^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(q - t) \operatorname{sh} \nu_n \tau d\tau + \int_t^q f_n(\tau) \operatorname{sh} \nu_n(t - \tau) \operatorname{sh} \nu_n t d\tau \right\}$$

yaki

$$T_n(t) = \frac{1}{\nu_n} \int_0^q K_n(t, \tau) f_n(\tau) d\tau$$

boladı, bunda

$$K_n(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{sh} \nu_n(q-t) \operatorname{sh} \nu_n \tau}{\operatorname{sh} \nu_n q}, & 0 \leq \tau \leq t \\ -\frac{\operatorname{sh} \nu_n(q-\tau) \operatorname{sh} \nu_n t}{\operatorname{sh} \nu_n q}, & t \leq \tau \leq q \end{cases} \quad (11)$$

(4) teńlemenin (7) sheshimi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\nu_n} \int_0^q f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau$$

kóriniste boladı. Eger

$$f_n(t) = \int_0^p f(x, t) X_n(x) dx$$

ekenligin esapqa alsaq, onda

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} \int_0^p \int_0^q K_n(t, \tau) f(\xi, \tau) X_n(x) X_n(\xi) d\xi d\tau$$

yamasa

$$u(x, t) = \int_0^p \int_0^q K(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (12)$$

boladı, bunda

$$K(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} K_n(t, \tau) X_n(x) X_n(\xi) \quad (13)$$

$K_n(t, \tau)$ funkciyanın shegaralanǵanlıǵın kórsetemiz.

$$0 \leq \tau \leq t \quad \text{bolǵanda} \quad |K_n(t, \tau)| \leq \frac{e^{\nu_n(q-t)} e^{\nu_n \tau}}{e^{\nu_n q}} = e^{-\nu_n(t-\tau)},$$

$$t \leq \tau \leq q \quad \text{bolǵanda} \quad |K_n(t, \tau)| \leq \frac{e^{\nu_n(q-\tau)} e^{\nu_n t}}{e^{\nu_n q}} = e^{-\nu_n(\tau-t)}.$$

Demek $|K_n(t, \tau)| \leq e^{-\nu_n|t-\tau|}$, boladı. onda $K(x, t; \xi, \tau)$ nın óń tárepindegi qatar absolyut hám teń ólshemli jıynaqlı boladı. Onda

$$|K_n(t, \tau)| < C, \quad C = \text{const}$$

shárt orınly boladı. Bunnan

$$|K(x, t, \xi, \tau)| < C, \quad C = \text{const} \quad (14)$$

bolatuǵınlıǵın kóriwge boladı.

Endi (12) sheshimniń (4) teńlemege kiretuǵın tuwındılarınan ibarat qatarlardıń másele qaralıp atırǵan oblastta absolyut hám teń ólshemli jiynaqlı ekenligin kórsetiwimiz kerek. u_{tt} hám u_{xxxx} tuwındıların esaplaymız.

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x), \quad u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^4 T_n(t) X_n(x) \quad (15)$$

Birinshi qatardıń teń ólshemli jiynaqlılıǵın kórsetemiz. Majorant qatar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n''(t)|$$

túrde boladı. Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{\text{sh } \nu_n q} \left| \text{sh } \nu(q-t) \int_0^t f_n(\tau) \text{sh } \nu_n \tau d\tau \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n}{\text{sh } \nu_n q} \left| \text{sh } \nu_n t \int_0^t f_n(\tau) \text{sh } \nu_n (q-\tau) d\tau \right|$$

Dáslepki qosındıdaǵı aǵzanı bahalandıramız. Ol $\sqrt{\nu_n} \|f_n\|_{L_2(\Omega)}$ boladı. $f(x, t)$ funkciyanı úsh márte bólekler boyınsa integtalasaq, hám $f(0, t) = f(p, t) = 0$, $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(p, t) = 0$, $f_{xxx} \in L_2(\Omega)$ belgilewlerin kiritsek, onda majorant qatar jiynaqlı boladı. Onda (15) qatar absolyut hám teń ólshemli jiynaqlı boladı.

Endi (1)-(3) máseleniń spektral qásiyetlerin izertleymiz.

1-teorema. (1)-(3) máseleniń spektri diskret boladı.

Dálilleniwi. (12) formula hám (14) bahalawdan $V(\Omega)$ kóplikte anıqlanǵan L operator ushın, $W(\Omega)$ kóplikte anıqlanǵan hám $W(\Omega)$ kóplikten $V(\Omega)$ kóplikke

$$(L^{-1} f)(x, t) = \int_0^q \int_0^p K(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

qağıyda boyınsha tásir etiwshi (действующий) L^{-1} shekli kerı operatordıń barlıǵı kelip shıǵadı. L^{-1} operatordıń anıqlanıw oblastınıń $L_2(\Omega)$ da tıǵız bolǵanlıǵı sebepli, onı úzliksizligi ushın pútin $L_2(\Omega)$ keńislikke dawam etiw múmkin. Bul dawam etilgen operatordı $\bar{L}^{-1}$ arqalı belgileymiz hám ol L^{-1} operatordıń tuyıqlanıwı (замыкание) boladı, bunda $D(\bar{L}^{-1}) = L_2(\Omega)$ boladı. L operator $L_2(\Omega)$ da tıǵız bolǵan $V(\Omega)$ kóplikte anıqlanǵan. Sol sebepten (5) bahalaw boyınsha $\bar{L}^{-1}$ operator L operatordıń $\bar{L}$ tuyıqlanıwıtıń kerı operatorı boladı [18]. $D(\bar{L})$ kóplik (1)-(3) máseleniń bárshe kúshli sheshimlerinden ibarat boladı. (14) bahalawdan $K_1(x, t; \xi, \tau) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Sol sebepten $\bar{L}^{-1}$ operator $L_2(\Omega)$ dan $L_2(\Omega)$ ǵa tásir etiwshi tolıq úzliksiz operator boladı. Onda $\bar{L}^{-1}$ opertordıń spektri, sonday-aq, $\bar{L}$ operatordıń spektri bárshe tegislikte jaylasqan boladı hám shekli eseli menshikli mánislerden ibarat boladı. $\bar{L}$ i $\bar{L}^{-1}$ opertordıń menshikli mánisleri arasındaqı baylanıs tómendegishe [12]: eger $\mu_n \neq 0$ san $\bar{L}^{-1}$ operatordıń menshikli mánisi bolsa, onda $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ san $\bar{L}$ operatordıń menshikli mánisi boladı. Solay etip, (1)-(3) máseleniń spektri shekli eseli menshikli mánislerden ibarat boladı, yaǵnıy diskret boladı. Teorema dálillendi.

Saldar. $\bar{L}^{-1}$ operator óz-ózone túyinles boladı.

2.2-§. Tórtinshi tártipli teńleme ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq máseleni

Ritc usılı menen sheshiw

Shegaralıq hám aralas-shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın qollanılatuǵın variaciyalıq usıllar 1908-jılda nemis matematigi Ritc Valter tárepinen Ritc usılı dep atalatuǵın juwıq usıl islep shıǵılǵannan keyin rawajlanıp basladı. Variaciyalıq usıllardıń tiykarǵı ideyası tómendegiden ibarat: bunda qaralıp atırǵan shegaralıq yamasa aralas-shegaralıq másele, oǵan ekvivalent bolǵan, bazı bir funkcionalǵa

ekstremum (ádette minimum) mánis beriwshi funkciyanı tabıw máselesi menen almasırladı.

1-anıqlama. Eger L operatordıń anıqlanıw oblastına derek bolǵan qálegen u funksiya ushın $(Lu, u) \geq 0$ teńsizlik orınlı bolsa hám tek ǵana $u \equiv 0$ bolǵanda $(Lu, u) = 0$ bolsa, onda L oń operator delinedi.

2-anıqlama. Eger L operatordıń anıqlanıw oblastına derek bolǵan qálegen u hám v funktciyalar ushın $(Lu, v) = (u, L^*v)$ shárt orınlı bolsa, onda L^* operatorǵa L operatordıń túyinles operatorı delinedi. Eger $L = L^*$ bolsa onda L operator óz-ózine túyinles yamasa simmetriyalı delinedi.

Bul usıldı shegaralıq máselelerdi sheshiwge qollaw ushın: 1) teńlemenin operatorı simmetriyalı hám oń bolıw kerek; 2) teńlemenin operatorı hám shártler sıızqlı bolıw kerek.

Ritc usılında minimallastırıwshı izbe-izlikti jasaw ushın, tómendegi shártlerdi qanaatlantırıwshı

$$\phi_1(x, t), \phi_2(x, t), \dots, \phi_n(x, t), \dots,$$

koordinata funktciyaları tańlap alınadı:

- 1) $\phi_i(x, t)$ funktciyalar $\bar{\Omega}$ oblastta teńlemede bar bolǵan tuwındılardıń tártibine shekem úzliksiz differenciallanatuǵın funktciyalar;
- 2) $\phi_i(x, t)$ funktciyalar berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlantıradı;
- 3) Qálegen shekli sanda alıńan bul funktciyalar sıızqlı baylanıslı emes;
- 4) Qálegen $\varepsilon > 0$ san ushın hám qaralıp atırǵan variaciyalıq máselenin múmkin bolǵan funktciyalar kópligine derek bolǵan qálegen $u(x, t)$ funksiya ushın sonday bir n pútın san hám $a_1, a_2, \dots, a_n$ sanlar tapıladı hám

$$\left(L \left(u - \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right), u - \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \right) < \varepsilon$$

shárt orınlanadı. Bul aqırǵı teńsizlik orınlanıwı ushın $u \in L_2(G)$ hám qálegen

$\varepsilon > 0$ san ushın $b_1, b_2, \dots, b_m$ sanlar bar bolıp

$$\iint_G \left[u - \sum_{i=1}^m b_i L \varphi_i \right]^2 dx dy < \varepsilon$$

shárttıń orınlanıwın talap etiw kerek.

Qaralıp atırǵan másele Ritc usılı menen sheshilgende minimallastırıwshı izbe-izlik

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y)$$

túrde boladı. Bunda a_i koeficientler, anıqlanıwı kerek bolǵan házirshe belgisiz turaqlılar

Endi $\varphi_k(x, t)$ funkciyaların tańlap alıwdıń múmkin bolǵan jaǵdayların qarastıramız. Meyli, $\varphi_k(y)$ funkciyalar sisteması $[0, 1]$ kesindide tolıq sistema bolsın. Bul jaǵdayda $\left\{ \varphi_k \left(\frac{y - g}{h - g} \right) \right\}$ funkciyalar sisteması $[g, h]$ kesindisinde tolıq sistema boladı. Usı sebepten, $x = a$ hám $x = b$ tuwrı sızıqlar hám de $y = g(x)$ hám $y = h(x)$ iymek sızıqlar menen shegaralanǵan tuyıq oblast ushın $\varphi_k(x, t)$ funkciyalar sıpatında

$$\chi_k(x, t) = \phi_k \left(\frac{t - g(x)}{h(x) - g(x)} \right), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

funkciyalar sistemasın qabıl etiw múmkin. Dara jaǵdaylarda X_k funkciyalardı tómendegishe tańlap alıw múmkin:

$$\chi_k(x, t) = (t - g(x))(h(x) - t)t^{k-1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\chi_k(x, t) = \sin \frac{k\pi(t - g(x))}{h(x) - g(x)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Eger oblast quramalı kóriniste bolsa, onda oblasttıń hár túrli bóleginde X_n hám u_n hár túrli kóriniste beriledi hám olardı qurıwda interpolıyacıyalıq formulalardan paydalanıw maqsetke muwapıq boladı. Bunda oblast shekli sandaǵı bóleklerge bólinip, hár bir bólekte u_n ushın ańlatpa jazıladı.

1-másele. $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ oblastta

$$Lu \equiv -u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + q^2 u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

teńlemenin

$$u(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0 \quad (3)$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin Ritc usılı menen tabıń.

Sheshiliwi. Bul máseleni Ritc usılı menen sheshiw ushın kerek bolǵan eki teoremanı dálillewsiz keltiremiz.

1-teorema. Meyli L simmetriyalı hám sıızıqlı operator oń bolsın. Onda (1) operator teńleme (2)-(3) shártlerde eki sheshimge iye bola almaydı, yaǵnıy (1)-(3) máselenin sheshimi bar bolsa, ol birden-bir boladı.

2-teorema. Meyli L simmetriyalı hám sıızıqlı operator qaralıp atırǵan oblastta oń operator bolsın. $J[u(x, t)]$ funktsional

$$J[u(x, t)] = (Lu, u) - 2(f, u) = \int_0^T \int_0^p (Lu - 2f) u dx dt$$

kóriniste bolsın. Eger birtekli shártli (1)-(3) másele $\bar{u}$ sheshimge iye bolsa, onda bul sheshim $J[u(x, t)]$ funktsionalǵa minimum mánis beredi. Kerisinshe, eger $\bar{u}$ funktsiya $J[u(x, t)]$ funktsionalǵa minimum mánis berse, onda bul funktsiya (1)-(3) máselenin sheshimi boladı.

Endi joqarıda keltirilgen teoremlarǵa tiykarlanıp, (1)-(3) máseleni Ritc usılı menen sheshiwge kirisemiz. Dáslep (1)-(3) máselenin operatorınin simmetriyalı ekenligin kórsetemiz. Bunın ushın (1) teńlemenin eki tárepini de $v \in D(L)$ funktsiyaǵa kóbeytirip, Ω oblast boyınsha integraymız:

$$(Lu, v) = \int_0^T \int_0^p [-vu_{tt} + vu_{xxxx} + q^2 vu] dx dt.$$

Endi tómendegi túrlendiriwlerden paydalanamız:

$$vu_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(vu_t) - \frac{\partial}{\partial t}(v_t u) + v_{tt}u,$$

$$vu_{xxxx} = \frac{\partial}{\partial x}(vu_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x}(v_x u_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x}(v_{xx} u_x) - \frac{\partial}{\partial x}(v_{xxx} u) + v_{xxxx}u.$$

Bul túrlendiriwlerdi funkcionalda ornına qoyıp, bazı bir ápiwayılastırıwlardı orınlap alamız:

$$(Lu, v) = \int_0^p \left[-vu_t \Big|_0^T + v_t u \Big|_0^T \right] dx + \int_0^T \left[vu_{xxx} \Big|_0^p - v_x u_{xx} \Big|_0^p + v_{xx} u_x \Big|_0^p - v_{xxx} u \Big|_0^p \right] dx +$$

$$+ \int_0^T \int_0^p \left[-v_{tt} + v_{xxxx} + q^2 v \right] u dx dt = \int_0^T \int_0^p \left[-v_{tt} + v_{xxxx} + q^2 v \right] u dx dt = (u, Lv),$$

bunda u hám v funkciyalar ushın (2)-(3) shegaralıq shártler paydalanıldı. Demek, L operator operator simmetriyalı.

Endi L operatordıń oń operator ekenligin kórsetemiz. (1) teńlemenıń eki tárepın de u funkciyaǵa kóbeytirip, Ω oblast boyınsha integraymız:

$$(Lu, u) = \int_0^T \int_0^p \left[-uu_{tt} + uu_{xxxx} + q^2 u^2 \right] dx dt.$$

Endi

$$u \cdot u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(u \cdot u_t) - u_t^2,$$

$$u \cdot u_{xxxx} = \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot u_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x}(u_x \cdot u_{xx}) + u_{xx}^2 \quad (4)$$

túrlendiriwlerden paydalanamız. Onda

$$(Lu, u) = - \int_0^p uu_t \Big|_0^T dx + \int_0^T uu_{xxx} \Big|_0^p dt - \int_0^T u_x u_{xx} \Big|_0^p dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^p \left[u_t^2 + u_{xx}^2 + q^2 u^2 \right] dx dt = \int_0^T \int_0^p \left[u_t^2 + u_{xx}^2 + q^2 u^2 \right] dx dt. \quad (5)$$

Bunnan $(Lu, u) \geq 0$ boladı.

Eger $(Lu, u) = 0$ bolsa, onda (5) formuladan $u_t = 0$, $u_{xx} = 0$, $u = 0$ kelip shıǵadı. Bunnan $u \equiv 0$ boladı. Demek, L operator oń boladı eken.

$f(x, t)$ funkciya qaralıp atırğan oblastta Furiyeniń teń ólshemli jıynaqlı qos qatarına tómendegishe jiklenetuǵın bolsın:

$$f(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T},$$

bul jerde $b_{lk} = \frac{2}{pT} \int_0^T \int_0^p f(x, t) \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} dx dt$. (1) teńleme

$$J[u(x, t)] = \int_0^T \int_0^p F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) dx dt \quad (6)$$

bunda

$$F = u_t^2(x, t) + u_{xx}^2(x, t) + q^2 u(x, t) + 2u(x, t) f(x, t),$$

funkcional ushın ushın Eyler – Ostrogradskiy teńlemesi boladı. Haqıyqatın da hám

$$(Lu, u) - 2(f, u) = \int_0^T \int_0^p [-u_{tt} + u_{xxxx} + q^2 u] u dx dt - 2 \int_0^T \int_0^p f u dx dt. \quad (7)$$

(4) túrlendiriwden paydalanamız. Bulardı aparıp (7) ke qoyıp, alamız:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^p \left[-\frac{\partial}{\partial t} (uu_t) + u_t^2 + \frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_{xx}) + u_{xx}^2 + q^2 u^2 \right] dx dt - 2 \int_0^T \int_0^p f u dx dt = \\ & = - \int_0^p uu_t \Big|_0^T dx + \int_0^T uu_{xxx} \Big|_0^p dt - \int_0^T u_x u_{xx} \Big|_0^p dt + \int_0^T \int_0^p [u_t^2 + u_{xx}^2 + q^2 u^2 - 2fu] dx dt. \end{aligned}$$

Bul jerde birinshi hám ekinshi integral astındaǵı ańlatpalar (2)-(3) shártler boyınsha nolge teń boladı. Bunnan,

$$F_u = 2q^2 u - 2f, \quad F_{u_t} = 2u_t, \quad F_{u_x} = 0, \quad F_{u_{xx}} = 2u_{xx}$$

boladı. Bulardı aparıp, Eyler-Ostrogradskiydiń

$$F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_t}}{\partial t} + \frac{\partial^2 F_{u_{xx}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{u_{xt}}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 F_{u_{tt}}}{\partial t^2} = 0$$

teńlemesine qoysaq, (1) teńleme kelip shıǵadı.

Koordinata funkciyaların

$$w_{nm}(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi t}{T}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

kóriniste izleyemiz. Bul funkciyalar (2) hám (3) shártlerdi qanaatlantıradı. Bunnan basqa da, bul funkciyalar sisteması tolıq sistemanı payda etedi. Endi (1)-(3) mäseleniń juwıq sheshimin

$$u_{nm}(x, t) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} \quad (9)$$

kóriniste izleyemiz. Onı (6) funkcionalda ornına qoyamız:

$$J[u_{nm}(x, t)] = \int_0^T \int_0^p \left[\left(\frac{\partial u_{nm}(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_{nm}(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 + q^2 u_{nm}(x, t) + \right. \\ \left. + 2u_{nm}(x, t) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{lk} \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} \right] dx dt.$$

Bul funkcionalda integrallardı esaplaymız. Bunda (8) funkciyalardıń tolıq sistemanı payda etetuǵınlıǵın hám $l \neq l_1, k \neq k_1$ bolǵanda

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^p \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} \sin \frac{l_1\pi x}{p} \sin \frac{k_1\pi t}{T} dx dt &= \int_0^p \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{l_1\pi x}{p} dx \int_0^T \sin \frac{k\pi t}{T} \sin \frac{k_1\pi t}{T} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^p \left[\cos \frac{(l-l_1)\pi x}{p} - \cos \frac{(l+l_1)\pi x}{p} \right] dx \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos \frac{(k-k_1)\pi t}{T} - \cos \frac{(k+k_1)\pi t}{T} \right] dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{p}{(l-l_1)\pi} \sin \frac{(l-l_1)\pi x}{p} \Big|_0^p - \frac{1}{2} \frac{p}{(l+l_1)\pi} \sin \frac{(l+l_1)\pi x}{p} \Big|_0^p \right] \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \frac{T}{(k-k_1)\pi} \sin \frac{(k-k_1)\pi t}{T} \Big|_0^T - \frac{1}{2} \frac{T}{(k+k_1)\pi} \sin \frac{(k+k_1)\pi t}{T} \Big|_0^T \right] = 0 \end{aligned}$$

hám de $l = l_1, k = k_1$ bolǵanda

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^p \sin^2 \frac{l\pi x}{p} \sin^2 \frac{k\pi t}{T} dx dt &= \int_0^T \sin^2 \frac{k\pi t}{T} dt \int_0^p \sin^2 \frac{l\pi x}{p} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^T \left(1 - \cos 2 \frac{k\pi t}{T} \right) dt \int_0^p \left(1 - \cos 2 \frac{l\pi x}{p} \right) dx = \frac{pT}{4} \end{aligned}$$

bolatuǵınlıǵın esapqa alsaq,

$$J[u_{nm}(x, t)] = \frac{\pi^2}{4p^3T} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m (k^2 p^4 + l^4 T^2) a_{lk}^2 +$$

$$+ q^2 \frac{pT}{4} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk}^2 + \frac{pT}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} b_{lk}$$

teńlikke iye bolamız. Teńliktiń oń tárepi a_{lk} , ($l = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$) belgisiz turaqlılarǵa kóp argumentli funkciya boladı, yaǵnıy

$$J[u_{nm}] = \varphi(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}).$$

Bul funkciyanıń ekstremumın tabamız. Bunıń ushın

$$\frac{\partial u_{nm}}{\partial a_{lk}}, (l = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m) \text{ tuwındıladı esaplaymız hám}$$

$$\frac{\partial u_{nm}}{\partial a_{lk}} = \frac{1}{2p^3T} \pi^2 (k^2 p^4 + l^4 T^2) a_{lk} + q^2 \frac{pT}{4} a_{lk} + \frac{pT}{2} b_{lk} = 0,$$

$$(l = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m)$$

teńlemeler sistemasın sheshemiz. Olardıń sheshimi

$$a_{lk} = \frac{p^4 T^2}{\pi^2 (k^2 p^4 + l^4 T^2) + q^2 p^4 T^2} b_{lk}, (l = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m),$$

yamasa

$$a_{lk} = \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{k^2}{T^2} + \frac{l^4}{p^4} \right) + q^2} \beta_{lk}, (l = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m)$$

boladı. Bunı aparıp, (9) de ornına qoyıp,

$$u_{nm}(x, t) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{p^4 T^2 b_{lk}}{\pi^2 (k^2 p^4 + l^4 T^2) + q^2 p^4 T^2} \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T}$$

(1)-(3) mäseleniń Ritc usılı menen tabılǵan juwıq sheshimine iye bolamız. $n \rightarrow \infty$ hám $m \rightarrow \infty$ bolǵanda limitke ótip,

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^4 T^2 b_{lk}}{\pi^2 (k^2 p^4 + l^4 T^2) + q^2 p^4 T^2} \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi t}{T}$$

dál sheshimge iye bolamız. Bul tabılǵan sheshim (1) teńlemenı de, (2)-(3) shártlerdi de qanaatlandıradı.

2.3-§. Tórtinshi tártipli teńleme ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq máseleńi

Galerkin usılı menen sheshiw

Galerkin usılı akademik B.G. Galerkin tárepinen usınıs etilgen bolıp, ol differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan shegaralıq máselelerdi sheshiw ushın universal usıl esaplanadı. Bul usıldıń juwıqlasıwların kórsetiw M.V. Keldishtiń jumıslarında keltirilgen.

Bul usıl variaciyalıq usıl esaplanbaydı. Sebebi bul usıl menen shegaralıq máseleler sheshilgende bul máselelerdi variaciyalıq máselelerge keltiriw talap etilmeydi.

Meyli $u = u(x, t)$ funkciya Ω oblastta sıızıqlı

$$Lu = f(x, t) \quad (1)$$

teńlemenı hám bazı bir birtekli shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın bolsın, bunda teńlemenıń L operatorınıń oń bolıwı shárt emes. $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ oblastta jeterli márte úzliksiz-differenciallanatuǵın (máselede talap etiliwine qarata) hám shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın $\varphi_0(x, t), \varphi_2(x, t), \dots, \varphi_n(x, t), \dots$ koordinatalıq (bazislik) funkciyalardı tańlap alamız. Juwıq sheshimdi bul sistemanıń dáslepki n sandaǵı funkciyasınıń sıızıqlı birikpesinen dúzilgen

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, t)$$

qosındı kóriniste izleyemiz, bunda a_k anıqlanıwı kerek bolǵan, házirshe belgisiz turaqlı. Bubnov-Galerkin usılında a_k coefficientler (1) teńlemenıń shep tárepi, oǵan $u(x, t)$ funkciyanıń ornına $u_n(x, t)$ izbe-izlikti qoyǵannan keyin, $\varphi_0(x, t), \varphi_2(x, t), \dots, \varphi_n(x, t)$ funkciyalargá ortogonal bolıw shártinen anıqlanadı. Bul degeni, a_k coefficientler

$$\iint_{\Omega} Lu_n \varphi_k(x, t) dx dt = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_k(x, t) dx dt, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

teńlemeler sistemasın sheshiwden anıqlanadı yamasa bul teńlemeler sistemasın

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} a_j = B_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

kóriniste jazıwǵa da boladı, bunda

$$A_{kj} = \iint_{\Omega} L u_j \varphi_k dx dt, \quad B_k = \iint_{\Omega} f \varphi_k dx dt$$

belgilewler kirgizildi.

Galerkin usılın Ritc usılı sıyaqlı, ádettegi hám dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdi sheshiw menen bir qatarda, olardıń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabıw ushın qollawǵa da boladı. Bunnan basqa, bul usıldı integrallıq teńlemelerdi sheshiwge de qollawǵa boladı.

1-másele. $\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq p, 0 \leq t \leq T\}$ oblastta

$$Lu \equiv -u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + b^2 u(x, t) = f(x, t) \quad (2)$$

teńlemenin

$$u(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0 \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0 \quad (4)$$

shártlerdegi sheshimin Galerkin usılı menen tabıń.

Sheshiliwi. Koordinata funkciyaların

$$\varphi_{nm}(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{p} \sin \frac{m\pi t}{T}, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

kóriniste izleyviz. Bul funkciyalar (3) hám (4) shártlerdi qanaatlanıradı. Bunnan basqa da, bul funkciyalar sisteması tolıq sistemanı payda etedi. Juwıq sheshimdi

$$u_{nm}(x, t) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{lk} \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} \quad (6)$$

kóriniste izleyviz, bunda a_{lk} anıqlanıwı kerek bolǵan házirshe belgisiz turaqlı.

$\varphi_{nm}(x, t)$ bazislik funkciyalardıń $L\varphi_{nm}(x, t) - f(x, t)$ funkciyaǵa Ω oblastta ortogonal bolıw shártinen paydalanamız:

$$\iint_{\Omega} [L\varphi_{nm}(x, t) - f(x, t)] \varphi_{lk}(x, t) dx dt = 0.$$

Teńlemege qoyıp alamız:

$$\iint_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{i\pi}{p} \right)^4 a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{p} \sin \frac{j\pi t}{T} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{j\pi}{T} \right)^2 a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{p} \sin \frac{j\pi t}{T} + b^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{p} \sin \frac{j\pi t}{T} - f(x, t) \right] \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} dx dt = 0$$

(5) funksiylardıń ortogonallıq hám normallanǵanlıq shártinen paydalanıp hám integrallardı esaplap, alamız:

$$\frac{pT}{4} a_{lk} \left[\left(\frac{l\pi}{p} \right)^4 + \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2 + b^2 \right] - f_{lk} = 0,$$

bul jerde $f_{lk} = \iint_{\Omega} f(x, t) \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T} dx dt$.

Bunnan $a_{lk} = \frac{4}{pT} \frac{f_{lk}}{\left(\frac{l\pi}{p} \right)^4 + \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2 + b^2}$ boladı. Bunı aparıp, (6) ǵa qoyıp, alamız:

$$u_{nm}(x, t) = \frac{4}{pT} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \left[\frac{f_{lk}}{\left(\frac{l\pi}{p} \right)^4 + \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2 + b^2} \right] \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T}.$$

Bul alınǵan sheshim Ritc usılı menen tabılǵan sheshim menen birdey boldı.

Bunda $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ bolǵanda limitke ótemiz hám

$$u_{nm}(x, t) = \frac{4}{pT} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_{lk}}{\left(\frac{l\pi}{p} \right)^4 + \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2 + b^2} \right] \sin \frac{l\pi x}{p} \sin \frac{k\pi t}{T}$$

dál sheshimge iye bolamız. Bul alınǵan sheshim teńlemenı de shártlerdi de qanaatlandıradı.

2.4-§. Tórtinshi tártipli parabolalıq teńleme ushın qoyılǵan aralas máseleni shekli ayırmalar usılı menen sheshiw

Endi tórtinshi tártipli teńleme ushın qoyılǵan parabolalıq túrdegi teńlemeni shekli ayırmalar (torlar) usılı menen sheshiwdi qarastramız.

Meyli $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ oblastta

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xxxx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

teńlemenin

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0, \\ u(x, 0) = u(x, T) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

shártlerdegi sheshimin tabıw kerek bolsın, bunda $f(x, t)$ funkciya Ω oblastta berilgen úzliksiz funkciya. Ω oblast (x_i, t_j)

$x_i = ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{p}{n}, t_j = j\tau, j = \overline{0, m}, \tau = \frac{T}{m}$ túyin noqatlar arqalı tórtmúyeshli oblastlarǵa bólinedi.

Ekinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan máselelerdi sheshiwdegi sıyaqlı, teńlemedegi funkciyalardıń tuwındıları hám aralas–shegaralıq shártlerdegi funkciyalar túyin noqatlarda shekli ayırmalı qatnaslar menen almasırladı. Bunıń ushın tómendegi funkciyalardı (i, j) noqatlardıń dógeresinde qatarǵa jikleymiz:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} &= u_{i,j} + h(u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{i,j} + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx})_{i,j} + o(h^5), \\ u_{i-1,j} &= u_{i,j} - h(u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_{i,j} - \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx})_{i,j} - o(h^5), \\ u_{i+2,j} &= u_{i,j} + 2h(u_x)_{i,j} + \frac{(2h)^2}{2!}(u_{xx})_{i,j} + \frac{(2h)^3}{3!}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{(2h)^4}{4!}(u_{xxxx})_{i,j} + o((2h)^5) \\ u_{i-2,j} &= u_{i,j} - 2h(u_x)_{i,j} + \frac{(2h)^2}{2!}(u_{xx})_{i,j} - \frac{(2h)^3}{3!}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{(2h)^4}{4!}(u_{xxxx})_{i,j} - o((2h)^5) \end{aligned}$$

Joqarıdağı keltirilgen formulalarda eñ keyingi aǵzanı taslap, teńliklerdiń birinshi hám ekinshisin 4 ke kóbeytip, úshinshi hám tórtinshisiniń qosındısınan alamız:

$$u_{i+2,j} + u_{i-2,j} - 4u_{i+1,j} - 4u_{i-1,j} \approx -6u_{i,j} + h^4 (u_{xxxx})_{i,j}.$$

Bunnan

$$(u_{xxxx})_{i,j} \approx \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4}.$$

Ekinshi tártipli tuwındını da shekli ayırmalı qatnaslar menen almasırap alamız:

$$(u_{tt})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}.$$

Bulardı aparıp, (1) teńlemede ornına qoyıp, alamız:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} - \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} = f_{i,j}, \quad (3)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-2, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

bunda $f_{i,j} = f(x_i, t_j)$. Endi baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdegi funkciyalardı shekli ayırmalı qatnaslar menen almasırap, alamız:

$$u_{i,0} = 0, \quad u_{i,m} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$u_{0,j} = 0, \quad u_{n,j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (5)$$

$$u_{2,j} - 2u_{1,j} = 0, \quad u_{n-2,j} - 2u_{n-1,j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Demek, (1)-(2) mäseleni shekli ayırmalar usılı menen sheshiw ushın (3)-(5) teńlemeler sistemasın sheshiwge keldik. Bul teńlemeler sisteması $(n+1)(m+1)$ belgisizli $(n+1)(m+1)$ sandağı teńlemeler sisteması boladı. Bul teńlemeler sistemasın sheship, (1)-(2) mäseleniń sheshiminiń (i, j) túyin noqatlardağı mánislerin juwıq mánislerine iye bolamız.

1-másele. $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ oblastta

$$u_{tt}(x, t) - u_{xxxx}(x, t) = t^2 \sin \pi x$$

teńlemenin

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

shártlerdegi sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. $n = m = 5$ dep alamız. Onda $h = \tau = 0,2$ boladı. Túyin noqatlar $x_i = 0,2i$, $i = \overline{0,5}$, $t_j = 0,2j$, $j = \overline{0,5}$ boladı. $f_{ij} = f(x_i, t_j) = t_j^2 \sin \pi x_i$ boladı. Ω oblastta funkciyanıń mánislerin (3)-(5) formulalar menen esaplaymız. Izlenip atırǵan $u(x, t)$ sheshimniń juwıq u_{ij} mánisleri tómendegi kestede keltirildi:

u	0	1	2	3	4	5
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.0000000000	-0.0000698964	-0.0002526529	-0.0005501902	-0.0008774975	0.0000000000
2	0.0000000000	-0.0001397928	-0.0005053059	-0.0011003803	-0.0017549950	0.0000000000
3	0.0000000000	-0.0001397928	-0.0005053059	-0.0011003803	-0.0017549950	0.0000000000
4	0.0000000000	-0.0000698964	-0.0002526529	-0.0005501902	-0.0008774975	0.0000000000
5	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

```

u[1][1] = -0.00006989642  u[1][2] = -0.00025265293  u[1][3] = -0.00055019016
u[1][4] = -0.00087749749
u[2][1] = -0.00013979285  u[2][2] = -0.00050530585  u[2][3] = -0.00110038032
u[2][4] = -0.00175499498
u[3][1] = -0.00013979285  u[3][2] = -0.00050530585  u[3][3] = -0.00110038032
u[3][4] = -0.00175499498
u[4][1] = -0.00006989642  u[4][2] = -0.00025265293  u[4][3] = -0.00055019016
u[4][4] = -0.00087749749

```

Process exited after 0.07514 seconds with return value 0

Dlya prodoljeniya najmite lyubuyu klavishu . . .

$n = 5$, $m = 5$ bolǵanda Maple programmasında alınǵan sheshimniń juwıq mánisleri tómendegishe boladı:

$$\begin{aligned}
\{u_{41} &= -0.00006989642343u_{42} = -0.0002526529266u_{31} = \\
&-0.0001397928469u_{23} = -0.001100380322u_{32} = \\
&-0.0005053058533u_{34} = -0.001754994975u_{43} = \\
&-0.0005501901608u_{21} = -0.0001397928469u_{45} = 0., u_{22} = \\
&-0.0005053058533u_{11} = -0.00006989642343u_{44} = \\
&-0.0008774974875u_{12} = -0.0002526529266u_{33} = \\
&-0.001100380322u_{24} = -0.001754994975u_{14} = \\
&-0.0008774974875u_{13} = -0.0005501901608u_{35} = 0., u_{20} = 0., \\
&u_{30} = 0., u_{40} = 0., u_{15} = 0., u_{25} = 0., u_{05} = 0., u_{50} = 0., u_{04} \\
&= 0., u_{52} = 0., u_{53} = 0., u_{54} = 0., u_{55} = 0., u_{10} = 0., u_{51} = 0., u_{06} \\
&= 0., u_{01} = 0., u_{02} = 0., u_{03} = 0.\}
\end{aligned}$$

Túyin noqatlarda bul alınğan juwıq sheshimler 2.1 –paragraftaǵı alınğan sheshim menen salıstırganda $\varepsilon = 0,001$ dálilik penen sáykes keledi.

2.5-§. Tórtinshi tártipli parabolalıq teńleme ushın qoyılğan aralas máseleńi volterra máselesi ekenligi

Bul paragrafta $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ oblastta

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + b^2 u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

teńleme ushın qoyılğan máseleńi izertleybiz hám onıń volterra máselesi ekenligin kórsetemiz.

1-másele. Ω oblastta (1) teńlemenıń

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (2)$$

hám

$$u(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Tómendegi belgilewdi kirgizemiz:

$$V(\Omega) = \{u(x, t) : u \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega), (2.92), (3)\},$$

$$W(\Omega) = \{f(x, t) : f_{xxx} \in L_2(\Omega), f^{(i)}(0, t) = f^{(i)}(p, t) = 0, i = 0, 2; \forall t \in [0, T]\}.$$

1-anıqlama. Eger Ω oblastta $f(x, t) \in C(\Omega)$ bolganda $u(x, t) \in V(\Omega)$ funksiya (1) teńlemenini qanaatlandırsa, onda bul funksiyaǵa 1-máseleniń regulyar sheshimi delinedi.

$\forall u \in V(\Omega)$ bolganda $V(\Omega)$ dan $C(\Omega)$ ǵa (1) qaǵıyda boyınsha tásir etiwshi L operatorı anıqlaymız.

$C_0^\infty(\Omega) \subset V(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ [25] qatnaslardan L operatorıń $D(L) \equiv V(\Omega)$ anıqlanıw oblastınıń $L_2(\Omega)$ da tıǵız ekenligi kelip shıǵadı. 1-máseleniń regulyar sheshimi

$$Lu = f$$

operator teńlemeniniń sheshimine ekvivalent boladı.

1-teorema. Eger $f(x, t) \in W(\Omega)$, onda 1-máseleniń sheshimi bar hám birden bir boladı.

Dálilleniwi. Teńlemeniniń sheshimin

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot X_n(x), \quad (4)$$

kóriniste izleymiz, bunda $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n = 1, 2, \dots$.

Bunı (1) teńlemege aparıp qoyıp,

$$u_n''(t) + \mu_n^2 u_n(t) = f_n(t), \mu_n^2 = \lambda_n^4 + b^2 \quad (5)$$

teńlemege iye bolamız, bunda $f_n(t) = \int_0^p f(x, t) X_n(x) dx$. Bul teńlemeniniń ulıwma sheshimi

$$u_n(t) = a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t + \frac{1}{\mu_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \mu_n(t - \tau) d\tau$$

kóriniste boladı. (2) baslanǵısh shártler $u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0$ túrde boladı. Bul shártlerden a_n hám b_n koefficientlerin anıqlaymız: $a_n = 0, b_n = 0$ boladı. Demek (5) teńlemeniniń sheshimi

$$u_n(t) = \frac{1}{\mu_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \mu_n(t - \tau) d\tau$$

boladı. Bunı aparıp (4) ğa qoyıp,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\mu_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \mu_n(t - \tau) d\tau,$$

sheshimge iye bolamız.

Eger $f(x, t) \in W(\Omega)$ bolsa, onda

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x) \text{ hám } u_{xxxx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 u_n(t) X_n(x)$$

qatarlardıń absolyut hám teń ólshemli jıynaqlılıǵın kórsetiwge boladı.

Teorema dálillendi.

Lemma. 1-máseleniń regulyar sheshimi

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)}, u \in V(\Omega), \quad (6)$$

teńsizlikti qanaatlandıradı, bunda $c = \text{const} > 0$.

Máseleniń sheshiminiń ornıqlılıǵı, yaǵnıy teńlemeninń on tárepinde turǵan funkciyadan úzliksiz ğárezligi (6) teńsizlikten kelip shıǵadı.

Tómendegi belgilewdi kirgizemiz:

$$G_1(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\mu_n} \sin \mu_n(t - \tau).$$

Bul jerde

$$|G_1(x, t; \xi, \tau)| \leq c \quad (7)$$

bahalaw ornıqlı boladı. 1-máseleniń sheshimin

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^p G_1(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (8)$$

kóriniste jazıwǵa boladı.

(7) hám (8) qatnaslardan $V(\Omega)$ kóplikte anıqlanǵan L operatorıń $W(\Omega)$

kóplikte anıqlanǵan, $W(\Omega)$ den $V(\Omega)$ ğa

$$(L^{-1}f)(x,t) = \int_0^t \int_0^p G_1(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

qaǵıyda boyınsha tásir etiwshi shekli, keri L^{-1} operatori bar bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

L^{-1} operatordıń anıqlanıw oblastınıń $L_2(\Omega)$ da tıǵız bolǵanlıǵı sebepli, onı úzliksizligi boyınsha hámme $L_2(\Omega)$ keńislikke dawam etiwge boladı. Bunı L^{-1} operatordıń tuyıqlanıwı delinedi hám $\bar{L}^{-1}$ dep belgilenedi, bunda $D(\bar{L}^{-1}) = L_2(\Omega)$.

Máseleniń volterra máselesi ekenligi haqqında

2-anıqlama. Eger máseleniń operatorına keri operator volterra operatori bolsa, onda ol máselege volterra máselesi delinedi.

2-teorema. $\bar{L}^{-1}$ operator volterra operatori boladı.

Dálilleniwi. (7) bahalawdan $G_1(x,t;\xi,\tau) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ ekenligi kelip shıǵadı, yaǵnıy $\bar{L}^{-1}$ operator $L_2(\Omega)$ tolıq úzliksiz boladı. Bizge $\bar{L}^{-1}$ operatordıń spektriniń tek ǵana bir nól noqattan (nólden) ibarat ekenligin kórsetiw jetkilikli. Bunıń ushın spektral radiustı esaplaymız: [33]

$$r(\bar{L}^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(\bar{L}^{-1})^n\|}.$$

Endi $(\bar{L}^{-n}f)(x,t)$ esaplap bahalaymız. Bunıń ushın $(\bar{L}^{-2}f)(x,t)$ ni $(\bar{L}^{-1}f)(x,t)$ arqalı ańlatamız, yaǵnıy

$$\begin{aligned} (\bar{L}^{-2}f)(x,t) &= \left[\bar{L}^{-1}(\bar{L}^{-1}f) \right](x,t) = \int_0^t \int_0^p G_1(x,t;\xi,\tau) \left[(\bar{L}^{-1}f)(\xi,\tau) \right] d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^p G_1(x,t;\eta,\nu) \left[\int_0^\nu \int_0^p G_1(\eta,\nu;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \right] d\eta d\nu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^p d\eta \int_0^p d\xi \int_0^t d\tau \int_{\tau}^t G_1(x, t; \eta, \nu) G_1(\eta, \nu; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\nu = \\
&= \int_0^p d\xi \int_0^t f(\xi, \tau) d\tau \int_{\tau}^t \int_0^p G_1(x, t; \eta, \nu) G_1(\eta, \nu; \xi, \tau) d\eta d\nu.
\end{aligned}$$

Bul jerde integrallaw tártibin ózgeriw ushın Dirixle formulasınan paydalandıq. Eger

$$G_2(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t \int_0^p G_1(x, t; \eta, \nu) G_1(\eta, \nu; \xi, \tau) d\eta d\nu,$$

belgilewdi kirgizsek, onda joqarıdağı qatnastan

$$\left(\overline{L^{-2}f}\right)(x, t) = \int_0^t \int_0^p G_2(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

qatnastı alamız. Eger $\left(\overline{L^{-3}f}\right)(x, t)$ ni esaplasaq, onda ol

$$\left(\overline{L^{-3}f}\right)(x, t) = \int_0^t \int_0^p G_3(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

kóriniste boladı, bunda

$$G_3(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t \int_0^p G_1(x, t; \eta, \nu) G_2(\eta, \nu; \xi, \tau) d\eta d\nu.$$

Bul processti dawam etip, alamız

$$\left(\overline{L^{-n}f}\right)(x, t) = \int_0^t \int_0^p G_n(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

bunda

$$G_n(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t \int_0^p G_1(x, t; \eta, \nu) G_{n-1}(\eta, \nu; \xi, \tau) d\eta d\nu.$$

Endi $G_2(x, t; \xi, \tau)$ funkciyanı bahalaymız:

$$\left|G_2(x, t; \xi, \tau)\right| \leq \int_{\tau}^t \int_0^p \left|G_1(x, t; \eta, \nu)\right| \left|G_1(\eta, \nu; \xi, \tau)\right| d\eta d\nu \leq c_7^2 p(t - \tau).$$

Bul bahalawdan paydalanıp, $G_3(\eta, \nu; \xi, \tau)$ funkciyanı bahalandıramız:

$$\left| G_3(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \int_0^t \int_0^p \left| G_1(x, t; \eta, \nu) \right| \left| G_2(\eta, \nu; \xi, \tau) \right| d\eta d\nu \leq c_7^3 p^2 \frac{(t - \tau)^2}{2!}.$$

Bul procesti dawam etsek, onda

$$\left| G_n(x, t; \xi, \tau) \right| \leq \frac{c_7^n p^{n-1} (t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

bahalawdın orınlı ekenligin kóriwge boladı. Enda $\left(\overline{L^{-n}} f \right)(x, t)$ ni bahalaymız.

$$\begin{aligned} \left| \left(\overline{L^{-n}} f \right)(x, t) \right|^2 &\leq \int_0^t \int_0^p \left| G_n(x, t; \xi, \tau) \right|^2 d\xi d\tau \int_0^t \int_0^p \left| f(\xi, \tau) \right|^2 d\xi d\tau \leq \\ &\leq \left(\frac{c_7^n p^{n-1}}{(n - 1)!} \|f\|_{L_2(\Omega)} \right)^2 \int_0^t \int_0^p (t - \tau)^{2n-2} d\xi d\tau \leq \left(\frac{c_7^n p^n}{(n - 1)!} \|f\|_{L_2(\Omega)} \right)^2 \frac{t^{2n-1}}{2n - 1}. \end{aligned}$$

Alınğan teńsizliktiń eki tárepinde Ω oblast boyınsha integrallaymız. Keyin

$$\frac{1}{2n - 1} \leq \frac{1}{n} \text{ teńsizlikti esapqa alıp, kvadrat koren alamız hám}$$

$$\left\| \overline{L^{-n}} f \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c_7^n p^n T^n}{n!} \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

teńsizligine iye bolamız. Bunnan

$$\left\| \overline{L^{-n}} \right\| \leq \frac{c_7^n p^n T^n}{n!}$$

kelip shıǵadı. Endi spektral radiustı esaplaymız:

$$r(\bar{L}^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \overline{L^{-n}} \right\|^{\frac{1}{n}} \leq c_7 p T \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Stirlingtiń $n! = \sqrt{2n\pi} n^n e^{-n} (1 + \alpha_n)$, $\alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ formulasınan paydalanamız hám tómendegige iye bolamız

$$r(\bar{L}^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left\| (\bar{L}^{-1})^n \right\|} = 0.$$

Demek, $\bar{L}^{-1}$ operatoridn spektr tek gana bir nol noqattan ibarat. Nol bul operatoridn menshikli manisi bolmaganlıgı sebepli, $\bar{L}^{-1}$ operator volterra operatorı boladı. Teorema dالیllendi.

Saldar. 1-masele volterra maselesi boladı.

Máselenin túyinles maselesin izertlew

1^{*}-masele. Ω oblastta

$$L^* v \equiv v_{tt}(x, t) + v_{xxxx}(x, t) + b^2 v(x, t) = g(x, t),$$

tenlemenin

$$v(0, t) = v(p, t) = v_{xx}(0, t) = v_{xx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (9)$$

ham

$$v(x, T) = v_t(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (10)$$

shartlerin qanaatlandıratuğın $v(x, t)$ sheshimin tabın.

$$V^*(\Omega) = \{v(x, t) : v \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega), (9), (10)\}$$

belgilewdi kirgizemiz.

3-teorema. Eger $g(x, t) \in W^*(\Omega)$ bolsa, onda 1^{*}-máselenin regulyar sheshimi bar boladı, ol sheshim tenlemenin on tárepindegi funkciyadan úzliksiz gárezli boladı ham

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|g\|_{L_2(\Omega)}, v \in V^*(\Omega)$$

tenlemeni qanaatlandıradı, bunda $c_3 > 0$ – turaqlı san, ham ol sheshim

$$v(x, t) = \int_0^t \int_0^p G_1^*(x, t; \xi, \tau) g(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (11)$$

kóriniste boladı, bunda $G_1^*(x, t; \xi, \tau) = G_1(\xi, \tau; x, t)$.

Bul teoremanin dálilleniwi joqarıdağı teoremanin dálilleniwine uqsas.

(11) formulanı

$$v(x, t) = \left(L^* \right)^{-1} g(x, t).$$

kóriniste jazıwǵa boladı. L^{-1} hám $\left(L^* \right)^{-1}$ operatorlar ózara túyinles operatorlar.

Joqarıda keltirilgen sıyaqlı etip, $\left(L^* \right)^{-1}$ operatordıń tuyıqlanıwın quramız, hám

onı $L_2(\Omega)$ keńislikke dawam etemiz. Onı $\overline{\left(L^* \right)^{-1}}$ menen belgileymiz. Onıń

anıqlanıw oblastı $L_2(\Omega)$ keńislik boladı, yaǵnıy $D\left(\overline{\left(L^* \right)^{-1}}\right) = L_2(\Omega)$.

4-teorema. $\overline{\left(L^* \right)^{-1}}$ operator volterra operatori boladı.

Saldar. 1^* -másele volterra máselesi boladı.

II bap boyınsha juwmaqlaw

Bul bapta tórtmúyeshli oblastta tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan aralas máselelerdi ózgeriwshilerdi ajratıw usılı, Ritc hám Galerkin usılı, shekli ayırmalar usılları menen sheshilgen. Bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın apriorlıq baha, bazı bir máselelerdiń sheshimi bahalandırıldı. Qaralıp atırǵan máselelerdiń spektral qásiyetleri izertlendi.

III BAP. NELOKAL SHÁRTLÍ TO'RTINSHI TÁRTIPLI TEŃLEMELER USHIN SHEGARALIQ MÁSELELERDÍ SHESHILIWI

3.1-§. Nelokal shártli tórtinshi tártipli teńleme ushın bir shegaralıq máseleniń sheshiliwi

[22] de giperbolalıq hám aralas túrdegi teńlemeler ushın korrektli máseleler qoyılğan hám úyrenilgen. Tórtinshi tártipli teńlemeler ushın tuwrı hám kerı máseleler [23, 25-26] jumıslarda qaralğan hám úyrenilgen.

Bul paragrafta tórtinshi tártipli teńleme ushın bir shegaralıq másele nelokal shártlerde úyrenilgen. Bunday máseleler ekinshi tártipli teńlemeler ushın E.I. Moiseevtiń, N.I. Ionkiniń, K.B. Sabitovtiń hám t.b. jumıslarında úyrenilgen, máselen [27-29]. [25] jumısta

$$u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = f(x)$$

teńleme ushın (2)-(3) shegaralıq shártlerde bir kerı másele izertlengen. Onıń sheshiminiń birden birliğı hám bar bolıwı kórsetilgen.

Máseleniń qoyılıwı.

$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ oblastta

$$u_{tt}(x, t) - u_t(x, t) - u_{xxxx}(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

teńlemenı qarastıramız, bunda $f(x, t)$ úzliksiz berilgen funkciya.

1-másele. Ω oblastta (1) teńlemenıń tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın $u(x, t)$ sheshimin tabıń:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u_{xx}(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3)$$

1-anıqlama. 1) Ω oblastta úzliksiz; 2) Ω oblastta t boyınsha 2-tártipke shekem hám x boyınsha 4-tártipke shekem úzliksiz tuwındılargá iye; 3) (1) teńlemenı hám (2)-(3) shártlerdi klassikalıq mániste qanaatlandıratuǵın $u(x, t)$ funkciya (1)-(3) máseleniń regulyar sheshimi delinedi.

2-aniqlama. Eger $(\varphi_n, \psi_k) = \delta_n^k$ bolsa, onda $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkciyalar sisteması $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkciyalar sistemasına biortogonal túyinles yamasa biortogonal delinedi, bunda $\delta_n^k = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ -Kroneker belgisi.

3-aniqlama. Eger H gilbert keńisliginde sıızıqlı, shekli, kerisi bar $L: H \rightarrow H$ operator bar bolıp, $\{L\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormallangan bazis bolsa, onda $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemağa H keńislikde Riss bazisi delinedi.

Banax teoreması boyınsha, eger sıızıqlı, shekli operatordıń kerı operatorı bar bolsa, kerı operator da sıızıqlı hám shekli boladı. Sol sebepten, Riss bazisi aniqlamasın basqasha keltiriwge boladı. Sistemağa Riss bazisi delinedi, eger onı ortonormallangan sistemadan sıızıqlı shekli kerisi bar operator járdeminde alıwğa bolsa. Riss bazisin payda etiwshi sistema bazis boladı.

$$\begin{aligned} X_0(x) &= 2x, \quad X_n^{(1)}(x) = 2 \sin \lambda_n x, \\ X_n^{(2)}(x) &= \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \cos \lambda_n x, \\ \lambda_n &= 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

funkciyalar sisteması hám oğan biortogonal bolğan funkciyalar sisteması

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= 1, \quad Y_n^{(1)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin \lambda_n x, \\ Y_n^{(2)}(x) &= 2 \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

(0,1) aralıqta kvadratı menen integrallanıwshı funkciyalardıń $L_2(0,1)$ keńisliginde Riss bazisin payda etedi. (4)-(5) sistemalardıń Riss bazisin payda etetuǵınlıǵı [3-4] jumıslarda keltirilgen.

Máseleniń sheshiminiń birden-birligi hám bar bolıwı.

1-teorema. Meyli $\varphi(x)$, $\psi(x)$ hám $f(x, t)$ funkciyalar tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın bolsın:

$\varphi(x), \psi(x) \in C^{(5)}[0,1]$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$,
 $\varphi''(1) = 0$, $\psi''(1) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(0) = 0$,
 $f(0,t) = 0$, $f_x(0,t) = f_x(1,t)$. Onda 1-máseleniń regulyar sheshimi bar hám ol sheshim birden-bir boladı.

Dálilleniwi. Dáslep máseleniń sheshiminiń bar bolıwın kórsetemiz. Máseleniń $u(x,t)$ sheshimin joqarıda keltirilgen (4) biortogonal sistema boyınsha qatar kórinisinde tómendegi

$$u(x,t) = X_0(x)u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}(t) \right] \quad (6)$$

kóriniste izleyviz. Teńlemenin óń tárepinde turǵan $f(x,t)$ funkciyasın (4) sistema boyınsha qatarǵa jikleyviz:

$$f(x,t) = X_0(x)f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)f_{1n}(t) + X_n^{(2)}(x)f_{2n}(t) \right]. \quad (7)$$

(6) hám (7) ni (1) teńlemege ornına qoyamız:

$$\begin{aligned} & X_0(x)u_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}''(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}''(t) \right] - \\ & - X_0(x)u_0'(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}'(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}'(t) \right] - \\ & - X_0^{(4)}(x)u_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(X_n^{(1)}(x) \right)^{(4)} u_{1n}(t) + \left(X_n^{(2)}(x) \right)^{(4)} u_{2n}(t) \right] = \\ & = X_0(x)f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)f_{1n}(t) + X_n^{(2)}(x)f_{2n}(t) \right]. \end{aligned}$$

Bul teńlemeden, (4) sistemanı kóz aldına tutıp, $u_0(t)$, $u_{1n}(t)$, $u_{2n}(t)$ funkciyaların tabıw ushın, tómendegi teńlemelerdi alamız:

$$u_0''(t) - u_0'(t) = f_0(t),$$

$$u_{in}''(t) - u_{in}'(t) - \lambda_n^4 u_{in}(t) = f_{in}(t), i = 1, 2.$$

Bul teńlemeler sıızıqlı, turaqlı koefficientli, birtekli emes teńlemeler. Olardıń sheshimi tómendegishe boladı:

$$u_0(t) = c_1 + c_2 e^t + \int_0^t (e^{t-\tau} - 1) f_0(\tau) d\tau,$$

$$u_{in}(t) = a_{in} e^{k_1 t} + b_{in} e^{k_2 t} + \frac{2}{\mu_n} \int_0^t f_{in}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (t - \tau) d\tau,$$

bunda $c_i, a_{in}, b_{in}, i = 1, 2$ házirshe belgisiz turaqlılar, $k_1 = \frac{1 + \mu_n}{2}, k_2 = \frac{1 - \mu_n}{2},$

$\mu_n = \sqrt{4\lambda_n^4 + 1}.$ (2) shártler joqarıdağı teńlemeler ushın tómendegishe boladı:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \varphi_0, u_n(0) = \varphi_n, \\ u_0(1) &= \psi_0, u_n(1) = \psi_n. \end{aligned} \quad (2')$$

$c_i, a_{in}, b_{in}, i = 1, 2$ belgisiz turaqlılardı tabıw ushın (2') shártlerden paydalanamız.

$$c_1 = \frac{1}{e-1} \left[e\varphi_0 - \psi_0 + \int_0^1 (e^{1-\tau} - 1) f_0(\tau) d\tau \right],$$

$$c_2 = \frac{1}{e-1} \left[\psi_0 - \varphi_0 - \int_0^1 (e^{1-\tau} - 1) f_0(\tau) d\tau \right],$$

$$a_{in} = -\frac{1}{2sh \frac{1}{2} \mu_n} \left[\varphi_{in} e^{\frac{1}{2} \mu_n} - \psi_{in} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\mu_n} \int_0^1 f_{in}(\tau) e^{-\frac{1}{2} \tau} sh \frac{1}{2} \mu_n (1 - \tau) d\tau \right],$$

$$b_{in} = \frac{1}{2sh \frac{1}{2} \mu_n} \left[\varphi_{in} e^{\frac{1}{2} \mu_n} - \psi_{in} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\mu_n} \int_0^1 f_{in}(\tau) e^{-\frac{1}{2} \tau} sh \frac{1}{2} \mu_n (1 - \tau) d\tau \right], i = 1, 2.$$

bunda $\varphi_0, \psi_0, \varphi_{in}, \psi_{in}, i = 1, 2$ - turaqlılar sáykes túrde, $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalardıń (4) funkciyalar sisteması boyınsha qatarǵa jiklew koefficientleri. $c_i, a_{in}, b_{in}, i = 1, 2$ turaqlılardıń tabılǵan mánisin $u_0(t)$ hám $u_{in}(t), i = 1, 2$ ulıwma sheshimde qoyamız. Onda qaralıp atırǵan máseleniń formal sheshimi tómendegishe boladı:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{X_0(x)}{e-1} \left\{ (e - e^t) \varphi_0 + (e^t - 1) \psi_0 + \int_0^t f_0(\tau) (e - e^t) (e^{-\tau} - 1) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_t^1 f_0(\tau) (e^{1-\tau} - 1) (1 - e^t) d\tau \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(1)}(x)}{\mu_n sh \frac{1}{2} \mu_n} \left\{ \mu_n \varphi_{1n} e^{\frac{1}{2}t} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) + \mu_n \psi_{1n} e^{\frac{1}{2}(t-1)} sh \frac{1}{2} \mu_n t - \right. \\
& \left. - 2 \int_t^1 f_{1n}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-\tau) sh \frac{1}{2} \mu_n t d\tau - 2 \int_0^t f_{1n}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) sh \frac{1}{2} \mu_n \tau d\tau \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}(x)}{\mu_n sh \frac{1}{2} \mu_n} \left\{ \mu_n \varphi_{2n} e^{\frac{1}{2}t} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) + \mu_n \psi_{2n} e^{\frac{1}{2}(t-1)} sh \frac{1}{2} \mu_n t - \right. \\
& \left. - 2 \int_t^1 f_{2n}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-\tau) sh \frac{1}{2} \mu_n t d\tau - 2 \int_0^t f_{2n}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) sh \frac{1}{2} \mu_n \tau d\tau \right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Endi $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$ bolatug'nlıg'ın dälilleymiz. $\bar{\Omega}$ tuyıq oblastta $u(x, t)$ funkciyanıń oń tárepindegi qatardan t boyınsha eki márte tuwındı alınğan qatardıń teń ólshemli jıynaqlı ekenligin kórsetiwimiz kerek. Bunı Veyershtass teoreması boyınsha kórsetemiz. ($u_{xxxx}(x, t)$ hám $u_t(x, t)$ funkciyalardıń oń tárepindegi qatar, teńlemenıń oń tárepindegi $f(x, t)$ funkciya hám $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funkciyalardıń (4) sistema boyınsha jiklengen qatarı sol shártler qoyılğanda teń ólshemli jıynaqlı boladı). (8) sheshimdi t boyınsha eki márte differenciallaymız:

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) = & \frac{X_0(x)}{e-1} A(t) + X_0(x) f_0(t) + \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(1)}(x)}{sh \frac{1}{2} \mu_n} [\varphi_{1n} F_n(1-t) + \psi_{1n} F_n(t)] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(1)}(x)}{\mu_n sh \frac{1}{2} \mu_n} [G_{1n}(t) + K_{1n}(t)] + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}(x)}{sh \frac{1}{2} \mu_n} [\varphi_{2n} F_n(1-t) + \psi_{2n} F_n(t)] + \quad (9) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}(x)}{\mu_n sh \frac{1}{2} \mu_n} [G_{2n}(t) + K_{2n}(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(1)}(x) f_{1n}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(2)}(x) f_{2n}(t),
\end{aligned}$$

$$\text{bunda } A(t) = e^t (\psi_0 - \varphi_0) + \int_0^t f_0(\tau) e^t (1 - e^{-\tau}) d\tau + \int_t^1 f_0(\tau) e^t (1 - e^{1-\tau}) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \left(1 + \mu_n^2\right) sh \frac{1}{2} \mu_n t - 2 \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n t, \\
G_{in}(t) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \mu_n^2\right) \int_t^1 f_{in}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-\tau) sh \frac{1}{2} \mu_n t d\tau - \\
&\quad - \mu_n \int_t^1 f_{in}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-\tau) ch \frac{1}{2} \mu_n t d\tau, \\
K_{in}(t) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \mu_n^2\right) \int_0^t f_{in}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) sh \frac{1}{2} \mu_n \tau d\tau + \\
&\quad + \mu_n \int_0^t f_{in}(\tau) e^{\frac{1}{2}(t-\tau)} ch \frac{1}{2} \mu_n (1-t) sh \frac{1}{2} \mu_n \tau d\tau, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

(9) funktsional qatar ushın majorant qatardı dúzemiz. (9) funktsional qatar tómendegi

$$\begin{aligned}
&c_1 \left(|\varphi_0| + |\psi_0| + \|f_0\| \right) + 2 |f_0(t)| + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^4 \left(|\varphi_{1n}| + |\psi_{1n}| \right) + \lambda_n^4 \left(|\varphi_{2n}| + |\psi_{2n}| \right) \right] + \\
&+ c_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n \|f_{1n}\| + |f_{1n}(t)| + \lambda_n \|f_{2n}\| + |f_{2n}(t)| \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

qatar menen majorirlenedi, bunda $c_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$.

Endi $\varphi(x), \psi(x)$ funktsiyalardı tómendegishe etip biortogonal qatarlarga jikleymiz:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{1n} X_n^{(1)}(x) + \varphi_{2n} X_n^{(2)}(x) \right], \\
\psi(x) &= \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} X_n^{(1)}(x) + \psi_{2n} X_n^{(2)}(x) \right],
\end{aligned}$$

bunda $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \psi_0, \psi_{1n}, \psi_{2n}$ koeffitsientler tómendegi

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_n^{(1)}(x) dx, \\
\varphi_{2n} &= \int_0^1 \varphi(x) Y_n^{(2)}(x) dx
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \int_0^1 \psi(x) Y_0(x) dx, \quad \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x) Y_n^{(1)}(x) dx, \\ \psi_{2n} &= \int_0^1 \psi(x) Y_n^{(2)}(x) dx\end{aligned}\tag{12}$$

formulalar menen esaplanadı. (7) formulada $f_0(t)$, $f_{1n}(t)$, $f_{2n}(t)$ koefficientler

$$\begin{aligned}f_0(t) &= \int_0^1 f(x, t) Y_0(x) dx, \quad f_{1n}(t) = \int_0^1 f(x, t) Y_n^{(1)}(x) dx, \\ f_{2n}(t) &= \int_0^1 f(x, t) Y_n^{(2)}(x) dx\end{aligned}\tag{13}$$

formulalar menen esaplanadı. (11), (12) formulardağı ekinshi hám úshinshi integrallardı bes márte bóleklep integrallaymız hám (13) integraldı eki márte bóleklep integrallaymız:

$$\begin{aligned}\varphi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{1n} + b_{1n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{1n}^{(5)}, \quad \varphi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{2n}^{(5)}, \\ \psi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{2n} + b_{2n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{1n}^{(5)}, \quad \psi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{2n}^{(5)}, \\ f_{1n}(t) &= \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} \frac{1}{\lambda_n^2} [\bar{f}_{1n}(t) + \bar{\bar{f}}_{1n}(t)] + \frac{1}{\lambda_n^2} \bar{\bar{\bar{f}}}_{1n}(t), \quad f_{2n}(t) = \frac{1}{\lambda_n^2} \bar{f}_{2n}(t)\end{aligned}$$

bunda

$$\begin{aligned}a_{1n} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, \quad b_{1n} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\ a_{2n} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, \quad b_{2n} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\ \bar{\varphi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad \bar{\varphi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\ \bar{\psi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad \bar{\psi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_{1n}(t) &= \int_0^1 f_{xx}(x,t) e^{\lambda_n x} dx, \quad \bar{\bar{f}}_{1n}(t) = \int_0^1 f_{xx}(x,t) e^{-\lambda_n x} dx, \\ \bar{\bar{\bar{f}}}_{1n}(t) &= -\int_0^1 f_{xx}(x,t) \sin \lambda_n x dx, \quad \bar{f}_{2n}(t) = -2 \int_0^1 f_{xx}(x,t) \cos \lambda_n x dx.\end{aligned}$$

Eger $\varphi_{in}, \psi_{in}, f_{in}(t), i=1,2$ mánislerin (10) ға qoysaq, bul qatar $\bar{\Omega}$ tuyıq oblastta absolyut jıynaqlı boladı. Bul jaǵdayda (9) qatar $\bar{\Omega}$ oblastta Veyershtrass belgisi boyınsha absolyut hám teńólshemli jıynaqlı boladı. Máseleleniń sheshiminiń birden birligi (8) den hám (5) sistemanıń tolıqlıǵınan kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

3.2-§. Nelokal shártli tórtinshi tártipli teńleme ushın bir kerı máseleleniń sheshiliwi

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın kerı máseleler qosımsha shártlerde teńlemenıń belgisiz saltań aǵzasın (oń tárepın) tabıw, koefficientlerin tabıw hám t.b kórinisinde boladı.

Bul paragrafta tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńleme ushın nelokal shártlerde bir kerı másele qaraladı hám izertlendi. Bunday máseleler ekinshi tártipli dara tuwındılı teńlemeler ushın E.I. Moiseevtiń, N.I. Ionkiniń, K.B. Sabitovtiń hám t.b jumıslarında úyrenilgen, máselen [30,31,38]. Olardıń sheshiminiń bar ekenligi hám birden –birligi kórsetilgen.

Máseleniń qoyılıwı.

$\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ oblastta tómendegi teńlemenı qaraymız:

$$u_{tt}(x,t) - u_t(x,t) - u_{xxxx}(x,t) = f(x). \quad (1)$$

1-másele. Ω oblastta (1) teńlemenıń tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın $u(x,t)$ sheshimin hám $f(x)$ funkciyanı tabıń:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,1) = \psi(x), \quad u_t(x,0) = \xi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u_{xx}(1,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

bunda $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ - berilgen funksiylar.

1-anıqlama. Eger $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$, $f(x) \in C[0,1]$ bolğan $(u(x,t), f(x))$ funksiylar (1) teńlemenini hám (2)-(3) shártlerin ápiwayı klassikalıq mániste qanaatlandırsa, onda $(u(x,t), f(x))$ funksiylar juplıǵına (1)-(3) máseleniń regulyar sheshimi dep ataymız.

Tómenдеgi funksiylar sisteması

$$\begin{aligned} X_0(x) = 2x, \quad X_n^{(1)}(x) = 2 \sin \lambda_n x, \\ X_n^{(2)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \cos \lambda_n x, \\ \lambda_n = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

hám olarǵa biortogonal bolğan

$$\begin{aligned} Y_0(x) = 1, \quad Y_n^{(1)}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin \lambda_n x, \\ Y_n^{(2)}(x) = 2 \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

funksiylar sisteması $L_2(0,1)$ de Riss bazisin payda etedi [3-4].

Tómenдеgi teorema orınlı boladı.

Máseleniń sheshiminiń bar bolıwı hám birden-birligi.

1-teorema. Meyli $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $v(x)$ funksiylar tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın bolsın: $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(5)}[0,1]$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(1) = 0$, $\psi''(1) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(0) = 0$, $v(x) \in C^{(3)}[0,1]$, $v(0) = 0$, $v'(0) = v'(1)$, $v''(1) = 0$. Onda 1-máseleniń regulyar sheshimi bar hám birden bir boladı.

Dálilleniwi. Dáslep máseleleniń sheshiminiń bar bolıwın kórsetemiz. Máseleleniń $u(x, t)$ sheshimin hám $f(x)$ funkciyanı tómendegi kóriniste izleyemiz:

$$u(x, t) = X_0(x)u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}(t) \right], \quad (6)$$

$$f(x) = f_0X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_{1n}X_n^{(1)}(x) + f_{2n}X_n^{(2)}(x) \right]. \quad (7)$$

(6) hám (7) funkciyalardıń óń tárepindegi qatarlardı (1) teńlemege qoyamız.

$$\begin{aligned} & X_0(x)u_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}''(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}''(t) \right] - \\ & - X_0(x)u_0'(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)u_{1n}'(t) + X_n^{(2)}(x)u_{2n}'(t) \right] - \\ & - X_0^{(4)}(x)u_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(X_n^{(1)}(x) \right)^{(4)} u_{1n}(t) + \left(X_n^{(2)}(x) \right)^{(4)} u_{2n}(t) \right] = \\ & = X_0(x)f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n^{(1)}(x)f_{1n} + X_n^{(2)}(x)f_{2n} \right]. \end{aligned}$$

Bunnan $u_0(t)$, $u_{1n}(t)$, $u_{2n}(t)$ funkciyalardı hám f_0 , f_{1n} , f_{2n} belgisiz turaqlılardı tabıw ushın tómendegi teńlemelerge iye bolamız:

$$u_0''(t) - u_0'(t) = f_0,$$

$$u_{in}''(t) - u_{in}'(t) - \lambda_n^4 u_{in}(t) = f_{in}, \quad i = 1, 2.$$

Bul teńlemelerdi sheship, alamız:

$$u_0(t) = c_1 + c_2 e^t - f_0 t,$$

$$u_{in}(t) = a_{in} e^{k_1 t} + b_{in} e^{k_2 t} - \frac{f_{in}}{\lambda_n^4},$$

bunda c_i , a_{in} , b_{in} , f_0 , f_{in} , $i = 1, 2$ házirshe belgisiz turaqlılar,

$$k_1 = \frac{1 + \mu_n}{2}, \quad k_2 = \frac{1 - \mu_n}{2}, \quad \mu_n = \sqrt{4\lambda_n^4 + 1}. \quad (2) \text{ shártler}$$

$$u_0(0) = \varphi_0, \quad u_n(0) = \varphi_n, \quad u_0'(0) = \xi_0,$$

$$u_0(1) = \psi_0, \quad u_n(1) = \psi_n, \quad u_n'(0) = \xi_n$$

.

kóriniste boladı. $c_i, a_{in}, b_{in}, f_0, f_{in}, i=1,2$ belgisiz turaqlılırdı tabıw ushın bul shártlerdi paydalanamız.

$$c_1 = \frac{1}{e-2} \left[(e-1)\varphi_0 - \psi_0 + v_0 \right],$$

$$c_2 = \frac{1}{e-2} \left[\psi_0 - \varphi_0 - v_0 \right],$$

$$f_0 = \frac{1}{e-2} \left[\psi_0 - \varphi_0 - (e-1)v_0 \right],$$

$$a_{in} = \frac{1}{\Delta_n} \left[k_2 (\psi_{in} - \varphi_{in}) - v_{in} (e^{k_2} - 1) \right], b_{in} = \frac{1}{\Delta_n} \left[v_{in} (e^{k_1} - 1) - k_1 (\psi_{in} - \varphi_{in}) \right],$$

$$f_{in} = \frac{\lambda_n^4}{\Delta_n} \left[-\mu_n \psi_{in} + 2v_{in} e^{\frac{1}{2}} sh \frac{1}{2} \mu_n - \varphi_{in} e^{\frac{1}{2}} sh \frac{1}{2} \mu_n + \varphi_{in} \mu_n e^{\frac{1}{2}} ch \frac{1}{2} \mu_n \right],$$

$$\Delta_n = \mu_n + e^{\frac{1}{2}} \left(sh \frac{1}{2} \mu_n - \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n \right),$$

bunda $\varphi_0, \psi_0, v_0, \varphi_{in}, \psi_{in}, v_{in}, i=1,2$ - (4) funkciyalar boyınsha sáykes túrde $\varphi(x), \psi(x)$ hám $v(x)$ funkciyalardıń jiklew koefficientleri. Onda 1-máseleniń formal sheshimi tómendegi kóriniste boladı:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{X_0(x)}{e-2} \left\{ (e-1+t-e^t)\varphi_0 + (e^t-t-1)\psi_0 + (1-e^t+(e-1)t)v_0 \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(1)}(x)}{\Delta_n} \left\{ (\psi_{1n} - \varphi_{1n}) e^{\frac{1}{2}t} \left[sh \frac{1}{2} \mu_n t - \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n t \right] + \varphi_{1n} e^{\frac{1}{2}t} \left[sh \frac{1}{2} \mu_n - \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n \right] + \right. \\ & \left. + \mu_n \psi_{1n} + 2v_{1n} \left[e^{\frac{1}{2}(1+t)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) + e^{\frac{1}{2}t} sh \frac{1}{2} \mu_n t - e^{\frac{1}{2}} sh \frac{1}{2} \mu_n \right] \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(2)}(x)}{\Delta_n} \left\{ (\psi_{2n} - \varphi_{2n}) e^{\frac{1}{2}t} \left[sh \frac{1}{2} \mu_n t - \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n t \right] + \varphi_{2n} e^{\frac{1}{2}t} \left[sh \frac{1}{2} \mu_n - \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n \right] + \right. \\ & \left. + \mu_n \psi_{2n} + 2v_{2n} \left[e^{\frac{1}{2}(1+t)} sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) + e^{\frac{1}{2}t} sh \frac{1}{2} \mu_n t - e^{\frac{1}{2}} sh \frac{1}{2} \mu_n \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{X_0(x)}{e-2} [\psi_0 - \varphi_0 - (e-1)v_0] + \\
&+ e^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^4}{\Delta_n} \left\{ X_n^{(1)}(x) \left[-e^{-\frac{1}{2}} \mu_n \psi_{1n} + 2v_{1n} sh \frac{1}{2} \mu_n - \varphi_{1n} sh \frac{1}{2} \mu_n + \varphi_{1n} \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n \right] + \right. \\
&\left. + X_n^{(2)}(x) \left[-e^{-\frac{1}{2}} \mu_n \psi_{2n} + 2v_{2n} sh \frac{1}{2} \mu_n - \varphi_{2n} sh \frac{1}{2} \mu_n + \varphi_{2n} \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Endi $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$ bolatuǵınlıǵın dálillewimiz kerek. $\bar{\Omega}$ oblastta $u(x, t)$ funkciyanı t boyınsha eki márte differenciallawdan alınǵan qatarlardın teńólshemli jıynaqlı ekenligin kórsetemiz. Sebebi bul qatarlardın teńólshemli jıynaqlılıǵı $u(x, t)$ funkciyanı t boyınsha bir márte, x boyınsha eki márte differenciallawdan alınǵan qatarlardın jıynaqlılıǵın támiyinleydi. (8) sheshimdi t boyınsha eki márte differenciallaymız.

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= \frac{X_0(x)}{e-2} [\psi_0 - \varphi_0 - v_0] e^t + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{X_n^{(i)}(x)}{\Delta_n} \left\{ -\lambda_n^4 e^{\frac{1}{2}t} (\psi_{in} - \varphi_{in}) \left[sh \frac{1}{2} \mu_n t + \mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n t \right] + \right. \\
&+ v_{in} e^{\frac{1}{2}(1+t)} \left[(1 + \lambda_n^4) sh \frac{1}{2} \mu_n (1-t) - 2\mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n (1-t) \right] + \\
&\left. + v_{in} e^{\frac{1}{2}t} \left[(1 + \lambda_n^4) sh \frac{1}{2} \mu_n t + 2\mu_n ch \frac{1}{2} \mu_n t \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Bul (9) qatar tómendegi san qatarı menen majorirlenedi

$$c_1(|\varphi_0| + |\psi_0| + |v_0|) + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left[\lambda_n^4 (|\varphi_{in}| + |\psi_{in}|) + \lambda_n^2 |v_{in}| \right], \tag{10}$$

bunda $c_i = \text{const}$, $i = 1, 2$.

$\varphi(x), \psi(x), v(x)$ funkciyalardı tómendegishe etip, biortogonal qatarlarǵa jikleybiz:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{1n} X_n^{(1)}(x) + \varphi_{2n} X_n^{(2)}(x) \right], \\
\psi(x) &= \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} X_n^{(1)}(x) + \psi_{2n} X_n^{(2)}(x) \right],
\end{aligned}$$

$$v(x) = v_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_{1n} X_n^{(1)}(x) + v_{2n} X_n^{(2)}(x)]$$

bunda $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \psi_0, \psi_{1n}, \psi_{2n}, v_0, v_{1n}, v_{2n}$ turaqlı koefficientler tómendegi formulalar menen esaplanadı:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_n^{(1)}(x) dx, \\ \varphi_{2n} &= \int_0^1 \varphi(x) Y_n^{(2)}(x) dx, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int_0^1 \psi(x) Y_0(x) dx, \quad \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x) Y_n^{(1)}(x) dx, \\ \psi_{2n} &= \int_0^1 \psi(x) Y_n^{(2)}(x) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_0^1 v(x) Y_0(x) dx, \quad v_{1n} = \int_0^1 v(x) Y_n^{(1)}(x) dx, \\ v_{2n} &= \int_0^1 v(x) Y_n^{(2)}(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Endi (11), (12) dagi ekinshi hám úshinshi integrallardı bóleklep, bes márte hám (13) degi ekinshi hám úshinshi integrallardı úsh márte bóleklep integrallaymız:

$$\begin{aligned} \varphi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{1n} + b_{1n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{1n}^{(5)}, \quad \varphi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{2n}^{(5)}, \\ \psi_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{2n} + b_{2n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{1n}^{(5)}, \quad \psi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{2n}^{(5)}, \\ v_{1n} &= \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} \frac{1}{\lambda_n^3} [a_{3n} + b_{3n}] + \frac{1}{\lambda_n^3} \bar{v}_{1n}^{(3)}, \quad v_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^3} \bar{v}_{2n}^{(3)}(t) \end{aligned}$$

bunda

$$\begin{aligned}
a_{1n} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, \quad b_{1n} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\
a_{2n} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, \quad b_{2n} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\
a_{3n} &= \int_0^1 v^{(3)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, \quad b_{3n} = \int_0^1 v^{(3)}(x) e^{-\lambda_n x} dx, \\
\bar{\varphi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad \bar{\varphi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\
\bar{\psi}_{1n}^{(5)} &= \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad \bar{\psi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \\
\bar{v}_{1n}^{(3)}(t) &= \int_0^1 v^{(3)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad \bar{v}_{2n}^{(3)}(t) = 2 \int_0^1 v^{(3)}(x) \sin \lambda_n x dx.
\end{aligned}$$

$\varphi_{in}, \psi_{in}, v_{in}, i=1,2$ mánislerin (10) ǵa qoysaq, onda bul qatorlar $\bar{\Omega}$ oblastta absolyut jıynaqlı boladı. Onda (9) qatarlar $\bar{\Omega}$ oblastta absolyut hám teńólshemli jıynaqlı boladı. Sheshimniń birden birliǵı (8) den hám (5) sistemaniń tolıqlıǵınan kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

III bap boyınsha juwmaqlaw

Bul bapta tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan nelokal aralas tuwrı hám keri máselelerdi sheshiw máseleleri qarastırılǵan. Bunda máseleniń sheshiminiń barlıǵı hám birden birliǵı, sheshimdi biortogonal qatarǵa jiklew arqalı kórsetildi.

Juwmaqlaw

Házirgi waqıtlarda ilim hám texnikanıń hár túrli tarawlarında dara tuwındılı tórtinshi tártipli teńlemelerge hám olar ushın qoyılǵan máselelerdi sheshiwge qızıǵıwshılıq kúsheyip atır. Sebebi birólsheмли aǵıslardıń dinamikası máselesin úyreniw, ekponencial stratificirlengen suyıqlıqlardıń dinamikası máselesin úyreniw, dispergirirlengen ortalıqta tolqınlardıń tarqalıwın úyreniw, balkanıń hám sterjnniń kese terbelisin úyreniw hám t.b máseleler tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan aralas hám shegaralıq máselelerdi sheshiwge keltiriledi.

Bul magistrlik dissertaciya jumısında tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan aralas-shegaralıq sheshiw máselesi izertlengen.

Jumıstıń birinshi babında tórtinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler hám olardıń ilim hám texnikanıń hár túrli tarawlarında qollanılıwı, sonday-aq, olardı xarakteristik teńlemenıń diskriminantı hám koefficientlerine qarata túrlerge ajırıtıw usılları qaraldı.

Jumıstıń ekinshi babında tórtmúyeshli oblastta tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan aralas máselelerdi ózgeriwshilerdi ajratıw usılı, Ritc hám Galerkin usılı, shekli ayırmalar usılları menen sheshilgen. Bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın apriorlıq baha, bazı bir máselelerdiń sheshimi bahalandırıldı. Qaralıp atırǵan máselelerdiń spektral qásiyetleri izertlengen. Bir máseleniń volterra máselesi ekenligi kórsetildi.

Jumıstıń ushinshi babında tórtinshi tártipli teńlemeler ushın qoyılǵan nelokal aralas tuwrı hám keri máselelerdi sheshiw máseleleri qarastırılǵan. Bunda máseleniń sheshiminiń barlıǵı hám birden birligi, sheshimdi biortogonal qatarǵa jiklew arqalı kórsetildi.

Magistrlik dissertaciya jumısında tiykargı qaralǵan máseleler hám alınǵan nátiyjeler tómendegilerden ibarat:

1. Tórtinshi tártipli teńlemeler, olardı túrlerge ajırıtıw, sonday-aq, olardıń qollanılıwları tuwralı maǵlıwmatlar keltirildi.

2. Tórtmúyeshli oblastta bul teńlemeler ushın qoyılǵan máseleler ózgeriwshilerdi ajratıw usılı, Ritc hám Galerkin usılları, shekli ayırmalar usılı sheshilip, nátiyjeler alındı.

3. Bazı bir máselelerdiń sheshimi ushın apriorlıq baha alındı. Olardıń spektral qásiyetleri izertlendi.

4. Bir máseleniń Volterra máselesi ekenligi kórsetildi.

5. Bazı bir nelokal máselelerdiń sheshimi biortogonal qatar túrinde alındı.

6. Bul túrdegi teńlemelerge qoyılǵan birneshe máseleler sheshilip kórsetildi.

PAYDALANILGAN ÀDEBIYATLAR DIZIMI

Huqıqiy-normativlik hújjetler

1. Axborotlashtirish to'g'risida, 11 dekabr 2003 yil.
2. Elektron raqamli imzo to'g'risida, 11 dekabr 2003 yil.
3. Elektron hujjat aylanishi to'g'risida, 29 aprel 2004 yil.
4. Avtomatlashtirilgan bank tizimida axborotni muhofaza qilish to'g'risida, 16 noyabr 2005 yil.

Òzbekstan Respublikası Prezidenti pàrmanları hám qararlari

5. Òzbekstan Respublikası bunnan bılay da rawajlandırıw boyınsha hàreketler strategiyası haqqında Òzbekstan Respublikası Prezidentiniń Pàrmanı, Tashkent qalası, 2017-jıl 7-fevral.
6. Ilimler Akademiyasınıń jumısın, ilimiy izertlew jumısların shòlkemlestiriw, basqarıw hám qarjılandırıwdı bunnan bılay da jetilistiriw ilajlari haqqında Òzbekstan Respublikası Prezidentiniń Qararı, Tashkent qalası, 2017-jıl 17-fevral.
7. Joqarı bilimlendiriw sistemasın bunnan bılay da rawajlandırıw ilajlari haqqında Òzbekstan Respublikası Prezidentiniń Qararı, Tashkent qalası, 2017-jıl 20-aprel.
8. 2017-2018-oqıw jılında Òzbekistan Respublikasınıń joqarı bilimlendiriw màkemelerine oqıwğa qabıl etiw haqqında Òzbekistan Respublikası Prezidentiniń Qararı, Tashkent qalası, 2017-jıl 5-may.
9. Yoshlarga oid davlat siyosati samaradorligini oshirish va O'zbekiston yoshlar ittifoqi faoliyatini qo'llab-quvvatlash to'g'risida O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Farmoni, № PF-5106, 5-iyul 2017-yil.
10. O'zbekiston Respublikasi Innovacion rivojlanish vazirligini tashkil etish to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Farmoni, №PF-5264, 29-noyabr 2017-yil.

- 11.2017-2021 yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha harakatlar strategiyasini «Faol tadbirkorlik, innovacion g'oyalar va texnologiyalarni qo'llab-quvvatlash yili»da amalga oshirishga oid davlat dasturi to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Farmoni, №PF-5308, 22-yanvar 2018-yil.
- 12.Axborot texnologiyalari va kommunikatsiyalari sohasini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Farmoni, № PF-5349, 19-fevral 2018-yil.
- 13.O'zbekiston Respublikasi Axborot texnologiyalari va kommunikatsiyalarini rivojlantirish vazirligi faoliyatini tashkil etish to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarori, №PQ-3549, 19-fevral 2018-yil.
- 14.Innovatsion loyihalarni amalga oshirish va idoraviy axborot tizimlarini jadal integratsiyalashuvining tashkiliy chora-tadbirlari to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarori, №PQ-3673, 18-aprel 2018-yil.
- 15.O'zbekiston Respublikasi Innovatsion rivojlanish vazirligi huzurida Ilg'or texnologiyalar markazini tashkil qilish to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarori, №PQ-3674, 19-aprel 2018-yil.
- 16.Innovatsion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliy joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarori, №PQ-3682, 27-aprel 2018-yil.

Òzbekstan Respublikası Prezidenti shıǵarmaları

- 17.Mirziyoev SH.M. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. – Toshkent: O'zbekiston, 2016.
18. Mirziyoev SH.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir raxbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. – Toshkent: O'zbekiston, 2017.
19. Mirziyoev SH.M.Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini taminlash – yurt taraqqiyoti va xalq forovonligining garovi. – Toshkent: O'zbekiston, 2017.

20. Mirziyoev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va oliyjanob xalqimiz bilan birga quramiz. – Toshkent: O'zbekiston, 2017.
21. Mirziyoev SH.M. Milliy taraqqiyot yo'limizni qatiyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz.– Toshkent: O'zbekiston, 2017.

Sabaqlıq h m oqıwlıq qollanbalar

22. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. 3-10 стр.
23. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. Об одной задаче типа Самарского для параболического уравнения четвертого порядка. Труды научной конф. «Проблемы современной математики» посвященная 20 летию незав. РУз. г. Карши. 22-23 апрел 2011. Стр.84-86.
24. Бекиев А.Б. Каевые задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка, содержащего произведения операторов Лапласа, теплопроводности и Даламбера. Автореф. дис. ... канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз, 2010. – 16 с.
25. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. -М.: Изд-во АН СССР. 1959. -164 с.
26. Габов С.А., Оразов Б.Б., Свешников А.Г. К нестационарной теории внутренних волн // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М.: Наука, 1986. –№8(26). – С. 1223-1233.
27. Габов С.А., Оразов Б.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М.: Наука, 1986. –№1(26). – С. 92-102.
28. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. –М.: Наука, 1986. -228 с.

- 29.Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. –Ташкент: Фан, 2000.–144с.
- 30.Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977 г. Том XIII, №2, стр. 294-304.
- 31.Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи//Дифференциальные уравнения.1999 г.Т.35,С.1094-1100.
- 32.Мегралиев Я. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. №1 (25). 2013. С. 19-33.
- 33.Мегралиев Я. Обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием // Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. №1. С.83-101.
- 34.Мередов М.М. О существовании решения краевой задачи для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Известия АН Турк. ССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. – Ашхабад, 1967. – № 4. – С. 3-11.
- 35.Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. –№1. – С. 74-80.
- 36.Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка. Автореф. дис. ... канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз, 2009. – 16 с.
- 37.Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2005, №3. – С. 72-77.

38. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллипτικο–гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сибирский математический журнал. 2012 г, Том 53, № 3, стр. 633-647.
39. Смирнов М.М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка. – Ленинград.: Изд-во ЛГУ, 1972. – 123 с.
40. Плeтнер Ю.Д. О математической структуре решения уравнения $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_{xx} - \beta^2 u] + w_0^2 u = 0$ и о связанных с ним задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – М.: Наука, 1990. – №6(30). – С.868-882.

Ilimiy maqalalar

41. Bekiev A.B., Qayrov A.SH. O'zbekistan Respublikasi Ilimler Akademiyasi Qaraqalpaqsan bòliminiñ XABARSHISI, – О решении одной обратной задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями №2 (247) Nòkis 2017j.
42. Tajibaev SH., Qayrov A.SH. «Применение современные интервальных методов при обработке результатов геологических наблюдений» // Magistrlardiñ ilimiy toplamı, QMU 2017j.
43. Bekiev A.B., Qayrov A.SH. Tòrtinshi tàrtipli teñleme ushın aralashegaralıq mäseleni Ritc usılı menen sheshiw // Magistrlardiñ ilimiy toplamı, QMU 2018j.
44. Qayrov A.SH., Salieva S.D., Tòrtinshi tàrtipli teñleme ushın aralashegaralıq mäseleni variaciyalıq-proekciyalıq usıllar menen sheshiw // “Ilim hám tàlim-tàrbiyanıñ àhmiyetli mäselerleri” atamasındağı Respublikalıq ilimiy teoriyalıq hám àmeliy konferenciya, NMPI 2018j.

Internet saytlari

45. <http://mzsvfu.ru/index.php/mz/article/view/parabolic-equations-of-the-fourth-order-with-changing-time-direction-with-complete-matrix-of-gluing-conditions> (Параболические уравнения четвертого порядка)
46. <http://cyberlenika.ru/article/n/parabolicheskie-uravneniya-chetvertogo-poryadka-s-menyayuschimisya-napravleniem-vremeni-s-polnoy-matritsey-usloviy-skleivaniya> (Параболические уравнения четвертого порядка)
47. <http://docplayer.ru/60660127-ob-odnoy-nelokalnoy-zadache-dlya-uravneniya-chetvertogo-poryadka-s-dominiruyushchey-smeshannoy-proivodnoy.html> (Нелокальной задаче для четвертого порядка)

QOSIMSHALAR

(Kompyuter ushın C++ algoritmlık tilinde hám Maple programmasında dúzilgen programmaların hám olardıń orınlanıwınan alınǵan sanlı natıyjelerdiń basıp shıǵarılǵan nusqaları)


```

#include <iostream>
#include <math.h>
#include <vector>
#include<iomanip>
using namespace std;
vector <vector <double> >a(100,vector<double>(100));
void F(int n)
{
int k, i, j;
for(i=0; i<n; ++i)
{
k=i;
for(j=i+1; j<n; ++j)
if(fabs(a[j][i])>fabs(a[k][i]))k=j;
swap(a[i], a[k]);
double b=a[i][i];
for(j=i; j<=n; ++j)
a[i][j]/=b;
for(j=i+1; j<n; ++j)
for(k=i+1; k<=n; ++k)
a[j][k]-=a[i][k]*a[j][i];
}
for(i=n-1; i>=0; i--)
{
a[i][i]=a[i][n];
for(j=n-1; j>i; j--)
a[i][i]-=a[i][j]*a[j][j];
}
}
double f(double x,double t){return t*t*sin(M_PI*x);}
int main()
{
int i, j, n=16;
double u[n][n];
for(i = 0; i <= 5; ++i)
{
for(j = 0; j<=n; ++j)
{
a[i][j]=0;
u[i][j]=0;
}
}
for(i = 0; i < 4; ++i)
{
a[i][i]=-2;
a[i][i+4]=1;
a[n-4+i][n-8+i]=1;
a[n-4+i][n-4+i]=-2;
}
double a1,a2,a3,a4,h,t;
h=0.2;t=0.2;
a1=4*t*t;

```



```

for(j=1; j<=4; j++)
printf ("u[%d][%d] = %.11f ", i,j, u[i][j]);
cout<<endl;
}
return 0;
}

```

u	0	1	2	3	4	5
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.0000000000	-0.0000698964	-0.0002526529	-0.0005501902	-0.0008774975	0.0000000000
2	0.0000000000	-0.0001397928	-0.0005053059	-0.0011003803	-0.0017549950	0.0000000000
3	0.0000000000	-0.0001397928	-0.0005053059	-0.0011003803	-0.0017549950	0.0000000000
4	0.0000000000	-0.0000698964	-0.0002526529	-0.0005501902	-0.0008774975	0.0000000000
5	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

```

u[1][1] = -0.00006989642  u[1][2] = -0.00025265293  u[1][3] = -0.00055019016
u[1][4] = -0.00087749749
u[2][1] = -0.00013979285  u[2][2] = -0.00050530585  u[2][3] = -0.00110038032
u[2][4] = -0.00175499498
u[3][1] = -0.00013979285  u[3][2] = -0.00050530585  u[3][3] = -0.00110038032
u[3][4] = -0.00175499498
u[4][1] = -0.00006989642  u[4][2] = -0.00025265293  u[4][3] = -0.00055019016
u[4][4] = -0.00087749749

```

Process exited after 0.07514 seconds with return value 0

Dlya prodoljeniya najmite lyubuyu klavishu . . .

$n = 5, m = 5$ bolganda Maple programmasında alıngan sheshimniń juwıq mánisleri tómendegishe boladı:

$\{u_{41} = -0.00006989642343, u_{42} = -0.0002526529266, u_{31} =$
 $-0.0001397928469, u_{23} = -0.001100380322, u_{32} =$
 $-0.0005053058533, u_{34} = -0.001754994975, u_{43} =$
 $-0.0005501901608, u_{21} = -0.0001397928469, u_{45} = 0., u_{22} =$
 $-0.0005053058533, u_{11} = -0.00006989642343, u_{44} =$
 $-0.0008774974875, u_{12} = -0.0002526529266, u_{33} =$
 $-0.001100380322, u_{24} = -0.001754994975, u_{14} =$
 $-0.0008774974875, u_{13} = -0.0005501901608, u_{35} = 0., u_{20} = 0.,$
 $u_{30} = 0., u_{40} = 0., u_{15} = 0., u_{25} = 0., u_{05} = 0., u_{50} = 0., u_{04}$
 $= 0., u_{52} = 0., u_{53} = 0., u_{54} = 0., u_{55} = 0., u_{10} = 0., u_{51} = 0., u_{06}$
 $= 0., u_{01} = 0., u_{02} = 0., u_{03} = 0.\}$