ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATÍNDAǴÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

Ámeliy matematika kafedrasí

«Ámeliy matematika hám informatika»
tálim baġdarınıń 4-D kurs studenti
Aqsultanova Jansulıwdıń

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Teması:« Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemelerin kvadraturalar usılı menen sheshiw »

Ilmiy basshısı: **doc. R. Mustafaeva**
Kafedra baslıġı: **doc. M.K.Berdimuratov**

Nókis2018

MAZMUNI

Kirisiw

Ilim oblastlarınıń hár qıylı tarawlarında integrallıq teńlemeler, ásirese ámeliy tarawları bolġan aero hám gidrodinamika, filtraciya teoriyası, elektrostatika, elektrodinamika, biomexanika, basqarıw teoriyası, ekonomika, medicina hám basqada ilim tarawlarında kóp ushırasadı.

Tábiyiy bilim tarawınıń hár qıylı oblastlarında bolıp ótetuġın kópshilik hár qıylı qubılıslar, hádiyseler hám processlerdiń sapalı ózgesheliklerin durıs túsiniwdı qáliplestiriw ushın integrallıq teńlemelerdiń durıs sheshimlerin tabıw máselesi áhmiyetli wazıypasın atqaradı. Fizika, ximiya hám biologiyalardıń hár qıylı teńlemeleri tájiriybe tiykarında alınġan funkciyalardı yamasa parametrlerdi óz ishine aladı hám olar qatań emes túrinde esapqa alınġan boladı. Sonlıqtan bul funkciyalardı analiz jasaw tiykarında hám sheshiw jolları qolaylı bolatuġınday etip, olardıń strukturasın saylap alıw maqsetke muwapıq boladı. Bunday múmkin bolġan kriteriyalardıń biri retinde, integrallıq teńlemelerdiń jabıq túrlerin sheshiw múmkin bolıwın talap etip qoyıw kerek. Integrallıq teńlemelerdiń dál sheshimlerin sanlı hám juwıq usıllardıń korrektligin hám esaplaw qáteliklerin bahalaw ushın paydalanıwġa boladı[1-3,5].

Kópshilik ámeliy máselelerdi táriyplewde differenciallıq teńlemelerine qaraġanda, Volterra teńlemeleriniń bahalıġına muwapıq, olarġa dıqqat kóbirek awdarıladı. Bunday bahalıġına dinamikalıq sistemalardı táriyplewde, onıń qolaylıġın hám ıqshamlıġın keltiriwge boladı. Bunda shıġıs shamaları hám kiris tásirler arasındaġı ġárezsizligi integrallıq operatorları menen kórsetiledi, olardıń yadrosı berilgen matematikalıq modellerdiń ishki qásiyetleri menen tolıq anıqlanadı hám birden kiriwshi signallarına sistemanıń juwabı retinde túsindiriledi. Integrallıq baylanıslardıń sanlı túrde ámelge asırıwda joqarı dárejede ornıqlılıq bolıp hám kópshilik jaġdaylarda bul teńlemelerge kóbirek itibar beriledi. Ekinshi túr Volterra teńlemelerin sheshiwdiń ádewir kóp bolġan saylı usılları bar. Bul usıllardıń kópshiliginde integraldı kvadraturalıq formulalar menen almastırıw tiykarında alınġan hám sonlıqtan bul usıllardı integrallıq teńlemelerdi sheshiwdıń kvadraturalar usılı dep ataydı[3,5,7].

Bul pitkeriw qánigelik jumısında Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesi hám onı sheshiwdiń kvadraturalıq usılları qaraladı.

Pitkeriw qánigelik jumısı kirisiw bóliminen, tórt paragraftan, juwmaqlaw bóliminen, ádebiyatlar diziminen hám qosımshalardan ibarat boladı.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń birinshi paragrafında integrallıq teńlemeler hám olardı klassifikaciyalaw usılları qaraladı[5].

Pitkeriw qánigelik jumıstıń ekinshi paragrafında Volterranıń ekinshi túrdegi teńlemeleri qaraladı. Bul paragrafta rezolventa túsinigine anıqlama beriledi. Rezolventanı dál hám juwıq tabıwdıń hár qıylı usılları bar bolıp hám olardı integrallıq teńlemeniń analitikalıq sheshimin alıwda paydalanıw usılları dep aytıladı. Integrallıq teńlemeniń rezolventasın tabıw usıllarına mısallar keltiriledi. Egerde integrallıq teńlemeniń yadrosı aynımalı emes bolıp berilgen bolsa, onda bul yadronı aynımalı yadro menen almastırıw jolları kórsetiledi. Sonıń menen birge Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesinen Volterranıń birinshi túr integrallıq teńlemesine ótiw jolları kórsetiledi.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń úshinshi paragrafında Volterranıń ekinshi túrdegi teńlemelerin kvadraturalar usılı menen sheshiw máselesi qaraladı. Bul jerde tiykarınan trapeciyalar hám Simpson kvadraturalıq formulalar járdeminde integrallıq teńlemeniń juwıq sheshimlerin tabıw máseleleri qaraladı[2,5].

Pitkeriw qánigelik jumıstıń tórtinshi paragrafında sanlı mısallar sheshiledi. Bunda berilgen Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesin trapeciya hám Simpson kvadraturalıq formulalarına tiykarlanġan usılları menen sheshimi tabıladı hám bul eki usılı boyınsha alınġan nátiyjeler bir biri menen salıstırıladı. Volterranıń ekinshi túrdegi integral teńlemesin sheshiwdıń algoritmleri dúzilip hám esaplaw programması C++ programmalastırıw tilinde jazıladı hám nátiyjeleri kompyuter járdeminde alınadı.

Trapeciya hám Simpson kvadraturalıq formulaları tiykarında Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemeleriniń juwıq sheshimleri esaplanadı. Tabılġan

juwıq sheshimlerdi tekseriw ushın qosımsha esaplawlar Mathcad hám Maple matematikalıq paketleri járdeminde orınlanadı .

1-§. Integrallıq teńlemeler haqqında túsinik. Integrallıq teńlemelerdi klassifikaciyalaw

Izleniwshi funkciyası integral belgisiniń astinda jaylasqan teńlemelerdi ***integrallıq teńlemeler*** dep ataydı. Máselen,

$$y(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), (a \le x \le b) \tag{1.1}$$

yamasa

$$y(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x) \tag{1.2}$$

Bunda $K(x,s)$ hám $f(x)$ - berilgen funkciyalar, al $y(x)$ – izleniwshi sheshim boladı. $K(x,s)$ funkciyasi integrallıq teńlemeniń ***yadrosı*** dep ataladı.

(1.1) hám (1.2) teńlemeleri sızıqlı integrallıq teńlemeler toparına tiyisli boladı.

Sızıqlı integrallıq teńlemelerdi tómendegishe klassifikaciyalawġa boladı:

a) egerde izleniwshi funkciyası integral belgisiniń astında jaylasqan bolsa, onda bunday teńlemelerdi ***I túrdegi integrallıq teńlemeler*** dep ataydi. Birinshi túrdegi integrallıq teńlemelerge tómendegi integrallıq teńlemeler tiyisli boladı:

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{1.3}$$

yamasa

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{1.4}$$

Izleniwshi funkciyası integrallıq qosıwshınıń sırtında jaylasqan (1.1) hám (1.2) qatnasları II túrdegi integrallıq teńlemeler dep ataladı.

b) egerde integrallaw shegaraları anıq berilgen bolsa, onda bunday integrallıq teńlemelerdi ***Fredgolm teńlemeleri*** ((1.1) hám (1.3) jaġdayların) dep ataydı. Egerde integrallaw aralıqları ózgermeli ((1.2) hám (1.4) jaġdayların) bolsa, onda bunday integrallıq teńlemelerdi ***Volterra teńlemeleri*** dep ataydı.

Fredgolm teńlemesiniń dara jaġdayın formal túrde Volterra teńlemeleri retinde qarawġa boladı, bunda máselen (1.2) de $s > x$ te $K(x,s) \equiv 0$ boladı dep esaplaytuġın bolsaq. Biraq Volterra hám Fredgolm teńlemelerine alıp kelinetuġın fizikalıq máseleleri de, sonıń menen birge bul teńlemelerdiń sheshimleriniń qásiyetleri de bir birinen aytarlıqtay hár qıylı boladı. Sonlıqtan ózgeshe túrdegi teńlemeler toparına Volterra teńlemelerin ajıratadı.

v) Egerde $f(x) \equiv 0$ bolsa, onda (1.1)-(1.4) teńlemelerin ***birtekli*** dep, al keri jaġdayda bul teńlemelerdi ***bir tekli emes*** dep ataydı.

2- §. Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemeleri

2.1. Volterranıń ekinshi túrdegi sızıqlı integrallıq teńlemesi.

Volterra operatorın óz ishine alıwshı integrallıq teńlemeler - Volterra túrindegi teńlemelerge tiyisli boladı.

Volterranıń ekinshi túrdegi sızıqlı integrallıq teńlemeleri tómendegi túrinde boladı:

$$y(x) - \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \ x \in [a,b] \qquad (2.1)$$

bunda $K(x,s)$ yadrosına hám teńlemeniń oń qaptal bólegindegi $f(x)$ funkciyasına hár qıylı shegaralawshı shártler qoyıladı. Bul qoyılġan shártlerine baylanıslı (2.1) teńlemeniń sheshiminiń bar bolıwı hám ol jalġız bir sheshim bolatuġın shártleri baylanıslı boladı. Dara jaġdayda, bul teńlemeniń sheshimi bar bolıp hám ol jalġız bir sheshim boladı, egerde oniń $K(x,s)$ yadrosı $s = a,\ x = b,\ x = s$ tuwrıları menen shegaralanġan úshmúyeshliktiń ishinde hám onıń tareplerinde úzliksiz funkciya bolıp, al $f(x)$ funkciyası $[a,b)$ aralıġında sheklengen sandaġı úzilis noqatlarına iye bolsa, sonıń menen birge ol sheklenbegen bolıwıda múmkin, egerde $\int_a^b |f(s)| ds$ sheklengen mánisine iye bolsa.

(2.1) teńlemesi II túrdegi Fredgolm teńlemesiniń dara jaġdayı boladı, egerde $s > x$ da shártin $K(x,s) \equiv 0$ yadrosı qanaatlandıratuġın bolsa. (2.1) teńlemedegi integraldı, kvadraturalıq formulası menen almastırıp, izleniwshi funkciyanıń mánislerine qarata approksimaciyalawshı sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın alıwġa boladı. Bul sistemanıń matricası úshmúyeshli bolıp hám izleniwshi funkciyanıń mánisleri belgili bir túyinlerinde esaplanıp alınġan boladı.

(2.1) teńlemesi tómendegi integrallıq operatordı óz ishine aladı.

$$A_B \varphi(x) \equiv \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds, \; s \le x \,, \tag{2.2}$$

bul operatordıń eń áhmiyetli qásiyetleriniń biri, bunda $\psi(x) = A_B \varphi(x)$ funkciyanıń mánisleri qálegen x ushın tek qana $s \le x$ ta φ funkciyanıń mánisleri menen anıqlanadı. Usı qásiyeti menen xarakterlenetuġın integrallıq operatorları, sonıń menen birge sızıqlı emes operatorları da Volterra operatorları dep ataladı hám ámeliyatta bazı-bir processlerdi táriyplewge keńnen qollanıladı. Integrallıq operatordıń bul ózgesheligi (2.1) teńlemesin sheshiwde mına ámeldi qollanıwġa imkaniyat beredi, bunda teńlemeniń sheshimin $[a,b)$ aralıġınıń bir bóleginde dúziwge bolıp, máselen bazı-bir $a \le x \le x_1$ intervalında hám $x \ge x_1$ bolġanda sheshimin tabıw ushın tómendegi ańlatpadan paydalansa boladı:

$$y(x) = \left[\int_a^{x_1} K(x,s)y(s)ds + f(x) \right] + \int_{x_1}^{x} K(x,s)y(s)ds \;.$$

Ámeliyatta sanlı sheshimin tabıwda eń bir áhmiyetli bolıp aynımalı (bóliniwshi) yadro jaġdayı esaplanadı:

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(x)\,, \tag{2.3}$$

oġan sáykes keliwshi teńlemesi

$$y(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x\beta_i(x)\,y(s)ds=f(x) \tag{2.4}$$

boladı.

Aynımalı yadrosına iye bolġan ekinshi túrdegi Volterra teńlemesi:

$$y(x)-\int_0^x K(x-s)y(s)ds=f(x),\ x\in[0,b] \tag{2.5}$$

yamasa

$$y(x)-\int_{-\infty}^{x}K(x-s)y(s)ds=f(x),\ x\in[-\infty,\infty]\,. \tag{2.6}$$

2.2. Rezolventa haqqında túsinik. Ekinshi túrdegi (2.1) Volterra teńlemesiniń ulıwma analitikalıq sheshimi bolıp tómendegi ańlatpası esaplanadı:

$$y(x)=f(x)+\int_{a0}^{x}R(x,s)\,f(s)ds. \tag{2.7}$$

$R(x,s)$ funkciyasın *Rezolventa* dep ataydı hám ol tómendegi ańlatpası menen anıqlanadı:

$$R(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,s) \tag{2.8}$$

bunda $K_n(x,s)$ - rekkurent qatnasları menen anıqlanıwshı tómendegi tákrarlanıwshı yadrolar:

$$K_1(x,s)=K(x,s)\,,$$

$$K_{n+1}(x,s)=\int_s^x K((x,t)K_n(t,s)dt,\ \ n=1,2,\ldots \tag{2.9}$$

Bunnan, rezolventa saltań aġzasınan ġárezli bolmaydı, ol tek qana teńlemeniń qásiyetleri, onıń yadrosı menen anıqlanatuġınlıġın kóriwge boladı.

Rezolventanı dál yamasa juwıq tabıwdıń hám (2.7) analitikalıq túrinde sheshimin alıw ushın paydalanıwdıń hár qıylı usılları bar bolıp esaplanadı. Rezolventanı anıqlaw hám onnan paydalanıw ámeli (2.1) teńlemeniń dara jaġdayları ushın nátiyjeli bolıwı múmkin.

(2.7) hám (2.8) ańlatpaların keltirip shiġarıwdıń ulıwma usılı bolıp sheshimdi sheksiz qatar túrinde kórsetiw bolıp esaplanadı. Dáslepki berilgen teńlemeni tómendegi túrinde jazamız:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_{a0}^x K(x,s)y(s)ds\ , \tag{2.10}$$

Izleniwshi sheshimdi dárejesi λ bolġan qatar túrinde ańlatıwġa boladı:

$$y(x)=y_0(x)+\lambda\, y_1(x)+\lambda^2\, y_2(x)+\ldots+\lambda^n\, y_n(x)+\ldots \tag{2.11}$$

(2.11) qatardı (2.10)ġa aparıp qoyıp tómendegi nátiyjege iye bolamız:

$$\begin{aligned} &y_0(x)+\lambda\, y_1(x)+\lambda^2\, y_2(x)+\ldots+\lambda^n\, y_n(x)+\ldots= \\ &\quad = f(x)+\lambda\int_{a0}^x K(x,s)[\,y_0(x)+\lambda\, y_1(x)+\lambda^2\, y_2(x)+\ldots+\lambda^n\, y_n(x)+\ldots]ds \end{aligned} \tag{2.12}$$

(2.12) teńlemeniń shep qaptal hám oń qaptal táreplerindegi λ teńdey dárejedegi koefficiyentlerin salıstırıp tómendegi qatnaslarına iye bolamız:

$$y_0(x)=f(x),$$

$$y_1(x)=\int_a^x K(x,s)y_0(s)ds=\int_a^x K(x,s)\,f(s)ds\ ,$$

$$y_2(x)=\int_a^x K(x,s)y_1(s)ds=\int_a^x K(x,s)\int_a^s K(s,s_1)f(s_1)ds_1 ds$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

bunnan kelip shıġadı:

$$y_1(x)=\int_a^x K(x,s)f(s)ds,,$$

$$y_2(x)=\int_a^x K_2(x,s)f(s)ds,\ K_2(x,s)=\int_s^x K(x,s_1)K(s,s_1)ds_1 \qquad (2.13)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

bunda $K_{n+1}(x,s)$ (2.9) túrine iye boladı.

(2.9) hám (2.13)di esapqa alsaq, onda (2.11) qatarı tómendegishe boladı:

$$y(x)=f(x)+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\lambda\upsilon\int_a^x K_\upsilon(x,s)f(s)ds, \qquad (2.14)$$

bunnan $\lambda=1$ rezolventa ushın (2.8) ańlatpası kelip shıġadı. Egerde $K(x,s)$ - úzliksiz funkciya bolsa, bunda $a<s\le x<b$ hám $f(x)$ - $a\le x\le b$ bolġanda úzliksiz bolsa, onda (2.14) tiń oń qaptal bólegindegi qatar x hám λ boyınsha qálegen λ da jıynaqlı boladı.

1-Mısal. $K(x,s)=K_1(x,s)=e^{x-s}$ yadronıń rezolventasın anıqlawda, yadrosı menen orınlanatuġın ámellerin kórsetip beremiz.

(2.9) formulası boyınsha

$$K_2(x,s)=\int_s^x e^{x-s}e^{z-s}dz=e^{x-s}\int_s^x dz=e^{x-s}(x-s),$$

$$K_3(x,s)=\int_s^x e^{x-s}e^{z-s}(z-s)dz=e^{x-s}\frac{(x-s)^2}{2!},$$

$$K_4(x,s)=\frac{1}{2}\int_s^x e^{x-s}e^{z-s}(z-s)^2\,dz=e^{x-s}\frac{(x-s)^3}{3!},$$

yamasa ulıwma túrde

$$K_{n+1}(x,s)=e^{x-s}\frac{(x-s)^n}{n!},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Endi (2.8) ańlatpası boyınsha tabıwġa boladı:

$$R(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,s)=e^{x-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-s)^n}{n!}=e^{x-s}e^{x-s}=e^{2(x-s)}.$$

2.3.Rezolventaġa qarata teńlemesi. Rezolventa ushın onı anıqlawshı integrallıq teńlemesin de keltirip alıwġa boladı. Haqıyqatında da, (2.1) hám (2.7) den

$$\int_a^x R(x,s)\,f(s)ds=\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds=$$

$$=\int_a^x K(x,s)f(s)ds+\int_a^x K(x,s)ds\int_a^s R(s,t)\,f(t)dt=$$

$$=\int_a^x K(x,s)f(s)ds+\int_a^x f(t)dt\int_a^s K(x,s)R(s,t)ds=$$

$$=\int_a^x K(x,s)f(s)ds+\int_a^x f(s)ds\int_a^s K(x,t)R(t,s)dt,$$

bunnan $R(s,t)$ ġa qarata teńlemege iye bolamız:

$$R(x,s)=K(x,s)+\int_a^x K(x,t)\,R(t,s)dt\,. \qquad (2.15)$$

Alınġan eki ólshemli (2.15) teńlemeniń dúzilisi sheshilip atırġan (2.1) teńlemeniń strukturası menen birdey boladı, bunda rezolventanı payda etetuġın dáslepki informaciya bolıp $K(x,t)$ yadrosı esaplanadı. (2.1) dáslepki berilgen teńlemeniń sheshimi menen salıstırġanda (2.15) teńlemeniń sheshimi quramalı másele bolıp esaplanadı, biraq máseleni sapalı analiz jasaġanda hám hár qıylı ekvivalentli hám ápiwayılastırıwshı túrlendiriwler alıp barıwda onnan paydalanıw júdá bir áhmiyetli bolıp esaplanadı. Bazı-bir jaġdaylarda eń baslı izertlew máselesi bolıp qoyılġan dáslepki teńlemeniń sheshimi bolmay, al onıń rezolventasın tabıw bolıp esaplanadı. Onda (2.15) teńlemeniń analitikalıq, juwıq yamasa sanlı sheshimleri ámeliy maġanasına iye boladı. Egerde berilgen teńlemeniń birdey yadrosında oń qaptal bolġan $f(x)$ tiń hár qıylı mánislerinde kóp mártebe esaplaw zárúr bolsa, onda rezolventanı tabıw úlken áhmiyetine iye boladı.

1-kestede bazı-bir yadro túrleri ushın rezolventanıń formulaları keltirilip berilgen.

1-keste

$K(x,s)$ yadrosı	$R(x,s)$ rezolventası
1	e^{x-s}
$\lambda(x-s)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} sh\sqrt{\lambda}(x-s) \quad (\lambda > 0)$
$\lambda e^{x^2-t^2}$	$e^{\lambda(x-s)} e^{(x^2-s^2)}$
$\lambda \frac{1+x^2}{1+s^2}$	$\frac{1+x^2}{1+s^2} e^{\lambda(x-s)}$
$\lambda \frac{1+\cos x}{1+\cos s}$	$\frac{2+\cos x}{2+\cos s} e^{\lambda(x-s)}$
$\lambda \frac{chx}{chs}$	$\frac{chx}{chs} e^{\lambda(x-s)}$
$\lambda a^{x-s} (a > 0)$ $2-(x-s)$	$a^{x-s} e^{\lambda(x-s)}$ $e^{x-s}(x-s+2)$
$-2+3(x-s)$	$\frac{1}{4} e^{x-s} - \frac{9}{4} e^{-s(x-s)}$

$2x$	$2xe^{x^2-s^2}$
$-\dfrac{4x-2}{2x+1}+\dfrac{8(x-s)}{2x+1}$	$\dfrac{4s^2+1}{2(2x+1)^2}\left[\dfrac{8}{4s^2+1}-4e^{-2(x-s)}\right]$
$\sin(x-s)$	$x-s$
$sh(x-s)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}sh\sqrt{2}(x-s)$
$e^{-(x-s)}$	$(x-s)e^{-(x-s)}$
$e^{-(x-s)}\sin(x-s)$	$(x-s)e^{-(x-s)}$
$2\cos(x-s)$	$2e^{x-s}(1+x-s)$
λe^{x-s}	$e^{(\lambda+1)(x-s)}$
$ch(x-s)$	$e^{\frac{x-s}{2}}\left[ch\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x-s)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}ch\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x-s)\right]$

2-Misal. Berilgen integrallıq teńlemeniń

$$y(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-s^2}\,y(s)ds$$

rezolventası tómendegishe túrge iye:

$$R(x,s)=e^{x-s}\,e^{x^2-s^2}.$$

Onda (2.7) ne muwapıq teńlemeniń sheshimi bolıp tómendegi teńleme esaplanadı:

$$y(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x-s}e^{x^2-s^2}\,e^{s^2}\,y(s)ds=e^{x^2+x}.$$

2.4.Aynımalı dárejeli yadro jaġdayı. Rezolventanı tabıw ushın onı anıqlawshı differenciallıq teńlemesin dúzip hám sheshiwge boladı. Bul bolsa bazı-bir dara jaġdayları ushın múmkin bolıp, biraq (2.1) teńlemeniń yadrosı aynımalı bolġan jaġdayı ámeliyatta áhmiyetli bolıp hám ol tómendegi túrine iye boladı:

$$K(x,s) = a_0(x) + a_1(x)(x-s) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} \qquad (2.16)$$

bunda $a_k(x)$, $k=\overline{0,n-1}$ koefficientleri $[a,b]$ kesindisinde úzliksiz boladı dep shárt qoyıladı. (2.16) ushın rezolventa tómendegi ańlatpası menen anıqlanadı:

$$R(x,s) = \frac{d^n g(x,s)}{dx^n}, \qquad (2.17)$$

bunda $g(x,s)$ funkciyası tómendegi teńlemeniń sheshimi boladı:

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)g \right] = 0 \qquad (2.18)$$

bunda

$$g\big|_{x=s} = \frac{dg}{dx}\bigg|_{x=s} = \ldots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\bigg|_{x=s} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\bigg|_{x=s} = 1. \qquad (2.19)$$

Tómende berilgen yadrosı ushın

$$K(x,s) = b_0(x) + b_1(x)(x-s) + \ldots + \frac{b_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}$$

rezolventa tómendegi túrine iye boladı:

$$R(x,s) = -\frac{d^n g(s,x)}{ds^n},$$

bunda $g(s,x)$ (2.19) shártlerin qanaatlandıratuġın tómendegi teńlemeniń sheshimi boladı:

$$\frac{d^n g}{dx^n} + \left[b_0(s)\frac{d^{n-1}g}{ds^{n-1}} + b_1(s)\frac{d^{n-2}g}{ds^{n-2}} + \ldots + b_{n-1}(s)g \right] = 0 .$$

3-Mısal. Yadrosı $K(x,s) = x - s$ bolġan teńlemeniń yadrosın tabamız. Bunda ol $a_1(x) = 1$ hám basqa koefficientleri nolge teń bolġanda (31) yadronıń dara jaġdayı boladı. Bunda (2.18) teńlemesi tómendegi túrin qabıl etedi:

$$\frac{d^2 g(s,x)}{ds^2} + g(s,x) = 0 ,$$

bunnan

$$g(x,s) = C_1(s)e^x + C_2(s)e^{-x} .$$

(2.19) shártleri sistemaġa alınıp kelinedi:

$$\left.\begin{aligned} C_1(s)e^x + C_2(s)e^{-x} &= 0, \\ C_1(s)e^x - C_2(s)e^{-x} &= 1, \end{aligned}\right\}$$

onıń sheshimi boladı:

$$C_1(s) = \frac{1}{2}e^{-s} , \quad C_2(s) = -\frac{1}{2}e^{s} ,$$

bul koefficientleri járdeminde tómendegishe jazıwġa boladı:

$$g(x,s) = \frac{1}{2}[e^{x-s} - e^{-(x-s)} = sh(x-s) .$$

(2.17) ge muwapıq tómendegige iye bolamız:

$$R(x,s) = [sh(x-s)]''_{x^2} = sh(x-s) .$$

2.5.Rezolventa hám teńlemeniń juwıq sheshimleri. Rezolventanı tabıwdıń analitikalıq usıllarınıń sanı sheklengen bolġanına qaramastan, olardı integrallıq teńlemelerdi sheshiwdiń juwıq hám sanlı algoritmlerin dúziw ushın paydalanıw máqsetke muwapıq bolıp esaplanadı.

Rezolventanıń sanlı mánislerin alıw ushın esaplaw ańlatpaların (2.9) hám (2.15) shi ańlatpalardan alıwı múmkin boladı, egerde olarda $s = s_i,\ i = \overline{0,S}$ dep alsaq, yaǵnıy bunda s ózgeriwshiniń $[a,b)$ ózgeriw aralıǵın S kesindisine bólip taslasaq, onda (2.9) hám (2.15) ke muwapıq tómendegige iye bolamız:

$$K_{n+1}(x,s_i) = \int_{s_i}^{x} K(x,t)\,K_n(t,s_i)\,dt \qquad (2.20)$$

hám

$$R(x,s_i) = K(x,s_i) + \int_{s_i}^{x} K(x,t)\,R(t,s_i)\,dt$$

$$x_i - [a,b] \qquad (2.21)$$

(2.20) ańlatpası qaytalanıwshı yadrolardı alıw máselesin Volterranıń integrallıq operatorın esaplawǵa alıp keledi, al (2.21) ańlatpası ekinshi túrdegi Volterra teńlemesi bolıp esaplanadı, bunda onıń yadrosı bir ózgeriwshisine iye funkciyası bolıp hám berilgen teńlemeniń oń qaptal bólegi menen teńdey boladı.

Anıq bir analitikalıq ańlatpasına iye emes, juwıq túrdegi rezolventanı bunday jol menen alıw quramalı bolatuǵınlıǵı málim bolıp esaplanadı.

Rezolventanıń bazı-bir basqasha jolın paydalansaqta boladı, yaǵnıy yadronı sonday etip approksimaciyalaymız, bunda analitikalıq túrde juwıq rezolventanı anıqlaw múmkin boladı. Bunday jol menen rezolventanı anıqlaw usılın keltiremiz.

Egerde (2.1) teńlemesi ushın x ózgeriwshiniń ózgeriw aralıǵın $x = x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$ noqatları menen, adımı $h = \dfrac{b-a}{n}$ bolǵan X_i teńdey n aralıqlarına bólip taslasaq, bunda $x_{i-1} \le x < x_i$ hám X_n-jabıq aralıq bolsa, onda

$x = x_i$, $i = \overline{1,n}$ $s = s_j$, $j = \overline{0, n-1}$ tuwrıları tiykarġı $D(a \le s \le x \le b)$ úshmúyeshlikti $D_i(x_{i-1} \le x \le x_i, s_{i-1} \le s \le x)$ sanı n bolġan úshmúyeshliklerine hám sanı $\frac{n(n-1)}{2}$ bolġan $D_{ij}(x_{i-1} \le x \le x_i,\ s_{j-1} \le s \le s_j)$ kvadratlarına bóledi. (2.1) teńlemesinde $K(x,s)$ yadrosın hám $f(x)$ ti tómendegi funkciyaları menen almastırġannan keyin

$$k(x,s) = \begin{cases} K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) = K_i, & x,s \in D_i,\ i = \overline{1,n}, \\ K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) = K_{ij}, & x,s \in D_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1, i-1} \end{cases} \tag{2.22}$$

hám

$$\tilde{f}(x) = f(\tilde{x}_i) = f_i, \quad x \in X_i,\ i = \overline{1,n},$$

bunda $\bar{x}_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}$, $\bar{s}_j = \bar{x}_j$ boladı, nátiyjede tómendegi teńlemege iye bolamız:

$$\tilde{y}(x) - \int_0^x k(x,s)\,\tilde{y}(s)ds = \tilde{f}(x)\,. \tag{2.23}$$

(2.22) yadronıń rezolventası tómendegi túrine iye boladı:

$$r(x,s) = \begin{cases} K_i\, e^{K_i(x-s)}, & x,s \in D_i,\ i = \overline{1,n}, \\ L_{ij} e^{K_i(x - x_{i-1}) + K_{ji}(s_j - s)}, & x,s \in D_{ij},\ i = \overline{2,n},\ j = \overline{1, i-1} \end{cases},$$

bunda

$$L_{i,i-1} = K_{i,i-1},\ i = \overline{2,n},$$

$$L_{i,j} = K_{i,j} + \sum K_{i,i} \frac{e^{K_l h - 1}}{K_l} L_{il}, \quad i = \overline{3,n},\ j = \overline{1, i-2},$$

bunda $K_i = 0$ bolġanda $\frac{e^{K_l h-1}}{K_l}$ bólshek h penen almastırıladı.

(2.33) shi teńlemeniń juwıq sheshimi analitikalıq túrinde jazıladı:

$$\tilde{y}(x) = C_i\, e^{K_i (x - x_{i-1})}, \quad x \in X_i, \; i = \overline{1,n},$$

bunda $C_1 = f_1, \; C_i = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} \dfrac{e^{K_j h} - 1}{K_j} C_j, \quad i = \overline{2,n}$.

3-§ Volterraniń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemelerin kvadraturalar usılı menen sheshiw

$$y(x) - \int_a^x K(x,s) y(s) ds = f(x), \; x \in [a,b]. \qquad (3.1)$$

Integrallıq teńlemeler teoriyasınan bizge málim, egerde $K(x,s)$ -yadrosı $R\{a \le s \le x \le b\}$ oblastında úzliksiz funkciya bolatuǵın bolsa, al $f(x)$- $[a,b]$ kesindisinde úzliksiz funkciya bolsa, onda (3.1) integrallıq teńlemesi $y(x)$ jalǵız bir sheshimge iye boladı.[6,7]

Kvadraturalar usılı menen integrallıq teńlemeni sheshiw ushın Nyuton-Kotes kvadraturalıq formulalarınıń birin tańlap alıp hám (3.1) integrallıq teńlemesinde $x = x_i, \; i = \overline{0,n}$ dep esaplap hám anıq integrallardı shekli qosındılar menen juwıq túrde almastırıw ámeline tiykarlanadı.

Sanlı esaplawlar júrgizgenimizde integrallawdıń ózgermeli integrallaw shegin belgilep alamız hám sonlıqtan bul jaǵdayda anıq integraldı juwıq esaplawdıń formulaların qollanıwǵa boladı. Ulıwma jaǵdayda olar tómendegi túrine iye boladı:

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i) + R[F], \qquad (3.2.)$$

Bunda $x_i - [a,b]$ kesindisinen belgilep alınǵan noqatlardıń abcissaları yamasa olardı túyinleri (interpolyatsiyalıq túyinler) dep te ataydı. $A_i, \; i = \overline{1,n}$ - sanlı koefficientleri, olar $F(x)$ funkciyasın saylap alıwǵa ǵárezli emes boladı.

Bunda, $R[F]$-formulanıń qaldıq aġzası yamasa qáteligi, ádette $A_i \geq 0$ hám

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = b - a$$

(3.2) túrdegi kvadraturalıq formulasına uqsas bolġan kóp sanlı formulalar bar bolıp, olarda integral astındaġı ańlatpanı interpolyaciyalıq kópaġzalısı menen almastırıwġa tiykarlanġan.

Egerde integrallaw aralıqları bolġan a hám b ushları interpolyaciyalaw túyinleri bolsa, kesindiniń ózi óz –ara teń bolġan $n-1$ sanlı úleslerge bólip taslanadı, onda olarġa sáykes keliwshi kvadraturalıq formulalardı *jabıq túrdegi formulalar* dep ataydı.Egerde integrallaw aralıqların $n+1$óz-ara teń bolġan úleslerge bólsek hám interpolyaciyalıq túyinleri a hám b noqatların óz ishine almasa, onda bul jaġdayda payda bolġan kvadraturalıq formulalardı ashıq túrdegi formulalar dep ataydı.Bir – birinen teńdey qashıqlıqta jaylasqan $x_i = a + (i-1)\, h$, $i = 1,2,...., n$ túyinleri hám integrallaw aralıġın óz-ara teń bolġan $n-1$ úleske bólgende integrallaw adımı $h = \dfrac{b-a}{n-1}$ boladı.

Bunda tómendegilerge iye bolamız:

1)Tuwrımúyeshlikler formulası ushın:

$$A_i = \frac{b-a}{n-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad A_n = 0 .$$

2) Trapeciyanıń ulıwma formulası ushın:

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \; A_2 = A_3 = ... = A_{n-1} = h .$$

3) Simpsonnıń ulıwma formulası ushın:

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \; A_2 = A_4 = ... = A_{2m} = \frac{2h}{3}, \; A_3 = A_5 = ... = A_{2m-1} = \frac{4h}{3} .$$

Integral teńlemelerdi kompyuter járdeminde sheshiwde jabıq túrge tiyisli bolġan tuwrımúyeshlik hám trapeciyalar formulalarınan keń túrde paydalanadı.

Volterra teńlemelerin sheshiwdiń bir qatar kvadraturalıq usılları ashıq hám jabıq túrdegi formulalardan birgelikte paydalanıwġa tiykarlanġan. Integrallardı kishi aralıqlarda esaplaw ushın ádette ashıq formulalardan paydalanadı.

Ashıq formulalarına mısallar keltiremiz. Bunda integrallaw shegarası 0 hám h bolġan jaġdayı ushın:

$$\int_0^h F(x)dx = \frac{h}{12}\left[5F(0)+8F(h)-F(2h)\right]+\frac{h^4}{24}F'''(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<2h,$$

$$\int_0^h F(x)dx = \frac{h}{24}\left[9F(0)+19F(h)-5F(2h)+F(3h)\right]+\frac{19}{720}h^5F^{(4)}(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<3h;$$

Integrallaw shegarası 0 hám 2h bolġan jaġdayı ushın:

$$\int_0^{2h} F(x)dx = \frac{h}{3}\left[F(0)+4F(h)+F(2h)\right]-\frac{h^5}{90}F^{(4)}(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<2h;$$

Integrallaw shegarası 0 hám 3h bolġan jaġdaylar ushın

$$\int_0^{3h} F(x)dx = \frac{3h}{8}\left[F(0)+3F(h)+3F(2h)+F(3h)\right]-\frac{3h^5}{8}F^{(4)}(\varepsilon),\ 0<\varepsilon<3h;$$

Volterra teńlemelerin sheshiw ushın kvadraturalıq formulaların tańlap alıw ámeli ańsat emes, sebebi, qaralġan ádebiyatlarda onnan ámeliyatta paydalanıw ushın tayar usınıslar joq, sebebi ózgermeli sheklewlerine iye integrallar jetkilikli dárejede ele de úyrenilmegen. Integrallıq teńlemelerdi sheshiwde, onıń yadrosına teńsalmaqlı bolġan integrallardı esaplaw zárúrligi payda boladı. Bunnan basqa izleniwshi funkciyası retinde integral astındaġı funkciya belgisiz boladı. Ãyyemgi integraldı esaplaw máselesinde integral astındaġı funkciyası belgili bolıp esaplanadı. Sonlıqtan kvadraturalıq formulanı tańlap alıwda yadronıń qásiyetleri hám izleniwshi sheshimniń xarakterleri kelisimli bolıwı tiyis. Bul jaġdayı kvadraturalıq usıllardı qollanıwdıń kóplegen usılların hám ámellerin payda etedi.

Ózgermeli sheklewlerine iye integraldıń eń áhmiyetli ózgesheliklериniń biri bolıp integral astındaġı funkciyanıń hár bir mánislerin funkciyanıń tek bir mánisin esaplawġa paydalanıp qalmastan, al integrallaw nátiyjeleri bolġan onıń kóplegen mánisleri ushın paydalanıw imkaniyatı bolıp esaplanadı. Bul bolsa esaplawlardıń kóp emes muġdarında alınatuġın nátiyjeniń kerekli dálligin támiyinlewshi kvadraturalıq formulalardan qollanıwġa imkaniyat beredi.

Volterranıń ekinshi túrdegi sızıqlı túrdegi teńlemesin qaraymız:

$$y(x)-\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x),\ x\in[a,b] \tag{3.3}$$

(3.3) sızıqlı teńlemeni sheshiwge kvadraturalıq usılın qollanıw ushın, tómendegi ańlatpadan paydalanıw zárúr boladı:

$$y(x_i)-\int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i),\ i=\overline{1,n}, \tag{3.4}$$

teńlemedegi x ózgeriwshini belgilep, alınġan x_i mánislerinde bul ańlatpası payda boladı. x_i mánislerin arnawlı túrde saylap alıwımız múmkin yamasa egerde teńlemeniń oń qaptal bólegi $f(x)$ keste túrinde berilgen bolsa olar aldın ala beriledi. x_i mánislerin kvadraturalıq formulanıń túyinleri retinde qabıl etip hám onı (3.3) degi integraldı shekli qosındısı menen almastırıp, mına sistemasına iye bolamız.

$$y(x_i)-\sum_{j=1}^{i} A_j K(x_i,x_j)y(x_j) = f(x_i)+R_i[y], \tag{3.5}$$

bunda $R_i[y]$-approksimaciyalaw qáteligi. (3.5) ańlatpasın keltirip shıġarıw yadronıń hám saltań aġzalardıń úzliksizligi menen baylanıslı boladı. $R_i[y]$

qátelikleri kishi boladı dep esaplap hám olardı alıp taslap, sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasına iye bolamız:

$$y_i - \sum_{j=1}^{i} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3.6)$$

bul jerde mınanday belgilewler kiritemiz:

$$\bar{y}(x_i) = y_i, \quad f(x_i) = f_i \quad K(x_i, x_j) K_{ij}, .$$

(3.6) sistemanıń sheshimi x_i túyinlerindegi izleniwshi $\bar{y}(x_i) = y_i$ funkciyanıń juwıq sheshimlerin beredi. (3.6) sisteması to’mendegi túrge alıp keliniwi múmkin:

$$-\sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3.7)$$

yamasa mina kórinisine:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 - A_1 K_{11} & & & & & \\
\hline
- A_1 K_{21} & 1 - A_2 K_{22} & & & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
- A_1 K_{i1} & - A_2 K_{i2} & \cdot & 1 - A_i K_{ii} & \cdot & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
- A_1 K_{n1} & - A_2 K_{n2} & & - A_i K_{ni} & \cdot & 1 - A_n K_{nn} \\
\hline
\end{array}
\cdot
\begin{array}{|c|}
\hline
y_1 \\
\hline
y_2 \\
\hline
\cdot \\
\hline
y_i \\
\hline
\cdot \\
\hline
y_n \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
f_1 \\
\hline
f_2 \\
\hline
\cdot \\
\hline
f_i \\
\hline
\cdot \\
\hline
f_n \\
\hline
\end{array}, \qquad (3.8)$$

bunnan, sistemanıń koefficientleri úshmúyeshli matricası bolatuğınlığı kórinip tur. Bul bolsa $y_1, y_2, \dots, y_n$-niń mánislerin izbe-iz rekkurent formulasınan tabıwğa imkaniyat beredi:

$$y_i = \left(1 - A_i K_{ii}\right)^{-1} \left(f_n + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j \right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.9}$$

bunda bul formulasına

$$\left(1 - A_i K_{ii}\right) \neq 0, \tag{3.10}$$

shárti qoyıladı, túyinlerdi saylap alıw jolı menen hám A_i koefficientlerdiń jetkilikli kishi mánislerinde bul shárt barlıq waqıtta orınlanadı.

Trapeciyalar formulasınan paydalanġan jağdayda (3.9) formulası to’mendegi túrin qabıl etedi:

$$y_i = \left(1 - \frac{h}{2} K_{ii}\right)^{-1} \left(f_i + \frac{h}{2} K_{i1} y_1 + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j \right) \tag{3.11}$$

(3.9) ańlatpasınıń ózgesheliklerin atap ótemiz: bunda adımnıń tártip nomerine baylanıslı qosındınıń ağzalar sanı kóbeyip hám oğan baylanıslı esaplawlar muğdarıda kóbeyip ketedi, sonıń menen birge $A_j K_{ij}$ koefficiyentleriniń mánisleri hár bir i ushın y_j ózgerip baradı, sonlıqtan aldıńğı adımdağı esaplanġan nátiyjeler menen paydalanıwġa ulıwma jağdayda múmkin emes. Bunnan basqa hár qıylı kvadraturalıq formulalardan paydalanıw ózgeshelikleri bar bolıp, sonlıqtan bul ózgesheliklerdi esapqa alıw kerek boladı.

Ashıq túrdegi kvadraturalıq formulalardan paydalanıw

Ashıq túrdegi kvadraturalıq formulalardan paydalanıw ámeli sızıqlı, sonıń menen birge sızıqlı emes Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemeleri ushın ápiwayı sanlı sheshiw algoritmlerin jasawġa imkaniyat beredi, sebebi bunda izleniwshi funkciyanıń sheshimler kestesin bazı – bir teńlemelerdi sheshpey, esaplawlardı dawamlaw esabınan. Bul formulalardıń múmkinshiliklerin Volterra – Urison teńlemeleri tiykarında qaraymız:

$$y(x) = \int_a^x K[x, s, y(s)]\, ds, \quad x \in [a, b] \tag{3.12}$$

$y_i = \tilde{y}(x_i)$ mánislerin h adımı boyınsha $x_i = a + (i-1)h,\ i = \overline{1, n}.$ túyinlerinde izleymiz. Izleniwshi funkciyanıń dáslepki berilgen mánisleri ushın úsh jaġdayın qaraymız.

1 – jaġday. Bir (dáslepki) $y_1 = 0$ mánisi berilgen jaġday. Bul jaġdayda sheshimniń izbe – iz mánislerin ápiwayı ashıq formula menen hám ulıwmalasqan trapeciyalar formulaların birgelikte paydalanıw járdeminde anıqlaymız:

$$\int_a^{a+h} F(s)\, ds = hF(a) + \frac{h^2}{2} F'(\xi), \quad a < \xi < a + h. \tag{3.13}$$

$i = \overline{2, m}$ de $x = x_i$ ushın jazıwġa boladı:

$$y_2 = \int_a^{x_2} K[x_2, s, y(s)] ds,$$

$$y_i = \int_a^{x_{i-1}} K[x_i, s, y(s)]\, ds + \int_{x_{i-1}}^{x_i} K[x_i, s, y(s)]\, ds, \ i = \overline{3, m}$$

0, x_1 hám x_{i-1}, x_i shegarasına iye integrallardı (3.12) formulası menen almastırıp, al shegarasına iye integraldı trapeciyanıń ulıwmalasqan formulası menen almastırġannan keyin hám qaldıq aġzaların alıp taslap, tómendegi algoritmge iye bolamız:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= hK_{21}^{(0)} \\ y_i &= A_{i1}K_{i1}^{(0)} + \sum_{j=2}^{i-1} A_{ij}K_{ij}\left(y_j\right),\ i = \overline{3,m} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Bunda

$$K_{i1}^{(0)} = K\left(x_i, s_1, 0\right),$$

$$A_{42} = \frac{2}{3}h, \sum_{j=1}^{i-3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K[x_i, s, y(s)]ds + \int_{x_i}^{x_{i-2}} K[x_i, s, y(s)]ds, i = \overline{3,m}$$

$$y_2 = 0$$

$$A_{32} = \frac{3}{2}h\ ,\ A_{i1} = \frac{1}{2}h\ , \quad A_{ij} = h,\ j = \overline{2, i-2}\ , \quad A_{i,i-1} = \frac{3}{2}h, i = \overline{4,m} \tag{3.14}$$

formulanıń dálligi $o(h^2)$ qa teń bolıp hám ol joqarı emes bolıp esaplanadı, biraq bul alıp barılatuğın esaplaw algoritmlerdiń ápiwayılığı menen saplastırılıp ketedi, sonlıqtan (3.14) formuladan járdemshi algoritmler túrinde kóbirek paydalanadi.

2– jaġday. Eki dáslepki $y_1 = 0$ hám y_2 mánisleri berilgen boladı. Egerde y_2 - niń mánisi dállik $O\left(h^3\right)$ dárejesi menen belgili bolsa, onda kelesi $y_i, i = \overline{3,m}$ mánislerin tómendegi ashıq formulasın

$$\int_a^{a+2h} F\left(s\right)ds = 2hF\left(a+h\right) + \frac{1}{3}h^3F''\left(\xi\right),\ \ a < \xi < a+2h, \tag{3.15}$$

hám mına túrdegi formulanı

$$\int_a^{a+h} F\left(s\right)ds = \frac{5}{12}hF\left(a\right) + \frac{2}{3}hF\left(a+h\right) - \frac{1}{12}hF\left(a+2h\right) + \frac{1}{24}h^4F''\left(\xi\right), \tag{3.16}$$
$$a < \xi < a+2h$$

paydalanıp tabıwġa boladı.

(3.12) den $x = x_i,\ i = \overline{3,m}$ lar ushın

$$y_3 = \int_a^{x_1} K[x_3, s, y(s)]ds \;,$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K[x_i, s, y(s)]ds + \int_{x_i}^{x_{i-2}} K[x_i, s, y(s)]ds, i = \overline{3, m}$$

formulasına iye bolamız.

a, x_1 hám x_{i-2}, x_i shegine iye integrallardı (3.15) formulası, al x_j, x_{j+1} shegine iye integraldı (3.16) formulası menen almastırġannan keyin hám qaldıq aġzaların alıp taslap, tómendegi algoritmge iye bolamız:

$$\left.\begin{array}{l} A_{i1} = A_{i,i-4} = \frac{1}{3}h, \\ A_{i,i-3} = A_{i,i-1} = \frac{8}{3}h, A_{i.i-2} = -\frac{4}{3}h, \\ A_{i,2k+2} = \frac{4}{3}h, k = \overline{0, \frac{i-7}{2}} \\ y_{i,2k+1} = \frac{2}{3}h, k = \overline{1, \frac{i-7}{2}} \end{array}\right\}$$
$$A_{i,i-3} = \frac{13}{12}h, A_{i,i-2} = 0, A_{i,i-1} = \frac{9}{4}h$$
$$A_{51} = 0, A_{52} = A_{54} = \frac{8}{3}h, A_{53} = -\frac{4}{3}h, A_{71} = A_{73} = \frac{1}{3}h, A_{72} = \frac{4}{3}h, A_{73} = \frac{8}{3}h, A_{74} = -\frac{4}{3}h \qquad (3.17)$$

bunda

$$y_5 = \frac{1}{4}(A_{51}K_{51} + A_{52}K_{52} + A_{53}K_{53} + A_{54}K_{54}) = 0.109235$$
$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{896}x^{10} + \frac{73}{84816896}x^{17} + \ldots$$

$$A_{41} = \frac{5}{12}h, \; A_{i,i-2} = \frac{7}{12}h \;, A_{43} = \frac{23}{12}h \;, \;, A_{i2} = \frac{12}{13}h \;,$$

$$A_{i,i-2} = \frac{7}{12}h \;, A_{i,i-1} = \frac{23}{24}h \;, \; A_{i,j} = h \;, i = \overline{6, m} \;, \; j = \overline{3, i-3}$$

3 – jaġday. Úsh mánisi $y_1 = 0,\ y_2$ hám y_3 berilgen bolsın. Egerde y_2 hám y_3 mánislerdiń dállik dárejesi $O(h^4)$ ġa teń , tómen bolmaġan jaġdayda, onda kelesi mánislerin tómende berilgen ashıq formulalar:

$$\int_a^{a+3h} F(s)\,ds = \frac{3}{4}hF(a) + \frac{9}{4}hF(a+2h) + \frac{3}{8}h^4F'''(\xi),\ \ a < \xi < a+3h \qquad (3.18)$$

hám

$$\int_a^{a+4h} F(s)\,ds = \frac{8}{3}hF(a+h) - \frac{4}{3}hF(a+2h) + \frac{8}{3}hF(a+3h) - \frac{14}{15}h^5F^{(4)}(\xi), \qquad (3.19)$$
$$a < \xi < a+4h$$

Simpsonnıń ulıwmalasqan formulaların birgelikte paydalanıp esaplanadı.

(3.12) formuladan $x = x_i,\ \ i = \overline{4,m}$ ushın i – jup mánislerinde mına formulasına iye bolamız:

$$y_i = \int_a^{x_i-3} K[x_i, s, y(s)]ds + \int_{x_i-3}^{x_i} K[x_i, s, y(s)]ds \qquad (3.20)$$

i diń taq mánislerinde

$$y_i = \int_a^{x_i-4} K[x_i, s, y(s)]ds + \int_{x_i-4}^{x_i} K[x_i, s, y(s)]ds \qquad (3.21)$$

Integrallaw aralıqların (3.18) hám (3.19) formulaları menen sáykes túrde almastıramız, hám integrallardıń adımı h bolġan Simpsonnıń ulıwmalasqan formulası menen almastıramız. Onda qaldıq aġzasın alıp taslap, tiykarġı esaplaw ańlatpasına iye bolamız:

$$y_i = A_{i1}K_{i1}^{(0)} + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}K_{ij}(y_i), \qquad i = \overline{4,m} \qquad (3.22)$$

bunda i diń jup mánislerinde:

$$A_{41}=\frac{3}{4}h,A_{42}=0,A_{43}=\frac{9}{4}h,A_{61}=\frac{1}{3}h,A_{62}=\frac{4}{3}h,A_{63}=\frac{13}{12}h,A_{64}=0,A_{65}=\frac{9}{4}h$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{i1}=\frac{1}{3}h, \\ y_{i,2k+2}=\frac{4}{3}h, k=\overline{0,\frac{i-6}{2}} \\ y_{i,2k+1}=\frac{2}{3}h, k=\overline{1,\frac{i-6}{2}} \end{array}\right\} \text{i=8,10,12,…}$$

$$A_{i,i-3}=\frac{13}{12}h,A_{i,i-2}=0,A_{i,i-1}=\frac{9}{4}h$$

boladı, al i diń taq mánislerinde:

$$A_{51}=0,A_{52}=A_{54}=\frac{8}{3}h,A_{53}=-\frac{4}{3}h,A_{71}=A_{73}=\frac{1}{3}h,A_{72}=\frac{4}{3}h,A_{73}=\frac{8}{3}h,A_{74}=-\frac{4}{3}h$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{i1}=A_{i,i-4}=\frac{1}{3}h, \\ A_{i,i-3}=A_{i,i-1}=\frac{8}{3}h, A_{i.i-2}=-\frac{4}{3}h, \\ A_{i,2k+2}=\frac{4}{3}h, k=\overline{0,\frac{i-7}{2}} \\ y_{i,2k+1}=\frac{2}{3}h, k=\overline{1,\frac{i-7}{2}} \end{array}\right\}$$

Bul keltirilgen algoritmniń dállik dárejesi $O(h^4)$ ke teń boladı.

*Mısal.*Joqarıda keltirilip berilgen algoritmlerden paydalanıp integrallıq teńlemeniń mánislerin $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{2}{3}$, $x_4=1$, $x_5=\frac{4}{3}$ túyinleri ushın esaplań.

$$y(x)=\frac{1}{4}\int_0^x xse^{\frac{1}{4}x^2s^2}y(s)ds\,.$$

1. Meyli $y_1 = 0$ bolsın. Onda (3.14) formulasına muwapıq tómendegige iye bolamız:

$$y_2 = \frac{1}{4} LK_{21} = 0$$

$$y_3 = \frac{1}{4}(A_{31}K_{31} + A_{32}K_{32}) = 0.02777$$

$$y_4 = \frac{1}{4}(A_{41}K_{41} + A_{42}K_{42} + A_{43}K_{43}) = 0.111367$$

$$y_5 = \frac{1}{4}(A_{51}K_{51} + A_{52}K_{52} + A_{53}K_{53} + A_{54}K_{54}) = 0.267373$$

$$y_1 = 0 \text{ , } y_2 = 0,004629$$

$$y_3 = \frac{1}{4} 2h \text{ , } K_{32} = 0.037039$$

2. $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}004629$ bolsın. Onda (3.17) formulasına muwapıq tómendegige iye bolamız:

$$y_3 = \frac{1}{4} 2\, h,$$
$$K_{32} = 0,037039,$$

$$\left\{\left\{\left\{\left\{ y(x) = \frac{1}{4}\int_0^x xse^{\frac{1}{4}x^2s^2} y(s)ds \right\}\right\}\right\}\right\}(A_{31}K_{31} + A_{32}K_{32}) = 0.02777$$

$$y_5 = \frac{1}{4}(A_{51}K_{51} + A_{52}K_{52} + A_{53}K_{53} + A_{54}K_{54}) = 0.195750$$

3. Meyli $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}004629$, $y_3 = 0{,}037041$ bolsın. Onda (3.22) formulasına muwapıq tómendegige iye bolamız:

$$y_4 = \frac{1}{4}(A_{41}K_{41} + A_{42}K_{42} + A_{43}K_{43}) = 0.1255416$$

$$y_5 = \frac{1}{4}(A_{51}K_{51} + A_{52}K_{52} + A_{53}K_{53} + A_{54}K_{54}) = 0.267373$$

Berilgen mánislerdi esaplap ,alınġan mánislerdi salıstırıp bir – biri menen alınġan nátiyjelerdiń dálligi haqqında juwmaq shıġarıwġa boladı. Bunnan basqa alınġan nátiyjelerdi, sheshimdi qatarġa jiklew jolı menen alınġan mánisi menen hám dara qosındılar menen salıstırıp alıwġa da boladı.

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{896}x^{10} + \frac{73}{84816896}x^{17} + \ldots$$

bul

$y_4 = 0.126131$, $y_5 = 0.2513352$ nátiyjelerin beredi.

4-§. Sanlı mısal

1) Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesin trapeciyalar formulasınan paydalanıp juwıq sheshimlerin tabıń.

$$y(x)-\int_0^x \frac{y(s)}{1+x+s}ds = 1+x \qquad (4.1)$$

Sheshimi: Bul integrallıq teńlemeniń yadrosı $K(x,s)=\dfrac{1}{1+x+s}$ teń.

$f(x)=1+x$ boladı, bunda $h=0{,}1$, onda $n=\dfrac{b-a}{h}=10$ boladı. Demek, $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=0{,}3$, $x_4=0{,}4$, $x_5=0{,}5$, $x_6=0{,}6$, $x_7=0{,}7$, $x_8=0{,}8$, $x_9=0{,}9$ hám $x_{10}=1$ boladı.

$n=10$ da trapeciya formulası ushın tómendegilerge iye bolamız:

$$A_0=A_{10}=\frac{h}{2}; \qquad A_j=h, \qquad j=\overline{1,9}$$

(4.1) teńlemesinde $x=x_i$ dep esaplaymız hám nátiyjede tómendegige iye bolamız:

$$y_i(x)-\int_0^{x_i}\frac{y(s)}{1+x_i+s}ds = 1+x_i\,,\ i=\overline{0,10}$$

Volterranıń ekinshi túr integrallıq teńlemesin juwıq sheshiw ushın n=10 ushın joqarıdağı (3.11) formulasına tiykarlanıp,trapeciyalar formulasınan paydalanamız:

$$
\begin{cases}
y_0 = f_0 = 1, \\
y_1 - \dfrac{h}{2}\left[K_{10}y_0 + K_{11}y_1\right] = f_1, \\
y_2 - \dfrac{h}{2}\left[K_{20}y_0 + 2K_{21}y_1 + K_{22}y_2\right] = f_2, \\
y_3 - \dfrac{h}{2}\left[K_{30}y_0 + 2(K_{31}y_1 + K_{32}y_2) + K_{33}y_3\right] = f_3, \\
y_4 - \dfrac{h}{2}\left[K_{40}y_0 + 2(K_{41}y_1 + K_{42}y_2 + K_{43}y_3) + K_{44}y_4\right] = f_4, \\
y_5 - \dfrac{h}{2}\left[K_{50}y_0 + 2(K_{51}y_1 + K_{52}y_2 + K_{53}y_3 + K_{54}y_4) + K_{55}y_5\right] = f_5, \\
y_6 - \dfrac{h}{2}\left[K_{60}y_0 + 2(K_{61}y_1 + K_{62}y_2 + K_{63}y_3 + K_{64}y_4 + K_{65}y_5) + K_{66}y_6\right] = f_6, \\
y_7 - \dfrac{h}{2}\left[K_{70}y_0 + 2(K_{71}y_1 + K_{72}y_2 + K_{73}y_3 + K_{74}y_4 + K_{75}y_5 + K_{76}y_6) + K_{77}y_7\right] = f_7, \\
y_8 - \dfrac{h}{2}\left[K_{80}y_0 + 2(K_{81}y_1 + K_{82}y_2 + K_{83}y_3 + K_{84}y_4 + K_{85}y_5 + K_{86}y_6 + K_{87}y_7) + K_{88}y_8\right] = f_8, \\
y_9 - \dfrac{h}{2}\left[K_{90}y_0 + 2(K_{91}y_1 + K_{92}y_2 + K_{93}y_3 + K_{94}y_4 + K_{95}y_5 + K_{96}y_6 + K_{97}y_7 + K_{98}y_8) + K_{99}y_9\right] = f_9, \\
y_{10} - \dfrac{h}{2}\left[K_{10,0}y_0 + 2(K_{10,1}y_1 + K_{10,2}y_2 + K_{10,3}y_3 + K_{10,4}y_4 + K_{10,5}y_5 + K_{10,6}y_6 + K_{10,7}y_7 + K_{10,8}y_8 + K_{10,9}y_9) + K_{10,10}y_{10}\right] = f_{10}
\end{cases}
$$

$K(x,s)=\dfrac{1}{1+x+s}$, $f(x)=1+x$ mánisleriniń kestesin dúzemiz:

i	K_{0i}	K_{1i}	K_{2i}	K_{3i}	K_{4i}	K_{5i}	K_{6i}	K_{7i}	K_{8i}	K_{9i}	K_{10i}
0	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5
1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762
2	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546
3	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349
4	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167
5	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4
6	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846
7	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704
8	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571
9	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571	0,3448
10	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571	0,3448	0,3333

hám (4.2) sistemadan izbe-iz tabamız:

$$y_0 = f_0 = 1,$$

$$y_1 = \left[f_1 + \frac{h}{2} K_{10} y_0 \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{11} \right)^{-1} = 1{,}1952$$

$$y_2 = \left[f_2 + \frac{h}{2} K_{20} y_0 + h K_{21} y_1 \right] \Big/ \left(1 - \frac{h}{2} K_{22} \right) = 1,3830$$

$$y_3 = \left[f_3 + \frac{h}{2} K_{30} y_0 + h\left(K_{31} y_1 + K_{32} y_2 \right) \right] \Big/ \left(1 - \frac{h}{2} K_{33} \right) = 1,5649$$

$$y_4 = \left[f_4 + \frac{h}{2} K_{40} y_0 + h\left(K_{41} y_1 + K_{42} y_2 + K_{43} y_3 \right) \right] \Big/ \left(1 - \frac{h}{2} K_{44} \right) = 1,7289$$

$$y_5 = \left[f_5 + \frac{h}{2} K_{50} y_0 + h(K_{51} y_1 + K_{52} y_2 + K_{53} y_3 + K_{54} y_4) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{55} \right)^{-1} = 1,9152$$

$$y_6 = \left[f_6 + \frac{h}{2} K_{60} y_0 + h(K_{61} y_1 + K_{62} y_2 + K_{63} y_3 + K_{64} y_4 + K_{65} y_5) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{66} \right)^{-1} = 2,0858$$

$$y_7 = \left[f_7 + \frac{h}{2} K_{70} y_0 + h(K_{71} y_1 + K_{72} y_2 + K_{73} y_3 + K_{74} y_4 + K_{75} y_5 + K_{76} y_6) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{77} \right)^{-1} = 2,2539$$

$$y_8 = \left[f_8 + \frac{h}{2} K_{80} y_0 + h(K_{81} y_1 + K_{82} y_2 + K_{83} y_3 + K_{84} y_4 + K_{85} y_5 + K_{86} y_6 + K_{87} y_7) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{88} \right)^{-1} = 2,4198$$

$$y_9 = \left[f_9 + \frac{h}{2} K_{90} y_0 + h(K_{91} y_1 + K_{92} y_2 + K_{93} y_3 + K_{94} y_4 + K_{95} y_5 + K_{96} y_6 + K_{97} y_7 + K_{98} y_8) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{99} \right)^{-1} = 2,5839$$

$$y_{10} = \left[f_{10} + \frac{h}{2} K_{10,0} y_0 + h(K_{10,1} y_1 + K_{10,2} y_2 + K_{10,3} y_3 + K_{10,4} y_4 + K_{10,5} y_5 + K_{10,6} y_6 + K_{10,7} y_7 + K_{10,8} y_8 + K_{10,9} y_9) \right] \left(1 - \frac{h}{2} K_{10,10} \right)^{-1} = 2,7465$$

Nátiyjede tómendegi juwıq sheshimlerge iye bolamız:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	1,1952	1,3830	1,5649	1,7289	1,9152	2,0858	2,2539	2,4198	2,5839	2,7465

2.) (4.1) Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesin Simpson usılınan paydalanıp juwıq sheshimlerin tabıń.

$$y(x) - \int_0^x \frac{y(s)}{1+x+s} ds = 1+x \qquad (4.1)$$

Sheshimi: Bul integrallıq teńlemeniń yadrosı $K(x,s) = \dfrac{1}{1+x+s}$ teń.

$f(x) = 1+x$ boladı, bunda $h = 0{,}1$, onda $n = \dfrac{b-a}{h} = 10$ boladı. Demek, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, $x_4 = 0{,}4$, $x_5 = 0{,}5$, $x_6 = 0{,}6$, $x_7 = 0{,}7$, $x_8 = 0{,}8$, $x_9 = 0{,}9$ hám $x_{10} = 1$ boladı.

$n = 10$ da Simpson formulası ushın tómendegilerge iye bolamız:

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},\ A_2 = A_4 = \ldots = A_{2m} = \frac{2h}{3},\ A_3 = A_5 = \ldots = A_{2m-1} = \frac{4h}{3}.$$

(4.1) teńlemesinde $x = x_i$ dep esaplaymız hám nátiyjede tómendegige iye bolamız:

$$y_i(x) - \int_0^{x_i} \frac{y(s)}{1+x_i+s} ds = 1 + x_i,\ i = \overline{0,10}$$

Volterranıń ekinshi túr integrallıq teńlemesin juwıq sheshiw ushın n=10 ushın joqarıdaǵı (3.11) formulasına tiykarlanıp,Simpson formulasınan paydalanamız:

$$
\begin{cases}
y_0 = f_0 = 1, \\
y_1 - \dfrac{h}{3}\left[K_{10}y_0 + K_{11}y_1\right] = f_1, \\
y_2 - \dfrac{h}{3}\left[K_{20}y_0 + 2K_{21}y_1 + K_{22}y_2\right] = f_2, \\
y_3 - \dfrac{h}{3}\left[K_{30}y_0 + 2K_{31}y_1 + 4K_{32}y_2 + K_{33}y_3\right] = f_3, \\
y_4 - \dfrac{h}{3}\left[K_{40}y_0 + 2(K_{41}y_1 + K_{43}y_3) + 4K_{42}y_2 + K_{44}y_4\right] = f_4, \\
y_5 - \dfrac{h}{3}\left[K_{50}y_0 + 2(K_{51}y_1 + K_{53}y_3) + 4(K_{52}y_2 + K_{54}y_4) + K_{55}y_5\right] = f_5, \\
y_6 - \dfrac{h}{3}\left[K_{60}y_0 + 2(K_{61}y_1 + K_{63}y_3 + K_{65}y_5) + 4(K_{62}y_2 + K_{64}y_4) + K_{66}y_6\right] = f_6, \\
y_7 - \dfrac{h}{3}\left[K_{70}y_0 + 2(K_{71}y_1 + K_{73}y_3 + K_{75}y_5) + 4(K_{72}y_2 + K_{74}y_4 + K_{76}y_6) + K_{77}y_7\right] = f_7, \\
y_8 - \dfrac{h}{3}\left[K_{80}y_0 + 2(K_{81}y_1 + K_{83}y_3 + K_{85}y_5 + K_{87}y_7) + 4(K_{82}y_2 + K_{84}y_4 + K_{86}y_6) + K_{88}y_8\right] = f_8, \\
y_9 - \dfrac{h}{3}\left[K_{90}y_0 + 2(K_{91}y_1 + K_{93}y_3 + K_{95}y_5 + K_{97}y_7) + 4(K_{92}y_2 + K_{94}y_4 + K_{96}y_6 + K_{98}y_8) + K_{99}y_9\right] = f_9, \\
y_{10} - \dfrac{h}{3}\left[K_{10,0}y_0 + 2(K_{10,1}y_1 + K_{10,3}y_3 + K_{10,5}y_5 + K_{10,7}y_7 + K_{10,9}y_9) + 4(K_{10,2}y_2 + K_{10,4}y_4 + K_{10,6}y_6 + K_{10,8}y_8) + K_{10,10}y_{10}\right] = f_{10},
\end{cases}
$$

$K(x,s)=\dfrac{1}{1+x+s}$, $f(x)=1+x$ mánisleriniń kestesin dúzemiz:

i	K_{0i}	K_{1i}	K_{2i}	K_{3i}	K_{4i}	K_{5i}	K_{6i}	K_{7i}	K_{8i}	K_{9i}	K_{10i}
0	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5
1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762
2	0,8333	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546
3	0,7692	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349
4	0,7143	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167
5	0,6666	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4
6	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846
7	0,5882	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704
8	0,5556	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571
9	0,5263	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571	0,3448
10	0,5	0,4762	0,4546	0,4349	0,4167	0,4	0,3846	0,3704	0,3571	0,3448	0,3333

hám (4.3) sistemadan izbe-iz tómendegi juwıq sheshimlerdi tabamız:

$y_0 = f_0 = 1,$

$$y_1=\left[f_1+\frac{h}{3}K_{10}y_0\right]\left(1-\frac{h}{3}K_{11}\right)^{-1}=1{,}1625$$

$$y_2 = \left[f_2 + \frac{h}{3} K_{20} y_0 + \frac{2h}{3} K_{21} y_1 \right] \bigg/ \left(1 - \frac{h}{3} K_{22} \right) = 1,3796$$

$$y_3 = \left[f_3 + \frac{h}{3} K_{30} y_0 + \frac{2h}{3} \left(K_{31} y_1 \right) + \frac{4h}{3} (K_{32} y_2) \right] \bigg/ \left(1 - \frac{h}{3} K_{33} \right) = 1,5293$$

$$y_4 = \left[f_4 + \frac{h}{3} K_{40} y_0 + \frac{2h}{3} \left(K_{41} y_1 + K_{43} y_3 \right) + \frac{4h}{3} K_{42} y_2 \right] \bigg/ \left(1 - \frac{h}{3} K_{44} \right) = 1,7163$$

$$y_5 = \left[f_5 + \frac{h}{3} K_{50} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{51} y_1 + K_{53} y_3) + \frac{4h}{3} (K_{52} y_2 + K_{54} y_4) \right] \left(1 - \frac{h}{3} K_{55} \right)^{-1} = 1,8783$$

$$y_6 = \left[f_6 + \frac{h}{3} K_{60} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{61} y_1 + K_{63} y_3 + K_{65} y_5) + \frac{4h}{3} (K_{62} y_2 + K_{64} y_4) \right] \left(1 - \frac{h}{3} K_{66} \right)^{-1} = 2,0785$$

$$y_7 = \left[f_7 + \frac{h}{3} K_{70} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{71} y_1 + K_{73} y_3 + K_{75} y_5) + \frac{4h}{3} (K_{72} y_2 + K_{74} y_4 + K_{76} y_6) \right] \left(1 - \frac{h}{3} K_{77} \right)^{-1} = 2,2068$$

$$y_8 = \left[f_8 + \frac{h}{3} K_{80} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{81} y_1 + K_{83} y_3 + K_{85} y_5 + K_{87} y_7) + \frac{4h}{3} (K_{82} y_2 + K_{84} y_4 + K_{86} y_6) \right] \left(1 - \frac{h}{3} K_{88} \right)^{-1} = 2,4104$$

$$y_9 = \left[f_9 + \frac{h}{3} K_{90} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{91} y_1 + K_{93} y_3 + K_{95} y_5 + K_{97} y_7) + \frac{4h}{3} (K_{92} y_2 + K_{94} y_4 + K_{96} y_6 + K_{98} y_8) \right] \left(1 - \frac{h}{3} K_{99} \right)^{-1} = 2,5440$$

$$y_{10} = \Big[f_{10} + \frac{h}{3} K_{10,0} y_0 + \frac{2h}{3} (K_{10,1} y_1 + K_{10,3} y_3 + K_{10,5} y_5 + K_{10,7} y_7 + K_{10,9} y_9) + \frac{4h}{3} (K_{10,2} y_2 + K_{10,4} y_4 +$$

Nátiyjede tómendegi juwıq sheshimlerge iye bolamız:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	1,1625	1,3796	1,5293	1,7163	1,8783	2,0785	2,2068	2,4104	2,5440	2,7356

Eki usıl boyınsha esaplaǵan nátiyjelerdi salıstıramız:

i	$y(x_i)$ (trapeciya)	$y(x_i)$ (Simpson)
0	1	1
1	1,1952	1,1625
2	1,3830	1,3796
3	1,5649	1,5293
4	1,7289	1,7163
5	1,9152	1,8783
6	2,0858	2,0785
7	2,2539	2,2068
8	2,4198	2,4104
9	2,5839	2,5440
10	2,7465	2,7356

Simpson usılınıń dálligi trapeciya usılına salıstırǵanda joqarı boladı.

Juwmaqlaw

Bul pitkeriw qánigelik jumısında Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemelerin sheshiwdiń kvadraturalıq usılları qaraldı. Bunday integrallıq teńlemelerde integrallaw aralığınıń joqarı shegi ózgermeli bolıp turadı. Sonlıqtan Volterra teńlemelerin ayrıqsha túrdegi integrallıq teńlemeler dep ataydı.

Ámeliy máselelerdi táriplewde Volterra teńlemeleriniń bahalılığın esapqa alıp, differenciallıq teńlemelerine qaraǵanda,olardan kóbirek paydalanadı. Dinamikalıq sistemalardı táriplewde bunday bahalığına, onıń qolaylığın hám ıqshamlığın keltiriwge boladı. Sistemanıń shıǵıs shamaları hám kiris tásirler arasındaǵı óz ara baylanısları integrallıq operatorları menen kórsetiledi hám olardıń yadroları berilgen matematikalıq modellerdiń ishki qásiyetleri menen tolıq anıqlanadı, bunda onı kiris signallarına sistemanıń birden beretuǵın juwabı retinde túsindiriledi. Integrallıq baylanıslardı sanlı ámelge asırıwda usıldıń ornıqlılıǵı joqarı dárejede bolıp hám kópshilik jaǵdaylarda sol ushın bul teńlemelerine dıqqat kóbirek beriledi.

Ekinshi túr Volterra teńlemelerin sheshiwdıń ádewir kóp bolǵan saylı usılları bar. Bul usıllardıń kópshiliginde integraldı kvadraturalıq formulaları menen almastırıw tiykarında alınǵan hám sonlıqtan bul usıllardı integrallıq teńlemelerdi sheshiwdıń kvadraturalıq usılı dep ataydı[3,5,7].

Integrallıq teńlemeler teoriyasınan bizge málim, egerde integral teńlemeniń yadrosı $K(x.s)$ qaralıp atırǵan $R\{a \le s \le x \le b\}$ oblastında úzliksiz, al $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ kesindisinde úzliksiz funkciyalar bolsa, onda Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemesi jalǵız bir sheshimge iye boladı.

Pitkeriw qánigelik jumısında Volterra teńlemesindegi integraldıń joqarı shegin belgilep alıp, olardı bizge málim belgili kvadraturalıq formulalar járdeminde sheklengen qosındılar menen almastırıw máselesi qaraldı.

Bul pitkeriw qánigelik jumısında Volterranıń ekinshi túrdegi integral teńlemelerin sheshiwde trapeciya hám Simpson kvadraturalıq formulalarınan paydalanıp sheshimleri tabıldı.

Juwmaqlap aytqanda, trapeciya hám Simpson kvadraturalıq formulaları tiykarında Volterranıń ekinshi túrdegi integrallıq teńlemeleriniń juwıq sheshimleri esaplandı. Qosımsha esaplawlar Mathcad hám Maple matematikalıq paketleri járdeminde orınlandı hám trapeciya, Simpson usıllarınıń algoritmine C++ tilinde esaplaw programması dúzildi hám integrallıq teńlemeniń nátiyjeleri kompyuter járdeminde alındı.

Bul pitkeriw qánigelik jumısında alınġan nátiyjelerdi qánigelik pánler boyınsha ámeliy hám laboratoriyalıq sabaqlarında paydalanıwġa boladı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Арушанян И.О. Практикум на ЭВМ. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур. -МГУ.: ,2012.

2.Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.II.- М.: Физико-математическая литература, 1962. –640с.

3.Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения.-2-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.

4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова Думка, 1985. –544 с.

5. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари , 2-қисм.-Тошкент «IQTISOD-MOLIYA»,2008.

6. Карчевский Е.М. Численные методы решения интегральных уравнений и комплекс программ на языке Matlab.- Учебное пособие: Казанский университет, 2017.

7.Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 368 с.

8. Манжиров А.В. , Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнение Методы решения.-М.: Факториал Пресс ,2000.

9. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar.-Toshkent «O'qituvchi» ,2007.

10. https://kpfu.ru/docs/F993202360/IntEq_Publ.pdf

11. https://ru.wikipedia.org/wiki/Интегральное_уравнение_Вольтерры

12. https://studfiles.net/preview/1726580/page:72/

13.www.1024.ru/polzovateli/filatov-d-n/integralnoe-uravnenie

Qosımshalar

(Jeke kompyuter ushın C++ tilinde dúzilgen programmalar ham olardıń iske asırılıwınan alınġan sanlı nátiyjelerdiń basıp shıġarılġan nusqaları)

1-mısal.(trapeciya usılı)

C++ tilinde dúzilgen programması:

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
using namespace std;
main()
{
    char d=187,ss=188;
    const float h=0.2;
    int n=5,i,j;
    float yy,p,s,f[100],x[100],y[100],k[100][100];
    for(i=0;i<=n;i++){
    x[i]=i*h;
    cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<", ";}
    cout<<endl;
    for(i=0;i<=n;i++)
    for(j=0;j<=n;j++)
    k[i][j]=1/(1+x[i]+x[j]);
    for(i=0;i<=n;i++){
    f[i]=x[i]+1;
    cout<<"f["<<i<<"]="<<f[i]<<", ";}
    cout<<endl;
    y[0]=1;
    for(i=1;i<=n;i++)
    {
        s=0;
        for(j=0;j<=i+1;j++)
        y[i]=(f[i]+h/2*k[i][j]*y[j]+h*s)/(1-
h/2*k[i][i]);
        s=s+k[i+1][j]*y[i];
    }
cout<<"ÉÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍ
ËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍ"<<d<<"\n";
cout<<"º iº  K0i   º  K1i   º   K2i   º   K3i   º   K4i
º   K5i   º \n";
cout<<"ÌÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍ
ÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍ¹\n";
```

```
for(i=0;i<=n;i++){ cout<<"°"; if(i<5) cout<<" ";
cout<<i<<"°"<<setprecision(2)<<setiosflags(ios::fixed|i
os::showpoint);
cout<<" ";cout<<setprecision(6)<<k[0][i]<<"°
"<<k[1][i]<<"° "<<
k[2][i]<<"° "<<k[3][i]<<"° "<<k[4][i]<<"°
"<<k[5][i]<<"° ";cout<<"  °\n";}
cout<<"ÈÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍ
ÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍ"<<ss<<"\n\n";
for(i=0;i<=n;i++)
cout<<"y["<<i<<"]="<<y[i]<<endl;

}
```

Nátiyjesi:

x[0]=0, x[1]=0.1, x[2]=0.2, x[3]=0.3, x[4]=0.4, x[5]=0.5,

x[6]=0.6, x[7]=0.7, x[8]=0.8, x[9]=0.9, x[10]=1,

f[0]=1, f[1]=1.1, f[2]=1.2, f[3]=1.3, f[4]=1.4, f[5]=1.5,

f[6]=1.6, f[7]=1.7, f[8]=1.8, f[9]=1.9, f[10]=2.

i	K0i	K1i	K2i	K3i	K4i	K5i	K6i	K7i	K8i	K9i	K10i
0	1.000000	0.909091	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000
1	0.909091	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190
2	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545
3	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783
4	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667
5	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000
6	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615
7	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370
8	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143
9	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143	0.344828
10	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143	0.344828	0.333333

y[0]=1.000000

y[1]=1.195226

y[2]=1.383044

y[3]=1.564935

y[4]=1.728900

y[5]=1.915262

y[6]=2.085809

y[7]=2.253900

y[8]=2.419894

y[9]=2.583900

y[10]=2.74658

1-mısal.(Simpson usılı)

C++ tilinde dúzilgen programması:

```
#include<iostream>
#include<iomanip>
using namespace std;
main()
{
    char d=187,ss=188;
    const float h=0.2;
    int n=5,i,j;
    float yy,p,s,f[100],x[100],y[100],k[100][100];
    for(i=0;i<=n;i++){
    x[i]=i*h;
    cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<", ";}
    cout<<endl;
    for(i=0;i<=n;i++)
    for(j=0;j<=n;j++)
    k[i][j]=1/(1+x[i]+x[j]);
    for(i=0;i<=n;i++){
    f[i]=x[i]+1;
    cout<<"f["<<i<<"]="<<f[i]<<", ";}
    cout<<endl;
    y[0]=1;
    for(i=1;i<=n;i++)
    {
        s=0;
        for(j=0;j<=i+1;j++)
        y[i]=(f[i]+h/3*k[i][j]*y[j]+h*s)/(1-
h/3*k[i][i]);
        if(j%2==0)
        s=s+2*k[i+1][j]*y[i];
        else
        s=s+4*k[i+1][j]*y[i];
    }
cout<<"ÉÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍ
ËÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍ"<<d<<"\n";
cout<<"° i°  K0i   °  K1i   °   K2i   °   K3i   °   K4i
°   K5i   ° \n";
cout<<"ÌÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍ
ÎÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍ͹\n";
for(i=0;i<=n;i++){ cout<<"°"; if(i<5) cout<<" ";
```

```
cout<<i<<"°"<<setprecision(2)<<setiosflags(ios::fixed|i
os::showpoint);
cout<<" ";cout<<setprecision(6)<<k[0][i]<<"°
"<<k[1][i]<<"° "<<
k[2][i]<<"° "<<k[3][i]<<"° "<<k[4][i]<<"°
"<<k[5][i]<<"° ";cout<<"  °\n";}
cout<<"ÈÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍ
ÊÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍ"<<ss<<"\n\n";
for(i=0;i<=n;i++)
cout<<"y["<<i<<"]="<<y[i]<<endl;
}
```

Na’tiyjesi:

```
x[0]=0, x[1]=0.1, x[2]=0.2, x[3]=0.3, x[4]=0.4, x[5]=0.5,

x[6]=0.6, x[7]=0.7, x[8]=0.8,  x[9]=0.9, x[10]=1,

f[0]=1, f[1]=1.1, f[2]=1.2, f[3]=1.3, f[4]=1.4, f[5]=1.5,

f[6]=1.6, f[7]=1.7, f[8]=1.8, f[9]=1.9, f[10]=2.
```

i	K0i	K1i	K2i	K3i	K4i	K5i	K6i	K7i	K8i	K9i	K10i
0	1.000000	0.909091	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000
1	0.909091	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190
2	0.833333	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545
3	0.769231	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783
4	0.714286	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667
5	0.666667	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000
6	0.625000	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615
7	0.588235	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370
8	0.555556	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143
9	0.526316	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143	0.344828
10	0.500000	0.476190	0.454545	0.434783	0.416667	0.400000	0.384615	0.370370	0.357143	0.344828	0.333333

y[0]=1.000000

y[1]=1.195226

y[2]=1.383044

y[3]=1.564935

y[4]=1.728900

y[5]=1.915262

y[6]=2.085809

y[7]=2.253900

y[8]=2.419894

y[9]=2.583900

y[10]=2.74658

Mathcad matematikalıq paketinde mısallardı trapeciya hám Simpson usıllarınan paydalanıp sheship,juwıq sheshimleri tabıldı

$ORIGN := 1$

$\lambda := 1 \qquad c := 0 \qquad d := 1$

$k(x,s) := \dfrac{1}{1+x+s} \qquad f(x) := 1+x \qquad N := 10$

$h := \dfrac{d-c}{N}$

$i := 1..N \qquad x_i := c + (i-1)\cdot h \qquad F_i := f(x_i)$

$A_0 := \dfrac{h}{2} \qquad A_N := \dfrac{h}{2} \qquad A_i := h \qquad i := 1, 2..N-1$

$i := 0..N \qquad j := 0..N \qquad K_{i,j} := k(x_i, x_j)$

$i := 0..N$

$$y_i := \frac{F_i + \lambda\cdot\sum_{j=1}^{N} \mathrm{if}\left(j \geq i, 0, A_j\cdot K_{i,j}\cdot y_j\right)}{1-\lambda\cdot\frac{h}{2}\cdot K_{i,i}}$$

Trapeciya usılı boyınsha alınġan nátiyjeler:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	1,1952	1,3830	1,5649	1,7289	1,9152	2,0858	2,2539	2,4198	2,5839	2,7465

$ORIGN := 1$

$\lambda := 1 \qquad c := 0 \qquad d := 1$

$k(x,s) := \dfrac{1}{1+x+s} \qquad f(x) := x+1 \qquad N := 10$

$h := \dfrac{d-c}{N}$

$i := 1..N \qquad x_i := c + (i-1)\cdot h \qquad F_i := f(x_i)$

$A_0 := \dfrac{h}{3} \qquad A_N := \dfrac{h}{3} \qquad i := 2,4..N-2 \qquad A_i := 4\cdot\dfrac{h}{3} \qquad i := 1,3..N-1 \qquad A_i := 2\cdot\dfrac{h}{3}$

$i := 0..N \qquad j := 0..N \qquad K_{i,j} := k(x_i, x_j)$

$i := 0..N$

$$y_i := \frac{F_i + \lambda\cdot\sum_{j=0}^{N} \mathrm{if}\left(j \ge i, 0, A_j\cdot K_{i,j}\cdot y_j\right)}{1 - \lambda\cdot\dfrac{h}{3}\cdot K_{i,i}}$$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	1,1625	1,3796	1,5293	1,7163	1,8783	2,0785	2,2068	2,4104	2,5440	2,7356