ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM WORTA ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATINDAĞI QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

Magistratura bólimi

Qol jazba huqıqında
UDK 517.98

KARIMBOYEV JAHONGIR

"MATRICALAR ALGEBRALARINDA 2-LOKAL DIFFERENCIALLAWLAR"

5A 130101 Matematika (bağdarlar bóyinsha) qánigeligi

Magistr akademiyalıq dárejesin alıw ushın jazılğan

D I S S E R T A C I Y A

MAK da jaqlawğa ruxsat

Magistratura bólimi baslığı **doc. Gulimov A.**

Kafedra baslığı **f-m.i.d. K.K. Kudaybergenov**
Ilimiy basshı: **f-m.i.d. K.K. Kudaybergenov**

Nókis 2018

ÓZBEKISTAN RESPUBLI KASI JOQARI HÁM WORTA ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATINDAǴI QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

Fakultet: Magistratura bólimi
Kafedra: Algebra, funkcionallıq analiz hám geometriya
Oqıw jılı: 2016-2017-2018 j.

Magistrant: Karimboyev Jahongir
Ilimiy basshı:
f.-m.i.d. K.K.Kudaybergenov
Qánigeligi: 5A13001-Matematika (baǵdarlar bóyinsha)

MAGISTRLIK DISSERTACIYASI ANNOTACIYASI

Temanıń tiykarlaması hám aktuallıǵı: Matricalar algebralari 2-lokal differencıallawların xarakterlew usı waqıtqa deyin ashıq turıptı. Bul jumısta biziń maqsetimiz matricalar algebralari 2-lokal differencıallawların izertlewden ibarat.

Jumıstıń maqsetı hám wazıypaları: Matricalar algebralari 2-lokal differencıallawların izertlewden ibarat.

Izertlew obekti hám predmeti: Matricalar algebraları, matricalar algebralarıda differenciallawlar, lokal differenciallawar, 2-lokal differenciallawar.

Izertlew usılları. Magistrlik dissertaciya jumısında tiykarınan funkcionallıq analiz hám matricalar algebraları teoriyası usıllarınan paydalanıladı.

Izertlew nátiyjeleriniń ilimiy tárepten jańalıq dárejesi. Jumıstıń tiykarǵı nátiyjesi jańa yesaplanadı.

Izertlewdıń tiykarǵı máseleleri hám boljawları: Matricalar algebraları 2-lokal differenciallawarin xarakterlew.

Izertlew nátiyjeleriniń ámeliy áhmiyeti hám qollanılıwı: Jumıs teoriyalıq xarakterge iye. Dissertaciyada keltirilgen nátiyjeler hám usıllar funkcionallıq analiz hám matricalar algebraları teoriyasın izertlewde qollanılıwı mu'mkin.

Jumıstıń kólemi hám du'zilisi: Magistrlik dissertaciya jumısı kirisiw, u'sh bap, altı paragraf, juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Worınlanǵan jumıstıń tiykarǵı nátiyjeleri: Jumısta matricalar algebralari 2-lokal differencıallawlarınıń uluima korinisi tabilǵan.

Juwmaq hám usınıslardıń qısqasha ulıwmalasqan sıpatlaması: Jumıstıń nátiyjeleri matrica hám operator algebralarında differenciallaw tipindegi operatorlardı xarakterlew máselelerinde qollanılıwı mu'mkin.

Ilimiy basshı: f.-m.i.d. K.K.Kudaybergenov

Magistrant student: J.Karimboyev

MINISTRY OF HIGH AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

Faculty: Department of Masters
Department: Algebra, functional analysis and geometry
Academic year: 2016-2017-2018

Master student:Karimboyev Jahongir
Supervisor: K. K. Kudaybergenov
Speciality: 5A130101- Mathematics

THE ANNOTATION OF THE MASTER DISSERTATION

Relevance of the inquiry: Charachterization of 2-local derivations on finite dimensional Lie algebras has been open so far. The present paper is devoted to study of charachterization of 2-local derivations on finite dimensional Lie algebras.

Purpose and objectives of the inquiry: Description of 2-local derivations on finite dimensional Lie algebras.

Object and subject of theinquiry: Lie algebralas, nilpotent Lie algebras, derivation, local derivation, 2-local derivation.

Methodology and methods of inquiry: In the work methods of functional analysis and of theory Lie algebras are used.

Degree of novelty of the work: The main result of the work is new.

Main problems and prodictions of the research: Description of general form of 2-local derivations on three dimensional nilpotent Lie algebras.

The economic affectivity and sphere of usage of the work: The work has theoretical character. Results and methods introduced in the work can be used in special courses on functional analysis and theory of Lie algebras.

Structure and composition of the work: The thesis consists introduction, three volumes divided to six parts, conclusion and the referencee.

The main result of the work: In the work we give a general form of 2-local derivations on finite dimensional Lie algebras.

Brief description of the findings and conclusions: The results given in the work can be used in description of the maps of type derivation on Lie and operator algebras.

Supervisor: f.-m.i.d. K. K. Kudaybergenov

Master student: J.Karimboyev

Mazmunı

K I R I S IW

<u>Magistrlik dissertaciya temasiniń aktualliǵi:</u> Sońǵı jıllarda ólshemli operatorlar algebraları hám ondaǵı hár qıylı operatorlar keńnen u'yrenilmekte. Ólshemli operatorlar algebralarınıń tiykarǵı qásiyetleri A.F. Ber, F. Sukochev hám V.I. CHilinlardıń jumislarinda [13,14,15] monografiyasında keńnen u'yrenilgen. Bul monografiyada ólshemli, total ólshemli hám lokal ólshemli operatorlar algebralarınıń tiykarǵı qásiyetleri qaralǵan. Bul algebralardıń bir-biri menen u'stpe-u'st tu'siw shártleri [13] jumısta tabılǵan. Bul algebralarda hár qıylı jıynaqlılıqlar hám topologiyalar, atap aytqanda, ólshem boyınsha jıynaqlılıq, tártip boyınsha jıynaqlılıq, derlik jıynaqlılıq, eki tárepleme derlik jıynaqlılıq tu'rleri [13] jumısta qaralǵan.

Tipi I fon Neyman algebralarına qarata lokal ólshemli operatorlar algebraları [8-12] jumıslarda qaralǵan. Tipi I fon Neyman algebralarına qarata lokal ólshemli operatorlar algebrası ólshemli funkciyalar kolcosı u'stindegi Gilbert – Kaplanski modulinde anıqlanǵan u'zliksiz sızıqlı operatorlar algebrasına izomorflıǵı [8,9] jumısta dáliyllengen. Bunday izomorfizmler járdeminde tipi I fon Neyman algebralarına qarata ólshemli operatorlar algebrası differentsiallanıwları tolıq bayanlanǵan. Bul bayanlawlardan paydalanıp, tipi I fon Neyman algebralarına qarata Arens algebralarınıń avtomorfizmleri [10] jumısta u'yrenilgen.

Operator algebralarında lokal differenciallawlardı u'yreniw 1990 jılı R. Kadison [21] hám D. R. Larson and A. R. Sourour [23] jumıslarınan baslanǵan bolıp, bul jumısta ol fon Neyman algebralarınıń lokal differenciallawların qaraǵan. M. Breshar hám P. SHemrl [18] tárepinen matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar u'yrenilgen. Banax algebralarında lokal differenciallawlar G. Deylstıń monografiyasında [7] hár tárepleme u'yrenilgen.

Lokal va 2-lokal differensiallawlar va olarǵa jaqin sawlelendiriwler kóplegen avtorlar tarepinen izertlengen (qarań [10- 27]).

2014 jili Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov hám I.S. Raximovlar [14] shekli ólshemli Li algebralari differensiallawlarin izertlegen. Olar [14] jumista shekli ólshemli yarim apiwayi Li algeblarinda hár bir 2-lokal differensiallawdiń differensiallaw ekenin dalillegen. Ólshemi u'shten kishi bólmaǵan nilpotent Matricalar algebralarında hámde 2-lokal differensiallawlariniń bázi bir qasiyetlerin izertlengen.

Obekti hám predmeti: Matricalar algebraları, differenciallawlar, operatorlar algebrasında differenciallawlar, 2-lokal differenciallawlar.

Maqset hám wazıypaları: Matricalar algebralari 2-lokal differencıallawların izertlewden ibarat.

Ilimiy jańalıǵı: Matricalar algebralarinda 2-lokal differencıallawlar xarakterlengen.

Izertlewdiń tiykarǵı máseleleri hám boljawları: Matricalar algebralari 2-lokal differencıallawların ulıwma kórinisin anıqlaw.

Izertlew teması bóyinsha ádebiyatlar tu'sindirmesi (analizi):

Magistrlik dissertaciya jumısında ulıwma 26 turli adebayattan paydalanıldı. Normativ hu'jjetler bóyinsha [1,2] ádebiyatlardan paydalanıldı. Ózbekistan Respublikası Prezidenti miynetlerinen [3,4] ádebiyatlardan paydalanıldı. Tiykarǵı ádebiyatlar [5-9] ádebiyatlardan turadı. Bul ádebiyatlardan magistrlik dissertaciya jumısı ushın záru'r bolǵan tiykarǵi tu'sinikler, anıqlamalar hámde ayrım faktler alındı. Magistrlik dissertaciya jumısında paydalanılǵan ilimiy maqalalar [10-26] ádebiyatlarlardan turadı. Bul ilimiy maqalalardan matricalar algebraları differenciallawlar', lokal hám 2-lokal differenciallawları haqqındaǵI záru'rli maǵlıwmatlardan paydalanıldı.

Izertlewde qollanı'lǵan metodika: Dissertaciya jumısında tiykarınan matricalar algebraları teoriyası hám funkcionallıq analiz usullarınan paydalanıldı.

Izertlew nátiyjeleriniń teoriyalıq hám ámeliy áh'miyeti: Jumıs teoriyalıq xarakterge iye. Dissertaciyada keltirilgen nátiyjeler hám usıllar funkcional analiz hám matricalar algebraları bóyinsha izleniwlerde qollanılıwı mu'mkin.

Jumıstıń du'zilisi: Magistrlik dissertaciya jumısı kirisiw, u'sh bap, altı paragraf, juwmaq hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda Matricalar algebraları anıqlamaları, mısallar hám ayrım qásiyetleri qaralǵan. Birinshi paragrafta Li algebralar haqqında tiykarǵı tu'sinikler keltirilgen. Yekinshi paragrafta bolsa ules algebralar hám ideallar dıń anıqlaması, bir neshe mısallar hám ayrım belgili nátiyjeler berilgen.

Yekinshi bapta kishi ólshemli Matricalar algebralarınıń xarakteristikası qaralǵan. Birinshi paragrafta 1 hám 2 ólshemli Matricalar algebraları dizimi, al 3 ólshemli Matricalar algebralarınań bazıbir klasları qaralǵan. Yekinshi paragrafta nilpotent Li algebralari xarakteristikası u'yrenilgen.

U'shinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda Matricalar algebralarında differenciallaw, 2-lokal differenciallaw anıqlamaları, qásiyetleri hám mısallar keltiriledi

A bazı bir algebra bolsın. $D: A \to A$ sızıqlı operator barlıq $x, y \in A$ elementler ushın $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ teńligin qanaatlandırsa, onda bul operator differentsiallaw delinedi. Hár bir tayarlanǵan $a \in A$ element $D_a(x) = ax - xa,\ \ x \in A$ qaǵıyda boyınsha $D_a : A \to A$ differentsiallawdı anıqlaydı. Bul kórinistegi differenciallawlar ishki differentsiallaw delinedi.

3.2.1-teorema. Meyli A unital kommutativ algebra bólsın. Onda $M_n(A)$ algebrasınıń hár bir 2-lokal differensilallawı differensiallaw boladı.

I BAP
ALGEBRALARDA LOKAL DIFFERENCIALLAWLAR

Birinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda differenciallawlar, lokal differenciallawlar anıqlamaları, mısallar hám ayrım qásiyetleri qaralǵan. Birinshi paragrafta algebralarda differenciallawlar hám olardıń tiykarǵı qasiyetlerir keltirilgen. Yekinshi paragrafta bolsa algebralarda lokal differenciallawlar, bir neshe mısallar hám ayrım belgili nátiyjeler keltiriledi.

§ 1.1. Algebralarda differenciallawlar hám olardıń tiykarǵı qasiyetleri

Meyli A bazı bir algebra hám $d : A \to A$ sızıqlı operator bolsın.

1.1-anıqlama: Eger qálegen $x, y \in A$ elementleri ushın

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \tag{1.1}$$

teńligi orınlansa, onda d operatorına differentsiallaw delinedi. Bul (1.1) birdeyligine Leybnits birdeyligi yamasa differentsiallaw birdeyligi delinedi.

Meyli A haqıyqıy sanlar maydanında anıqlanǵan barlıq kópaǵzalılar algebrası bolsın. Bul algebrada ápiwayı tuwındı ámeli differentsiallaw operatorı boladı.

$$D(x) = x', \quad A \tag{1.2}$$

Bul operatordıń differentsiallaw operator ekenligi tuwındınıń qásiyetinen kelip shıǵadı.

1) $D(x+y) = (x+y)' = x' + y' = D(x) + D(y)$;

$$D(x+y)=D(x)+D(y)$$

2) $D(\lambda x)=(\lambda x)'=\lambda x'=\lambda D(x)$

$$D(\lambda x)=\lambda D(x)$$

3) $D(xy)=(xy)'=x'y+y'x=D(x)y+xD(y),$

$$D(xy)=D(x)y+xD(y)$$

Meyli A bazıbir algebra, $P(A)$ bul algebranıń idempotentler toplamı hám $D:A\to A$ differentsiallaw bolsın. Ol jaǵdayda, tómendegi qásiyetler orınlı:

a) eger $e\in P(A)$ bolsa, onda $eD(e)e=0$;

b) eger $e\in P(A)$ hám $eD(e)=D(e)e$ bolsa, onda $D(e)=0$;

Dáliyllew. a) Meyli $e\in P(A)$ bolsın. Onda $e=e^2$ ekenliginen

$$D(e)=D\left(e^2\right)=D(e)e+eD(e),$$

yaǵnıy

$$D(e)=D(e)e+eD(e).$$

Bul teńliktiń oń tárepin e ǵe kóbeytsek

$$D(e)e = D(e)e^2 + eD(e)e,$$

yańıy

$$D(e)e = D(e)e + eD(e)e$$

Bunnan

$$eD(e)e = 0.$$

b) Meyli $e \in P(A)$ hám $eD(e) = D(e)e$ bolsın.

Onda,

$$D(e) = D(e)e + eD(e) = D(e)e + D(e)e =$$

$$= 2D(e)e = 2\left[D(e)e\right]e = 2\left[eD(e)\right]e = 2eD(e)e = 0,$$

yańıy $D(e) = 0$.

Meyli $D: A \to A$ differentsiallaw, $x \in A, \ n \in N$. Onda

$$D\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k D(x) x^{n-k-1}$$

teńligi orınlı.

$n = 2$ de

$$D\left(x^2\right) = \sum_{k=1}^{2} C_2^k x^k D(x) x^{1-k} = xD(x) + D(x)x.$$

Bul teńlik differentsiallaw birdeyliginen orınlı.

$n = m$ de orınlı bolsın, yaǵnıy

$$D\left(x^m\right) = \sum_{k=1}^{m} x^k D\left(x\right) x^{m-k-1}$$

$n = m + 1$ de dáliylleymiz.

$$D\left(x^{m+1}\right) = D\left(x^m x\right) = D\left(x^m\right)x + x^m D(x) =$$

$$= (\sum_{k=1}^{m} x^k D\left(x\right) x^{m-k-1})x + x^m D(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} x^k D\left(x\right) x^{m-k} + x^m D(x) = \sum_{k=1}^{m+1} x^k D\left(x\right) x^{(m+1)-k-1}.$$

Demek

$$D\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k D\left(x\right) x^{n-k-1}.$$

1.2-lemma. Meyli A bazıbir algebra, $Z(A)$ onıń orayı hám $D: A \to A$ differentsiyallaw bolsın. Onda D differentsiallawı algebra orayı $Z(A)$ nı ózinde sáwlelendiredi, yaǵnıy $D\left(Z(A)\right) \subset Z(A)$.

Dáliyllew. Qálegen $x \in A$ hám $f \in Z(A)$ elementlerin alayıq. Onda

$$D(fx) = D(f)x + fD(x)$$

hám

$$D(xf) = D(x)f + xD(f)$$

Endi $fx = xf$ hám $fD(x) = D(x)f$ ekenliginen $D(f)x = xD(f)$ kelip shıǵadı. Bul $D(f) \in Z(A)$ ekenligin ańlatadı. Demek, $D(Z(A)) \subseteq Z(A)$. Lemma dáliyllendi.

Meyli A bazıbir algebra, $Z(A)$ onıń orayı hám $D : A \to A$ differentsiyallaw bolsın. Eger qálegen $a \in Z(A)$ hám $x \in A$ ushın

$$D(ax) = aD(x)$$

bolsa, onda D differentsiallawı $Z(A)$-***sızıqlı*** delinedi.

1.3-lemma. Meyli, A unital algebra, $Z(A)$ onıń orayı hám $D : A \to A$ differentsiyallaw bolsın. Onda D differentsiallawı $Z(A)$-sızıqlı bolıwı ushın ol algebra orayında nól ekenligi záru'r hám jetkilikli.

Dáliyllew: Meyli, D differentsiallawı $Z(A)$-sızıqlı hám $a \in Z(A)$ bolsın. Onda

$$D(a) = D(a1) = aD(1) = 0,$$

sebebi $D(1) = 0$.

Endi D differentsiallawı orayda nól bolsın. Onda qálegen $a \in Z(A)$ hám $x \in A$ ushın

$$D(ax) = D(x)a + xD(a) = aD(x).$$

Bunnan D differentsiallawı $Z(A)$–sızıqlı boladı. Lemma dáliyllendi.

Meyli , A unital emes hám $\bar{A} = A \times \mathbb{C}$ bul algebraǵa birlik elementi biriktirilgen unital algebra bolsın. Eger A algebrasında D differentsiallawı berilgen bolsa, $\tilde{A}$ algebrasında $\tilde{D}$ operatorın tómendegishe anıqlaymız:

$$\tilde{D}((x,\alpha)) = (D(x),0), \quad (x,\alpha) \in \tilde{A}.$$

$\tilde{D}$ differentsiallaw boladı. Haqıyqattan $(x,\alpha),(y,\beta) \in \tilde{A}$ ushın

$$\tilde{D}((x,\alpha)(y,\beta)) = \tilde{D}((xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)) =$$

$$= (D(xy+\alpha y+\beta x),0) = (D(x)y + xD(y) + \alpha D(y) + \beta D(x),0) =$$

$$= (D(x)y,0) + (xD(y),0) + \alpha(D(y)) + \beta(D(x),0) =$$

$$= (D(x)y + \beta D(x),0) + (xD(y) + \alpha D(y),0) =$$

$$= (D(x),0)(y,\beta) + (x,\alpha)(D(y),0) =$$

$$= \tilde{D}((x,\alpha))(y,\beta) + (x,\alpha)\tilde{D}((y,\beta)).$$

Demek, $\tilde{D}$ differentsiallaw boladı.

§ 1.2. Algebralarda lokal differenciallawlar

Endi lokal differentsiallawdıń anıqlamasın keltiremiz. Meyli A bazıbir algebra ham $\delta : A \to A$ sızıqlı operator bolsın.

1.4-anıqlama: Eger qálegen $x \in A$ elementi ushın $d_x : A \to A$ (x elementine ǵárezli) differentsiallaw tabılıp, $\delta(x) = d_x(x)$ teńligi orınlansa, onda δ operatorına lokal differentsiallaw delinedi.

Anıqlamadan qálegen differentsiallawdıń lokal differentsiallaw bolıwı kelip shıǵadı.

C.U.Jensen tárepinen ratsional funktsiyalar algebrasındaǵı lokal differenciallawlardı qaraymız.

Meyli $C(x)$ – x ózgeriwshiniń ratsional funktsiyalarınan ibarat algebra bolsın, yaǵnıy

$$C(x)=\left\{ f=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m} : a_i\in\mathbf{C},\ b_j\in\mathbf{C},\quad 0\le i\le n,\right.$$

$$0\le j\le m,\ n,m\in N\}$$

1-qásiyet. $\mathbf{C}(x)$ algebrasında qálegen differentsiallaw $f\to g\,f'$ kórinisinde boladı, bunda $g\in\mathbf{C}(x)$ fiksirlengen element.

Dáliyllew. Meyli $\delta:\mathbf{C}(x)\to C(x)$ differentsiallaw bolsın. g arqalı $\delta(x)$ elementin belgileymiz.

Meyli $p\in C(x)$ hám $p=a_0+a_1x+\ldots a_nx^n$ bolsın.

Onda

$$\delta(p)=\delta\left(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta\left(x^k\right)=\sum_{k=0}^{n}a_kk\,x^{k-1}\delta(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kk\,x^{k-1}\cdot g=p'g,$$

yaǵnıy $\delta(p)=p'\cdot g$.

Endi $p\ne 0$ elementi ushın

$$0=\delta(1)=\delta\left(pp^{-1}\right)=\delta(p)\,p^{-1}+p\delta\left(p^{-1}\right),$$

bunnan

$$\delta\left(p^{-1}\right)=-\delta(p)\,p^2=-gp'p^2,$$

Demek, $\delta\left(p^{-1}\right)=-p'p^{-2}g$.

Endi $f = \frac{q}{p} \in C(x)$ elementi ushın

$$\delta(f) = \delta\left(\frac{p}{q}\right) = \delta\left(p \cdot q^{-1}\right) = \delta(p)q^{-1} + p\delta\left(q^{-1}\right) =$$

$$= gp^1q^{-1} - pgq^1q^{-2} = g\left[p^1q^{-1} - pq^1q^{-2}\right] = g\left[p^1q - pq^1\right]q^{-2} = g\left[p\,q^{-1}\right]',$$

bunnan

$$\delta(f) = g\ f\ .$$

2-qásiyet. $C(x)$ algebrasında hár bir konstantalarda nólge teń sızıqlı operator lokal differentsiallaw boladı.

Dáliyllew. Meyli $\alpha : C(x) \to C(x)$ lokal differentsiallaw bolsın. Onda, hár bir c kompleks sanı ushın $\delta : C(x) \to C(x)$ differentsiallaw tabılıp, $\alpha(c) = \delta(c) = 0$.

Endi $\alpha : C(x) \to C(x)$ sızıqlı operatorı konstantalarda nól bolsın. Eger $f \in C(x)$ konstantadan parqı bolsa, onda $f' \neq 0$. $h \in C(x)$ ushın $\delta(h) = \frac{\alpha(f)}{f'}h'$ deyik. Onda, δ differentsiallaw boladı. Endi $\delta(f) = \frac{\alpha(f)}{f'} \cdot f' = \alpha(f)$, yaǵnıy $\alpha(f) = \delta(f)$. Demek, α -lokal differentsiallaw boladı.

3-qásiyet. $C(x)$ algebrasında differentsiallaw bolmaǵan lokal differentsiallaw bar boladı. X arqalı $C(x)$ algebrasında 1 hám X payda etken 2-ólshemli u'les keńislikti belgileymiz. α bolsa $C(x)$ keńislikti X u'les keńislikke proektsiyalaw bolsın.

Onda α konstantalarda nólge teń. Demek, α sızıqlı operatorı 2-qásiyetke tiykarlanıp, lokal differentsiallaw boladı.

α differentsiallaw bolsın dep alsaq, onda $\alpha(f)=\alpha(x)f'$. Bunnan $\alpha(x)=0$ ekenliginen, $\alpha(f)=0$ yaǵnıy $\alpha\equiv 0$ kelip shıǵadı. Biraq $\alpha\neq 0$.

Demek, α differentsiallaw bolmaydı.

$C[x,y,...,w]$ arqalı $\{x,y,...,w\}$ ózgeriwshilerdiń kóp aǵzalıları algebrasın belgileymiz.

1.5-teorema [21] . $C[x]$ algebrasınan $C[x,y,...,w]$ algebrasına yaqtıyarlı lokal differentsiallaw differentsiallaw boladı.

Dáliyllew. Meyli $\alpha:C[x]\to C[x,y,...w]$ lokal differentsiallaw bolsın. Hár bir j natural sanı ushın $\delta_j:C[x]\to C[x,y,...,w]$ differentsiallaw tabılıp,

$$\alpha\left(x^j\right)=\delta_j\left(x^j\right)=jx^{j-1}\delta_j\left(x\right)=jx^{j-1}g_j.$$

Bunda $g_j=\delta_j(x)$, teńligi orınlanadı. Tap sonday hár bir $p\in C(x)$ ushın sonday $g_p\in C[x,y,...,w]$ tabılıp,

$$\alpha(p)=p'g_p$$

teńligi orınlanadı, bunda p' – ápiwayı tuwındı.

Bunnan sonday $h\in C[x,y,...,w]$ hám $a\in\mathbf{C}$ sanı ushın tómendegi teńlik orınlanadı:

$$2\left(x^{j}+ax^{k}\right)\left(jx^{j-1}+kax^{k-1}\right)h=\alpha\left(\left[x^{j}+ax^{k}\right]^{2}\right)=$$

$$=\alpha\left(x^{2j}+2ax^{j+k}+a^{2}x^{2k}\right)= \tag{1.3}$$

$$=2jx^{2j-1}g_{2j}+2\left(j+k\right)ax^{j+k-1}g_{j+k}+2ka^{2}x^{2k-1}g_{2k},$$

bunda $j,k\geq 1$. Meyli $b\in\mathbf{C}$ sanı $b^{k-j}=-a^{-1}$ shártin qanaatlandırsın. Onda, (1.3) teńlik b da nolge teń boladı. (1.3) teńliktiń oń tárepin tómendegishe jazamız:

$$2x^{2j-1}\left(jg_{2j}+\left(j+k\right)ax^{k-j}g_{j+k}+ka^{2}x^{2(k-j)}g_{2k}\right),$$

bul teńlik $x=b$ da nólge teń. Bunnan

$$jg_{2j}\left(b,y,\ldots,w\right)+kg_{2k}\left(b,y,\ldots,w\right)-\left(j+k\right)g_{j+k}\left(b,y,\ldots,w\right)=0 \tag{1.4}$$

Bunnan

$$jg_{2j}+kg_{2k}-\left(j+k\right)g_{j+k}=0 \tag{1.5}$$

birdeyligi orınlı boladı.

Tap sonday (1.3) teńliktegidey, $\alpha\left(\left[1+ax^{k}\right]^{2}\right)$ nı esaplasaq, $b^{k}=-a^{-1}$ bolǵanda,

$$x\left(ax^{k-1}g_{k}+a^{2}x^{2k-1}g_{2k}\right)$$

payda boladı.

Tap sonday (1.5) teńlik sıyaqlı $g_k = g_{2k}$ teńligi $k \geq 1$ orınlı boladı. (1.5) teńlikte $j = k+1$ dep alsaq, onda

$$(k+1)g_{2k+2} + kg_{2k} = (2k+1)g_{2k+1} \tag{1.6}$$

teńligi kelip shıǵadı.

(1.6) teńlikte $k = 1$ dep alsaq, onda

$$2g_4 = g_2 = 3g_3$$

payda boladı. Biraq $g_2 = g_4$. Bunnan $g_2 = g_3$.

Meyli $g_1 = g_2 = ... = g_{2k+1}$ dep boljayıq. $g_{2k} = g_{2k+1}$ teńligi hám (1.6) formuladan

$$(k+1)g_{2k+2} = (k+1)g_{2k+1}$$

kelip shıǵadı. Bunnan $g_1 = g_2 = ... = g_{2k+2}$. Endi $g_k = g_{2k}$ teńlikten $g_{2k+4} = g_{k+2}$ kelip shıǵadı. (1.6) teńlikten

$$(2k+3)g_{2k+3} = (k+1)g_{2k+2} + (k+2)g_{2k+4} = (2k+3)g_{2k+2},$$

bunnan $g_{2k+3} = g_{2k+2}$. Demek,

$$g_1 = g_2 = ... = g_{2k+1} = g_{2k+2} = g_{2k+3}$$

İnduktsiyadan $g_j = g_k$ teńligi hámme j hám k larda orınlı.

Endi $p \in C[x]$ elementi $a_n x^n + ... + a_0$ bolsa, onda

$$\alpha(p) = na_n x^{n-1} g_n + ... + a_1 g_1 + a_0 =$$

$$= ha_n x^{n-1} g_1 + ... + a_1 g_1 + a_0 = p' g_1,$$

yaǵnıy $\alpha(p) = p' g_1$. Bunnan α operatorı $p \to p' g_1$ ge teń bolǵan differentsiallaw boladı. Teorema dáliyllendi.

1.6-Teorema [21]. $C[x_1,...,x_n]$ algebrasınan $C[x_1,...,x_m]$ algebrasına, bunda $n \le m$, lokal differentsiallaw differentsiallaw boladı.

Dáliylleniwi. $\alpha : C[x_1,...,x_n] \to C[x_1,...,x_m]$ lokal differentsiallaw bolsın. Onda, α operatorınıń $C[x_j]$ dan $C[x_1,...,x_m]$ algebrasına differentsiallaw ekenligi tikkeley anıqlamadan kelip shıǵadı.

Endi $r \le n$ sanın alayıq.

Meyli

$$\alpha : C\left[x_{j(1)},...,x_{j(r-1)}\right] \to C[x_1,...,x_m]$$

differentsiallaw bolsın dep boljayıq. Onda

$$\alpha : C[x_1,...,x_r] \to C[x_1,...,x_m]$$

differentsiallaw ekenligin kórsetemiz.

Meyli $g\ j = \alpha(x_j)$ bolsın, bunda $j \in \{1,...,n\}$.

$$\delta_0\left(x_1^{k(1)}...x_n^{k(n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} k(j)\, x_1^{k(1)} ... x_{j-1}^{k(j-1)}\, x_j^{k(j)-1}\, x_j^{k(j+1)} ... x_n^{k(n)} g_j$$

formula arqalı δ_0 nı anıqlaymız. Bul operator jalǵız tu'rde $C[x_1,...,x_n]$ dan $C[x_1,...,x_m]$ algebrasına bolǵan δ differentsiallawǵa dawam ettiriledi.

δ differentsiallaw bolǵanlıqtan, $\alpha-\delta$ differentsiallaw hám ol $x_1,...,x_n$ larda nólge teń boladı. Biz $\alpha-\delta$ operatorı nólge teńligin, yaǵnıy α differentsiallaw ekenin kórsetemiz.

α nıń ornına $\alpha-\delta$ nı qarap, biz $\alpha\left(x_j\right)=0$ dep alıwımız mu'mkin.

α operatorınıń shegaralanıwı $C\left[x_{j(1)},...,x_{j(2-1)}\right]$ dan $C[x_1,...,x_m]$ algebrasına differentsiallaw bolǵanlıqtan, $\alpha\left(x_{j(1)}^{k(1)}...x_{j(2-1)}^{k(2-1)}\right)=0$ teńligi orınlı boladı. Nólden ózgeshe $\alpha\in\mathbf{C}$ sanın alsaq, onda bazı bir $h_1,...,h_r$, $p\in C[x_1,...,x_m]$ elementleri ushın

$$2\left[x_1^{k(1)}+a\,x_2^{k(2)}...x_r^{k(r)}\right]p=\alpha\left(\left[x_1^{k(1)}+a\,x_2^{k(2)}...x_r^{k(r)}\right]^2\right)=$$

$$=\alpha\left(x_1^{2k(1)}+2ax_1^{k(1)}...x_r^{k(r)}+a^2x_2^{2k(2)}...x_r^{2k(r)}\right)= \tag{1.7}$$

$$=2a\;\alpha\left(x_1^{k(1)}...x_r^{k(r)}\right)=2a\sum_{j=1}^{r}k\left(j\right)x_1^{k(1)}...x_j^{k(j)-1}...x_r^{k(r)}h_j$$

Endi $b_1,...,b_r$ kompleks sanların

$$b_1^{-k(1)}b_2^{k(2)}...b_r^{k(r)}=-a^{-1}$$

shártin qanaatlandıratuǵınday etip tańlaymız. $x_1,...,x_2$ ózgeriwshiler ornına $b_1,...,b_2$ sanların qoysaq, onda (1.7) teńliktiń shep tárepi nólge teń boladı.
Óń tárepin tómendegishe jazamız:

$$2x_1^{2k(1)-1}\Big[k(1)\,a\,x_1^{-k(1)}\,x_2^{k(2)}...x_r^{k(r)}\,h_1 +$$

$$+\sum_{j=1}^{r} k(j)\,a\,x_1^{-k(1)}x_2^{k(2)}...x_2^{k(2)}x_1\,x_j^{-1}\,h_j\Big].$$

Bunda $x_1,...,x_2$ ózgeriwshiler ornına $b_1,...,b_2$ sanların qoysaq,

$$0 = k(1)\,h_1(b_1,...,b_r,\ x_{2+1},...,x_m) +$$

$$+\sum_{j=2}^{r} k(j)\,b_1 b_j^{-1} h_j(b_1,...,b_r,\ x_{2+1},...x_m)$$

payda boladı. Bunnan

$$0 = \sum_{j=2}^{r} k(j)\,b_j^{-1}\,h_j(b_1,...,b_r,\ x_{2+1},...x_m) \tag{1.8}$$

Bul teńlik hámme $b_1,...,b_2$ larda orınlanǵanı ushın

$$0 = \sum_{j=2}^{r} k(j)\,x_j^{-1}\,h_j \tag{1.9}$$

kelip shıǵadı.

Bunnan

$$\sum_{j=2}^{r} k(j)\,x_1...x_{j-1}x_{j+1}...x_r\,h_j = 0$$

Demek,

$$\alpha\left(x_1^{k(1)}...x_2^{k(2)}\right)=\sum_{j=1}^{n}k\left(j\right)x_1^{k(1)}...x_j^{k(j)-1}...x_2^{k(r)}h_j=$$

$$=x_1^{k(1)-1}...x_2^{k(2)-1}\sum_{j=1}^{n}k\left(j\right)x_1...x_{j-1}x_{j+1}...x_2h_j=0$$

Bunnan $\alpha=0$. Teorema dáliyllendi.

Saldar. $C\left[x_1,...,x_n\right]$ algebrada hár bir lokal differentsiallaw differentsiallaw boladı.

Sońǵı jıllarda operatorlar algebralarında lokal differenciallawlar keńnen u`yrenilmekte [16-23].

Meyli A bazı bir algebra bolsın. $D:A\to A$ sızıqlı operator $\forall x,y\in A$ elementleri ushın

$$D(xy)=D(x)y+xD(y)$$

birdeyligin qanaatlandırsa ***differentsiallaw*** delinedi.

Endi $\Delta:A\to A$ sızıqlı operatorın qarastıramız. Eger $\forall x\in A$ elementi ushın sonday $D:A\to A$ (x qa ǵárezli) differentsiallaw tabılıp $\Delta(x)=D(x)$ teńligi orınlansa, onda Δ ***lokal differentsiallaw*** delinedi.

Anıqlamadan qálegen differentsiallaw lokal differentsiallaw bolıwı kelip shıǵadı. Ulıwma jaǵdayda kerisi orınlı emes.

Hár bir lokal differentsiallaw, differentsiallaw bolǵan lokal differentsiallaw bolıp, differentsiallaw bolmaǵan operatorlar bar bolǵan algebralar klasların izertlew áhmiyetli másele esaplanadı.

Biz u`shmu`yeshli matritsalar algebralarında lokal differentsiallawdı u`yrenemiz.

$$x = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

bunda $\lambda, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ kompleks sanlar, kórinistegi u`shmu`yeshli matritsalardan ibarat A algebrasın belgileymiz.

Tómendegi nátiyje orınlı.

1.7-misal. $\forall \alpha, \beta, \gamma$ kompleks sanları ushın

$$\Delta : \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\lambda_{12} + \beta\lambda_{13} + \gamma\lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

operatorı lokal differentsiallaw boladı.

A algebrasında tómendegi operatorlardı qarastırayıq.

$$D_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$D_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$D_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$D_4(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Anıqlamadan D_1, D_2, D_3 hám $D_4(x)$ operatorları differentsiallaw ekeni tikkeley kelip shıǵadı.

Endi (1.10) formula menen anıqlanǵan Δ operatorınıń lokal differentsiallaw ekenin tekseremiz. Qálegen

$$x = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

matritsasın alayıq. Tómendegi jaǵdaylardı kórip shıǵamız.

1-jaǵday. Meyli $\lambda_{12} \neq 0$ bolsın. Onda $D = cD_2$ differentsiallawın alayıq. Bul jerde

$$c = \frac{\alpha\lambda_{12} + \beta\lambda_{13} + \gamma\lambda_{23}}{\lambda_{12}}.$$

Bunnan

$$D(x) = cD_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c\lambda_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta(x)$$

kelip shıǵadı.

2-jaǵday. Meyli $\lambda_{23} \neq 0$ bolsın. Bul jaǵdayda $D(x) = cD_1(x)$ tı alamız. Bul jerde

$$c = \frac{\alpha\lambda_{12} + \beta\lambda_{13} + \gamma\lambda_{23}}{\lambda_{12}}.$$

Onda

$$D(x) = cD_1(x) = D(x).$$

3-jaǵday. $\lambda_{12} = \lambda_{23} = 0$ bolsın. Onda $D(x) = \beta D_3(x)$ differentsiallawın alsaq, $D(x) = D(x)$ orınlanadı.

Demek, Δ lokal differentiallaw boladı.

Endi (1.10) mısaldiń dara jaǵdayı bolǵan tómendegi

$$\Delta : \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\lambda_{13} - \lambda_{12} + \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

operatordiń differentsiallaw emesligin kórsetemiz.

Joqarıda Δ operatordıń local differentsiallaw ekenligin kórsettik.

Meyli

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matritsasın qarastırayıq. Onda

$$\Delta\left(x^2\right) = \Delta\left(\begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

yaǵnıy

$$\Delta\left(x^2\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekinshi tárepten

$$\Delta(x)x + x\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

yaǵnıy

$$\Delta(x)x + x\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bunnan

$$\Delta\left(x^2\right) \neq \Delta(x)x + x\Delta(x).$$

Demek, Δ differentsiallaw emes.

II BAP
MATRITSALIQ ALGEBRALARDA LOKAL DIFFERENCIALLAWLAR

Bul bapta matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar qaralg`an. Birinshi paragrafta matritsalıq algebralarda differenciallawlar qaralǵan. Yekinshi paragrafta matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar, M tipi I_n $(n \in \mathbb{N})$ fon Neyman algebrası, $Z(M)$ onıń orayı hám $D: M \to M$ differenciallawlarıhaqındaǵı teoremalar keltirilgen.

§ 2.1. Matritsalıq algebralarda differenciallawlar

Endi kommutativ C^*-algebralarda differentsiallaw haqqında teoremanı keltiremiz (qarań [5,6]).

2.1-teorema. Eger A kommutativ C^*–algebra hám $D: A \to A$ differentsiallaw bolsa, onda $D \equiv 0$.

Dáliyllew. Eger A unital bolmasa, onda bul algebraǵa birlik elementti biriktirip hám differentsiallawdı joqarıdaǵı usılda dawam ettiriw mu'mkin.sol sebepli unital algebra bolǵan jaǵdaydı qaraw jetkilikli.

Gel'fand-Naymark teoremasına tiykarlanıp A algebrası bul algebranıń spektri Ω kompaktında anıqlanǵan kompleks mánisli u'zliksiz funktsiyalar $C(\Omega)$ algebrasına izamorf boladı.

$x \in A \equiv C(\Omega)$ ermit elementi bolsın. Bazıbir tayınlanǵan $t \in \Omega$ noqatın alamız. Onda

$$D\left(x - x(t)1\right) = D(x) - x(t)D(1).$$

$D(1) = 0$ ekenliginen

$$D\left(x-x(t)1\right)=D(x).$$

Endi $x-x(t)1$ ermit elementi bolǵanlıqtan sonday teris emes $x_1, x_2 \in C(\Omega)$ tabılıp,

$$x-x(t)1=x_1-x_2,\quad x_1(t)=x_2(t)=0.$$

$x_1=h_1^2$ bolsın. Onda

$$D(x_1)=D\left(h_1^2\right)=D(h_1)h_1+h_1D(h_1)=2D(h_1)h_1.$$

Bunnan

$$D(x_1)(t)=2D(h_1)(t)h_1(t)=2D(h_1)(t)\sqrt{x_1(t)}=0,$$

sebebi $x_1(t)=0.$ Demek, $D(x_1)(t)=0.$ Tap sonday $D(x_2)(t)=0.$ Bunnan

$$D\left(x-x(t)1\right)(t)=x_1(t)-x_2(t)=0.$$

Joqarıda kórsetilgenindey,

$$D(x)=D\left(x-x(t)1\right).$$

Demek, $D(x)(t)=0.$ Endi $t\in\Omega$ noqattıń qálegen tańlanǵanlıǵınan $D(x)=0$, yaǵnıy $D=0.$ Teorema dáliyllendi.

§ 2.2. Matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar

Hár bir fon Neyman algebrası C^*-algebra bolıwınan 2.1-teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı.

2.2-nátiyje. Kommutativ fon Neyman algebrasındaǵı qálegen differentsiallaw nólge teń.

Meyli, M bir jınıslı tipi $I_n\,(n \in \mathbb{N})$ fon Neyman algebrası, $Z(M)$ onıń orayı bolsın. Onda $M \cong M_n(Z(M))$, bunda $M_n(Z(M))$ bul $Z(M)$ algebrası u'stindegi $n \times n$-tártipli matritsalar algebrası.

Hár bir $(i, j), 1 \le i, j \le n$ juplıǵı ushın e_{ij} bul Matritsalıq birlikler bolsın. Matritsalıq birliklerdi kóbeytiw tómendegi qásiyetke iye

$$e_{ij}e_{ks} = \begin{cases} e_{is}, & eger \quad j = k \\ 0 & eger \quad i \ne j \end{cases}$$

hám $M_n(Z(M))$ algebrasınıń qálegen x elementi jalǵız usılda

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}, \quad a_{ij} \in Z(M), \quad 1 \le i, j \le n$$

formada jazıladı.

2.3-teorema. Meyli, M tipi $I_n \quad (n \in \mathbb{N})$ fon Neyman algebrası, $Z(M)$ onıń orayı hám $D: M \to M$ differentsiallaw bolsın. Onda

$$a = -\sum_{k=1}^{n} e_{k1}D(e_{1k})$$

elementi D differentsiallawın payda etedi, yaǵnıy

$$D(x) = ax - xa, \quad x \in M .$$

Dáliyllew. Aldın $x = e_{ij}\left(i,\ j\right.$ tayınlanǵan sanlar) elementi ushın $D\left(x\right) = ax - xa$ teńlik orınlı ekenligin kórsetemiz. Mına $e_{kk} = e_{k1}e_{1k}$ teńlikten

$$D\left(e_{kk}\right) = D\left(e_{k1}\right)e_{1k} - e_{k1}D\left(e_{1k}\right),$$

yaǵnıy

$$e_{k1}D\left(e_{1k}\right) = D\left(e_{kk}\right) - D\left(e_{k1}\right)e_{1k}$$

kelip shıǵadı, bul jerde $1 \le k \le n.$ Aqırǵı teńlikti barlıq k lar bóyinsha qosıp shıqsaq,

$$\sum_{k=1}^{n} e_{k1}D\left(e_{1k}\right) = \sum_{k=1}^{n} D\left(e_{kk}\right) - \sum_{k=1}^{n} D\left(e_{k1}\right)e_{1k},$$

yaǵnıy

$$\sum_{k=1}^{n} e_{k1}D\left(e_{1k}\right) = D\left(\sum_{k=1}^{n} e_{kk}\right) - \sum_{k=1}^{n} D\left(e_{k1}\right)e_{1k}.$$

Endi $\sum_{k=1}^{n} e_{kk} = 1$ ekenliginen paydalansaq, onda

$$\sum_{k=1}^{n} e_{k1}D\left(e_{1k}\right) = D\left(1\right) - \sum_{k=1}^{n} D\left(e_{k1}\right)e_{1k}.$$

$D\left(1\right) = 0$ ekenligin esapqa alsaq, onda

$$\sum_{k=1}^{n} e_{k1}D\left(e_{1k}\right) = -\sum_{k=1}^{n} D\left(e_{k1}\right)e_{1k}.$$

Endi aqırǵı teńlikten paydalanıp tómendegige iye bolamız:

$$ae_{ij}-e_{ij}a=-\left(\sum_{k=1}^{n}e_{k1}D\left(e_{1k}\right)\right)e_{ij}+e_{ij}\sum_{k=1}^{n}e_{k1}D\left(e_{1k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}D\left(e_{k1}\right)e_{1k}e_{ij}+\sum_{k=1}^{n}e_{ij}e_{k1}D\left(e_{1k}\right)=$$

$$=D\left(e_{i1}\right)e_{1j}+e_{i1}D\left(e_{1j}\right)=$$

$$=D\left(e_{i1}e_{1j}\right)=D\left(e_{ij}\right)=D\left(x\right).$$

Demek, $x=e_{ij}$ element ushın $D\left(x\right)=ax-xa$ orınlı eken.

Ulıwma jaǵdayın qarawdan aldın D differentsiallawdıń $Z\left(M\right)$–sızıqlı ekenligin kórsetemiz. Haqıyqattan 1.2-lemmaǵa tiykarlanıp D differentsiallawı $Z\left(M\right)$ oraydı ózine sáwlelendiredi. 2.2-nátiyjege kóre D operatorı $Z\left(M\right)$ orayda nólge teń boladı. 1.3-lemmadan bolsa D operatorı $Z\left(M\right)$–sızıqlı boladı.

Endi $x=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij},\quad a_{ij}\in Z\left(M\right),\quad 1\le i,j\le n,$ qálegen element bolsın. Onda

$$D\left(x\right)=D\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}D\left(e_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(ae_{ij}-e_{ij}a\right)=a\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij}\right)-\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_{ij}\right)a=$$

$$=ax-xa.$$

Teorema dáliyllendi.

2.4-teorema. Meyli R kommutativ algebra bolsın. Eger $\Phi:M_n\left(R\right)\to M_n\left(R\right)$ operatorı R-sızıqlı bolıp, barlıq $P\in M_n\left(R\right)$

idempotentler ushın $\Phi(P)^2 = \Phi(P)$ teńligin qanaatlandırsa, onda Φ Jordan gomomorfizmi boladı.

Dáliyllew. E_{ij} arqalı $M_n(R)$ algebranıń matritsalıq birliklerin belgileymiz. $M_n(R)$ algebranıń hár bir $X \in M_n(R)$ elementi

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} E_{ij}, \qquad \lambda_{ij} \in R, \quad i, j = \overline{1,n}$$

kóriniste bolǵanlıqtan

$$\Phi\left(E_{ij} E_{kl} + E_{kl} E_{ij}\right) = \Phi\left(E_{ij}\right)\Phi\left(Ee_{kl}\right) + \Phi\left(E_{kl}\right)\Phi\left(E_{ij}\right) \tag{2.1}$$

teńligin kórsetiw jetkilikli.

1-jaǵday. $i = j,\ k = l$. Onda

$$\Phi\left(E_{ii} E_{kk} + E_{kk} E_{ii}\right) = \Phi\left(E_{ii}\right)\Phi\left(Ee_{kk}\right) + \Phi\left(E_{kk}\right)\Phi\left(E_{ii}\right)$$

Eger $i = k$ bolsa, onda

$$\Phi\left(E_{ii}\right) = \Phi\left(E_{ii}\right)^2$$

E_{ii} idempotent bolǵanlıqtan bul teńlik teorema shártinen kelip shıǵadı.

Endi $i \neq k$ bolsın. Onda $E_{ii} E_{kk} = 0$

Demek

$$\Phi\left(E_{ii}\right)\Phi\left(E_{kk}\right) + \Phi\left(E_{kk}\right)\Phi\left(E_{ii}\right) = 0 \tag{2.2}$$

teńliginiń orınlı ekenligin kórsetiw kerek. $P_1 = E_{ii} + E_{kk}$ bolsın. Onda P_1-proektor boladı. Sonlıqtan

$$\Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{kk}) = \Phi(E_{ii} + E_{kk}) = \Phi(P_1) = \Phi(P_1)^2 =$$

$$= \left(\Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{kk})\right)^2 = \Phi(E_{ii})^2 + \Phi(E_{kk})^2 + \Phi(E_{ii})\Phi(E_{kk}) +$$

$$+\Phi(E_{kk})\Phi(E_{ii}) = \Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{kk}) + \Phi(E_{ii})\Phi(E_{kk}) + \Phi(E_{kk})\Phi(E_{ii}),$$

yaǵnıy

$$\Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{kk}) + \Phi(E_{kk})\Phi(E_{kk}) = 0$$

Endi $i \neq j$ bolǵanda

$$\Phi\left(E_{ij}\right)^2 = 0$$

ekenligin dáliylleymiz.

$$P_2 = E_{ii} + E_{ij}, \quad P_3 = E_{ii} - E_{ij}$$

$$P_2^2 = \left(E_{ii} + E_{ij}\right)^2 = E_{ii}{}^2 + E_{ii}E_{ij} + E_{ij}E_{ii} + E_{ij}E_{ij} = E_{ii} + E_{ii} = P_1, \quad P_2^2 = P_2.$$

Sonday-aq, $P_3^2 = P_2$. Demek, P_2, P_3 – proektorlar.

Bunnan

$$2\Phi(E_{ii}) = \Phi(E_{ii}+E_{ij}) + \Phi(E_{ii}-E_{ij}) = \Phi(E_{ii}+E_{ij})^2 + \Phi(E_{ii}-E_{ij})^2 =$$

$$= \Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{ii})\Phi(E_{ij}) + \Phi(E_{ij})\Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{ij})^2 +$$

$$+\Phi(E_{ii}) - \Phi(E_{ii})\Phi(E_{ij}) - \Phi(E_{ij})\Phi(E_{ii}) + \Phi(E_{ij})^2 = 2\Phi(E_{ii}) + 2\Phi(E_{ij})^2$$

Bunnan

$$\Phi(E_{ij})^2 = 0\,. \tag{2.3}$$

2-jaǵday. $i = j,\ \ k \neq l$ bolsın.

Aldın $i = k$ jaǵdaydı kóremiz. Onda

$$2\Phi(e_{il}) = \Phi(e_{ii})\Phi(e_{il}) + \Phi(e_{il})\Phi(e_{ii}) \tag{2.4}$$

ekenligin kórsetiw kerek.

$P_4 = e_{ii} + e_{il}$ proektor bolǵanlıqtan,

$$\Phi(e_{ii}) + \Phi(e_{il}) = \Phi(P_4) = (\Phi(e_{ii}) + \Phi(e_{il}))^2 =$$

$$= \Phi(e_{ii}) + \Phi(e_{il})^2 + (\Phi(e_{ii})\Phi(e_{il}) + \Phi(e_{il})\Phi(e_{ii})).$$

Endi (2.3) teńlikti qollasaq, (2.4) kelip shıǵadı. Sonday-aq

$$\Phi(e_{ki}) = \Phi(e_{ii})\Phi(e_{ki}) + \Phi(e_{ki})\Phi(e_{ii})\,, \tag{2.5}$$

3-jaǵday. $k \neq i,\ l \neq i$. Onda $e_{ii}\,e_{kl} + e_{kl}\,e_{ii} = 0$ bolǵanlıqtan,

$$\Phi(e_{ii})\Phi(e_{kl})+\Phi(e_{kl})\Phi(e_{ii})=0$$

ekenligin kórsetemiz.

$P_5=e_{kk}+e_{ii}+e_{kl}$ bolsın. Onda

$$P_5^2=(e_{kk}+e_{ii}+e_{kl})^2=(e_{kk}+e_{ii}+e_{kl})(e_{kk}+e_{ii}+e_{kl})=$$

$$=e_{kk}+e_{kk}e_{kl}+e_{ii}=e_{kk}+e_{ii}+e_{kl}=P_5,$$

yaǵnıy P_5 -idempotent.

Bunnan

$$\Phi(e_{kk})+\Phi(e_{ii})+\Phi(e_{kl})=\Phi(P_5)=\left(\Phi(e_{kk})+\Phi(e_{ii})+\Phi(e_{kl})\right)^2=$$

$$=\Phi(e_{kk})+\Phi(e_{ii})+\Phi(e_{kl})^2+\Phi(e_{kk})\Phi(e_{kl})+\Phi(e_{kl})\Phi(e_{kk})+ \tag{2.6}$$

$$+\Phi(e_{ii})\Phi(e_{kl})+\Phi(e_{kl})\Phi(e_{ii}).$$

Bul teńlikke (2.2), (2.3) hám (2.4) lardı qollasaq, (2.6) teńlik kelip shıǵadı.

4-jaǵday. $i\neq j,\ k\neq l$. Eger $i=k,\ \ j=l$ bolsa, onda (2.3) formuladan (2.1) kelip shıǵadı.

Eger $j\neq l$ bolsa,

$$\Phi(e_{ij})\Phi(e_{il})+\Phi(e_{il})\Phi(e_{ij})=0 \tag{2.7}$$

ekenligin kórsetiw kerek.

$P_6=e_{ii}+e_{ij}+e_{il}$ proektor bolǵanlıqtan, (2.7) teńlik $\Phi(P_6)=\Phi(P_6)^2$, (2.3) hám (2.4) teńliklerden kelip shıǵadı.

5-jaǵday. $i \neq j,\ \ k \neq l,\ \ i \neq k$. Bunda tómendegi 4 jaǵdaydı kóremiz:

a) $i = l, \quad j = k;$

b) $i = l, \quad j \neq k;$

s) $i \neq l; \quad j = k;$

d) $i \neq l; \quad j \neq k.$

a) bolǵanda,

$$\Phi\left(e_{ij}\right)\Phi\left(e_{ji}\right)+\Phi\left(e_{ji}\right)\Phi\left(e_{ij}\right)=\Phi\left(e_{ii}\right)+\Phi\left(e_{jj}\right)$$

ekenligin kórsetemiz.

$P_7 = \dfrac{1}{2}\left(e_{ii} + e_{jj} - e_{ij} - e_{ji}\right)$ proektor bolǵanlıqtan,

$$2\left(\Phi\left(e_{ii}\right)+\Phi\left(e_{jj}\right)-\Phi\left(e_{ij}\right)-\Phi\left(e_{ji}\right)\right)=4\Phi\left(P_7\right)=4\Phi\left(P_7\right)^2=$$

$$=\Phi\left(e_{ii}\right)+\Phi\left(e_{jj}\right)+\Phi\left(e_{ij}\right)^2+\Phi\left(e_{ji}\right)^2+$$

$$+\Phi\left(e_{ii}\right)\Phi\left(e_{jj}\right)+\Phi\left(e_{jj}\right)\Phi\left(e_{ii}\right)-\left(\Phi\left(e_{ii}\right)\Phi\left(e_{ij}\right)+\Phi\left(e_{ij}\right)\Phi\left(e_{ii}\right)\right)-$$

$$-\left(\Phi\left(e_{ii}\right)\Phi\left(e_{ji}\right)+\Phi\left(e_{ji}\right)\Phi\left(e_{ii}\right)\right)-\left(\Phi\left(e_{jj}\right)\Phi\left(e_{ij}\right)+\Phi\left(e_{ij}\right)\Phi\left(e_{jj}\right)\right)-$$

$$-\left(\Phi\left(e_{jj}\right)\Phi\left(e_{ji}\right)+\Phi\left(e_{ji}\right)\Phi\left(e_{jj}\right)\right)+\left(\Phi\left(e_{ij}\right)\Phi\left(e_{ji}\right)+\Phi\left(e_{ji}\right)\Phi\left(e_{ij}\right)\right).$$

endi (2.1) teńlik (2.2), (2.3), (2.4) hám (2.5) lerden kelip shıǵadı.

b) jaǵdayda $P_8 = e_{ii} + e_{ij} + e_{ki} + e_{kj}$ proektorın alamız. $\Phi(P_8) = \Phi(P_8)^2$ teńliginen (2.1) kelip shıǵadı.

s) jaǵdayı v) menen birdey. d) jaǵdayda $P_9 = e_{ii} + e_{kk} + e_{ij} + e_{kl}$ ke proektorınan paydalansaq kelip shıǵadı. Teorema dáliyllendi.

2.5-teorema. Meyli R kommutativ algebra. Eger $\delta : M_n(A) \to M_n(A)$ R-sızıqlı operator barlıq $P \in M_n(A)$ idempotentler ushın

$$\delta(P) = \delta(P)P + P\delta(P)$$

teńligin qanaatlandırsa, onda δ -differentsiallaw boladı.

Dáliyllew. $B = A \oplus A \oplus A$ keńisliginde kóbeymeni

$$(a_1, b_1, c_1)(a_1, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)$$

kórinisinde anıqlaymız.

Bul algebrada $\theta : A \to B$ operatorın

$$\theta(T) = (T, T, \delta(T)), T \in A$$

formula arqalı anıqlaymız.

$P \in A$ idempotent bolsa, onda

$$\theta(P)^2 = (T, P, \delta(P)(P, P, \delta(P))) =$$

$$= (P \cdot P, P \cdot P, \delta(P)P + P\delta(P)) = (P, P, \delta(P)) = \theta(P),$$

yaǵnıy $\theta(P)^2 = \theta(P)$.

2.1–Teoeramdan, $\varphi : A \to B$ gomomorfizm hám $\psi : A \to B$ antigomomorfizmler tabılıp, $\theta = \varphi + \psi$ teńligi orınlanadı.

Meyli $\pi = \varphi(I)$ hám $\rho = \psi(I)$ bolsın. Onda π hám ρ idempotentler bolıp $\pi + \rho = \theta(I)$ elementi B algebranıń birlik elementi boladı. $\pi\rho = \rho\pi = 0$ ekenliginen

$$\psi(T) = \theta(T)\rho = \rho\theta(T), \qquad \forall T \in A \tag{2.8}$$

A

teńlikleri kelip shıǵadı. $\rho \in B$ bolǵanlıqtan, $\rho = (Q, Q, m)$, bunda $Q \in A$, $m \in A$. $\rho^2 = \rho$ bolǵanlıqtan

$$Q^2 = Q, \quad Qm + mQ = m \tag{2.9}$$

(2.8) teńlikten $\rho\theta(T) = \theta(T)\rho, \qquad \forall T \in A$. Bunnan $Qa = aQ, \quad \forall d \in A$. Endi (2.9) teńlikten $Q = aI$ bunda $a \in R$ idempotent element. ψ antigomomorfizm bolǵanlıqtan, (2.8) teńlikten $\theta(TS)\rho = \theta(S)\theta(T)\rho, \qquad \forall S, T \in A$.

Onda $Q = aI$ teńliginen $a(ST - TS) = 0, \quad \forall S, T \in A$. Bunnan $a = 0$. Demek $Q = 0$, yaǵnıy (2.9) teńlikten $m = 0$. Bunnan $\rho = 0, \quad \psi = 0$. Demek, $\theta = \varphi$ gomomorfizm boladı. Bunnan δ differentsiallaw ekenligi kelip shıǵadı. Teorema dáliyllendi.

III BAP
MATRICALIQ ALGEBRALARDA 2-LOKAL DIFFERENCIALLAWLAR

Úshinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda Shegaralanǵan operatorlar algebralarında differenciallawlar, 2-lokal differeniallawlar anıqlamaları, Jordan differenciallawı, mısallar keltiriledi. Matricialıq algebralardıń 2-lokal differenciallawları xarakterlengen.

§ 3.1. Shegaralanǵan operatorlar algebrasında differenciallawlar

Meyli H gilbert keńisligi bolsın. $B(H)$ bolsa H keńislikte aniqlanǵan barlıq shegaralanǵan sızqlı operatorlar algerası bolsın.

Eger $D: B(H) \to B(H)$ sızıqlı operatorı barlıq $X, Y \in B(H)$ elementleri ushın

$$D(XY) = D(X)Y + XD(Y) \tag{3.1}$$

teńligin qanaatlandırsa, D differenciallaw operatorı delinedi. Bul teńlikke Leybnic teńligi delinedi. Hár bir tayinlangan $A \in B(H)$ elementi

$$D_A(X) = AX - XA, \quad X \in B(H)$$

formula boyınsha $B(H)$ algebrada differenciallawdı anıqlaydı.

Dáslep D_A sızıqlı operator ekenligin kórsetemiz.

$X, Y \in B(H), \ \alpha, \beta \in C$ bolsa, onda

$$D_A(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A =$$

$$= \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA) = \alpha D_A(X) + \beta D_A(Y).$$

Endi D_A differenciallaw ekenligin kórsetemiz.

$X, Y \in B(H)$ bolsın. Onda

$$D_A(X)Y + XD_A(Y) = (AX - XA)Y + X(AY - YA) =$$

$$= AXY - XAY + XAY - XYA = AXY - XYA = D_A(XY).$$

Demek, D_A differenciallaw boladı.

3.1.1-Lemma. Eger $D: B(H) \to B(H)$ differenciallaw hám $E \in B(H)$ proektor bolsa, onda $ED(E)E = 0$.

Dálillew. Leybnic teńliginen paydalansaq,

$$D(E) = D(E^2) = D(E)E + ED(E),$$

yaǵnıy,

$$D(E) = D(E)E + ED(E).$$

bul teńliktiń eki jaǵınan E ge kóbeycek, onda

$$ED(E)E = ED(E)E + ED(E)E.$$

Bunnan, $ED(E)E = 0$. Lemma dálillendi.

3.1.2-Lemma. Eger $D: B(H) \to B(H)$ differenciallaw hám $X \in B(H)$ bolsa, onda hár bir $n \in N$ ushın

$$D(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k D(X) X^{n-k-1}$$

teńligi orınlanadı.

Dálillew. Matematikalıq indukciya metodınan paydalanamız.

$n = 2$ bolsın.Onda Leybnic teńliginen

$$D(X^2) = D(X)X + XD(X) = \sum_{k=0}^{1} X^k D(X) X^{1-k}$$

kelip shıǵadı.

$n = m$ da orınlı bolsın, yaǵnıy

$$D(X^m) = \sum_{k=0}^{m-1} X^k D(X) X^{m-k-1}.$$

$n = m + 1$ da orınlı ekenligin kórsetemiz.

$$D(X^n) = D(X^{m+1}) = D(X^m X) = D(X^m)X + X^m D(X) =$$

$$= (\sum_{k=0}^{m-1} X^k D(X) X^{m-k-1})X + X^m D(X) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} X^k D(X) X^{m-k} + X^m D(X) = \sum_{k=0}^{m} X^k D(X) X^{m-k}.$$

Lemma orınlandı.

Bul lemmada $n = 2$ bolsa, onda

$$D(X^2) = D(X)X + XD(X)$$

boladı. Bunday operatorlar arnawlı atamaǵa iye.

3.1.1-Anıqlama. Eger $D: B(H) \to B(H)$ operatorı hámme $X \in B(H)$ elementleri ushın

$$D(X^2) = D(X)X + XD(X)$$

teńligin qanaatlandırsa, onda bul operator Jordan differenciallawı delinedi.

Demek, 3.2-lemmadan qálegen differenciallaw Jordan differenciallawı ekenligi kelip shıǵadı.

Bul lemmada $n = 3$ bolsa, onda

$$D(X^3) = D(X)X^2 + XD(X)X + X^2 D(X)$$

boladı.

Bunday operatorlar differenciallaw tipindegi operatorlar delinedi. Lemmadan qálegen differenciallaw

$$D(X^3) = D(X)X^2 + XD(X)X + X^2 D(X)$$

teńligin qanaatlandırıw kelip shıǵadı. Biz $B(H)$ algebrası ushın bul fakttıń kerisiniń orınlanıwın kórip shıǵamız . Bul nátiyje 2007-jılı Venriyalıq matematikalıq J.Vukman tárepinen [11] jumısında dálillengen.

Dáslep tómendegi lemmanı dálilleymiz.

3.1.3- Lemma. Meyli H haqıyqıy yamasa kompleks gilbert keńisligi bolsın. Eger $D_1, D_2 : B(H) \to B(H)$ sızıqlı operatorları hár bir $A \in A(H)$ elementi ushın

$$D_k(A^3) = D(A)A^2 + AD(A)A + A^2 D(A), \ k = 1, 2$$

birdeyligin qanaatlandırsa hám barlıq $X \in F(H)$ ushın $D_1(X) = D_2(X)$ bolsa, onda $D_1 \equiv D_2$ boladı.

Dálillew. $D = D_1 - D_2$ bolsın. Onda barlıq $X \in F(H)$ ushın $D(X) = 0$ boladı. Endi qálegen $A \in B(H)$ elementti alamız. P qálegen bir ólshemli proektor bolsın. Tómendegi operatordı qaraymız:

$$S = A + PAP - (AP + PA).$$

Onda $D(S) = D(A)$ va $SP = PS = 0$ boladı.

Bunnan

$$D(S)S^2 + SD(S)S + S^2 D(S) = D(S^3) =$$

$$D(S^3 + P) = D(S + P)^3) = D(S)(S + P)^2 + (S + P)D(S)(S + P) +$$

$$+(S + P)^2 D(S) = D(S)S^2 + D(S)P + SD(S)S + SD(S)P +$$

$$+PD(S)S + PD(S)P + S^2 D(S) + PD(S).$$

Bul teńlikten

$$\begin{gathered} D(A)P + SD(A)P + PD(A)S + \\ +PD(A)P + PD(A) = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Sońǵı teńlikti eki tárepten P ni kóbeytip, $PD(A)P = 0$ ekenligine iye bolamız. Bunnan hám (3.2) teńlikten

$$D(A)P + SD(A)P + PD(A)S + PD(A) = 0.$$

Endi bul teńlikti oń tárepten P kóbeycek, onda

$$D(A)P + SD(A)P = 0.$$

Sońǵı teńlikti A operator ornına $-A$ nı (bunda S operatorı $-S$ almasadı) qoysaq, onda

$$D(A)P - SD(A)P = 0.$$

aqırǵı eki teńlikten $D(A)P = 0$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul teńlik barlıq bir ólshemli P proektorlari ushin orınlanǵanı ushın $D(A) = 0$ boladı.

Lemma dálillendi.

3.1.1 -teorema. Meyli H haqıqıy yamasa kompleks gilbert keńisligi hám $A(H)$ standart operator algebrası bolsın. Eger $D : B(H) \to B(H)$ sızıqlı operatorı hár bir $A \in B(H)$ elementi ushın

$$D(A^3) = D(A)A^2 + AD(A)A + A^2D(A)$$

birdeyligin qanaatlandırsa, onda D differenciallaw boladı hám sonday $B \in B(H)$ tabılıp,

$$D(A) = BA - AB$$

teńligi orınlanadı.

Dalillew. Har bir $A \in B(H)$ elementi ushın

$$D(A^3) = D(A)A^2 + AD(A)A + A^2 D(A) \tag{3.3}$$

birdeyligin orınlı bolsın.

Dáslep D operatorın $F(H)$ algebrasında qarastıramız. Meyli $A \in A(H)$ bolsın. $AP = PA = A$ teńligin qanaatlandıratuǵın $P \in F(H)$ operatorın alamız. Joqarıdaǵı birdeylikten

$$D(P) = D(P)P + PD(P)P + PD(P) \tag{3.4}$$

teńligi kelıp shıǵadı. Bul teńligin oń tárepten P proektorına kóbeycek, onda

$$PD(P)P = 0 \tag{3.5}$$

teńligi kelip shıǵadı. (3.4) hám (3.5) lerden

$$D(P) = D(P)P + PD(P)\,. \tag{3.6}$$

(3.1) teńliginde A operatorın $A + P$ operatorına almastirsaq, onda (3.2)

$$D(A^3 + 3A^2 + 3A + P) = (D(A) + D(P))(A^2 + 2A + P) +$$

$$+(A + P)(D(A) + D(P))(A + P) + (A^2 + 2A + P)(D(A) + D(P))$$

teńligi kelip shıǵadı. Bunnan

$$3D(A^2)+3D(A)=D(P)A^2+2D(A)A+2D(P)A+$$

$$+D(A)P+PD(A)A+AD(P)A+PD(P)A+$$

$$+AD(A)P+PD(A)P+AD(P)P+A^2D(P)+$$

$$+2AD(A)+2AD(P)+PD(A).$$

Sońǵı teńlikte A operatorın $-A$ operatorına almastırsaq, onda

$$3D(A^2)-3D(A)=D(P)A^2+2D(A)A-2D(P)A+$$

$$-D(A)P+PD(A)A+AD(P)A-PD(P)A+$$

$$-AD(A)P-PD(A)P-AD(P)P+A^2D(P)+$$

$$+2AD(A)-2AD(P)-PD(A).$$

Bul eki teńlikti qosıp hám ayırsaq, onda

$$\begin{aligned}3D(A^2)&=D(P)A^2+2D(A)A+PD(A)A+\\&+AD(P)A+AD(A)P+PD(A)\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}3D(A)&=2D(P)A+D(A)P+PD(P)A+\\&+PD(A)P+AD(P)P+PD(A).\end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.3) teńligin eki tárepten A operatorına kóbeycek, onda

$$AD(P)A = 0\,. \tag{3.9}$$

Bunnan hám (3.5) ten

$$\begin{aligned} 3D(A^2) &= D(P)A^2 + 2D(A)A + PD(A)A + \\ &+ AD(P)A + AD(A)P + PD(A) \end{aligned} \tag{3.10}$$

teńligi kelıp shıǵadı. (3.4) teńlikten hám $AP = PA = A$ ekenligin paydalanıp $PD(P)A = 0$ hám $AD(P)P = 0$ teńliklerine iye bolamiz. Endi (3.8) teńlikti bilay jazıwımızǵa boladı,

$$\begin{aligned} 3D(A) &= 2D(P)A + D(A)P + \\ &+ PD(A)P + PD(A). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bul teńlikti ońnan P proektorina kóbeycek, onda

$$D(A) = D(P)A + PD(A)P. \tag{3.12}$$

Al ,shepten P proektorına kóbeycek, onda

$$PD(A) = AD(P) + PD(A)P. \tag{3.13}$$

(3.12) teńligin ońnan, al (3.13) teńligin shepten A operatorına kóbeycek, onda

$$D(A)A = D(P)A^2 + PD(A)A \tag{3.14}$$

hám

$$AD(A) = A^2 D(P) + AD(A)P. \tag{3.15}$$

(3.14), (3.15) hám (3.10) teńliklerden paydalanıp

$$3D(A^2) = (D(P)A^2 + PD(A)A) + 2D(A)A +$$

$$+(A^2 D(P) + AD(A)P) + 2AD(A) = 3D(A)A + 3AD(A).$$

Bunnan

$$D(A^2) = D(A) + AD(A) \tag{3.16}$$

teńligi barlıq $A \in F(H)$ elementleri ushın orınlanadı. (3.16) teńlikten barlıq $A \in F(H)$ elementleri ushın $D(A) \in F(H)$ orınlanadı.

Demek, D operatorı (3.14) birdeylikti qanaatlantıratuǵın $F(H)$ algebrasındaǵı operator. Basqasha aytqanda, D Jordan differenciallawı boladı. $F(H)$ algebrası soday bolǵanlıqdan D differenciallawı boladı. Chernovnıń [12, teorema 2] nátiyjelerinen sonday $B \in B(H)$ tabılıp barlıq $A \in F(H)$ ushın

$$D(A) = BA - AB$$

teńligi orınlanadı. 3.3-Lemmadan sońǵı teńlik barlıq $A \in B(H)$ ushın orınlanıwı kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

§ 3.2. Matricalar algebrası 2-lokal differensiallawları

3.2.1-teorema. Meyli A unital kommutativ algebra bólsın. Onda $M_n(A)$ algebrasınıń hár bir 2-lokal differensilallawı differensiallaw boladı.

Dálillew. Tómendegi yeki matricanı qarastrayıq:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^i} e_{i,i}, \quad u = \sum_{k=1}^{n} e_{i-1,i}. \tag{3.17}$$

Onda $x \in M_n(A)$ matricası ushın $[u, x] = 0$ bolıwı ushın onıń diaganalıq formadalıǵı zárur hám jetkliklı. $a \in M_n(M)$ matricası ushın $[v, a] = 0$ teńlıgiden

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & . & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & . & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & . & 0 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Sonday D differensiallawını alamız, ol $M_n(\mathrm{A})$ algebrasın $M_n(\mathrm{A})$ sewıllentırsın hám

$$\Delta(u) = D(u), \quad \Delta(v) = D(v), \tag{3.19}$$

Bul jerde u,v bu (3.17) korınısındegi matricalar. Zárur bolsa Δ sáwıllentırıwın $\Delta - D$ almastırıp, $\Delta(\mathrm{u}) = \Delta(\mathrm{v}) = 0$ teńliklerine iye bolamız.

Meyli $i,\, j \in \overline{1,n}$ bolsın. Sonday $D = ad(\mathrm{h})$ differenciallaw alayıq

$$\Delta(\mathrm{e}_{i,j}) = [\mathrm{h}, \mathrm{e}_{i,j}] + \overline{\delta}(\mathrm{e}_{i,j}), \Delta(u) = [\mathrm{h}, u] = 0 + \overline{\delta}(u) = 0. \tag{3.20}$$

Onda $\Delta(\mathrm{v}) = 0$ hám $\overline{\delta}(u) = 0,$ bolǵanda $[\mathrm{h}, u] = 0$, bul ese h matritciasını diagonal formadalıǵnı keltirıp shıǵaradi. Yaǵniy $\mathrm{h} = \sum_{s=1}^{n} h_s e_{s,s}, \quad h_s \in A, s \in \overline{1,n}.$

Dál usınday u matricasınıń ornıǵa v matriciasını alsaq,onda onda

$$\Delta(\mathrm{e}_{i,j}) = \mathrm{b}\mathrm{e}_{i,j} - \mathrm{e}_{i,j}\, b,$$

bul jerde b matricası (3.18) kornısınde bolip, ol $\mathrm{e}_{i,j}$ matricasıǵa ǵárezli boladı. Bunnan

$$\Delta(\mathrm{e}_{i,j}) = h\,\mathrm{e}_{i,j} - \mathrm{e}_{i,j}\mathrm{h} = \Delta(\mathrm{e}_{i,j}) = \mathrm{b}\mathrm{e}_{i,j} - \mathrm{e}_{i,j}\, b.$$

Yendi

$$h\,\mathrm{e}_{i,j} - \mathrm{e}_{i,j}\mathrm{h} = (\mathrm{h}_i - \mathrm{h}_j)\,\mathrm{e}_{i,j}$$

hám

$$[\mathrm{b}\mathrm{e}_{i,j} - \mathrm{e}_{i,j}\, b]_{i,j} = 0,$$

teńliginen

$$\Delta(\mathrm{e}_{i,j}) = 0.$$

Yendi usı matricanı alamız. $x = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \mathrm{e}_{i,j} \in M(\square).$ Onda

$$
\begin{aligned}
&e_{i,j}\Delta(\mathrm{x})e_{i,j} = e_{i,j}D_{e_{i,j},x}(\mathrm{x})e_{i,j} = \\
&= D_{e_{i,j},x}(e_{i,j}xe_{i,j}) - D_{e_{i,j},x}(e_{i,j})xe_{i,j} - e_{i,j}xD_{e_{i,j},x}(e_{i,j}) = \\
&= D_{e_{i,j},x}(\lambda_{i,j}e_{i,j}) - \Delta(e_{i,j})\,\mathrm{x}\,e_{i,j} - e_{i,j}x\Delta(e_{i,j}) = \\
&= \lambda_{i,j}D_{e_{i,j},x}(e_{i,j}) - 0 - 0 = \lambda_{i,j}\Delta(e_{i,j}) = 0,
\end{aligned}
$$

yaǵniy $e_{i,j}\Delta(\mathrm{x})e_{i,j} = 0$ barlıq $i,\ j \in \overline{1,n}.$ Bul ese $\Delta(\mathrm{x}) = 0$ ekenligin bildiredi.

Juwmaqlaw

Birinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda differenciallawlar, lokal differenciallawlar anıqlamaları, mısallar hám ayrım qásiyetleri qaralǵan. Birinshi paragrafta algebralarda differenciallawlar hám olardıń tiykarǵı qasiyetlerir keltirilgen. Yekinshi paragrafta bolsa algebralarda lokal differenciallawlar, bir neshe mısallar hám ayrım belgili nátiyjeler keltiriledi.

Bul bapta matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar qaralg`an. Birinshi paragrafta matritsalıq algebralarda differenciallawlar qaralǵan. Yekinshi paragrafta matritsalıq algebralarda lokal differenciallawlar, M tipi I_n $(n \in \mathbb{N})$ fon Neyman algebrası, $Z(M)$ onıń orayı hám $D: M \to M$ differenciallawlarıhaqındaǵı teoremalar keltirilgen.

Úshinshi bap yeki paragraftan ibarat bolıp, bunda Shegaralanǵan operatorlar algebralarında differenciallawlar, 2-lokal differeniallawlar anıqlamaları, Jordan differenciallawı, mısallar keltiriledi. Matricialıq algebralardıń 2-lokal differenciallawları xarakterlengen.

PAYDALANILǴAN ÁDEBIYATLAR DIZIMI

I. Huqıqıy-normativlik hújjetler:

1. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. –Т.: “Ўзбекистон”. 2015.

2. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги қонуни. 1997 йил. 29 август.

3. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури тўғрисида”ги қонуни. 1997 йил. 29 август.

4. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг “Магистратура тўғрисида”ги низоми. 2015 йил, 2 март, 36-сон. Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2015 йил. 9(665)-сон, 98-модда.

5. “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил, 7 февраль. Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 6-сон, 70-модда, 20-сон, 354-модда, 23-сон, 448-модда.

II. Ózbekstan Respublikası Prezidenti Mirziyoyev Shavkat Miromanovich shıǵarmaları:

1. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. –Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2016.

2. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. –Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2016.

3. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. –Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2017.

4. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. –Тошкент: “Ўзбекистон” НМИУ, 2017.

III. **Arnawli ádebiyatlar:**

5. Sakai S. C*-algebras and W^*-algebras. Springer-Verlag, 1971.

6. Sakai S. Operator algebras in dynamical systems. Cambridge University Press, 1991.

7. H. G. Dales, Banach algebras and automatic continuity. Clarendon Press, Oxford. 2000.

8. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra, *Siberian Adv. Math.* **18** (2008) 86–94.

9. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.* **256** (2009) 2917–2943.

I. **IV. Ilimiy maqalalar**

10. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov and K. K. Kudaybergenov, Non commutative Arens algebras and their derivations, *J. Funct. Anal.* **253** (2007) 287–302.

11. Sh.A. Ayupov, Differentsirovaniya na algebre izmerimıx operatorov // DAN RUz, – 2000. – № 3. – S. 14-17.

12. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, Differentsirovaniya algebr Arensa // Funktsionalnıy analiz i ee prilojeniya. – 2007. – № 4 (41). – C. 70-72.

13. A. F. Ber, V. I. Chilin and F. A. Sukochev, Non-trivial derivation on commutative regular algebras, *Extracta Math.* **21** (2006) 107–147.

14. A. F. Ber, B. de Pagter and F. A. Sukochev, Derivations in algebras of operator-valued functions (2008); http://arXiv.org/abs/0811.09.02.

15. A. F. Ber, F. A. Sukochev, V. İ. Chilin, Diffferentsirovaniya v kommutativnıx regulyarnıx algebrax // Matem. zametki, – 2004. – T. 75. – № 3. – S. 453-457.

16. M. Breˇsar, Jordan derivations on semiprime rings, *Proc. Amer.Math. Soc.* **104** (1988) 1003–1006.

17. M. Breˇsar, Characterizations of derivations on some normed algebras with involutions, *J. Algebra.* **152** (1992) 454–462.

18. M. Breˇsar and P. ˇSemrl, Mapping which preserve idempotents, local automorphisms, and local derivations, *Canad. J. Math.* **45** (1993) 483–496.

19. P. Chernoff, Representation, automorphisms and derivations on some operators algebras // J. Funct. Anal. – 1973. – V. 15. – P. 275-289.

20. A. E. Gutman, A. G. Kusraev and S. S. Kutateladze, The Wickstead problem, *Sib. Electron. Mat. Izv.* **5** (2008) 293–333.

21. R. Kadison, Lokal derivations // J. of Algebra. – 1990. – V. 130. – P. 494 -509.

22. G. Kusraev, Automorphisms and derivations in an extended complex complex *f*-algebra, *Sib. Math. J.* **47** (2006) 97–107.

23. D. R. Larson and A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of *B*(*X*), in *Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Part 2* (*Durham, NH, 1988*), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 51, Part 2 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990), p. 187–194.

24. K. K. Kudaybergenov, T. Oikhberg, A. M. Peralta, B. Russo, 2-Local triple derivations on von Neumann algebras, Illionis J. Math. 58, No 4 (2014) 1055-1069.

25. J. Karimboev, Matricalar algebralarında 2-lokal differenciallawlar, Magistrlardıń ilimiy miynetleriniń toplamı. Nókis , 2017. 3-4-bet.

26. Karimboev Jakhongir, 2-local derivations on matrix, Magistrlardıń ilimiy miynetleriniń toplamı. Nókis , 2018. 10-11-bet.

İnternet saytları:

1. www.msu.ru
2. www.jpsy.ru/public/36406.htm
3. www.math.msu.su
4. www.demoscope.ru
5. www.population.org