

ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA
ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

Berdaq atındağı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Matematikalıq analiz kafedrası

Matematika tálim baǵdarınıń 4-kurs studentı

Alimbetova Fatimanıń

«Tuwrımúyeshli oblastlarda aralas tiptegi teńlemelerdiń sheshiminiń
bar bolıwı»

teması boyınsha

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Ilimiy basshı:

docent Elg'ondiev Q.Q.

Kafedra baslıǵı:

docent Elg'ondiev Q.Q.

Nókis-2018

Mazmunı

I bap

1.1§ Kirisiw.....	3
1.2§ Ortogonal sistemalar.....	8

II bap

2.1§ Lavrentev-Bicadze teńlemesi ushın shegaralıq másele.....	21
2.2§ Máseleniń sheshimniń birden-birligi.....	29
2.3§ Máseleniń sheshiminiń bar bolıwı.....	33
Juwmaqlaw.....	38
Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi.....	41

I-bap

1.1§.Kirisiw

Házirgi zaman fizikasınıń, mexanikasınıń, ximiyanıń hám texnikanıń bir qatar máseleleriniń matematikalıq modelleri standart bolmaǵan baslanǵısh shegaralıq tuwra hám keri máselelerdi úyreniwge alıp keledi. Bunday máseleler klassikalıq matematikalıq fizika teńlemeleri teoriyasında analogına iye emes. Úshinshi tártipli aralas tiptegi teńlemeler ushın qoyılǵan shegaralıq máseleler A.V.Bicadze , M.S.Salahidinov, T.D.Djuraev hám olardıń shákirtleri tárepinen úyrenilgen. Olar bul máselelerdi klassikalıq aralas oblasttıń úshmúyeshlikti xarakterlewshi giperbolalıq bóliminde izertlegen.

Keyingi jıllarda tuwrı múyeshli oblastta ekinshi hám úshinshi tártipli arlas tiptegi teńlemeler ushın qoyılǵan tuwrı hám keri máselelerdi spektral jayılma metodı menen izertlewge qızıǵıw tuwıladı. Usı metod járdeminde tuwrı máseleniń, dara jaǵdayda Dirixle máselesiniń sheshiminiń bir tekiligi hám ornıqlılıǵı haqqındaǵı teorema dálillengen [4-7].

Tuwrı múyeshli oblasttaǵı aralas tiptegi teńlemeler ushın qoyılǵan tuwra hám keri máseleler K.B.Sabitov tárepinen izertlengenin kóriwge boladı. Ol tiykarınan

$$D = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$$

tuwrımúyeshli oblasttaǵı aralas tiptegi teńlemelerdiń

$$L_1 u \equiv K(t)u_{xx} + u_{tt} - b^2 K(t)u = 0$$

$$L_2 u \equiv \begin{cases} t^n u_t - u_{xx} + b^2 u = 0, & t > 0 \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u = 0, & t < 0 \end{cases}$$

bunda $K(t) = (\operatorname{sgn} t)|t|^n$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

túrdegi eki klası ushın qoyılǵan shegaralıq máselelerdi úyrenen.

Spektrallıq analiz metodı jáne tuwrı múyeshli oblasttaǵı aralas parabola-giperbolalıq hám elliptik-giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın qoyılǵan keri máseleni , anıǵıraq aytqanda teńlemenıń on tárepindegi belgisiz funkciyanı tabıw máselesin izertlewde qollanıladı.

K.B.Sabitov óz miynetlerinde D oblasttıńdaǵı aralas tiptegi teńlemelerdiń

$$L_3 u \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x) & t > 0 \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x), & t < 0 \end{cases}$$

$$L_4 u \equiv u_{tt} + (\operatorname{sgn} t) u_{xx} + b^2 u = \begin{cases} f_1(x), & t > 0 \\ f_2(x), & t < 0 \end{cases}$$

bunda $u(x, t), f_i(x), i = 1, 2$ - belgisiz funksiya,

klasları ushın qoyılǵan keri máselerdi izertlegen [8-14].

Házirgi waqıtta aralas tiptegi teńlemeler teoriiyası keńeygen bolıp, klassikalıq tiptegi teńlemelerdiń eki yamasa úsh kombinaciyasın óz ishine aladı. Aralas tiptegi teńlemelerdiń tez pát penen izertleniwi bir tárepten bul teńlemelerdiń kóp izertlenbegeni menen ekinshi tárepten olardıń fizika, mexanika hám texnikanıń áhmiyetli máselelerinde keń qollanıwı menen baylanıslı.

Házirgi zaman texnikasınıń tez rawajlanıwı tábiy pánler aldına jańa wazıypalardı qoya basladı. Ásirese matematikaǵa, atap aytqanda differenciallıq teńlemeler, dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerge texnikalıq máselelerdi sheshiw ushın jańadan-jańa shegaralıq máselelerdi sheshiw usılların jetilistiriw hám onıń ámeliyatta qollanıwların támiynlew sıyaqlı talaplardı qoydı.

Differenciallıq teńlemelerge keltiriletuǵın fizikalıq, mexanikalıq, texnikalıq máselelerden basqa ekologiya, biologiya, medicina, ximiya hám basqa da pánlerdiń de ámeliy máselelerin differenciallıq teńlemelerge keltiriw hám olar

ushın korrekt shegaralıq máselelerdi úyreniw zárúrlılıǵı aktual bolıp tabıladı. Ásirese joqarıda ayılǵan máselelerdi pánniń jańa tarawı aralas tiptegi teńlemelerdi úyreniw respublikamızda jetekshi matematiklerimiz basshılıǵında joqarı dárejede rawajlanǵan.

Pitkeriw qánigelik jumısının tiykarǵı maqseti hám wazıypaları. Jumıstıń tiykarǵı maqseti-ekinshi tártipli aralas tiptegi teńlemenı sheshiw hám sheshimniń bar bolıw máselesin izertlew.

Izertlewdi alıp barıw usılları. Qarastırılıp atırǵan shegaralıq máselelerdi sheshiwde ózgeriwshilerdi ayırıw yaǵnıy Fure metodınan paydalanıladı.

Izertlewdiń teoriyalıq hám ilimiy áhmiyeti. Pitkeriw qánigelik jumısı teoriyalıq áhmiyetke iye. Olardan joqarı tártipli aralas tiptegi teńlemelerdi sheshiwdi úyreniwde paydalanıw hám usı qánige boyınsha studentlerge arnawlı kurs oqıǵanda paydalanıwǵa boladı.

Pitkeriw qánigelik jumısının kólemi hám mazmunı. Jumıs kirisiw bólimi, 2 bap (5 paragraf), juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

1-bap 2 bólimnen turadı. 1.1-bólim pitkeriw qánigelik jumısına kirisiw bólimi bolıp tabıladı. 1.2-bóliminde bolsa ortogonal sistemalar haqqında maǵlıwmat beriledi.

2-bap óz ishine 3 bólimdi aladı. Bul bapta pitkeriw qánigelik jumısının tiykarǵı mazmunı sóz etiledi. 2.1-bólim “Lavrentev-Bicadze teńlemesi ushın shegaralıq másele ” dep atalıp onda máseleniń qoyılıwı hám sheshiliwi keltiriledi:

Másele tómendegishe qoyıladı:

$$Lu(x, y) = u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0$$

Lavrentev-Bicadze teńlemesin

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}, \alpha > 0, \beta > 0$$

tuwrımıyeshli oblastındaǵı shegaralıq máselesiniń sheshimin tabıw talap etiledi. Bul sheshim Fure metodi járdeminde izertleniledi hám

$$U_k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{2}(a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ \sqrt{2}(a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

sheshimi keltirip shıǵarıladı.

$$D_+ = D \cap \{y > 0\} \quad D_- = D \cap \{y < 0\}$$

belgilewlerdi kiritiw arqalı, tómendegi máseleni qarastırıwǵa kelinedi:

D oblastında tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $u(x, y)$ funkciyanı tabıń:

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

bunda $\varphi(x), \psi(x)$ - tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı berilgen sıypaq funkciyalar.

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$$

Máseleniń sheshimi Fure metodi járdeminde izertleniledi hám

$U(x, y) = X(x)Y(y)$ kóriniste izertlenedi. Bunnan soń ózgeriwshiler ajralǵan teńleme payda boladı hám olardıń ulıwma mánisi λ spektral parametrine teńlestiriledi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\operatorname{sgn} y \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Bunnan soń $X(x)$ hám $Y(y)$ ǵa baylanıslı eki teńleme payda boladı hám berilgen baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdi esapqa alǵan halda máseleniń

$$U_k(x, y) = \begin{cases} (a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ (a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

formal sheshimi keltirip shıǵarıladı.

2.2-bólimi “Máseleniń sheshiminiń birden-birligi” dep atalıp, bunda sheshimniń birden-birliginiń tiykargı shárti keltirilip shıǵarıladı.

2.3-bólimi “Máseleniń sheshiminiń bar bolıwı” dep ataladı hám bul bólimde 3 lemmadan paydalanıp sheshimniń bar bolıwı hám sheshimdi qatar kórinisinde ańlatılıwı keltirip ótıledi.

§1.2. Ortogonal sistemalar

1.2.1-anıqlama. Skalyar kóbeyme kiritilgen hár qanday sızıqlı keńislikke Gilbertaldı keńisligi delinedi.

Meyli R Gilbertaldı keńisligi bolsın.

1.2.2-anıqlama. Eger $x \in R$ hám $y \in R$ elementleri ushın $(x, y) = 0$ teńligi orınly bolsa, onda x hám y elementleri **ortogonal** dep ataladı hám $x \perp y$ túrinde belgilenedi.

1.2.3-anıqlama. Eger R keńisliginiń $\{x_\alpha\}$, $x \in R$, $\alpha \in A$ (A -indeksleriniń bazıbir kópłigi) elementleri kópłigi berilgen bolıp, ondağı qálegen eki element ortogonal bolsa, onda $\{x_\alpha\}$ elementler sistemasına **ortogonal sistema** delinedi. Usıǵan qosımsha bul elementler sistemasındağı hár bir elementtiń norması 1 ge teń bolsa, yaǵnıy $\forall \alpha \in A$ ushın $\|x_\alpha\| = 1$ teńligi orınly bolsa, onda $\{x_\alpha\}$ **-ortonormal sistema** dep ataladı.

Eger $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ sistema ortogonal hám $\forall \alpha \in A$ indeksinde $x_\alpha \neq 0$ qatnası orınlansa, onda bul elementler sistemasın normallastırıw múmkin.

Berilgen elementler sistemasındağı hár bir elementti sáykes $\|x_\alpha\|$ normasına bóliw járdeminde payda bolǵan $\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}, \alpha \in A \right\}$ túrindegi elementler sisteması ortonormal sistema boladı.

1.2.1-lemma. Eger R keńisliginiń $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ (A -indekslerdiń bazıbir kópłigi) elementler sisteması ortogonal bolıp, $\forall \alpha \in A$ ushın $x_\alpha \neq 0$ bolsa, onda bul elementler sisteması sızıqlı ǵárezli emes sistema boladı.

Dálillew. Meyli ayırım $x_{\alpha_k}, \alpha_k \in A, k = 1, 2, \dots$ elementleri ushın

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0$$

ten'ligi orınly bolsın. Onda tayınlangan $k, k = 1, 2, \dots$ ushın bul tenliktiń eki tárepini x_{α_k} elementine skalyar kóbeytip,

$$(\lambda_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0 \quad (1.2.1)$$

teńligine iye bolamız. Sebebi, lemma shártine sáykes eger $j \neq k$ bolsa,

$(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$ boladı. (1.2.1) teńliginen, $x_{\alpha_k} \neq 0$ bolǵanı ushın, $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$ hám

$\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$ bolıwın kóremiz. Bul berilgen $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ elementler sistemasınıń sıızıqlı ǵárezli emes ekenligin kórsetedi.

1.2.2-lemma. Eger R keńisliginiń $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementleri sisteması ushın

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix} \quad (1.2.2)$$

determinantınıń mánisi 0 ge teń bolsa, onda berilgen elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli boladı.

$G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ determinantına berilgen elementler sistemasınıń **Gramm determinantı** delinedi.

Dálillew. Tómendegi

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, x_i) = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2.3)$$

túrindegi $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ belgisizlerine baylanıslı n birtekli teńlemelerdiń sıızıqlı sistemasın qaraştıramız.

Bul bir tekli sistema nollik bolmaǵan (trivial emes) sheshimlerge iye bolıwı ushın

$$\lambda_1 (x_1, x_i) + \lambda_2 (x_2, x_i) + \dots + \lambda_n (x_n, x_i) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

teńlemeler sistemasınıń determinant nolge teń bolıwı shárt. Bizlerdiń jaǵdayda bul determinant Gramm determinantınıń transponirlengenine teń boladı hám onıń mánisi lemma shártine sáykes 0 ge teń. Onda, (1.2.3) teńlemeler sisteması nollik bolmaǵan sheshimine iye, yaǵnıy $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ lerdiń hámmesi bir waqıtta 0 ge teń bola almaydı.

Endi (1.2.3) teńlemeler sistemasındaǵı hár bir teńlemenı sáykes λ_i ge kóbeytip, nátiyjeni barlıq i ($i = 1, 2, \dots, n$) ler boyınsha qosıp,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

teńligin payda etemiz. Bunnan, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ teńligi $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ lerden bazıbir nolden ózgeshe bolǵanda orınly degen nátiyje shıǵadı, yaǵnıy $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli.

Trigonometriyalıq funkciyalar sisteması

1.2.1-tastıyqlaw.

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.2.4)$$

trigonometriyalıq funkciyalar sisteması $L_2[-\pi, \pi]$ keńisliginde ortogonal sistema boladı.

Trigonometriyalıq funkciyalar ushın

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= 0, \quad n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0, \quad n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

teńlikleriniń orınly bolıwın bundaǵı integrallardı tuwrıdan-tuwrı esaplaw nátiyjesinde tekseriw qıyın emes. Nátiyjede (1.2.4) trigonometriyalıq funkciyalar sisteması ortogonal degen juwmaqqa kelemiz.

Endi $L_2[-\pi, \pi]$ keńisliginiń norma anıqlaw formulasınan paydalanıp, $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ hám (1.2.5) formulalardan $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \dots$ teńliklerine iye bolamız. Onda (1.2.4) trigonometriyalıq funkciyalardıń ortogonal sistemasına sáykes keliwshi ortonormal sisteması

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

kóriniste jazıladı.

Ortogonallastırıw

Meyli E Gilbertaldı keńisligi bolsın.

E keńisliginde $\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ elementlerdiń sanaqlı sisteması berilgen hám bul sistema sıızıqlı ǵárezli emes sistema bolsın. Shekli sandaǵı sıızıqlı kombinacijalardı ámelge asırıw nátiyjesinde $\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ sistemasınan ortogonal sistema ajıratıp alıw máselesin qaraştıramız. Qoyılǵan máseleniń sheshimi tómendegi teoremda keltirilgen.

1.2.1-teorema. Meyli

$$\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2.6)$$

elementler sisteması E keńisliginiń sıızıqlı ǵárezli emes elementleri sisteması bolsın. Onda, E keńisligi elementleriniń sonday $y_n, n = 1, 2, \dots$ ortogonal sisteması bar bolıp, bul sistemanıń hár bir elementi (1.2.6) sistemanıń dáslepki n dana elementleriniń sıızıqlı kombinaciyası boladı, yaǵnıy y_n sanı ushın

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n}x_n \quad (1.2.7)$$

teńligi orınlı boladı.

(1.2.7) kórinistegi $\{y_n\}$ ortogonal sistemasın dúziw processine $\{x_n\}$ sistemasın **ortogonallastırıw processı** delinedi.

Dálillew. $y_1 = x_1$ dep alamız. (1.2.6) sistema sıızıqlı ǵárezli emes elementler sisteması bolǵanlıǵı ushın $y_1 \neq 0$ boladı.

Meyli, (1.2.7) shártin qanaatlandıırıwshı óz-ara ortogonal bolǵan $y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots, k, k \geq 1$ elementleri bar bolsın. Onda barlıq $y_1, \dots, y_k$ elementlerine ortogonal bolǵan y_{k+1} elementti

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \beta_{k+1,2}y_2 + \dots + \beta_{k+1,n}y_n - x_{k+1} \quad (1.2.8)$$

kórinisinde izleyviz. Sonda ortogonallıq shártinen,

$$(y_1, y_{k+1}) = \dots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \quad (1.2.9)$$

teńlikleriniń orınlanıwı tiyis. (1.2.8) hám (1.2.9) teńliklerden paydalanıp,

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \dots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}) \quad (1.2.10)$$

teńlemeler sistemasına iye bolamız. (1.2.10) teńlemeler sistemasınan $\beta_{k+1,i}, i = 1, 2, \dots, k$ koefficientleri bir mánisli tabıladı.

Endi tabılğan koefficientlerdi (1.2.8) formuladağı sáykes ornına qoyıp, nátiyjede $y_1, \dots, y_k$ elementlerin (1.2.7) kórinisindegi sáykes ańlatpaları menen almastırıp, bir qansha apiwayılastırǵannan keyin

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1} \quad (1.2.11)$$

teńligine iye bolamız. Bunda $y_{k+1} \neq 0$ boladı, sebebi keri jaǵdayda $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli bolǵan bolar edi.

Fure qatarları hám olardıń qásiyetleri

Meyli E Gilbertaldı keńisligi bolsın. E keńisliginen n dana sıızıqlı ǵárezli bolmaǵan $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasın hám tayınlangan (fiksirlengen) $y \in R$ vektorın alamız.

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n \quad (1.2.12)$$

túrindegi múmkin bolǵan sıızıqlı kombinaciyalar kópliginen ,

$$\|y - (a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n)\| \quad (1.2.13)$$

ańlatpa minimum mánisine iye bolatuǵın sıızıqlı kombinacıyanı ajıratıp alıw máselesin qarastıramız. Bul másele argumentleri $a_1, \dots, a_n$ bolǵan

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \left(y - \sum_{k=1}^n a_k e_k, y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right) \quad (1.2.14)$$

funkciyasınıń minimumın tabıw máselesine teń kúshli.

Eger E keńisligi n -ólshemli keńislik hám $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorları bul keńisliktiń bazis vektorları bolsa, onda (1.2.12) sıızıqlı kombinacıyasınıń $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ koefficientlerin sonday saylap alıw múmkin, nátiyjede

$$y = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n \quad (1.2.15)$$

teńligi orınlı boladı hám bul jaǵdayda (1.2.13) ańlatpa 0 ge aylanadı.

Eger E keńisliginiń ólshemi shekli bolmasa yamasa shekli bolıp, biraq n nen úlken bolsa, onda ulıwma jaǵdayda (1.2.15) teńligi orınlı bolatuǵınday etip (1.2.12) sıızıqlı kombinaciyasınıń $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ koefficientlerin tańlaw múmkin emes. Bul jaǵdayda (1.2.13) ańlatpası minimal mánisine erisetuǵın (1.2.12) sıızıqlı kombinaciyasın tabıw máselesine iye bolamız.

Zárúr bolsa joqarıda keltirilgen ortogonallastırıw procesin paydalanıp, $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasınıń nolden ózgeshe bolǵan vektorlardan dúzilgen vektorlardıń ortogonal sisteması menen almasıw múmkin. Sol sebepli

$$e_k \neq 0, (e_k, e_j) = 0, k \neq j, k, j = \overline{1, n}$$

ortogonallıq shárti orınlanǵan dep esaplaymız. Bul ortogonallıq shártinen paydalanıp (1.2.14) funkciyanı

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 &= (y, y) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j (e_k, e_j) - 2 \sum_{k=1}^n a_k (y, e_k) = \\ &= \|y\|^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k (y, e_k) = \|y\|^2 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2} \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

kórinisinde jazıw mumkin. Onda,

$$a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2} = 0, \quad \text{yaǵnıy} \quad a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \quad (1.2.17)$$

bolsa, (1.2.13) ańlatpası minimum mánisine iye bolıwın kóremiz.

1.2.4-anıqlama. (1.2.16) formula járdeminde anıqlanǵan $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ sanlarına $y \in E$ elementiniń $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sisteması boyınsha **Fure koefficientleri** delinedi.

Eger $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sisteması ortonormal bolsa, onda (1.2.16) formula

$$a_k = (y, e_k) \quad (1.2.18)$$

kórinisinde jazıladı.

Eger (1.2.16) ańlatpadaǵı $a_1, a_2, \dots, a_n$ lerdi (1.2.17) formulaǵa sáykes Fure koefficientleri menen almasırsaq, onda

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \geq 0 \quad (1.2.19)$$

teńsizligine iye bolamız. Bul teńsizlikten

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|y\|^2 \quad (1.2.20)$$

teńsizligi kelip shıǵadı.

Solay etip tómendegi teorema dálillenedi.

1.2.2-teorema. Meyli $\{e_k, e_k \neq 0, k = \overline{1, n}\}$ sistema E Gilbertaldı keńisliginiń

ortogonal vektorları sisteması bolsın. Onda $y \in E$ vektorı ushın $\sum_{k=1}^n a_k e_k$ sıızıqlı

kombinaciyası koefficientleri retinde Fure koefficientleri alıńanda, yaǵnıy $\alpha_k = a_k, k = 1, 2, \dots, n$ teńlikleri orınlı bolǵanda, bul sıızıqlı kombinaciya y vektorınıń eń jaqın juwıqlasıwın beredi. Bunda,

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \geq 0$$

qatnası orınlı boladı.

Endi E keńisliginiń

$$\{e_k, e_k \neq 0, k = \overline{1, n}\} \quad (1.2.21)$$

túrindegi elementlerdiń ortogonal sisteması berilgen bolsın. Bul jaǵdayda da $y \in E$ elementiniń (1.2.21) ortogonal sistema boyınsha Fure koefficientleri (1.2.17) formula járdeminde anıqlanadı.

1.2.5-anıqlama. $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ sanları $y \in E$ elementtiń (1.2.21) elementler sisteması boyınsha (1.2.17) formula járdeminde anıqlanǵan Fure koefficientleri bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad (1.2.22)$$

qatarına $y \in E$ elementtiń (1.2.21) elementler sisteması boyınsha Fure qatarı delinedi. Bul fakt

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

túrinde jazıladı.

1.2.6-anıqlama.

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

teńligi járdeminde anıqlanatuǵın $E_n(y)$ sanına $y \in E$ elementiniń $\sum_{k=1}^n a_k e_k$ (n-fiksirlengen) túrindegi sıızıqlı kombinaciyalar boyınsha eń jaqsı juwıqlasıwı delinedi. Bul infimum $\sum_{k=1}^n a_k e_k$ túrindegi sıızıqlı kombinaciyalardıń múmkin bolǵan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ coefficientleri boyınsha alıńǵan.

Bul anıqlamadan

$$E_{n+1}(y) \leq E_n(y) \quad (1.2.23)$$

teńligi orınlı ekenligin kóremiz.

1.2.2-teoremada

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2} \quad (1.2.24)$$

qatnası orınlı ekenligi kelip shıǵadı. Bunda $a_k = \frac{(y, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$

Kelip shıqqan tastıyıqlawdı 1.2.2-teoremanıń saldarı retinde keltiremiz.

1.2.1-saldar. $y \in E$ elementine sáykes keliwshi Fure qatarınıń $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ dara qosındısı $y \in E$ elementiniń $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ túrindegi múmkin bolǵan sıızıqlı kombinaciyalar boyınsha eń jaqsı juwıqlasıwın beredi.

1.2.2-saldar.

$$\|y - S_{n+1}\| \leq \|y - S_n\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.25)$$

teńsizligi orınlı.

(1.2.25) teńsizligi (1.2.23) hám (1.2.24) qatnaslarınan tuwrıdan-tuwrı kelip shıǵadı.

1.2.3-saldar. $y \in E$ elementiniń a_n , $n = 1, 2, \dots$ Fure koefficientleri ushın,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leq \|y\|^2 \quad (1.2.26)$$

Bessel teńsizligi orınlı.

Bessel teńsizligi (1.2.20) teńsizliginen $n \rightarrow \infty$ te kelip shıǵadı.

1.2.4-saldar. Eger $c > 0$ turaqlısı bar bolıp, $\|e_k\| \geq c$, $k = 1, 2, \dots$ teńsizligi orınlı bolsa, onda Fure koefficientleri $k \rightarrow \infty$ te nolge umtıladı, yaǵnıy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad (1.2.27)$$

1.2.7-anıqlama. E metrikalıq keńislik bolıp, bul keńislikte elementleriniń hár bir fundamental izbe-izligi jıynaqlı bolsa, onda E keńisligine tolıq metrikalıq keńislik delinedi.

1.2.8-anıqlama. Skalyar kóbeyme kiritilgen hár bir tolıq sıızıqlı keńislikke Gilbert keńisligi delinedi.

Endi Fure qatarınıń jıynaqlı bolıwı haqqındaǵı máseleni qarastıramız.

1.2.3-teorema. Eger E -Gilbert keńisligi bolsa, onda $y \in E$ elementiniń (1.2.21) sistema túrindegi elementlerdiń qálegen ortogonal sistema boyınsha Fure qatarı jıynaqlı boladı hám eger

$$y_0 = \sum_{k=1}^n a_k e_k \quad (1.2.28)$$

teńligi orınly bolsa, onda $y - y_0$ element (1.2.21) sistemanıń hár bir elementine ortogonal boladı.

Dálillew. Meyli $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ $n = 1, 2, \dots$ izbe-izligi $y \in E$ elementiniń (1.2.21)

ortogonal elementar sisteması boyınsha (1.2.22) Fure qatarınıń dara qosındıları izbe-izligi bolsın. Onda

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 \quad (1.2.29)$$

boladı. Bunda, $n = 1, 2, \dots$ $p \in N$. (1.2.26) Bessel teńsizliginen, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$

qatarınıń jıynaqlı bolıwı málim. Onda bul qatar ushın sanlı qatarlardıń jıynaqlı bolıwı haqqındaǵı Koshi kriteriyi orınlangan. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $n_\varepsilon \in N$ nomeri tabıladı da $\forall n \geq n_\varepsilon$ nomerlerinde hám $p \in N$ sanında

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2$$

teńsizlik orınlanadı. Sonlıqtan (1.2.29) teńligin esapqa alıp, $\forall n \geq n_\varepsilon$ nomerlerinde hám $p \in N$ sanı ushın $\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$ teńsizligin jazıw múmkin, yaǵnıy $\{S_n\}$ izbe-izligi E keńislikte fundamental izbe-izlik boladı. E tolıq bolǵanlıǵı ushın $\{S_n\}$ jıynaqlı.

Meyli, $\{S_n\}$ izbe-izligi E keńisliginiń y_0 elementine jıynaqlı bolsın. Onda (1.2.28) hám (1.2.17) formulalardan paydalanıp,

$$\begin{aligned} (y - y_0, e_k) &= (y, e_k) - (y_0, e_k) = (y, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n, e_k) = \\ (y, e_k) - a_k \|e_k\|^2 &= (y, e_k) - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \|e_k\|^2 = (y, e_k) - (y, e_k) = 0 \end{aligned}$$

teńligi $\forall k \in N$ sanında orınly bolıwın kóremiz, yaǵnıy $y - y_0$ elementi (1.2.21) sistemanıń hár bir aǵzasına ortogonal.

Tolıq ortogonal sistemalar hám olardıń Fure qatarı menen baylanısı

Meyli $e_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$ elementler sisteması berilgen bolsın. Bul elementler sistemasınıń shekli sandaǵı aǵzalarınıń sıızıqlı kombinaciyaları kópligi E keńisliginde tıǵız bolsa, yaǵnıy hár bir $x \in E$ elementi hám $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $n = n(\varepsilon, x)$ nomeri hám $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanları tabılıp,

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon \quad (1.2.30)$$

teńsizligi orınlı bolsa, onda berilgen elementler sistemasına E keńisligi elementleriniń tolıq sisteması delinedi.

1.2.4-teorema. E Gilbertaldı keńisligindegi (1.2.21) elementlerdiń ortogonal sistemasınıń usı keńisliktiń elementleriniń tolıq sisteması bolıwı ushın, $y \in E$ elementiniń Fure qatarı usı elementtiń ózine jıynaqlı bolıwı, yaǵnıy

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad (1.2.31)$$

bunda $a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|}$, $k = 1, 2, \dots$ yamasa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| = 0 \quad (1.2.32)$$

teńliginiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli boladı.

Dálillew.

Jetkilikliligi. Meyli (1.2.32) teńligi orınlı bolsın. Onda $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın (1.2.31)

Fure qatarınıń sonday $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ dara qosındısı tabıladı da, $\|y - S_n\| < \varepsilon$ teńsizligi yaǵnıy (1.2.30) shárti orınlı boladı.

Zárúrliligi. Meyli (1.2.30) shárti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanlarında orınlı bolsın, onda 1.2.2-teoremadan bul shárt $\lambda_1 = a_1, \dots, \lambda_n = a_n$ bolǵan jaǵdayda orınlanadı, yaǵnıy tayınlangan $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın (1.2.33) teńsizligi bazıbir n hám $\forall m > n$ natural sanlarında orınlı boladı. Bul (1.2.32) shárttıń orınlı bolıwına teń kúshli.

1.2.5-teorema. Gilbertaldı keńisligine tiyisli y elementiniń (1.2.22) Fure qatarı ózine jıynaqlı bolıwı ushın,

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$$

Parseval teńliginiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli. Bunda a_k , $k = 1, 2, \dots$ sanları $y \in E$ elementiniń (1.2.21) elementlerdiń ortogonal sisteması boyınsha Fure koefficientleri.

Zárúrliligi. Meyli y elementiniń (1.2.22) Fure qatarı usı elementtiń ózine

jıynaqlı bolsın, yaǵnıy $y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ dep jazıw múmkin. Bul teńlikten,

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right\|^2 &= \left(y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2} = \\ &= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 = 0 \end{aligned}$$

bolıwın kóremiz. Bunnan $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$ Parseval teńligine iye bolamız.

Jetkilikliligi. Meyli Parseval teńligi orınlı bolsın. (1.2.19) teńlikke sáykes

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2$$

teńligi orınlı edi. Bul teńlikte $n \rightarrow \infty$ te shekke ótsek, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \right) = 0 \quad (1.2.35)$$

yaǵnıy

$$\|y\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \quad (1.2.36)$$

shártleriniń teń kúshli ekenligin kóremiz.

1.2.5-saldar. E Gilbertaldı keńisligindegi (1.2.21) elementlerdiń ortogonal sisteması usı keńislikte tolıq bolıwı ushın Parseval teńliginiń $y \in E$ elementi ushın orınlanıwı zárúr hám jetkilikli.

1.2.6-teorema. E Gilbertaldı keńisligin (1.2.21) elementlerdiń ortogonal sisteması usı keńislikte tolıq sistema bolsa hám $y \in E$ elementininiń (1.2.21) elementler sisteması boyınsha har bir Fure koeficienti 0 ge teń bolsa, onda $y = 0$ teńligi orınlı boladı.

Dálillew. Shártke muwapıq $a_k = 0$. Onda (1.2.34) Parseval teńliginen $\|y\| = 0$ boladı. Onda $y = 0$.

1.2.6-saldar. Eger $y_1 \in E$ hám $y_2 \in E$ elementleriniń (1.2.21) elementlerdiń tolıq ortogonal sisteması boyınsha Fure koeficientleri óz-ara teń bolsa, onda $y_1 = y_2$ boladı.

Dálillew. y_1 hám y_2 elementlerdiń Fure koeficientleri ushın

$$\frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı boladı. Onda $y = y_1 - y_2$ elementiniń barlıq Fure koeficientleri ushın

$$\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1 - y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} - \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı bolǵanlıǵı ushın 1.2.6-teoremadan $y = 0$ yaǵnıy $y_1 = y_2$ boladı.

II bap

§2.1.Lavrentev-Bicadze teńlemesi ushın shegaralıq másele

Máseleniń qoyılıwı

$$D = \{ (x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta \}$$

tuwrımúyeshlik oblastında

$$Lu(x, y) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \quad (2.1.1)$$

teńlemesin qarastıramız. Bunda α, β – berilgen oń sanlar.

Meyli

$$D_+ = D \cap \{y > 0\} \quad D_- = D \cap \{y < 0\}$$

bolsın. Tómendegi máseleni qarastıramız. D oblastında tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $u(x, y)$ funkciyanı tabın’.

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cup C^2(D_+ \cup D_-) \quad (2.1.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_- \quad (2.1.3)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta \quad (2.1.4)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.5)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.6)$$

bunda $\varphi(x), \psi(x)$ - tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı berilgen sıypaq funkciyalar.

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$$

Máseleniń dara sheshimi dúziw

(2.1.1) teńlemenin D oblastında nollik emes dara sheshimlerin (2.1.4) shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı kóbeyme

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.1.7)$$

kórinisinde izleyviz.

$$u_{xx}(x, y) = X''(x)Y(y)$$

$$u_{yy}(x, y) = X(x)Y''(y)$$

Tabılǵanlardı (2.1.1) teńlemege qoysaq

$$X''(x)Y(y) + \operatorname{sgn} y \cdot X(x)Y''(y) = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Teńlemenin eki tárepin $X(x)Y(y)$ kóbeymege bólemiz hám

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \operatorname{sgn} y \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

yamasa

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\operatorname{sgn} y \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

teńliklerine iye bolamız. Bul teńliklerdin mánisin $-\lambda$ ǵa teńlestireviz

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\operatorname{sgn} y \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \quad (2.1.8)$$

(2.1.8) teńlikte λ parametr spektral parametr dep ataladı.

(2.1.8) teńlikten tómendegi teńlemelerge kelemiz

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.9)$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta) \quad (2.1.10)$$

(2.1.4) shegaralıq shártlerden

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta$$

$$u(1, y) = X(1)Y(y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta$$

teńliklerine iye bolamız. Bunda $Y(y) \neq 0, y \in [-\alpha, \beta]$ bolǵanı ushın $X(0) = X(1) = 0$ boladı.

Demek, $X(x)$ funkciyası

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.9)$$

$$X(0) = X(1) = 0 \quad (2.1.11)$$

Túrindegi Shturm-Luivill máselesiniń sheshimi boladı. (2.1.9) teńlemenin sheshimin $X(x) = e^{kx}$ túrinde izleybiz. Sonda

$X''(x) = k^2 e^{kx}$ boladı. Onda (2.1.9) teńlemeden

$k^2 e^{kx} + \lambda e^{kx} = 0 \Rightarrow (k^2 + \lambda) e^{kx} = 0$ teńlemesine kelemiz. Bunda $e^{kx} \neq 0$ bolǵanı ushın

$$k^2 + \lambda = 0 \quad (2.1.12)$$

teńlemege iye bolamız. (2.1.12) teńlemesinen $k_1 = i\sqrt{\lambda}, k_2 = -i\sqrt{\lambda}$ korenlerdi tabamız. Onda (2.1.9) teńlemenin dara sheshimleri $X_1(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x}, X_2(x) = e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ kórinisinde boladı. Bular Eyler formulası boyınsha

$$X_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + i \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X_2(x) = \cos \sqrt{\lambda} x - i \sin \sqrt{\lambda} x$$

kórinisinde jazıw múmkin. Bunnan $X_{10}(x) = \cos \sqrt{\lambda} x, X_{20}(x) = \sin \sqrt{\lambda} x$ (2.1.9) teńlemenin dara sheshimi boladı. Demek,

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

(2.1.9) teńlemenin ulıwma sheshimi boladı, bunda C_1, C_2 -erikli turaqlılar.

(2.1.11) shegaralıq shártlerden

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0$$

$$X(1) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \cdot 1 + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0$$

yamasa

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (2.1.13)$$

C_1, C_2 erikli turaqlılırga baylanıslı algebralıq teńlemelerdiń sıızıqlı bir tekli sistemasına iye bolamız. Sistemanıń 1-teńlemesinen $C_1 = 0, C_2 \in \Re$ kelip shıǵadı. Eger $C_2 = 0$ dep alsaq, (2.1.9) teńlemenıń $X = 0$ trivial sheshimine iye bolamız. Sonlıqtan $C_2 \neq 0$. Demek, (2.1.13) sistemanıń 2-teńlemesi

$$0 \cdot \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

yaǵnıy $C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0$ túrine keledi. Bunnan $\sqrt{\lambda} = \pi k, k \in \mathbb{N}$ boladı. Hár bir $k \in \mathbb{N}$ ǵa sáykes keliwshi sheshimdi $\mu_k = \sqrt{\lambda_k} = \pi k$ kórinisinde belgilep (2.1.9), (2.1.11) shegaralıq máselesiniń sheshimi

$X_k(x) = C_2 \sin \mu_k x$ kóriniste boladı. Demek, (2.1.9), (2.1.11) shegaralıq máseleniń menshikli mánisleri $\lambda_k = \mu_k^2, k \in \mathbb{N}$, al bul menshikli mánislerge sáykes keliwshi menshikli funkciyaları

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \mu_k x, k \in \mathbb{N} \quad (2.1.14)$$

túrinde jazamız. Endi (2.1.10) teńlemesiniń $\lambda_k = \mu_k^2, k \in \mathbb{N}$ menshikli mánislerine sáykes keliwshi sheshimlerin tabamız.

a) Meyli $y \in (0, \beta)$ bolsın. Sonda teńleme $Y_k'' - \lambda_k Y_k = 0$ yamasa $Y_k'' - \mu_k^2 Y_k = 0$ kóriniske keledi. Sheshimdi $Y_k(y) = e^{ny}$ kórinisinde izleyemiz.

$$Y_k'' = n^2 e^{ny}$$

$$n^2 e^{ny} - \mu_k^2 e^{ny} = 0$$

$$(n^2 - \mu_k^2) e^{ny} = 0$$

$e^{ny} \neq 0$ bolǵanlıqtan $n^2 - \mu_k^2 = 0$ bunnan $(n - \mu_k)(n + \mu_k) = 0$

$n_1 = \mu_k, n_2 = -\mu_k, k = 1, 2, \dots$ sheshimlerinden

$$Y_{1k}(y) = e^{\mu_k y}, \quad Y_{2k}(y) = e^{-\mu_k y}$$

funkciyalarına iye bolamız. Usı funkciyalar tiykarında (2.1.10) teńlemenin $y > 0$ mánislerindegi ulıwma sheshimi

$$Y_k(y) = a_k e^{\mu_k y} + b_k e^{-\mu_k y}, \quad k = 1, 2, \dots$$

túrinde jazıladı. Bunda a_k hám b_k lar erikli turaqlılar.

a) Meyli $y \in (-\alpha, 0)$ bolsın. Onda (2.1.10) teńleme

$$-Y_k'' - \lambda_k Y_k = 0 \quad \text{yamasa} \quad Y_k'' + \lambda_k Y_k = 0$$

kóriniske keledi. Bul teńleme $\lambda_k = \mu_k^2, k \in \mathbb{N}$ boyınsha

$$Y_k'' + \mu_k^2 Y_k = 0$$

túrge keledi. Sheshimdi $Y_k(y) = e^{ny}$ kórinisinde izleyemiz.

$$Y_k'' = n^2 e^{ny}$$

$$n^2 e^{ny} + \mu_k^2 e^{ny} = 0$$

$$(n^2 + \mu_k^2) e^{ny} = 0$$

$e^{ny} \neq 0$ bolǵanlıqtan $n^2 + \mu_k^2 = 0$ bunnan

$$n_1 = i\mu_k, n_2 = -i\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

sheshimlerin

$$Y_{1k}(y) = e^{i\mu_k y}, \quad Y_{2k}(y) = e^{-i\mu_k y}$$

funkciyalarına iye bolamız. Usı funkciyalar tiykarında (2.1.10) teńlemenıń sheshimleriniń fundamental sisteması

$Y_{1k} = \sin \mu_k y$, $Y_{2k} = \cos \mu_k y$ túrdegi eki funkciyadan ibarat boladı. Onda (2.1.10) teńlemenıń $y < 0$ mánislerindegi ulıwma sheshimi

$$Y_k(y) = c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y, \quad k = 1, 2, \dots$$

túrinde jazıladı. Bunda c_k hám d_k lar erikli turaqlılar.

Solay etip, (2.1.10) teńlemesiniń ulıwma sheshimin

$$Y_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\mu_k y} + b_k e^{-\mu_k y}, & y > 0 \\ c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y, & y < 0 \end{cases} \quad (2.1.15)$$

túrinde jazıw múmkin. Bunda a_k, b_k, c_k, d_k - erikli turaqlılar,

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(2.1.10) teńlemesiniń (2.1.15) ulıwma sheshimindegi $y > 0$ jaǵdayındaǵı a_k, b_k - erikli turaqlıları menen $y < 0$ jaǵdayındaǵı c_k, d_k - erikli turaqlıları arasındaǵı baylanıstı tabıw ushın

$U(x, y) = X(x)Y(y) \in C^1(\overline{D}) \cup C^2(D_+ \cup D_-)$ shártinen paydalanıladı. Sonda

$$Y_k(0+0) = Y_k(0-0) \quad \text{hám} \quad Y'_k(0+0) = Y'_k(0-0)$$

teńlikleri kelip shıǵadı. Usı teńliklerden hám (2.1.15) ulıwma sheshimnen paydalanıp

$$Y_k(0-0) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y) = c_k \cos(\mu_k \cdot 0) + d_k \sin(\mu_k \cdot 0) = c_k$$

$$Y_k(0+0) = \lim_{y \rightarrow 0+0} (a_k e^{\mu_k y} + b_k e^{-\mu_k y}) = a_k e^{\mu_k \cdot 0} + b_k e^{\mu_k \cdot 0} = a_k + b_k$$

$$Y'_k(0-0) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-c_k \mu_k \sin \mu_k y + d_k \mu_k \cos \mu_k y) = -c_k \mu_k \sin(\mu_k \cdot 0) + d_k \mu_k \cos(\mu_k \cdot 0) = d_k \mu_k$$

$$Y'_k(0+0) = \lim_{y \rightarrow 0+0} (a_k \mu_k e^{\mu_k y} - b_k \mu_k e^{-\mu_k y}) = a_k \mu_k e^{\mu_k \cdot 0} - b_k \mu_k e^{\mu_k \cdot 0} = a_k \mu_k - b_k \mu_k$$

bolǵanı ushın

$$\begin{cases} a_k + b_k = c_k \\ a_k \mu_k - b_k \mu_k = d_k \mu_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k + b_k = c_k \\ a_k - b_k = d_k \end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bul sistemanı a_k hám b_k ǵa qarata sheshemiz. Sonda

$$a_k = \frac{c_k + d_k}{2}, b_k = \frac{c_k - d_k}{2} \quad (2.1.16)$$

ǵa iye bolamız. Sonda (2.1.15) sheshim

$$Y_k(y) = \begin{cases} \frac{c_k + d_k}{2} e^{\mu_k y} + \frac{c_k - d_k}{2} e^{-\mu_k y}, & y > 0 \\ c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y, & y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_k \frac{e^{\mu_k y} + e^{-\mu_k y}}{2} + d_k \frac{e^{\mu_k y} - e^{-\mu_k y}}{2}, & y > 0 \\ c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y, & y < 0 \end{cases}$$

kóriniske keledi.

$$\frac{e^{\mu_k y} + e^{-\mu_k y}}{2} = ch \mu_k y$$

$$\frac{e^{\mu_k y} - e^{-\mu_k y}}{2} = sh \mu_k y$$

teńliklerinen

$$Y_k(y) = \begin{cases} c_k ch \mu_k y + d_k sh \mu_k y, & y > 0 \\ c_k \cos \mu_k y + d_k \sin \mu_k y, & y < 0 \end{cases}$$

ǵa iye bolamız.

$c_k = a_k$, $d_k = b_k$ dep alsaq, sheshim

$$Y_k(y) = \begin{cases} a_k ch \mu_k y + b_k sh \mu_k y, & y > 0 \\ a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y, & y < 0 \end{cases} \quad (2.1.17)$$

kórinisinde boladı.

(2.1.9), (2.1.11) shegaralıq máseleniń (2.1.14) sheshimin hám (2.1.10) teńlemenin (2.1.17) sheshimin birlestirip, (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń

$$U_k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{2}(a_k ch \mu_k y + b_k sh \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ \sqrt{2}(a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

sheshimine iye bolamiz. Bunda $k = 1, 2, \dots$

(2.1.1) teńleme sıızıqlı teńleme bolǵanlıqtan bul sheshimlerdiń qosındısı da onıń sheshimi boladı, yaǵnıy

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

funkciyası (2.1.1) teńlemenıń formal sheshimi boladı.

§2.2. Máseleniń sheshimniń birden-birligi

Meyli (2.1.1)-(2.1.6) máseleniń sheshimi - $u(x, y)$ bolsın. Tómenдеgi funkciyanı qaraştıramız.

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \mu_k x dx, k = 1, 2, \dots \quad (2.2.1.)$$

(2.2.1) differencial teńlikti (2.1.1) teńlemege hám (2.2.4) shegaralıq shártlerge qoysaq

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_k''(y) - \mu_k^2 u_k(y) = 0$$

ğa iye bolamız. Alınған teńleme $\lambda = \lambda_k$ bolғanda (2.1.10) teńlemesi menen birdey. Bunnan $u_k(y) = Y_k(y)$ ekeni kelip shıǵadı hám $u_k(y)$ (2.1.17) formula menen ańlatıladı. (2.1.5) hám (2.1.6) shegaralıq shártlerden hám (2.2.1) formulasınan

$$u_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, \beta) \sin \lambda_k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx = \varphi_k \quad (2.2.2)$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, -\alpha) \sin \lambda_k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx = \psi_k \quad (2.2.3)$$

(2.1.17), (2.2.2) hám (2.2.3) lerdiń tiykarında, a_k hám b_k ға qarata tómendegi sistemaǵa iye bolamız.

$$\begin{cases} a_k \operatorname{ch} \mu_k \beta + b_k \operatorname{sh} \mu_k \beta = \varphi_k \\ a_k \cos \mu_k \alpha - b_k \sin \mu_k \alpha = \psi_k \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Eger (2.2.4) sistemanıń determinant $\forall k \in \mathbb{N}$ da

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \cos \mu_k \alpha \cdot \operatorname{sh} \mu_k \beta + \sin \mu_k \alpha \cdot \operatorname{ch} \mu_k \beta \neq 0 \quad (2.2.5)$$

bolsa, onda berilgen sistema jalǵız sheshimge iye boladı. Demek,

$$a_k = \frac{\varphi_k \sin \mu_k \alpha + \psi_k \operatorname{sh} \mu_k \beta}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}$$

$$b_k = \frac{\varphi_k \cos \mu_k \alpha - \psi_k \operatorname{ch} \mu_k \beta}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}$$

Sonda, bul tabılǵanlardan $u_k(y)$ funkciyası

$$u_k(y) = \begin{cases} \varphi_k \frac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \psi_k \frac{sh \mu_k(\beta - y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, y > 0 \\ \varphi_k \frac{\sin \mu_k(y + \alpha)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \psi_k \frac{\Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, y < 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

bunda

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha y}(k) &= \cos \mu_k \alpha \cdot sh \mu_k y + \sin \mu_k \alpha \cdot ch \mu_k y \\ \Delta_{-y\beta}(k) &= \cos \mu_k y \cdot sh \mu_k \beta - \sin \mu_k y \cdot ch \mu_k \beta \end{aligned}$$

Meyli, $[0,1]$ kesindide $\varphi(x) \equiv 0$ hám $\psi(x) \equiv 0$ birdeylikleri orınlı bolsın. Onda (2.2.2), (2.2.3) hám (2.2.6) teńlikleri tiykarında $[-\alpha, \beta]$ kesindide $u_k(y) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots$ yaǵnıy

$$\varphi_k = u_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx = 0$$

$$\psi_k = u_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx = 0$$

$$\text{hám } u_k(y) = \begin{cases} 0 \cdot \frac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + 0 \cdot \frac{sh \mu_k(\beta - y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, y > 0 \\ 0 \cdot \frac{\sin \mu_k(y + \alpha)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + 0 \cdot \frac{\Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, y < 0 \end{cases} \Rightarrow u_k(y) = 0$$

Demek, (2.2.1) nen $\int_0^1 u(x, y) \sin \mu_k x dx = 0$, $k = 1, 2, \dots$ $L_2[0,1]$ keńisligindegi

$\{\sqrt{2} \sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ sinuslar sistemasınıń tolıqlılıǵınan $\forall y \in [-\alpha, \beta]$ ushın $[0,1]$ kesindisinen $u(x, y) = 0$ ekeni kelip shıǵadı. (2.2.2) den $u(x, y)$ funkciyası $\bar{D}$ da úzliksiz bolǵanlıqtan, $\bar{D}$ da $u(x, y) = 0$ ekeni kelip shıǵadı. Meyli, bazıbir α, β hám $k = k_0 \in \mathbb{N}$ bolǵanda $\Delta_{k_0}(\alpha, \beta) = 0$ bolsın. Sonda (2.1.1)-(2.1.6) bir tekli máselesi $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ bolǵanda trivial emes sheshimge iye boladı. $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ hám $k = k_0$ bolǵanda (2.2.4) sistemada

$$\begin{cases} a_{k_0} \operatorname{ch} \mu_{k_0} \beta + b_{k_0} \operatorname{sh} \mu_{k_0} \beta = 0 \\ a_{k_0} \cos \mu_{k_0} \alpha - b_{k_0} \sin \mu_{k_0} \alpha = 0 \end{cases}$$

1- hám 2-teńlemeler bir-biri menen sıızılıqǵı ǵárezli boladı. Teńlemelerdiń ekinshisin saylap alayıq. Bunnan

$$a_{k_0} = b_{k_0} \frac{\sin \mu_{k_0} \alpha}{\cos \mu_{k_0} \alpha}$$

ekeni málim. Bunı (2.1.17) sine qoysaq,

$$Y_{k_0}(y) = \begin{cases} \frac{b_{k_0} \sin \mu_{k_0} \alpha \cdot \operatorname{ch} \mu_{k_0} y + b_{k_0} \operatorname{sh} \mu_{k_0} y \cdot \cos \mu_{k_0} \alpha}{\cos \mu_{k_0} \alpha}, y > 0 \\ \frac{b_{k_0} \sin \mu_{k_0} \alpha \cdot \cos \mu_{k_0} y + b_{k_0} \sin \mu_{k_0} y \cdot \cos \mu_{k_0} \alpha}{\cos \mu_{k_0} \alpha}, y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{k_0} \frac{\Delta_{\alpha y}(k_0)}{\cos \mu_{k_0} \alpha}, y > 0 \\ b_{k_0} \frac{\sin \mu_{k_0}(\alpha + y)}{\cos \mu_{k_0} \alpha}, y < 0 \end{cases}$$

ıye bolamız. Bunda $b_{k_0} = \cos \mu_{k_0} \alpha$ dep alsaq,

$$Y_{k_0}(y) = \begin{cases} \Delta_{\alpha y}(k_0), y > 0 \\ \sin \mu_{k_0}(\alpha + y), y < 0 \end{cases}$$

kelemiz.

Bunnan sheshim

$$U_{k_0}(x, y) = \begin{cases} \Delta_{\alpha y}(k_0) \sin \mu_{k_0} x, & y > 0 \\ \sin \mu_{k_0}(\alpha + y) \cdot \sin \mu_{k_0} x, & y < 0 \end{cases}$$

kóriniske keledi.

Endi $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ ańlatpasınıń nolleri qanday degen soraw tuwıladı. (2.2.5)in túrlendireyik:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k \beta \cdot \cos \mu_k \alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k + \operatorname{ch}^2 \mu_k}} + \frac{\operatorname{ch} \mu_k \beta \cdot \sin \mu_k \alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k + \operatorname{ch}^2 \mu_k}} \right) \cdot \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k + \operatorname{ch}^2 \mu_k}$$

Bunda

$$\sin \theta_k = \frac{\operatorname{sh} \mu_k \beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta}}$$

$$\cos \theta_k = \frac{\operatorname{ch} \mu_k \beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta}}$$

belgilewlerin kiritsek

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(k) &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta} [\sin \theta_k \cdot \cos \mu_k \alpha + \cos \theta_k \cdot \sin \mu_k \alpha] = \\ &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta} \cdot \sin(\mu_k \alpha + \theta_k) \end{aligned}$$

hám $\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta = \operatorname{ch} 2\mu_k \beta$ birdeyliginen

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\mu_k \beta} \cdot \sin(\mu_k \alpha + \theta_k) \quad (2.2.7)$$

bunda

$$\theta_k = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \mu_k \beta}{\operatorname{sh}^2 \mu_k \beta + \operatorname{ch}^2 \mu_k \beta} \quad (2.2.8)$$

boladı eken.

$$\begin{aligned} \sin(\mu_k \alpha + \theta_k) &= 0 \\ \mu_k \alpha + \theta_k &= \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \alpha &= \frac{\pi n - \theta_k}{\mu_k} = \frac{n}{k} - \frac{\theta_k}{\pi k}, \quad n, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

bolǵanda ǵana $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ teńligi kelip shıǵadı. α nıń usınday mánislerinde (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi birden-bir bolmaydı eken. Demek, tómendegi teorema orınlı.

2.2.1-teorema. (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi bar bolsa, onda ol $\Delta_{\alpha\beta}(k) \neq 0$ bolǵanda ǵana birden-bir boladı.

§2.3. Máseleniń sheshiminiń bar bolıwı

(2.2.6) formulada $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ ańlatpası bólshetniń bólimi ekenligi kórinip turıptı. Sonlıqtan (2.1.1)-(2.1.6) máseleniń sheshimi bar ekenligin tiykarlawǵa (2.2.5) shártten tısqarı $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ nolden parqlı ańlatpa ushın α, β sanlariniń bar ekenligin kórsetiw kerek.

2.3.1-lemma. Eger $\alpha \in \mathbb{N}$ bolsa, onda qálegen bolǵan $C_0 = C_0(\beta) > 0$ turaqlısı bar boladı, barlıq $k \in \mathbb{N}$ de

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{\mu_k \beta} C_0 > 0 \quad (2.3.1)$$

teńsizligi orın bolatuǵınday

2.3.2-lemma. Eger α - qálegen bólshhek san bolsa, yaǵnıy $\alpha = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, \frac{p}{q} \in \mathbb{N}, (q, 4) = 1$. Onda sonday $\beta_0 = \beta_0(\alpha), C_0 = C_0(\alpha, \beta)$ oń turaqlılar bar boladı, barlıq $\beta > \beta_0$ hám $k \in \mathbb{N}$ ushın

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq e^{\mu_k \beta} C_0 > 0 \quad (2.3.2)$$

bahalawı orınlı boladı.

Eskertiw: $(q, 4) \neq 1$ hám $q = 4l, l \in \mathbb{N}$ bolsa, onda

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\mu_k \beta} \quad (2.3.3)$$

orınlı boladı. Sońǵı teńlikte $k \rightarrow \infty$ da $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ bólimi eksponencial xarakterge iye bolıp nolge umtıladı. Bul jaǵdayda Dirixle máselesiniń sheshimi qatar qosındısı kórinisinde bar bolmaydı.

2.3.3-lemma. Eger $\alpha > 0$ san dárejesi $m \geq 2$ bolǵan qálegen irracional san bolsa, onda sonday β_0 hám C_0 oń turaqlıları bar boladı, $\forall \beta > \beta_0$ de hám $k \in \mathbb{N}$ ushın

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\mu_k \beta} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}, \quad m > 2 \quad (2.3.4)$$

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\mu_k \beta} \frac{1}{k}, \quad m = 2 \quad (2.3.5)$$

orinli. Bunda $\varepsilon > 0$ jeterli kishi shama.

Eger de (2.3.1)-(2.3.5) orinli bolsa, onda (2.1.11) dara sheshimi hám (2.1.1)-(2.1.6) máseleniń (2.2.6) sheshimlerin Fure qatarı kórinisinde jazıw múmkin.

$$U(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \sin \mu_k x \quad (2.3.6)$$

$L_2[0,1]$ keńisliktegi $\{\sqrt{2} \sin \mu_k x\}_{k=1}^{\infty}$ sinuslar sistemasınıń tolıqlılıǵınan (2.3.6) qatar $L_2[0,1]$ de hár bir $y \in [-\alpha, \beta]$ de jıynaqlı boladı. Endi anıqlanǵan shártlerdegi (2.3.6) qatar $\overline{D}$ tuyıq oblastında $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalarǵa teń ólshewli jıynaqlı bolatuǵının hám bul jerde onı x hám y boyınsha aǵzama-aǵza differenciallaw, al, $\overline{D}_+$ hám $\overline{D}_-$ oblast tuyıq oblastlarınan x hám y ózgeriwshileri boyınsha 2 márte differenciallaw múmkin ekenliǵın kórsetemiz. Meyli (2.3.1),(2.3.2) bahalawlar orinli bolsın. $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,1]$ talap qılamız,sonda

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(1) = 0$$

$$\psi(0) = \psi(1) = \psi^{(2)}(0) = \psi^{(2)}(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \mu_k x dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \sin \mu_k x dx = dv \\ du = \varphi^{(1)}(x) dx \\ v = -\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k x \end{array} \right| = \sqrt{2} \left(-\frac{\varphi(x)}{\mu_k} \cos \mu_k x \right) \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \int_0^1 \varphi^{(1)}(x) \cos \mu_k x dx = \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \int_0^1 \varphi^{(1)}(x) \cos \mu_k x dx = \left| \begin{array}{l} \varphi^{(1)}(x) = u \\ \cos \mu_k x dx = dv \\ du = \varphi^{(2)}(x) dx \\ v = \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k x \end{array} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \left(\frac{\varphi^{(1)}(x)}{\mu_k} \sin \mu_k x \right) \Big|_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \int_0^1 \varphi^{(2)}(x) \sin \mu_k x dx = -\frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \int_0^1 \varphi^{(2)}(x) \sin \mu_k x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} \varphi^{(2)}(x) = u \\ \sin \mu_k x dx = dv \\ du = \varphi^{(3)}(x) dx \\ v = -\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k x \end{array} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \left(-\frac{\varphi^{(2)}(x)}{\mu_k} \cos \mu_k x \right) \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^3} \int_0^1 \varphi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^3} \int_0^1 \varphi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = \frac{p_k}{\mu_k^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_k &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \mu_k x dx = \left| \begin{array}{l} \psi(x) = u \\ \sin \mu_k x dx = dv \\ du = \psi^{(1)}(x) dx \\ v = -\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k x \end{array} \right| = \sqrt{2} \left(-\frac{\psi(x)}{\mu_k} \cos \mu_k x \right) \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \int_0^1 \psi^{(1)}(x) \cos \mu_k x dx = \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \int_0^1 \psi^{(1)}(x) \cos \mu_k x dx = \left| \begin{array}{l} \psi^{(1)}(x) = u \\ \cos \mu_k x dx = dv \\ du = \psi^{(2)}(x) dx \\ v = \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k x \end{array} \right| = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \left(\frac{\psi^{(1)}(x)}{\mu_k} \sin \mu_k x \right) \Big|_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \int_0^1 \psi^{(2)}(x) \sin \mu_k x dx = -\frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \int_0^1 \psi^{(2)}(x) \sin \mu_k x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} \psi^{(2)}(x) = u \\ \sin \mu_k x dx = dv \\ du = \psi^{(3)}(x) dx \\ v = -\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k x \end{array} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^2} \left(-\frac{\psi^{(2)}(x)}{\mu_k} \cos \mu_k x \right) \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^3} \int_0^1 \psi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\mu_k^3} \int_0^1 \psi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = \frac{q_k}{\mu_k^3}
\end{aligned}$$

bunda,

$$\sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = p_k$$

$$\sqrt{2} \int_0^1 \psi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = q_k$$

$\varphi^{(3)}(x)$ hám $\psi^{(3)}(x)$ funksiyları úzliksiz, onda Bessel teńsizliginen $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2$ hám

$\sum_{k=1}^{\infty} q_k^2$ qatarları da jıynaqlı boladı. Onda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|p_k| + |q_k|)$ qatar jıynaqlı boladı.

Bunnan (2.3.6) qatar teń ólshewli jıynaqlı boladı, $\overline{D}$ da x hám y ózgeriwshileri boyınsha alınğan dfferenciallardan dúzilgen qatarlar hám $\overline{D}_+$ hám

$\overline{D}$ - tuyıq oblastda alınğan 2-tártipli tuwındılardan ibarat qatar da teń ólsheuli jıynaqlı bolatuǵını kelip shıǵadı.

Tómendegi teorema orınlı.

2.3.1-Teorema. Meyli $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(1) = 0$,
 $\psi(0) = \psi(1) = \psi^{(2)}(0) = \psi^{(2)}(1) = 0$ **hám (2.3.1), (2.3.2) bahalawları orınlı bolsın,**
onda (2.1.1)-(2.1.6) máseleniń sheshimi bar boladı hám (2.3.6) qatar
kórinisinde ańlatıw múmkin.

Juwmaqlaw

Aralas tiptegi teńlemeler teoriyası- dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler zamanagóy teoriyasınıń tiykargı baǵdarı bolıp esaplanıladı. Bul baǵdardıń oǵada tez pát penen rawajlanıwı ótken ásirdeń 30-40 jıllarına tuwra keledi. Bul rawajlanıw kópshilik ámeliy máselelerdi sheshkende onıń matematikalıq modeliniń ǵárezsiz ózgeriwshilerdiń qarastırılıp atırǵan oblastında hár túrdegi teńlemege alıp kelinetuǵınlıǵı menen baylanıslı.

Differenciallıq teńlemelerge keltiriletuǵın fizikalıq, mexanikalıq, texnikalıq máselelerden basqa ekologiya, biologiya, medicina, ximiya hám basqa da pánlerdiń de ámeliy máselelerin differenciallıq teńlemelerge keltiriw hám olar ushın qoyılǵan korrekt shegarlıq máselelerdi úyreniw zárúrliligi aktual másele bolıp tabıladı.

Usı pitkeriw qánigelik jumıs kirisiw bólimi, 2 bap (5 paragraf), juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

1-bap 2 bólimnen turadı. 1.1-bólimde pitkeriw qánigelik jumısında paydalanılatuǵın tiykargı túsinikler hám olardıń anıqlamaları keltirilgen. 1.2-bóliminde bolsa ortogonal sistemalar haqqında maǵliwmat berilgen.

2-bap óz ishine 3 bólimdi aladı. Bul bapta pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykargı mazmuni sóz etilgen. 2.1-bólim “Lavrentev-Bicadze teńlemesi ushın Dirixle máselesi ” dep atalıp onda máseleniń qoyiliwi hám sheshiliwi keltirilgen:

Másele tómendegishe qoyılǵan:

$$Lu(x, y) = u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0$$

Lavrentev-Bicadze teńlemesin

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}, \alpha > 0, \beta > 0$$

tuwrımıyeshli oblastındaǵı Dirixle máselesiniń sheshimin tabıw talap etilgen. Bul sheshim Fure metodı járdeminde izertlenilgen hám

$$U_k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{2}(a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ \sqrt{2}(a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

sheshimi keltirip shıǵarılǵan.

$$D_+ = D \cap \{y > 0\} \quad D_- = D \cap \{y < 0\}$$

belgilewlerdi kiritiw arqalı, tómendegi másele qarastırılǵan:

D oblastında tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı $u(x, y)$ funkciyanı tabıń:

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

bunda $\varphi(x), \psi(x)$ - tómendegi shártlerdi qanaatlandırıwshı berilgen sıypaq funkciyalar.

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$$

Máseleniń sheshimi Fure metodı járdeminde izertlenilgen hám

$U(x, y) = X(x)Y(y)$ kóriniste izeertlengen. Bunnan soń ózgeriwshileri ajıralǵan teńleme payda bolǵan hám olardıń ulıwma mánisi λ spektral parametrine teńlestirilgen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\operatorname{sgn} y \cdot \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Bunnan soñ $X(x)$ hám $Y(y)$ ǵa baylanıslı eki teńleme payda bolǵan hám berilgen baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdi esapqa alǵan halda máseleń

$$U_k(x, y) = \begin{cases} (a_k \operatorname{ch} \mu_k y + b_k \operatorname{sh} \mu_k y) \sin \mu_k x, & y > 0 \\ (a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y) \sin \mu_k x, & y < 0 \end{cases}$$

formal sheshimi keltirip shıǵarılǵan.

2.2-bólimi “Máseleniń sheshimniń birden-birligi” dep atalıp, bunda sheshimniń birden-birliginiń tiykargı shárti keltirilip shıǵarılǵan, yaǵnıy berilgen máseleń sheshimi bar bolsa, onda $\Delta_{\alpha\beta}(k) \neq 0$ bolǵanda ǵana birden-bir boladı. Bunda $\Delta_{\alpha\beta}(k) = \cos \mu_k \alpha \cdot \operatorname{sh} \mu_k \beta + \sin \mu_k \alpha \cdot \operatorname{ch} \mu_k \beta$

2.3-bólimi “Máseleniń sheshiminiń bar bolıwı” dep atalǵan hám bul bólimde 3 lemmadan paydalanıp sheshimniń bar bolıwı kórsetilgen hám sheshimdi

$$U(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \sin \mu_k x$$

qatar kórinisinde ańlatılıwı keltirip ótilgen.

Paydanilgan ádebiyatlar dizimi

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа // Сибирский математический журнал. - 1961. - Т. 11. - №11. - с. 7-19.
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно - составного типа. Ташкент: Фан. - 1974. - 156 с.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан. - 1979. - 238с.
4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. - 2007. - Т.413. - №1. - с. 23-26.
5. Сабитов К.Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // ДАН. - 2009. - Т.427. - №5. - с. 593-596.
6. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференциал.уравнения. - 2011. - Т.47. - №5. - с. 705-713.
7. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференциал.уравнения. - 2013. - Т.49. - №2. - с. 186-196.
8. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. - 2009. - Т. 429. - №4. -с.451-454.
9. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов.Математика - 2010. - №4. -с.55-62.
10. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Математические заметки. - 2010. - Т. 87. - №6. -с.901-912.

11. Сабитов К.Б., Мартемянова Н.Б. Нелокальная обратная задача для уравнение смешанного типа // Известия вузов. Математика. – 2011. - №5. - с.44-52.
12. Bekiev A.B., Elgondiev Q.Q. Solvalibity of the boundary value problem for a mixed-type equation of the forth order // Science and education in Karakalpakstan. – 2017. ISSN 2181-9203. - №3. – p.3-10.
- 13.www.math.ru
- 14.www.dic.academic.ru
- 15.www.mathinst.uz
- 16.www.fizmathim.com
- 17.www.natural-sciences.ru