

ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Matematikalıq analiz kafedrası

Matematika tálim baǵdarınıń 4^b-kurs studenti

Amangeldieva Zuxranıń

« Tórtinshi tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı »
teması boyınsha

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Ilimiy basshı:

doc. Elǵondiev Q.Q.

Kafedra baslıǵı:

doc.Elǵondiev Q.Q.

Mazmunı

I bap

1.1§. Kirisiw.....3

1.2§.Ortogonal sistemalar.....7

II bap

2.1§. Tórtinshi tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı.....20

2.2§. Sheshimniń bar bolıwı hám birden birliǵi.....31

Juwmaqlaw37

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi.....39

I-bap

§1.1. Kirisiw

Házirgi kúnde kóplegen tábiy processlerdiń matematikalıq modeli standart bolmaǵan baslanǵısh-shegaralıq máselelerdi hám dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan tuwrı hám keri máselelerdi úyreniwge alınıp kelinedi. Bunday máseleler klassikalıq matematikalıq fizika teńlemeleri teoriyasında óz analogına iye emes bolıp esaplanadı. Úyrenilip atırǵan tábiy processlerdiń matematikalıq modelin jasawda aralas tiptegi teńlemeler teoriyasınıń áhmiyeti oǵada úlken bolǵanlıqtan, olardı ele de úyreniw hám nátiyjeler arqalı ámeliyatta qollawdı engiziw házirgi zaman talaplarınan biri esaplanadı.

Aralas tiptegi teńlemeler teoriyası- dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler zamanagóy teoriyasınıń tiykarǵı baǵdarı bolıp esaplanadı. Bul baǵdardıń oǵada tez pát penen rawajlanıwı ótken ásirdiń 30-40 jıllarına tuwrı keledi. Bul rawajlanıw kópshilik ámeliy máselelerdi sheshkende onıń matematikalıq modeliniń ǵárezsiz ózgeriwshilerdiń qarastırılıp atırǵan oblastında hár túrdegi teńlemege alıp kelinetuǵınlıǵı menen baylanıslı.

Bunday máselelerdi izertlew boyınsha dáslepki miynetler F.Trikomi [1] hám S.Gellerstedt [2] tárepinen járiyalanǵan. Al, bul baǵdargá tiykar bolıp xizmet etiwshi miynetler M.A.Lavrentev [3], A.V.Bizadze ([4], [5]), K.I.Babenko [6], F.I.Frankllarǵa [7] tiyisli bolıp esaplanadı. Aralas tiptegi teńlemeler teoriyası boyınsha qatań matematikalıq nátiyjeler S.A.Aldashev [8], T.D.Djuraev [9], T.SH.Kalmenov [10], M.S.Saloxitdinov [11], M.M.Smirnov [12], K.B.Sabitov [13] h.t.b ilimpazlar tárepinen alınǵan.

Házirgi waqıtta aralas tiptegi teńlemeler teoriyası keńeygen bolıp, klassikalıq tiptegi teńlemelerdiń eki yamasa úsh kombinacıyasın óz ishine aladı. Aralas tiptegi elliptiko-parabolalıq hám parabolo-giperbolalıq teńlemelerdiń tez pát penen izertleniwi bir tárepten bul teńlemelerdiń kóp izertlenbegeni menen ekinshi tárepten olardıń fizika, mexanika hám texnikanıń áhmiyetli máselelerinde keń qollanıwı menen baylanıslı.

Házirgi zaman texnikasınıń tez rawajlanıwı tábiyy pánler aldına jańa wazıypalardı qoyıp basladı. Ásirese matematikaǵa, atap aytqanda differenciallıq teńlemeler, dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerge texnikalıq máselelerdi sheshiw ushın jańadan-jańa shegaralıq máselelerdi sheshiw usılların jetilistiriw hám onıń ámeliyatta qollanıwların támiynlew sıyaqlı talaplardı qoydı.

Differenciallıq teńlemelerge keltiriletuǵın fizikalıq, mexanikalıq, texnikalıq máselelerden basqa ekologiya, biologiya, medicina, ximiya hám basqa da pánlerdiń de ámeliy máselelerin differenciallıq teńlemelerge keltiriw hám olar ushın korrekt shegaralıq máselelerdi úyreniw zárúrliligi aktual bolıp tabıladı. Ásirese joqarıda ayılǵan máselelerdi pánniń jańa tarawı-aralas tiptegi teńlemelerdi úyreniw respublikamızda jetekshi matematiklerimiz basshılıǵında joqarı dárejede rawajlangan.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykarǵı maqseti hám wazıypaları. Jumıstıń tiykarǵı maqseti-tórtinshi tártipli aralas tiptegi parabolo-giperbolalıq teńlemenıń sheshimi bar bolıwın hám birden-birigin dálillewden ibarat.

Izertlewdi alıp barıw usılları. Qarastırılıp atırǵan shegaralıq máselelerdi sheshiwde ózgeriwshilerdi ayırıw yaǵnıy Fure usılınan paydalanıladı.

Izertlewdiń teoriyalıq hám ilimiy áhmiyeti. Pitkeriw qánigelik jumısı teoriyalıq áhmiyetke iye. Olardan joqarı tártipli aralas tiptegi teńlemelerdi sheshiwdi úyreniwde paydalanıw hám usı qánigelik boyınsha studentler arnawlı kurs oqıǵanda paydalanıwǵa boladı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń kólemi hám mazmunı. Jumıs 2 bap (4 paragraf), juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

1-bap 2 bólimnen turadı. 1.1-bólimi kirisiw bólimi esaplanıp, bul bólimde pitkeriw qánigelik jumısı teması boyınsha tariyxiy maǵlıwmatlar hám jumıstı orınlawdan maqset, orınlanıw tártibi haqqında qısqasha maǵlıwmat keltiriledi. 1.2-bóliminde bolsa ortogonal sistemalar haqqında maǵlıwmat beriledi.

2-bap ta óz ishine 2 bólimdi aladı. Bul bapta pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykarǵı mazmunı sóz etiledi.

2.1-bólim “Tórtinshi tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı” dep atalıp onda máseleńiń qoyılıwı hám sheshiliwi keltiriledi:

Másele tómendegishe qoyıladı:

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$$

oblastında

$$LU = U_{tt} - U_t - \text{sign} t U_{xxxx} = 0$$

teńlemesin sheshiw talap etiledi. Bunda α hám β oń haqıyqıy sanlar dep esaplanıladı.

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}; \quad \Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$$

belgilewlerdi kiritiw arqalı, tómendegi máseleńi qarastırıwǵa kelinedi:

Ω oblastında

$$U(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-)$$

$$LU(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \Omega_+ \cup \Omega_-$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

$$U_{xx}(0, t) = U_{xx}(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

$$U(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$U(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın $U(x, t)$ funkciyasın tabıw máselesi qarastırıladı.

Bunda $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyaları sáykes

$$\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(1) = 0;$$

$$\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın berilgen funkciyalar dep esaplanıladı.

Teńlemenin trivial emes sheshimleri ózgeriwshilerdi ayırıw usılı menen yaǵnıy Fure usılı menen

$$U(x, t) = X(x)T(t)$$

kóriniste izlenedi. Bunnan soń ózgeriwshiler ajralǵan teńleme payda boladı hám olardıń ulıwma mánisi λ spektral parametrine teńlestiriledi

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = \text{sign} \left\{ \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{T'(t)}{T(t)} \right\} = \lambda.$$

Bunnan soń $X(x)$ hám $T(t)$ ǵa baylanıslı eki teńleme payda boladı hám berilgen baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdi esapqa alǵan halda máseleniń

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t) \sin \xi_k x, & t > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \mu_k \text{ch} \mu_k t + b_k \nu_k \text{sh} \mu_k t) \sin \xi_k x, & t < 0 \end{cases}$$

kórinisindegi formal sheshimi tabıladı.

2.2-bólimi “Sheshimniń bar bolıwı hám birden birliǵi” dep atalıp, onda α hám β niń sheshim birden-bir bolatuǵın mánisleri anıqlanadı. Sheshimniń bar bolıwın hám birden-birliǵin kórsetiwde 2 lemma hám 2 teoremadan paydalanıladı.

§1.2. Ortogonal sistemalar

1.2.1-anıqlama. Skalyar kóbeyme kiritilgen hár qanday sızıqlı keńislikke Gilbertaldı keńisligi delinedi.

Meyli R -Gilbertaldı keńisligi bolsın.

1.2.2-anıqlama. Eger $x \in R$ hám $y \in R$ elementleri ushın $(x, y) = 0$ teńligi orınlı bolsa, onda x ham y elementleri **ortogonal** dep ataladı hám $x \perp y$ túrinde belgilenedi.

1.2.3-anıqlama. Eger R keńisliginiń $\{x_\alpha\}$, $x \in R$, $\alpha \in A$ (A - indeksleriniń bazıbir kópligi) elementleri kópligi berilgen bolıp, ondağı qálegen eki element ortogonal bolsa, onda $\{x_\alpha\}$ elementler sistemasına **ortogonal sistema** delinedi. Usıǵan qosımsha bul elementler sistemasındağı hár bir elementtiń norması 1 ge teń bolsa, yaǵnıy $\forall \alpha \in A$ ushın $\|x_\alpha\| = 1$ teńligi orınlı bolsa, onda- $\{x_\alpha\}$ **ortonormal sistema** dep ataladı.

Eger $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ sistema ortogonal hám $\forall \alpha \in A$ indeksinde $x_\alpha \neq 0$ teńsizligi orınlansa, onda bul elementler sistemasın normallastırıw múmkin.

Berilgen elementler sistemasındağı hár bir elementti sáykes $\|x_\alpha\|$ normasına bóliw járdeminde payda bolǵan $\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}, \alpha \in A \right\}$ túrindegi elementler sisteması ortonormal sistema boladı.

1.2.1-lemma. Eger R keńisliginiń $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ (A - indekslerdiń bazıbir kópligi) elementler sisteması ortogonal bolıp, $\forall \alpha \in A$ ushın $x_\alpha \neq 0$ bolsa, onda bul elementler sisteması sızıqlı ǵárezli emes sistema boladı.

Dálillew. Meyli ayırım

$$x_{\alpha_k}, \alpha_k \in A, k = 1, 2, \dots$$

elementleri ushın

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0$$

ten'ligi orınlı bolsın. Onda tayınlangan $k, k = 1, 2, 3, \dots$ ushın bul ten'liktiń eki tárepın x_{α_k} elementine skalyar kóbeytip,

$$(\lambda_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0 \quad (1.2.1)$$

ten'ligine iye bolamız. Sebebi, lemma shártine sáykes eger $j \neq k$ bolsa, $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0$ boladı. (1.2.1) ten'liginen, $x_{\alpha_k} \neq 0$ bolǵanı ushın, $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$ hám $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$ bolıwın kóremiz. Bul berilgen $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ elementler sistemasınıń sıızıqlı ǵárezli emes ekenligin kórsetedi.

1.2.2-lemma. Eger R keńisliginiń $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementleri sisteması ushın

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{vmatrix} \quad (1.2.2)$$

determinantınıń mánisi 0 ge ten bolsa, onda berilgen elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli boladı.

$G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ determinantına berilgen elementler sistemasınıń **Gramm determinantı** delinedi.

Dálillew. Tómendegi

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, x_i) = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2.3)$$

túrindegi $\lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ belgisizlerine baylanıslı n birtekli ten'lemelerdiń sıızıqlı sistemasın qaraştıramız.

Bul birtekli sistema nollik bolmaǵan (trivial emes) sheshimlerge iye bolıwı ushın

$$\lambda_1(x_1, x_i) + \lambda_2(x_2, x_i) + \dots + \lambda_n(x_n, x_i) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

ten'lemeler sistemasınıń determinant nolge ten bolıwı shárt. Bizlerdiń jaǵdayda bul determinant Gramm determinantınıń transponirlengenine ten boladı hám onıń mánisi lemma shártine sáykes 0 ge ten. Onda, (1.2.3) ten'lemeler sisteması nollik bolmaǵan sheshimine iye, yaǵniy $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ lerdiń hámmesi bir waqıtta 0 ge ten bola almaydı.

Endi (1.2.3) teńlemeler sistemasındaǵı hár bir teńlemeni sáykes λ_i ge kóbeytip, nátiyjeni barlıq i ($i = 1, 2, \dots, n$) ler boyınsha qosıp,

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

tenligin payda etemiz. Bunnan, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ teńligi λ_i , $i = \overline{1, n}$ lerdin bazıbir nolden ózgeshe bolǵanda orınlı degen nátiyje shıǵadı, yaǵnıy $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli.

Trigonometriyalıq funkciyalar sisteması

1.2.1-tastıyqlaw.

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.2.4)$$

trigonometriyalıq funkciyalar sisteması $L_2[-\pi, \pi]$ keńisliginde ortogonal sistema boladı.

Trigonometriyalıq funkciyalar ushın

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx &= 0, \quad n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0, \quad n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

teńlikleriniń orınlı bolıwın bundaǵı integrallardı tuwrıdan-tuwrı esaplaw nátiyjesinde tekseriw qıyın emes. Nátiyjede (1.2.4)-trigonometriyalıq funkciyalar sisteması ortogonal degen juwmaqqa kelemiz.

Endi $L_2[-\pi, \pi]$ keńisliginiń norma anıqlaw formulasınan paydalanıp, $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ hám (1.2.5)-formulalardan $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1, 2, \dots$

teńliklerine iye bolamız. Onda (1.2.4)-trigonometriyalıq funkciyalardıń ortogonal sistemasına sáykes keliwshi ortonormal sisteması

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

kóriniste jazıladı.

Ortogonallastırıw

Meyli E Gilbertaldı keńisligi bolsın.

E keńisliginde $\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ elementlerdiń sanaqlı sisteması berilgen hám bul sistema sıızıqlı gárezli emes sistema bolsın. Shekli sandağı sıızıqlı kombinaciyalardı ámelge asırıw nátiyjesinde $\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ sistemasınan ortogonal sistema ajıratıp alıw máselesin qarastıramız. Qoyılğan máseleniń sheshimi tómendegi teoremada keltirilgen.

1.2.1-teorema. Meyli

$$\{x_n, n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2.6)$$

elementler sisteması E keńisliginiń sıızıqlı gárezli emes elementleri sisteması bolsın. Onda, E keńisligi elementleriniń sonday $y_n, n = 1, 2, \dots$ ortogonal sisteması bar bolıp, bul sistemanıń hár bir elementi (1.2.6)-sistemanıń dáslepki n dana elementleriniń sıızıqlı kombinacıyası boladı, yaǵnıy sanı ushın

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n}x_n \quad (1.2.7)$$

teńligi orınlı boladı.

(1.2.7) kórinistegi $\{y_n\}$ ortogonal sistemasın dúziw processsine $\{x_n\}$ sistemasın **ortogonallastırıw processsi** delinedi.

Dálillew. $y_1 = x_1$ dep alamız. (1.2.6)-sistema sıızıqlı gárezli emes elementler sisteması bolǵanlıǵı ushın $y_1 \neq 0$ boladı.

Meyli, (1.2.7)-shártin qanaatlandıırıwshı óz-ara ortogonal bolǵan $y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots, k, k \geq 1$ elementleri bar bolsın. Onda barlıq $y_1, \dots, y_k$ elementlerine ortogonal bolǵan y_{k+1} elementti

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \beta_{k+1,2}y_2 + \dots + \beta_{k+1,n}y_n - x_{k+1} \quad (1.2.8)$$

kórinisinde izleyemiz. Sonda ortogonallıq shártinen,

$$(y_1, y_{k+1}) = \dots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \quad (1.2.9)$$

teńlikleriniń orınlanıwı tiyis. (1.2.8) hám (1.2.9) teńliklerden paydalanıp,

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \dots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}) \quad (1.2.10)$$

teńlemeler sistemasına iye bolamız. (1.2.10) teńlemeler sistemasınan $\beta_{k+1,i}, i = 1, 2, \dots, k$ koefficientleri bir mánisli tabıladı.

Endi tabılğan koefficientlerdi (1.2.8)-formuladağı sáykes ornına qoyıp, nátiyjede $y_1, \dots, y_k$ elementlerin (1.2.7)-kórinisindegi sáykes ańlatpaları menen almastırıp, birqansha apiwayılastırğannan keyin

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1} \quad (1.2.11)$$

teńligine iye bolamız. Bunda $y_{k+1} \neq 0$ boladı, sebebi keri jaǵdayda $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ elementler sisteması sıızıqlı ǵárezli bolğan bolar edi.

Fure qatarları hám olardıń qásiyetleri

Meyli E Gilbertaldı keńisligi bolsın. E keńisliginen n dana sıızıqlı ǵárezli bolmağan $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasın hám tayınlangan (fiksirlengen) $y \in R$ vektorın alamız.

$$a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n \quad (1.2.12)$$

túrindegi múmkin bolğan sıızıqlı kombinaciýalar kópliginen ,

$$\|y - (a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n)\| \quad (1.2.13)$$

ańlatpa minimum mánisine iye bolatuǵın sıızıqlı kombinaciýanı ajıratıp aliw máselesin qaraştıramız. Bul másele argumentleri $a_1, \dots, a_n$ bolğan

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \left(y - \sum_{k=1}^n a_k e_k, y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right) \quad (1.2.14)$$

funkciyasınıń minimumın tabıw máselesine teń kúshli.

Eger E keńisligi n -ólshemli keńislik hám $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorları bul keńisliktiń bazis vektorları bolsa, onda (1.2.12)-sızıqlı kombinacıyasınıń a_k , $k = 1, 2, \dots, n$ koefficientlerin sonday saylap alıw múmkin, nátiyjede

$$y = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \quad (1.2.15)$$

teńligi orınlı boladı hám bul jaǵdayda (1.2.13) ańlatpa 0 ge aylanadı.

Eger E keńisliginiń ólshemi shekli bolmasa yamasa shekli bolıp, biraq n nen úlken bolsa, onda ulıwma jaǵdayda (1.2.15)-teńligi orınlı bolatuǵınday etip (1.2.12)-sızıqlı kombinacıyasınıń a_k , $k = 1, 2, \dots, n$ koefficientlerin tańlaw múmkin emes. Bul jaǵdayda (1.2.13)-ańlatpası minimal mánisine erisetuǵın (1.2.12)-sızıqlı kombinacıyasın tabıw máselesine iye bolamız.

Zárúr bolsa joqarıda keltirilgen ortogonallastırıw processin paydalanıp, $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasınıń nolden ózgeshe bolǵan vektorlardan dúzilgen vektorlardıń ortogonal sisteması menen almasıw múmkin. Sol sebepli

$$e_k \neq 0, (e_k, e_j) = 0, k \neq j, k, j = \overline{1, n}$$

ortogonallıq shárti orınlanǵan dep esaplaymız. Bul ortogonallıq shártinen paydalanıp (1.2.14) funkciyanı

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 &= (y, y) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j (e_k, e_j) - 2 \sum_{k=1}^n a_k (y, e_k) = \\ \|y\|^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n (y, e_k) &= \\ \|y\|^2 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

kórinisinde jazıw mumkin.

Onda

$$a_k \|e_k\| - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad \text{yaǵnıy} \quad a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \quad (1.2.17)$$

bolsa, (1.2.13)-ańlatpası minimum mánisine iye bolıwın kóremiz.

1.2.4-anıqlama. (1.2.16)-formula járdeminde anıqlanğan $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ sanlarına $y \in E$ elementiniń $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sisteması boyınsha **Fure koefficientleri** delinedi.

Eger $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sisteması ortonormal bolsa, onda (1.2.16)-formula

$$a_k = (y, e_k) \quad (1.2.18)$$

kórinisinde jazıladı.

Eger (1.2.16) ańlatpadaǵı $a_1, a_2, \dots, a_n$ lerdi (1.2.17)-formulaǵa sáykes Fure koefficientleri menen almasırsaq, onda

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 \geq 0 \quad (1.2.19)$$

teńsizligine iye bolamız. Bul teńsizlikten

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|y\|^2 \quad (1.2.20)$$

teńsizligi kelip shıǵadı.

Solay etip tómendegi teorema dalillenedi.

1.2.2-teorema. Meyli $\{e_k, e_k \neq 0, k = \overline{1, n}\}$ sistema E Gilbertaldı keńisliginiń ortogonal vektorları sisteması bolsın. Onda $y \in E$ vektorı ushın $\sum_{k=1}^n a_k e_k$ sıızıqlı kombinaciyası koefficientleri retinde Fure koefficientleri alınǵanda, yaǵnıy $\alpha_k = a_k, k = 1, 2, \dots, n$ teńlikleri orınlı bolǵanda, bul sıızıqlı kombinaciya y vektorınıń eń jaqın juwıqlasıwın beredi. Bunda

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \geq 0$$

qatnası orınlı boladı.

Endi E keńisliginiń

$$\{e_k, e_k \neq 0, k = \overline{1, n}\} \quad (1.2.21)$$

túrindgi elementlerdiń ortogonal sisteması berilgen bolsın. Bul jaǵdayda da $y \in E$ elementiniń (1.2.21)-ortogonal Sistema boyınsha Fure koefficientleri (1.2.17) formula járdeminde anıqlanadı.

1.2.5-anıqlama. $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ sanları $y \in E$ elementtiń (1.2.21) elementler sisteması boyınsha (1.2.17)-formula járdeminde anıqlanǵan Fure koefficientleri bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad (1.2.22)$$

qatarına $y \in E$ elementtiń (1.2.21)-elementler sisteması boyınsha Fure qatarı delinedi. Bul fakt

$$y \square \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

túrindge jazıladı.

1.2.6-anıqlama.

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

teńligi járdeminde anıqlanatuǵın $E_n(y)$ sanına $y \in E$ elementiniń $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ (n-fiksirlengen) túrindgi sıızıqlı kombinaciyalar boyınsha eń jaqsı juwıqlasıwı delinedi. Bul infimum $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ túrindgi sıızıqlı kombinaciyalardıń múmkin bolǵan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koefficientleri boyınsha alınǵan.

Bul anıqlamadan

$$E_{n+1}(y) \leq E_n(y) \quad (1.2.23)$$

teńligi orınlı ekenligin kóremiz.

1.2.2-teoremada

$$E_n(y) = \inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2} \quad (1.2.24)$$

qatnası orınlı ekenligi kelip shıǵadı. Bunda $a_k = \frac{(y, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$

Kelip shıqqan tastıyqlawdı 1.2.2-teoremanıń saldarı retinde keltiremiz.

1.2.1-saldar. $y \in E$ elementine sáykes keliwshi Fure qatarınıń

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k \quad \text{dara qosındısı } y \in E \text{ elementiniń } a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \text{ túrindegi}$$

múmkin bolǵan sıızıqlı kombinaciyalar boyınsha eń jaqsı juwıqlasıwın beredi.

1.2.2-saldar.

$$\|y - S_{n+1}\| \leq \|y - S_n\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.25)$$

teńsizligi orınlı.

(1.2.25)-teńsizligi (1.2.23) hám (1.2.24) qatnaslarınan tuwrıdan-tuwrı kelip shıǵadı.

1.2.3-saldar. $y \in E$ elementiniń $a_n, \quad n = 1, 2, \dots$ Fure koefficientleri ushın,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leq \|y\|^2 \quad (1.2.26)$$

Bessel teńsizligi orınlı.

Bessel teńsizligi (1.2.20)-teńsizliginen $n \rightarrow \infty$ te kelip shıǵadı.

1.2.4-saldar. Eger $c > 0$ turaqlısı bar bolıp, $\|e_k\| \geq c, \quad k = 1, 2, \dots$ teńsizligi orınlı bolsa, onda Fure koefficientleri $k \rightarrow \infty$ te nolge umtiladi, yaǵnıy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad (1.2.27)$$

1.2.7-anıqlama. E metrikalıq keńislik bolıp, bul keńislikte elementleriniń hárbir fundamental izbe-izligi jıynaqlı bolsa, onda E keńisligine tolıq metrikalıq keńislik delinedi.

1.2.8-anıqlama. Skalyar kóbeyme kiritilgen hárbir tolıq sıızıqlı keńislikke Gilbert keńisligi delinedi.

Endi Fure qatarınıń jıynaqlı bolıwı haqqındaǵı mäseleni qarastıramız.

1.2.3-teorema. Eger E -Gilbert keńisligi bolsa, onda $y \in E$ elementiniń (1.2.21)-sistema túrindegi elementlerdiń qálegen ortogonal sistema boyınsha Fure qatarı jıynaqlı boladı ham eger

$$y_0 = \sum_{k=1}^n a_k e_k \quad (1.2.28)$$

teńligi orınly bolsa, onda $y - y_0$ element (1.2.21)-sistemanıń hár bir elementine ortogonal boladı.

Dálillew. Meyli $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ $n = 1, 2, \dots$ izbe-izligi $y \in E$ elementiniń (1.2.21)-ortogonal elementar sisteması boyınsha (1.2.22)-Fure qatarınıń dara qosındıları izbe-izligi bolsın. Onda

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 \quad (1.2.29)$$

boladı. Bunda $n = 1, 2, \dots$, $p \in N$. (1.2.26)-Bessel teńsizliginen, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$ qatarınıń jıynaqlı bolıwı málim. Onda bul Qatar ushın sanlı qatarlardıń jıynaqlı bolıwı haqqındaǵı Koshi kriteriyi orınlangan. Demek, $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $n_{\varepsilon} \in N$ nomeri tabıladı da $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ nomerlerinde hám $p \in N$ sanında

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2$$

teńsizlik orınlanadı. Sonlıqtan (1.2.29)-teńligin esapqa alıp, $\forall n \geq n_{\varepsilon}$ nomerlerinde hám $p \in N$ sanı ushın $\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon$ teńsizligin jazıw múmkin, yaǵnıy $\{S_n\}$ izbe-izligi E keńislikte fundamental izbe-izlik boladı. E tolıq bolǵanlıǵı ushın $\{S_n\}$ jıynaqlı.

Meyli, $\{S_n\}$ izbe-izligi E keńisliginiń y_0 elementine jıynaqlı bolsın. Onda (1.2.28) hám (1.2.17)-formulalardan paydalanıp,

$$\begin{aligned} (y - y_0, e_k) &= (y, e_k) - (y_0, e_k) = (y, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n, e_k) = \\ (y, e_k) - a_k \|e_k\|^2 &= (y, e_k) - \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} \|e_k\|^2 = (y, e_k) - (y, e_k) = 0 \end{aligned}$$

teńligi $\forall k \in N$ sanında orınlı bolıwın kóremiz, yaǵnıy $y - y_0$ elementi (1.2.21)-sistemanıń hár bir aǵzasına ortogonal.

Tolıq ortogonal sistemalar hám olardıń Fure qatarı menen baylanısı

Meyli $e_n \in E, n = 1, 2, \dots$ elementler sisteması berilgen bolsın. Bul elementler sistemasınıń shekli sandaǵı aǵzalarınń sıızıqlı kombinacijaları kópligi E keńisliginde tıǵız bolsa, yaǵnıy hár bir $x \in E$ elementi hám $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın, sonday $n = n(\varepsilon, x)$ nomeri hám $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanları tabılıp,

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon \quad (1.2.30)$$

teńsizligi orınlı bolsa, onda berilgen elementler sistemasına E keńisligi elementleriniń tolıq sisteması delinedi.

1.2.4-teorema. E Gilbertaldı keńisligindegi (1.2.21)-elementlerdiń ortogonal sistemasınıń usı keńisliktiń elementleriniń tolıq sisteması bolıwı ushın, $y \in E$ elementiniń Fure qatarı usı elementtiń ózine jıynaqlı bolıwı, yaǵnıy

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \quad (1.2.31)$$

bunda $a_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|}, k = 1, 2, \dots$ yamasa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| = 0 \quad (1.2.32)$$

teńliginiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli boladı.

Dálillew.

Jetkilikliligi. Meyli (1.2.32)-teńligi orınlı bolsın. Onda $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın

(1.2.31)-Fure qatarınıń sonday $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ dara qosındısı tabıladı da,

$$\|y - S_n\| < \varepsilon \quad (1.2.33)$$

teńsizligi yaǵnıy (1.2.30)-shártı orınlı boladı.

Zárúrliligi. Meyli (1.2.30)-shártı bazıbir $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sanlarında orınlı bolsın, onda 1.2.2-teoremadan bul shárt $\lambda_1 = a_1, \dots, \lambda_n = a_n$ bolǵan jaǵdayda orınlanadı, yaǵnıy tayınlanǵan $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın (1.2.33)-teńsizligi bazıbir n hám $\forall m > n$ natural sanlarında orınlı boladı. Bul (1.2.32)-shárttıń orınlı bolıwına teń kúshli.

1.2.5-teorema. Gilbertaldı keńisligine tiyisli y elementiniń (1.2.22)-Fure qatarı ózine jıynaqlı bolıwı ushın

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 \quad (1.2.34)$$

Parseval teńliginiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli. Bunda $a_k, k = 1, 2, \dots$ sanları $y \in E$ elementiniń (1.2.21)-elementlerdiń ortogonal sisteması boyınsha Fure koefficientleri.

Zarúrliligi. Meyli y elementiniń (1.2.22)-Fure qatarı usı elementtiń ózine jıynaqlı bolsın, yaǵnıy $y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ dep jazıw múmkin. Bul teńlikten,

$$\begin{aligned} \left\| y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right\|^2 &= \left(y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, y - \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)^2}{\|e_k\|^2} = \\ &= \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2 = 0 \end{aligned}$$

bolıwın kóremiz. Bunnan $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2$ Parseval teńligine iye bolamız.

Jetkilikliligi. Meyli Parseval teńligi orınlı bolsın. (1.2.19)-teńlikke sáykes

$$\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2$$

teńligi orınlı edi. Bul teńlikte $n \rightarrow \infty$ te shekke ótsek, onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\| = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|y\|^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \right) = 0 \quad (1.2.35)$$

yaǵnıy

$$\|y\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e_k\|^2 \quad (1.2.36)$$

shártleriniń teń kúshli ekenligin kóremiz. Bunnan hám (1.2.31)-teńliginen 2.1.5-teoremanıń jetkilikli shárti kelip shıǵadı.

1.2.5-saldar. E Gilbertaldı keńisligindegi (1.2.21)-elementlerdiń ortogonal sisteması usı keńislikte tolıq bolıwı ushın Parseval teńliginiń $y \in E$ elementi ushın orınlanıwı zárúr hám jetkilikli.

1.2.6-teorema. E Gilbertaldı keńisliginiń (1.2.21)-elementleriniń ortogonal sisteması usı keńislikte tolıq sistema bolsa hám $y \in E$ elementininiń (1.2.21) –elementler sisteması boyınsha harbir Fure koefficienti 0 ge teń bolsa, onda $y = 0$ teńligi orınlı boladı.

Dálillew. Shártke muwapıq $a_k = 0$. Onda (1.2.34)-Parseval teńliginen $\|y\| = 0$ boladı. Onda $y = 0$.

1.2.6-saldar. Eger $y_1 \in E$ hám $y_2 \in E$ elementleriniń (1.2.21)-elementlerdiń tolıq ortogonal sisteması boyınsha Fure koefficientleri óz-ara teń bolsa, onda $y_1 = y_2$ boladı.

Dálillew. y_1 hám y_2 elementlerdiń Fure koefficientleri ushın

$$\frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı boladı. Onda $y = y_1 - y_2$ elementiniń barlıq Fure koefficientleri ushın

$$\frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1 - y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = \frac{(y_1, e_k)}{\|e_k\|^2} - \frac{(y_2, e_k)}{\|e_k\|^2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

teńligi orınlı bolǵanlıǵı ushın 1.2.6-teoremadan $y = 0$ yaǵnıy $y_1 = y_2$ boladı.

II-bap

§2.1. Tórtinshi tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı

Máseleniń qoyılıwı

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$$

oblastında

$$LU = U_{tt} - U_t - \text{sign} t U_{xxxx} = 0 \quad (2.1.1)$$

teńlemesin qarastıramız. Bunda α hám β óń haqıyqıy sanlar.

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}; \quad \Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$$

belgilewlerdi kiritip, tómendegi máseleni qarastıramız.

Ω oblastında

$$U(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-) \quad (2.1.2)$$

$$LU(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_+ \cup \Omega_- \quad (2.1.3)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta \quad (2.1.4)$$

$$U_{xx}(0, t) = U_{xx}(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta \quad (2.1.5)$$

$$U(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.6)$$

$$U(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.7)$$

shártlerdi qanaatlandıratuǵın $U(x, t)$ funkciyasın tabıń. Bunda $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalari sáykes

$$\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(1) = 0;$$

$$\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın berilgen funkciyalar.

Máseleniń sheshiliwi

(2.1.1)-teńlemenin Ω oblastında trivial emes sheshimin

$$U(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.1.8)$$

túrinde izleyviz. Sonda

$$U_t(x, t) = X(x)T'(t); \quad U_{tt}(x, t) = X(x)T''(t); \quad U_{xxxx}(x, t) = X^{(4)}(x)T(t)$$

boladı. Bul tabılǵan tuwindılardı (2.1.1) teńlemesindegi orınlarına qoysaq

$$X(x)T''(t) - X(x)T'(t) - \text{sign}t X^{(4)}(x)T(t) = 0$$

teńlemesi kelip shıǵadı. Endı teńlemenı $X(x)T(t)$ kóbeymesine bólip,

$$\frac{T''(t) - T'(t)}{T(t)} - \text{sign}t \cdot \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = 0$$

yamasa

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = \text{sign}t \left\{ \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{T'(t)}{T(t)} \right\}$$

ǵa iye bolamız.

Bul qatnaslardıń ulıwma mánisin λ arqalı belgileymiz

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = \text{sign}t \left\{ \frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{T'(t)}{T(t)} \right\} = \lambda \quad (2.1.9)$$

(2.1.9)-teńlikte λ spektral parametr dep ataladı.

(2.1.9)-teńliginen

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.9_1)$$

$$\text{sign}t(T''(t) - T'(t)) - \lambda T(t) = 0, \quad t \in (-\alpha, \beta) \setminus \{0\} \quad (2.1.9_2)$$

teńlemeleri kelip shıǵadı.

(2.1.4)-shegaralıq shártinen paydalanıp, (2.1.8)-sheshiminen

$$U(0, t) = X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

teńligine iye bolamız. Bunnan $T(t) \neq 0, \quad t \in [-\alpha, \beta]$ bolǵanlıǵı ushın

$X(0) = X(1) = 0$ boladı. Usıǵan uqsas (2.1.5)-shártinen

$$U_{xx}(0, t) = X^{(2)}(0)T(t) = X^{(2)}(1)T(t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

yaǵnıy

$$X^{(2)}(0) = X^{(2)}(1) = 0$$

boladı.

Demek, $X(x)$ funkciyası

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.10)$$

$$X(0) = X(1) = X^{(2)}(0) = X^{(2)}(1) = 0 \quad (2.1.11)$$

túrindegi shegaralıq máseleniń sheshimi boladı.

(2.1.10)-teńlemenin sheshimin $X(x) = e^{kx}$ túrinde izleyviz. Sonda

$$X^{(4)}(x) = k^4 e^{kx}$$

túrinde boladı. Onda (2.1.10)-teńlemeden

$$(k^4 - \lambda)e^{kx} = 0$$

teńligi kelip shıǵadı. Bunda $e^{kx} \neq 0$ bolǵanlıǵı ushın,

$$k^4 - \lambda = 0$$

túrindegi algebralıq teńlemege iye bolamız. (2.1.11)-teńlemeden

$$(k^2 - \sqrt{\lambda})(k^2 + \sqrt{\lambda}) = 0$$

hám

$$k^2 = \sqrt{\lambda}, \quad k^2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\lambda}, \quad k_{3,4} = \pm i \sqrt[4]{\lambda}$$

korenleri tabıladı. Onda (2.1.11)-teńlemesiniń dara sheshimleri

$$X_1(x) = e^{-\sqrt[4]{\lambda}x}, \quad X_2(x) = e^{\sqrt[4]{\lambda}x},$$

$$X_3(x) = e^{i\sqrt[4]{\lambda}x}, \quad X_4(x) = e^{-i\sqrt[4]{\lambda}x}$$

kórinisinde boladı. $X_3(x)$ hám $X_4(x)$ dara sheshimlerin Eyler formulasınan paydalanıp,

$$X_3(x) = \cos \sqrt[4]{\lambda}x + i \sin \sqrt[4]{\lambda}x$$

$$X_4(x) = \cos \sqrt[4]{\lambda} x - i \sin \sqrt[4]{\lambda} x$$

türinde jazıw múmkin. Bunnan

$$X_3'(x) = \cos \sqrt[4]{\lambda} x, \quad X_4'(x) = \sin \sqrt[4]{\lambda} x$$

(2.1.11)-teńlemesiniń dara sheshimi bolatuǵınlıǵı kórinedi. Demek,

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda} x} + C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} x + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} x$$

türindegi funkciya (2.1.10)-teńlemenıń ulıwma sheshimi boladı. Bunda C_i , $i = \overline{1, n}$ erikli turaqlılar.

Endi (2.1.11)-shegaralıq shártlerden

$$X(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \cdot 0 = 0$$

$$X(1) = C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} + C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0$$

$$X^{(2)}(0) = C_1 \sqrt{\lambda} + C_2 \sqrt{\lambda} - C_3 \sqrt{\lambda} - C_4 \cdot 0 = 0$$

$$X^{(2)}(1) = C_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt[4]{\lambda}} - C_3 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt[4]{\lambda} - C_4 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0$$

yamasa

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \cdot 0 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 - C_4 \cdot 0 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} + C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0 \\ C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} - C_3 \cos \sqrt[4]{\lambda} - C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (2.1.12)$$

türindegi C_i , $i = \overline{1, 4}$ erikli turaqlılarga baylanıslı algebralıq teńlemelerdiń sıızıqlı sistemasına iye bolamız.

Bul sistemaniń birinshi teńlemesinen ekinshi teńlemesin alsaq,

$$2C_3 + 2C_4 \cdot 0 = 0$$

teńligi kelip shıǵadı. Bul teńlik $C_3 = 0$ hám qálegen C_4 ushın orınlı boladı. C_3 hám C_4 lerdiń bunday mánislerinde (2.1.12)-sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} + C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0 \\ C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} - C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0 \end{cases}$$

túrinde jazıladı. Bul kelip shıqqan sistemadan

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_1 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} = 0 \end{cases}^a$$

yamasa $C_1 \left(e^{\sqrt[4]{\lambda}} - e^{-\sqrt[4]{\lambda}} \right) = 0$ teńligine iye bolamız. Keyingi teńleme $C_1 = 0$

yamasa $\lambda = 0$ bolǵan jaǵdayda ǵana orınlı. Qarastırılıp atırǵan shegaralıq máselede $\lambda = 0$ bolıwı múmkin emes bolǵanlıǵı ushın $C_1 = 0$ boladı hám bunnan $C_2 = 0$ ekenligi kelip shıǵadı.

Demek, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Onda (2.1.12)-sistemadan

$$C_4 \sin \sqrt[4]{\lambda} = 0$$

teńlemesine iye bolamız. $C_4 \neq 0$ bolǵanlıǵı ushın bul teńlemeden

$$\sin \sqrt[4]{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt[4]{\lambda} = \pi k, \quad k \in N$$

boladı. Hár bir $k \in N$ sanına sáykes keliwshi sheshimdi

$$\xi_k = \sqrt[4]{\lambda_k} = \pi k$$

kórinisinde belgilep, (2.1.10), (2.1.11) shegaralıq máselesiniń

$$X_k(x) = C_4 \sin \xi_k x, \quad k = 1, 2, \dots$$

túrindegi sheshimlerine iye bolamız.

Demek, (2.1.10), (2.1.11) shegaralıq máselesiniń menshikli mánisleri $\lambda_k = \xi_k^4$, $k = 1, 2, \dots$, al bul menshikli mánislerdiń menshikli funkciyaları

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \xi_k x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1.13)$$

kórinisinde boladı.

(2.1.13) funkciyalar sisteması $L_2(0,1)$ keńisliginde tolıq ortonormal funkciyalar sisteması bolıwı 1-baptıń 2-paragrafında keltirilgen.

Endi

$$\text{sign} t \cdot (T''(t) - T'(t)) + \lambda T(t) = 0, \quad t \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$$

teńlemesiniń $\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots$ menshikli mánislerine sáykes keliwshi sheshimlerin tabamız.

a) Meyli $t \in (0, \beta)$ bolsın. Sonda (2.1.9₂) teńleme

$$T_k''(t) - T_k'(t) + \xi_k T_k(t) = 0 \quad (2.1.14)$$

túrinde jazıladı. Bul teńlemenıń sheshimin

$$T_k(t) = e^{\gamma t}$$

túrinde izlese,

$$\gamma^2 - \gamma + \xi_k = 0$$

túrindegi xarakteristikalıq teńlemesine iye bolamız. Bunnan

$$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm i \sqrt{4\xi_k - 1}}{2}$$

sheshimlerin tawıp, $\nu_k = \frac{1}{2} \sqrt{4\xi_k - 1}, \quad k = 1, 2, \dots$ belgilewin kiritsek,

$$T_k(t) = e^{\left(\frac{1}{2} - i\nu_k\right)t}, \quad T_k(t) = e^{\left(\frac{1}{2} + i\nu_k\right)t}$$

funkciyalarına iye bolamız.

Onda (2.1.14) teńlemesiniń sheshimleriniń fundamental sisteması

$$T_k^{(1)}(t) = e^{\frac{1}{2}t} \cos \nu_k t, \quad T_k^{(2)}(t) = e^{\frac{1}{2}t} \sin \nu_k t$$

funkciyalardan ibarat bolıwı málim.

Usi funkiyalar tıykarında (2.1.14) teńlemeniniń $t > 0$ mánislerindegi ulıwma sheshimi

$$T_k(t) = e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t)$$

túrinde jazıladı. Bunda a_k hám b_k erikli turaqlılar.

b) Meyli $t \in (-\alpha, 0)$ bolsın. Sonda (2.1.9₂) teńleme

$$T_k''(t) - T_k'(t) - \xi_k T_k(t) = 0 \quad (2.1.15)$$

túrinde jazıladı. Bul teńlemeniniń de sheshimin

$$T_k(t) = e^{\gamma t}$$

túrinde izlese

$$\gamma^2 - \gamma - \xi_k = 0$$

túrindegi xarakteristikalıq teńlemesine iye bolamız. Bunnan

$$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4\xi_k + 1}}{2}$$

sheshimlerin tawıp, $\mu_k = \frac{1}{2} \sqrt{4\xi_k + 1}$, $k = 1, 2, \dots$ belgilewin kiritsek, (2.1.15)

teńlemesiniń sheshimleriniń fundamental sisteması

$$T_k^{(1)}(t) = e^{\left(\frac{1}{2} + \mu_k\right)t}, \quad T_k^{(2)}(t) = e^{\left(\frac{1}{2} - \mu_k\right)t}$$

túrindegi eki funkciyalardan ibarat boladı.

Usi funkciyalar tıykarında (2.1.15) teńlemenin $t < 0$ mánislerindegi ulıwma sheshimi

$$T_k(t) = e^{\frac{1}{2}t} (c_k e^{\mu_k t} + d_k e^{-\mu_k t})$$

túrinde jazıladı. Bunda c_k hám d_k erikli turaqlılar.

Solay etip (2.1.9₂) teńlemesinin ulıwma sheshimin

$$T_k(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t), & t > 0 \\ e^{\frac{1}{2}t} (c_k e^{\mu_k t} + d_k e^{-\mu_k t}), & t < 0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

túrinde jazıw múmkin. Bunda a_k, b_k, c_k hám d_k erikli turaqlılar,

$$\nu_k = \frac{1}{2} \sqrt{4\xi_k - 1}, \quad \mu_k = \frac{1}{2} \sqrt{4\xi_k + 1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(2.1.9₂) teńlemesinin ulıwma sheshimindegi $t > 0$ jaǵdaydaǵı a_k, b_k erikli turaqlıları menen $t < 0$ jaǵdaydaǵı c_k hám d_k erikli turaqlıları arasındaǵı baylanıstı tabıw ushın

$$U(x, t) = X(x)T(t) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-)$$

shártinen paydalanıladı. Sonda

$$T_k(0-0) = T_k(0+0),$$

$$T'_k(0-0) = T'_k(0+0)$$

teńlikleri kelip shıǵadı. Usi teńlikten hám (2.1.16)-ulıwma sheshiminen paydalanıp

$$T_k(0-0) = \lim_{t \rightarrow 0-0} e^{\frac{1}{2}t} (c_k e^{\mu_k t} + d_k e^{-\mu_k t}) = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} (c_k e^{\mu_k \cdot 0} + d_k e^{-\mu_k \cdot 0}) = c_k + d_k$$

$$T_k(0+0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t) = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} (a_k \cos \nu_k \cdot 0 + b_k \sin \nu_k \cdot 0) = a_k$$

$$T'_k(0-0) = \lim_{t \rightarrow 0-0} [(\frac{1}{2} + \mu_k)c_k e^{(\frac{1}{2} + \mu_k)t} + (\frac{1}{2} - \mu_k)d_k e^{(\frac{1}{2} - \mu_k)t}] = (\frac{1}{2} + \mu_k)c_k + (\frac{1}{2} - \mu_k)d_k$$

$$T'_k(0+0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} [\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t) + e^{\frac{1}{2}t} (-a_k \nu_k \sin \nu_k t + b_k \nu_k \cos \nu_k t)] = \frac{a_k}{2} + b_k \nu_k$$

bolǵanlıǵı ushın

$$\begin{cases} c_k + d_k = a_k \\ (\frac{1}{2} + \mu_k)c_k + (\frac{1}{2} - \mu_k)d_k = \frac{a_k}{2} + b_k \nu_k \end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bul sistemanı c_k hám d_k ǵa qarata Kramer usılı menen sheshemiz.

Sonda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} - \mu_k & \frac{1}{2} - \mu_k \end{vmatrix} = -2\mu_k \neq 0$$

$$c_k = -\frac{1}{2\mu_k} \begin{vmatrix} a_k & 1 \\ \frac{a_k}{2} + \nu_k b_k & \frac{1}{2} - \mu_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k + \nu_k b_k)$$

$$d_k = -\frac{1}{2\mu_k} \begin{vmatrix} 1 & a_k \\ \frac{1}{2} + \mu_k & \frac{1}{2} - \mu_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k - \nu_k b_k)$$

yaǵnıy c_k hám d_k erikli turaqlıları menen sáykes a_k hám b_k erikli turaqlıları arasında

$$c_k = -\frac{1}{2\mu_k} \begin{vmatrix} a_k & 1 \\ \frac{a_k}{2} + \nu_k b_k & \frac{1}{2} - \mu_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k + \nu_k b_k)$$

$$d_k = \frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k - \nu_k b_k) \quad (2.1.17)$$

túrindegi baylanistiń bar bolıwın kóremiz.

Endi (2.1.16)-ulıwma sheshimdi (2.1.17)-formulanı esapqa alıp

$$T_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos v_k t + b_k \sin v_k t), & t > 0 \\ \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} \left(\frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k + b_k v_k) e^{\mu_k t} + \frac{1}{2\mu_k} (a_k \mu_k - b_k v_k) e^{-\mu_k t} \right), & t < 0 \end{cases}$$

kórinisinde jazıw múmkin. Bunda

$$\frac{e^{\mu_k t} + e^{-\mu_k t}}{2} = ch \mu_k t; \quad \frac{e^{\mu_k t} - e^{-\mu_k t}}{2} = sh \mu_k t$$

teńliklerin esapqa alsaq,

$$T_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos v_k t + b_k \sin v_k t), & t > 0 \\ \frac{1}{\mu_k} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \mu_k ch \mu_k t + b_k v_k sh \mu_k t), & t < 0 \end{cases} \quad (1.2.18)$$

túrindegi (2.1.9₂)-teńlemesiniń ulıwma sheshimine iye bolamız.

Usı tabılǵanlardan paydalanıp tómendegi teorema dálillenedi.

Teorema 2.1.1. (2.1.10), (2.1.11)-shegaralıq máselesiniń (2.1.13) sheshimi hám (2.1.9₂)-teńlemesiniń (2.1.18)-ulıwma sheshimin esapqa alǵan halda (2.1.1)-teńlemeniniń (2.1.2)-(2.1.5) shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin

$$U_k(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos v_k t + b_k \sin v_k t) \sin \xi_k x, & t > 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \mu_k ch \mu_k t + b_k v_k sh \mu_k t) \sin \xi_k x, & t < 0 \end{cases}$$

túrinde jazıw múmkin. Bunda $k = 1, 2, 3, \dots$

(2.1.1)-teńleme sıızıqlı teńleme bolǵanlıǵı ushın bul sheshimlerdiń qosındısı da onıń sheshimi boladı, yaǵnıy

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos \nu_k t + b_k \sin \nu_k t) \sin \xi_k x, & t > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \mu_k \operatorname{ch} \mu_k t + b_k \nu_k \operatorname{sh} \mu_k t) \sin \xi_k x, & t < 0 \end{cases}$$

funkciyası (2.1.1)-teñlemenin formal sheshimi boladı.

§2.2 Sheshimniñ bar bolıwı hám birden birliǵi

Endi (2.1.1)-teńlemenıń (2.1.2)-(2.1.6) shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshiminiñ bar bolıwı hám onıń birden-birliǵi haqqındaǵı máseleni qarastıramız.

Meyli $U(x, t)$ funkciyası (2.1.2)-(2.1.6) shártlerin qanaatlandıratuǵın funkciya bolsın.

$$U_k(t) = \int_0^1 U(x, t) X_k(x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.1)$$

funkciyaların qarastıramız. Bunda $X_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ funkciyaları (2.1.9₂) shegaralıq máseleniñ menshikli funkciyaları bolıp, $X_k(x) = \sin \xi_k x$, $k = 1, 2, 3, \dots$ kórinisinde anıqlanǵan. (2.2.1) dı (2.1.1)-teńlemege qoyıp

$$U_k''(t) - U_k'(t) - \text{sign} t \xi_k^4 U_k(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

teńlemesine iye bolamız. Bunda $\xi_k^4 = \lambda$. Onda $U_k(t) = T_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ birdeyligi orınlı boladı hám bundaǵı $T_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ funkciyaları (2.1.18)-formula járdeminde anıqlanadı.

(2.1.5) hám (2.1.6)-shártlerinen paydalanıp, (2.2.1) funkciyalarınıń $t = -\alpha$ hám $t = \beta$ bolǵanda

$$U_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 U(x, \beta) \sin \xi_k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \xi_k x dx = \varphi_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.3)$$

$$U_k(-\alpha) = \sqrt{2} \int_0^1 U(x, -\alpha) \sin \xi_k x dx = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \xi_k x dx = \psi_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.4)$$

teńliklerine iye bolamız. (2.2.3) hám (2.2.4) teńliklerinen a_k hám b_k erikli turaqlılarına baylanıslı

$$\begin{cases} \mu_k a_k ch \mu_k \alpha - v_k b_k sh \mu_k \alpha = \mu_k \psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha} \\ a_k \cos v_k \beta + b_k \sin v_k \beta = \varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

algebraıq teńlemelerdiń sıızıqlı sistemasına iye bolamız. Hár bir $k \in N$ sanında (2.2.5) sistemasınıń determinantı nolden ózgeshe, yaǵnıy

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \mu_k ch \mu_k \alpha & -v_k sh \mu_k \alpha \\ \cos v_k \beta & \sin v_k \beta \end{vmatrix} = v_k sh \mu_k \alpha \cos v_k \beta + \mu_k ch \mu_k \alpha \sin v_k \beta \neq 0 \quad (2.2.6)$$

bolsa, (2.2.5) sisteması birden-bir sheshimge iye boladı hám ol sheshimler

$$a_k = \frac{v_k \varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta} sh \mu_k \alpha + \mu_k \psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha} \sin v_k \beta}{\Delta_k(\alpha, \beta)},$$

$$b_k = \frac{\mu_k \varphi_k e^{-\frac{1}{2}\beta} ch \mu_k \alpha - \mu_k \psi_k e^{\frac{1}{2}\alpha} \cos v_k \beta}{\Delta_k(\alpha, \beta)}$$

kórinisine iye boladı.

Tabılǵan a_k hám b_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ mánislerin $U_k(t) = T_k(t)$ funkciyasındaǵı orınlarına qoyıp, birqansha ápiwayılastırǵannan soń

$$U_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \begin{bmatrix} \varphi_k e^{-\frac{1}{2}(\beta-t)} & \Delta_k(\alpha, t) + \mu_k \psi_k e^{\frac{1}{2}(t+\alpha)} \cos v_k \beta \end{bmatrix}, & t > 0 \\ \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \begin{bmatrix} v_k \varphi_k e^{-\frac{1}{2}(\beta-t)} & sh \mu_k(t+\alpha) + \psi_k e^{\frac{1}{2}(\alpha+t)} \Delta_k(-t, \beta) \end{bmatrix}, & t < 0 \end{cases} \quad (2.2.7)$$

túrindegi (2.2.2) teńlemesiniń sheshimine iye bolamız.

Eger $\varphi(x) \equiv 0$ hám $\psi(x) \equiv 0$ birdeylikleri $[0, 1]$ segmentinde orınlı bolsa, onda (2.2.5) sistema

$$\begin{cases} \mu_k a_k \operatorname{ch} \mu_k \alpha - \nu_k b_k \operatorname{sh} \mu_k \alpha = 0 \\ a_k \cos \nu_k \beta + b_k \sin \nu_k \beta = 0 \end{cases} \quad (2.2.8)$$

kórinisindegi birtekli sistemaǵa aylanadı. $\Delta_k(\alpha, \beta) \neq 0$ bolǵanda (2.2.8) sistema $a_k = b_k = 0$ trivial sheshimine iye. Sonlıqtan, $U_k(t) \equiv 0$ birdeyligi $[-\alpha, \beta]$ segmentinde $\forall k \in N$ sani ushın orınlı boladı.

Onda (2.2.1)-den

$$\int_0^1 U(x, t) X_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

teńligine iye bolamız. $\{X_k(x)\}$ funkciyalar sisteması $L_2[0,1]$ keńisliginde tolıq sistema bolǵanlıǵı ushın aqırǵı teńlikten $U(x, t) = 0$ teńligi $[0,1]$ segmentte hár bir $t \in [-\alpha, \beta]$ ushın orınlı boladı. (2.1.2)-shártten $U(x, t) \in C(\Omega)$ bolǵanlıqtan $\bar{\Omega}$ oblastında $U(x, t) = 0$ teńligi orınlı.

Meyli α_k hám β_k nıń bazı bir mánislerinde hám $k = k_0 \in N$ sanında $\Delta_{k_0}(\alpha, \beta) = 0$ teńligi orınlı bolsa, onda (2.1.1)-(2.1.6) másele $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ shártinde

$$U_{k_0}(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}t} \sin \nu_{k_0} (\beta - t) \sin \xi_0 x, & t > 0 \\ \sqrt{2} \frac{1}{\mu_{k_0}} e^{\frac{1}{2}t} \Delta_{k_0}(-t, \beta) \sin \xi_{k_0} x, & t < 0 \end{cases}$$

túrindegi trivial emes sheshimine iye boladı. Bul jaǵdayda (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi birden-bir emes.

Endi $\Delta_k(\alpha, \beta)$ determinantınıń nolleri haqqındaǵı mäseleni qaraştıramız.

(2.2.6)-nı túrlendirip, $A_k = \sqrt{\xi_k^4 \operatorname{ch} 2\mu_k \alpha + \frac{1}{4}}$ belgilewi kiritilgennen soń

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = A_k \sin(\nu_k \beta + \gamma_k) \quad (2.2.9)$$

túrine keledı. Bunda $\gamma_k = \arcsin \frac{\nu_k \operatorname{sh} \mu_k \alpha}{A_k}$.

(2.2.9) dan $\beta = \frac{n\pi}{\nu_k} - \frac{\gamma_k}{\nu_k}$ bolǵanda $\Delta_k(\alpha, \beta) = 0$ bolıwın kórw qıyın emes. β

nıń usı mánisinde (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi birden-bir bolmaydı.

Demek, tómendegi teorema orınlı.

2.2.1-teorema. $\Delta_k(\alpha, \beta) \neq 0, \quad \forall k \in N$ shártiniń orınlı bolıwı (2.2.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi birden-bir bolıwı ushın zárúrli hám jetkilikli boladı.

(2.2.6) bahalasaq sonday C_0 hám k_0 turaqlılarınıń bar bolıwın kórip, joqarıda tabılǵan β nıń mánislerinde hám $\forall k > k_0$ ushın

$$|\Delta_k(\alpha, \beta)| \geq C_0 \xi_k^2 e^{\xi_k^2 \alpha} > 0 \quad (2.2.10)$$

teńsizligi orınlı bolıwın kóremiz.

2.2.1-lemma. Meyli (2.2.10) teńsizligi orınlı bolsın. Onda jeterli úlken k lar ushın tómendegi bahalawlar orınlı

$$U_k(t) = \begin{cases} C_1(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t > 0 \\ C_2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t < 0 \end{cases}$$

$$U'_k(t) = \begin{cases} C_3 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t > 0 \\ C_4 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & t < 0 \end{cases}$$

$$U_k''(t) = \begin{cases} C_5 k^4 (|\varphi_k| + |\psi_k|), & t > 0 \\ C_6 k^4 (|\varphi_k| + |\psi_k|), & t < 0 \end{cases}$$

Bul bahalawlardıń (2.2.7) funkciyası hám onıń tuwındıları ushın orınlı bolıwı (2.2.7) den (2.2.10) teńsizlikti esapqa alǵanda kelip shıǵadı.

2.2.2-lemma. Meyli $\varphi(x), \psi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(1) = 0$, $\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(1) = 0$, $i = 0,1,2$ shártleri orınlı bolsın. Sonda

$$\varphi_k = -\frac{1}{\pi^5} \frac{\varphi_k^{(5)}}{k^5}; \quad \psi_k = -\frac{1}{\pi^5} \frac{\psi_k^{(5)}}{k^5};$$

boladı. Bunda

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(5)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \pi k x dx \\ \psi_k^{(5)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \cos \pi k x dx \end{aligned}$$

hám

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_k^{(5)} \right|^2 &\leq \int_0^1 \left| \varphi^{(5)}(x) \right|^2 dx \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \psi_k^{(5)} \right|^2 &\leq \int_0^1 \left| \psi^{(5)}(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Bul lemmanı dálillew ushın (2.2.3), (2.2.4) ańlatpaları bes márte bóleklep integrallanadı, lemmanıń shártleri orınlı bolǵanda trigonometriyalıq funkciyalar ushın orınlı bolatuǵın Bessel teńsizliginen paydalanıladı.

$\Delta_k(\alpha, \beta) \neq 0$ hám (2.2.10) shárti orınlı bolǵanda (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń sheshimi

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) X_k(x) \quad (2.2.11)$$

túrindegi Fure qatarı kórinisinde jazıladı. Bunda $U_k(t)$ hám $X_k(x)$ funkciyaları sıykes (2.2.7) hám (2.1.13) formulaları menen anıqlanǵan.

(2.2.11) teńliginiń oń tárepindegi Fure qatarınıń jıynaqlılıq máselesi hám

$$\begin{aligned}
U_t(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(t) X_k(x) \\
U_{tt}(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U''_k(t) X_k(x) \\
U_{xxxx}(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) X_k^{(4)}(x)
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

teńlikleriniń oń tárepindegi qatardıń jıynaqlılıǵı bul qatarlar ushın (2.2.10) teńsizligi hám 2-lemma shártleri orınlı bolǵanda $\forall (x, t) \in \overline{\Omega}$ ushın

$$C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\left| \varphi_k^{(5)} \right| + \left| \psi_k^{(5)} \right| \right) \tag{2.2.13}$$

sanlı qatardıń mojarat qatar bolıwınan kelip shıǵadı. Sonda (2.2.11) hám (2.2.12) qatarları Veyershtrass belgisine sáykes $\overline{\Omega}_-$ hám $\overline{\Omega}_+$ oblastlarında absolyut hám teń ólsheuli jıynaqlı boladı.

(2.2.11) dı (2.1.1) teńlemesine qoyıw arqalı (2.1.1) teńliginiń $\overline{\Omega}_- \cup \overline{\Omega}_+$ oblastında birdeylik maǵanasında orınlı bolıwın kóremiz, yaǵnıy (2.2.11) qatarı (2.1.1) teńlemesiniń $\overline{\Omega}_- \cup \overline{\Omega}_+$ oblastındaǵı sheshimi boladı.

Usiniń menen tómendegi teorema orınlı dep juwmaq shıǵarıw múmkin.

2.2.2-teorema. Meyli $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyaları 2.2.2-lemmanıń barlıq shártlerin qanaatlandıratuǵın funkciyalar bolsın hám

$$\left| \Delta_k(\alpha, \beta) \right| \geq C_0 \xi_k^2 e^{\xi_k^2 \alpha} > 0$$

teńsizligi orınlı bolsın. Sonda (2.1.1)-(2.1.6) máselesiniń birden-bir sheshimi bar boladı hám ol sheshim (2.2.11) qatarı kórinisinde jazıladı.

Juwmaqlaw

Tabiyatta ushıraytuǵın túrli qubılıslar (fizikalıq, ximiyalıq, mexanikalıq, biologiyalıq h.t.b) óz háreket nızamlarına iye. Bul qubılıslardı izertlewdi ansatıraq ámelge asırıw ushın olardıń matematikalıq modelin jaratıw mashqalası payda boladı. Kóp ǵana tábiyy hám texnika máselelerin sheshiw ádette matematikalıq fizika teńlemelerin izertlewge alıp klinedi. Usılardıń ishinde aralas tiptegi máseleler kóp jaǵdaylarda ushırasadı.

Aralas tiptegi teńlemeler teoriyasi-zamanagóy dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykargı bólimlerinen biri bolıp, olardıń ishinde joqarı tártipli aralas tiptegi teńlemelerdi úyreniw ayrıqsha áhmiyetke iye esaplanadı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń teması “4-tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı” dep ataladı. Pitkeriw qánigelik jumısı mazmunı, 2 bap, juwmaqlawshı bólim hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

1-bap 2 bólimnen turadı.1-bólimi kirisiw bólimi esaplanıp, bul bólimde pitkeriw qánigelik jumısı teması boyınsha tariyxiy maǵlıwmatlar hám jumıstı orınlawdan maqset, orınlanıw tártibi keltirilgen. 1.2-bóliminde bolsa ortogonal sistemalar haqqında maǵlıwmat berilgen.

2-bap ta óz ishine 2 bólimdi alǵan. Bul bapta pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykargı mazmunı sóz etilgen.

2.1-bólim “4-tártipli aralas tiptegi teńleme ushın Fure usılı” dep atalıp onda máseleniń qoyılıwı hám sheshiliwi keltirilgen:

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$$

oblastında

$$LU = U_{tt} - U_t - \operatorname{sign} t U_{xxxx} = 0$$

teńlemesin sheshiw máselesi qoyılǵan. Bunda α hám β óń haqıyqıy sanlar dep esaplanılǵan.

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}; \quad \Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$$

belgilewlerdi kiritiw arqalı, tómendegi máseleni qarastırıwǵa keling:

Ω oblastında

$$U(x, t) \in C_{x, t}^{2, 1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x, t}^{4, 2}(\Omega_+ \cup \Omega_-)$$

$$LU(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \Omega_+ \cup \Omega_-$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

$$U_{xx}(0, t) = U_{xx}(1, t) = 0 \quad -\alpha \leq t \leq \beta$$

$$U(x, \beta) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$U(x, -\alpha) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın $U(x, t)$ funkciyasın tabıw máselesi. Bunda $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalari sáykes

$$\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(1) = 0;$$

$$\psi^{(2i)}(0) = \psi^{(2i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın berilgen funkciyalar.

Sheshimdi Fure usılı boyınsha izlew arqalı hám baslanǵısh, shegaralıq shártlerdi esapqa alǵan halda

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \cos v_k t + b_k \sin v_k t) \sin \xi_k x, & t > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} e^{\frac{1}{2}t} (a_k \mu_k ch \mu_k t + b_k v_k sh \mu_k t) \sin \xi_k x, & t < 0 \end{cases}$$

kórinisindegi formal sheshimi tabıladı.

2.2-bólimi “Sheshimniń bar bolıwı hám birden birliǵi” dep atalıp, onda α hám β nıń sheshim birden-bir bolatuǵın mánisleri anıqlanǵan. Sheshimniń bar bolıwın hám birden-birliǵin kórsetiwde 2 lemma hám 2 teoremadan paydalanılǵan.

Paydalanilgan ádebiyatlar dizimi

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа - М. –Л: Гостехиздат, 1947. -190 с
2. Gellerstedt S. Quelques probemes mixtes pour l`equation $y'''z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Mat., Astr. Osh Fis.-1936. –bd. 26 A. -№3 –P. I-32.
3. Лаврентьев М.А., Вицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. -1950. –Т.70. -№3. –С.373-376
4. Вицадзе А.В. Уравнение смешанного типа. –М:Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.
5. Вицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибирский математический журнал. -1962. –Т.111. -№5. –С. 642-644.
6. Бабенко К. И. К теории уравнению смешанного типа: Диссертация доктор. физ-мат наук. 01.01.02. –М : 1951. –195 с.
7. Франкл Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. –М: Наука, 1973. - 352 с.
8. Bekiev A.B., Elgondiev Q.Q. Solvability of the boundary value problem for a mixed-type equation of the fourth order: Science and education in Karakalpakstan journal.-2017.- №3. p. 3-9.
9. Алдашев С.А. Краевие задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа: Диссертация доктор. физ-мат наук 01.01.02. –Алма-Ата, 1989. -188 с
- 10.Джураев Т.Д., Мамажонов М. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка смешанного-составного типа, содержащих парабола-гиперболических оператор с младшими членами // АН УзССР. серия физ-мат наук. -1982. -№5. –s. 12-15.
- 11.Калменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. диссертация доктор. физ-мат наук: 01.01.02. –М.,1982. -27 с.

- 12.Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа . –Ташкент: Фан, 1974. -156с
- 13.Смирнов М.М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка. –Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1972. –123 с.
- 14.Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Диф.ур. -1988. –Т.24. --№11.-С.1967-1975.
- 15.www.math.ru
- 16.www.dic.academic.ru
- 17.www.mathinst.uz
- 18.www.fizmathim.com
- 19.www.natural-sciences.ru