

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLI
BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI
BERDAQ ATINDAǴI QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

**Funkcionallıq analiz, algebra hám geometriya
kafedrası**

Fizika - matematika fakulteti «Matematika» tálim
baǵdarınıń 4 - kurs studentı

ONGARBAYEV RAXIMNÍ

OPERATORLAR ALGEBRALARÍNDÁ L_p KEÑISLIKLER

atamasındaǵı

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

İlimiy basshı:

f.-m.i.k., dots. M.M. Ibragimov

Kafedra baslıǵı:

f.-m.i.d., dots K.K.Kudaybergenov

Nókis 2018

M A Z M U N Í

Kirisiw.....	3
1-§. Sızıqlı úzliksiz operatorlar keńisligi	5
2-§. Fon Neyman algebrası hám onda ón funkcionallar	18
3-§. Ólsheuli operatorlardıń L_p keńisligi.....	26
4-§. Fon Neyman algebralarında L_p keńislikler.....	36
Juwmaqlaw.....	42
Ádebiyatlar.....	43

Kirisiw

Funkcionallıq keńisliklerdiń áhmiyetli klasslarınan biri integrallanıwshı funkciyalar klassları esaplanadı. Fon Neyman algebralarında integrallawlar menen kóplegen sırt el ilimpazları ilimiy izertlew jumısların alıp barǵan. Atap aytqanda, bul ilimpazlarǵa R.Arens, N.V.Trunov, I.Segal hám taǵıda basqa ilimpazlar misal boladı. Bul baǵdarda O`zbekistanda Sh.A. Ayupov, V.I. Chilin, K.K. Kundaybergenov, R.Z. Abdullaevlar hámde olardıń sháğırtleri tárepinen ilimiy izertlew jumısların alıp barılıp atır.

Sońǵı jıllarda ólshemli operatorlar algebraları hám ondaǵı hár qıylı operatorlar keńnen úyrenilmekte.

Ólshemli operatorlar algebralarınıń tiykarǵı qásiyetleri M.A. Muratov hám V.I. Chilinlerdiń 2007 jılǵı monografiyasında keńnen úyrenilgen. Bul monografiyada ólshemli, total ólshemli hám lokal` ólshemli operatorlar algebralarınıń tiykarǵı qásiyetleri qaralǵan. Bul algebralardıń bir-biri menen ústpe-úst túsiw shártleri [13] jumısta tabılǵan.

Bul algebralarda hár qıylı jıynaqlılıqlar hám topologiyalar, atap aytqanda, ólshem boyınsha jıynaqlılıq, tártip boyınsha jıynaqlılıq, derlik jıynaqlılıq, eki tárepleme derlik jıynaqlılıq túrleri qaralǵan.

Bul pitkeriw qániygelik jumısı ólshewli operatorlar algebralarınıń ules algebraları esaplanǵan L_p keńisliklerdi uyreniwge arnalǵan.

Jumısta tórt paragraf keltirilgen bolıp, olardıń hár birinde bir qansha tusinik hám qásiyetler qarastırıladı.

Birinshi paragraf sıızqlı uzliksiz operatorlar keńisliklerin uyreniuge arnaladı.

Ekinshi paragraf fon Neyman algebrası hám onda oń funkcionallardı uyreniuge arnalǵan bolıp, bunda fon Neyman algebrasındaǵı oń funkcionallıq bolǵan iz, salmaq, halat sıyaqlı tusinikler keltiriledi.

Jumıstıń ushinshi paragrafında L_p keńisliktiń dara jaǵdayı bolǵan L_1 keńisligi uyreniledi.

Pitkeriw qániygelik jumıstıń tórtinshi paragrafinda izge qarata L_p keńisligi hámde salmaqqa qarata L_p keńisligi uyreniledi.

Jumıstı tayarlawda ádebiyatlar diziminde keltirilgen [1-24] resurslardan paydalanıldı.

1-§. Sızıqlı úzliksiz operatorlar keńisligi

Bul paragrafta dáslep sızıqlı operatorlardı úyrenemiz. Sızıqlı úzliksiz shegaralanǵan operatorlar keńisligi $L(X, Y)$ tiń tolıqlıǵı haqqındaǵı teoremanı dálilleniwin keltiremiz. Operatorlar izbe-izliginiń kúshsiz, kúshli (noqatlı) hám teń ólshemli (norma boyınsha) jıynaqlılıqlardı úyrenemiz.

Meyli X hám Y sızıqlı normalanǵan keńislikler berilgen bolsın.

Anıqlama 1.1. X keńislikten alınǵan hár bir x elementke Y keńisliktiń birden bir elementin sáykes qoyıwshı

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

sáwlelendiriw operator dep ataladı.

Ulıwma alganda A operator X tiń hámme jerinde anıqlanǵan bolıwı shárt emes. Bul jaǵdayda Ax bar hám $Ax \in Y$ bolǵan barlıq $x \in X$ lar kópligi A operatordıń anıqlanıw oblastı dep ataladı hám $D(A)$ kóriniste belgilenedi.

Meyli $D(A)$ sızıqlı kópobrazlıq bolsın.

Anıqlama 1.2. Eger qálegen $x, y \in D(A) \subset X$ elementler hám $\alpha, \beta \in C$ sanlar ushın

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

teńlik orınlı bolsa, A sızıqlı operator dep ataladı.

Anıqlama 1.3. Eger qálegen $\varepsilon > 0$ ushın sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bar bolıp, $\|x - x_0\| < \delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x \in D(A)$ lar ushın $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ teńsizlik orınlansa, A operator $x = x_0$ elementte úzliksiz dep ataladı.

Anıqlama 1.4. Eger x_0 elementke jıynaqlı qálegen $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın $\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ bolsa, onda A operator x_0 elemente úzliksiz dep ataladı.

Eger A operator qálegen $x \in D(A)$ elemente úzliksiz bolsa, A úzliksiz operator dep ataladı.

Anıqlama 1.5. $Ax = 0$ teńlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x \in X$ lar kópligi A operatordıń yadrosı dep ataladı hám $\ker A$ arqalı belgilenedi.

Anıqlama 1.6. Bazı-bir $x \in D(A)$ ushın $y = Ax$ orınlanatuǵın $y \in Y$ ler kópligi A operatordıń mánisler oblastı dep ataladı hám $\operatorname{Im} A$ yamasa $R(A)$ kóriniste belgilenedi.

Anıqlama 1.7. $A : X \rightarrow Y$ sıızqlı operator bolsın. Eger sonday $C > 0$ sanı tabılıp, qálegen $x \in D(A)$ ushın $\|Ax\| \leq C\|x\|$ teńsizlik orınlı bolsa, A shegaralanǵan operator dep ataladı. Bul teńsizlikti qanaatlantırıwshı C sanlar kópliginiń anıq tómengi shegarası A operatordıń norması dep ataladı hám $\|A\|$ menen belgilenedi, yaǵnıy $\|A\| = \inf C$.

Teorema 1.1. X normalanǵan keńislikti Y normalanǵan keńislikke sáwlelendiriwshı sıızqlı shegaralanǵan operatordıń norması $\|A\|$ ushın

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

teńlik orınlı.

Dálillew. Tómendegishe belgilew kiritemiz

$$\alpha = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A sızılı operator bolǵanı ushın

$$\alpha = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Qálegen $x \neq 0$ ushın

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha.$$

Demek, qálegen $x \in X$ ushın $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$. Bunnan $\|A\| \leq \alpha$. Anıq joqarı shegaranıń anıqlamasınan, qálegen $\varepsilon > 0$ san ushın, sonday $x_\varepsilon \neq 0$ element bar

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|A\|$$

teńsizlik orınlı. Bul jerde $\varepsilon > 0$ qálegen bolǵanı ushın $\alpha \leq \|A\|$. Demek, $\|A\| = \alpha$ teńlik kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Saldar 1.1. Sızılı shegaralangan A operator ushın

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

teńlik orınlı.

X normalangan keńislikti Y normalangan keńislikke sáwlelendiriwshi sızılı shegaralangan operatorlar kópligin $L(X, Y)$ arqalı belgileymiz. Dara jaǵdayda, $Y = X$ bolsa $L(X, Y) = L(X)$.

Saldar 1.2. Qálegen $A \in L(X, Y)$ hám $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ ushın $\|Ax\| \leq \|A\|$ teńlik orınlı.

Anıqlama 1.8. $A : X \rightarrow Y$ hám $B : X \rightarrow Y$ sıızılıq operatorlardıń qosındısı dep, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementke $y = Ax + Bx \in Y$ elementti sáykes qoyıwshı $C = A + B$ operatorǵa aytıladı.

Eger $A, B \in L(X, Y)$ bolsa, onda $C \in L(X, Y)$ boladı. Haqıyqatında da, C nıń sıızılıq ekenligi kórinip turıptı. Shegaralanǵan ekenligin kórsetemiz.

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

qatnastan $\|C\| \leq \|A\| + \|B\|$ teńsizlik kelip shıǵadı.

Anıqlama 1.9. $A : X \rightarrow Y$ sıızılıq operatorlardıń α sanǵa kóbeymesi x elementke αAx elementti sáykes qoyıwshı operator sıpatında anıqlanadı, yaǵnıy $(\alpha A)(x) = \alpha Ax$.

Anıqlama 1.10. $A : X \rightarrow Y$ hám $B : Y \rightarrow Z$ sıızılıq operatorlar berilgen bolıp $R(A) \subset D(B)$ bolsın. B hám A operatorlardıń kóbeymesi dep, hár bir $x \in D(A)$ ǵa Z keńisliktiń $z = B(Ax)$ elementin sáykes qoyıwshı $C = BA : X \rightarrow Z$ operatorǵa aytımız.

Eger A hám B sıızılıq shegaralanǵan operatorlar bolsa, onda C da sıızılıq shegaralanǵan operator boladı hám $\|C\| \leq \|B\|\|A\|$ teńsizlik orınlı. Haqıyqatında da,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\|\|Ax\|_Y \leq \|B\|\|A\|\|x\|_X.$$

Bunnan joqarıdaǵı teńsizlik kelip shıǵadı.

Operatorlardı qosıw hám kóbeytiw assatsiativ boladı. Qosıw kommutativ, biraqta kóbeytiw ámeli kommutativ emes.

Joqarıda ayılǵanlardan tómendegi teorema kelip shıǵadı.

Teorema 1.2. $L(X, Y)$ normalanǵan keńislik boladı.

Teorema 1.3. $A : X \rightarrow Y$ sıızıqlı operatorlar berilgen bolsın. Onda tómendegi tastıyıqlar orınlı:

- 1) A operator bazı bir x_0 elementte úzliksiz;
- 2) A operator úzliksiz;
- 3) A operator shegaralanǵan.

Dálillew. 1) $\Rightarrow$ 2). Sıızıqlı A operatordıń bazı bir x_0 elementte úzliksiz ekenliginen onıń qalegen elemente úzliksiz ekenligin keltirip shıǵaramız.

A operator x_0 elementte úzliksiz bolǵanı ushın, x_0 ge umtılıwshı qálegen $\{x_n^0\}$ izbe-izlik ushın $Ax_n^0 \rightarrow Ax_0$. Qálegen $x' \in D(A)$ element ushın, $x'_n \rightarrow x'$ ekenliginen $Ax'_n \rightarrow Ax'$ kelip shıǵatuǵınlıǵın kórsetemiz. $y'_n \rightarrow x'_n - x' + x_0 \rightarrow x_0$ dep alamız. Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ay'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x'_n - x' + x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax'_n - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bunnan $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n = Ax'$ ekenligi kelip shıǵadı. Demek, A operator qálegen x' elementte úzliksiz.

2) $\Rightarrow$ 3). A operatordıń úzliksiz ekenliginen onıń shegaralanǵan ekenligin keltirip shıǵaramız. Kerisinen boljayıq, A sıızıqlı operator úzliksiz bolıp, biraqta shegaralanǵan bolmasın, yaǵnıy qálegen $C > 0$ san ushın sonday $x_c \in D(A)$ element bar bolıp, $\|Ax_c\| \geq C\|x_c\|$ bolsın. Eger $C = n \in N$ desek, qalegen $n \in N$ ushın sonday $x_n \in D(A)$ bar bolıp, $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$ teńsizlik orınlanadı. Tómendegi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$$

izbe-izlikti qaraymız. Korinip turıptı, $\xi_n \rightarrow 0$, yaǵnıy

$$\|\xi_n - 0\| = \left\| \frac{x_n}{n \|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|x_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ekinshi tárepten,

$$\|A\xi_n - A0\| = \left\| A \left(\frac{x_n}{n \|x_n\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{n \|x_n\|} Ax_n \right\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|Ax_n\| \geq 1.$$

Bul qarama-qarsılıq A shegaralanǵan ekenligin kórsetedi.

3) $\Rightarrow$ 1). A sıızıqlı shegaralanǵan operatordıń bazı bir elemente úzliksiz ekenligin kórsetemiz.

Anıqlama boyınsha, sonday $C > 0$ san bar bolıp, qalegen $x \in D(A)$ ushın $\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X$ teńsizlik orınlı boladı. Aytayıq, $x_n \rightarrow x$ qálegen izbe-izlik bolsın, onda $Ax_n \rightarrow Ax$ ekenligin kórsetemiz:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

yaǵnıy $Ax_n \rightarrow Ax$. Teorema dálillendi.

Meyli endi $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar izbe-izligi hám $A \in L(X, Y)$ operator berilgen bolsın.

Anıqlama 1.11. Eger $n \rightarrow \infty$ bolǵanda $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ bolsa, $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa norma boyınsha jıynaqlı yamasa teń ólshemli jıynaqlı dep ataladı hám $A_n \xrightarrow{u} A$ belgilenedi.

Anıqlama 1.12. Eger qálegen $x \in X$ ushın $n \rightarrow \infty$ da $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ bolsa, $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshli jıynaqlı yamasa noqatlı jıynaqlı dep ataladı hám $A_n \xrightarrow{s} A$ belgilenedi.

Anıqlama 1.13. Eger qálegen $f \in Y^*$ hám qálegen $x \in X$ ushın $n \rightarrow \infty$ da $f(A_n x) \rightarrow f(Ax)$ bolsa, onda $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshsiz jıynaqlı dep ataladı hám $A_n \xrightarrow{w} A$ belgilenedi.

Bul anıqlamanı gilbert keńisliginde tómendegishe jazıwǵa boladı.

Anıqlama 1.14. Eger qálegen $x, y \in H$ elementler ushın $n \rightarrow \infty$ da $(A_n x, y) \rightarrow (Ax, y)$ bolsa, $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshsiz jıynaqlı dep ataladı.

Endi norma boyınsha jıynaqlı operatorlar izbe-izligi kúshli jıynaqlı ekenligin hám kúshli jıynaqlı operatorlar izbe-izligi kúshsiz jıynaqlı ekenligin dálilleybiz.

Lemma 1.1. Eger $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar izbe-izligi bazı bir $A \in L(X, Y)$ operatorǵa norma boyınsha jıynaqlı bolsa, onda $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshli jıynaqlı boladı.

Dálillew. Lemma shártine kóre $n \rightarrow \infty$ da $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Onda qálegen $x \in X$ ushın

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\|$$

sanlı teńsizlikke iye bolamız. Matematikalıq analizden belgili, teńsizliklerde limitke ótiw múmkin. Usıǵan kóre

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| \|x\| = 0.$$

Demek, $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshli jıynaqlı boladı.

Lemma 1.2. Eger $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ operatorlar izbe-izligi bazı bir $A \in L(X, Y)$ operatorǵa kúshli jıynaqlı bolsa, onda $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshsiz jıynaqlı boladı.

Dálillew. Lemma shártine kóre qálegen $x \in X$ ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\| = 0.$$

Onda qálegen $x \in X$ hám $f \in Y^*$ ushın

$$0 \leq |f(A_n x) - f(Ax)| = |f(A_n x - Ax)| \leq \|A_n x - Ax\| \|f\|$$

sanlı teńsizlikke iye bolamız. Bul teńsizlikte $n \rightarrow \infty$ da limitke ótsek,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(A_n x) - f(Ax)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\| \|f\| = 0$$

qatnasına iye bolamız. Demek, $\{A_n\}$ operatorlar izbe-izligi A operatorǵa kúshsiz jıynaqlı boladı eken.

Teorema 1.4. Eger Y banax keńisligi bolsa, onda $L(X, Y)$ keńislikte tolıq, yaǵnıy banax keńisligi boladı.

Dálillew. $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ qálegen fundamental izbe-izlik bolsın, yaǵnıy $n, m \rightarrow \infty$ da $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$. Onda qálegen $x \in X$ ushın $n, m \rightarrow \infty$ da

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \rightarrow 0.$$

Sonın ushın qálegen $x \in X$ ta $\{A_n x\} \subset Y$ izbe-izlik fundamental boladı. Y tolıq keńislik bolǵanlıqtan, $\{A_n x\}$ izbe-izlik bazı bir $y \in Y$ elementke jıynaqlı. Demek, hár bir $x \in X$ qa $\{A_n x\}$ izbe-izliktiń limiti bolǵan birden bir $y \in Y$ element sáykes qoyladı. Bul sáykeslikti $A : X \rightarrow Y$ arqalı belgileymiz:

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = y.$$

Endi $A \in L(X, Y)$ ekenligin kórsetemiz. Sızıqlılıǵı:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) = \\ &= \alpha_1 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2. \end{aligned}$$

Endi A nıń shegaralangan ekenligin kórsetemiz. Shártke kóre,

$$\|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Demek,

$$\|\|A_n\| - \|A_m\|\| \leq \|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Bunnan $\{\|A_n\|\}$ sanlı izbe-izliktiń fundamental ekenligi kelip shıǵadı. Haqıyqıy sanlar keńisligi tolıq bolǵanı ushın, $\{\|A_n\|\}$ sanlı izbe-izlik jıynaqlı, jıynaqlı izbe-izlik bolsa shegaralangan boladı, yaǵnıy sonday $K > 0$ sanı bar bolıp, qálegen

$n \in N$ ushın $\|A_n\| \leq K$ teńsizlik orınlanadı. Normanıń anıqlamasınan $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq K \|x\|$. Bunnan

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq K \|x\|.$$

Bul jerde biz normanıń úzliksizliginen paydalandıq. Endi $\{A_n\}$ izbe-izlikti sıızıqlı operatorlar keńisiligi $L(X, Y)$ te A ға jıynaqlı ekenligin kórsetemiz. Qálegen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday n_0 san bar bolıp, barlıq $n > n_0$, $p \in N$ hám $\|x\| \leq 1$ ler ushın

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlanadı. Eger sońǵı teńszlikte $p \rightarrow \infty$ da limitke ótsek hám normanıń úzliksizliginen paydalansaq, qálegen $n > n_0$ hám $\|x\| \leq 1$ ler ushın

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

teńsizlikke iye bolamız. Sonıń ushın qálegen $n > n_0$ de

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon.$$

Demek, $L(X, Y)$ keńislikginde norma mánisinde $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Demek, $L(X, Y)$ tolıq keńislik eken.

Saldar 1.3. X normalanǵan keńislikke túyinles bolǵan $X^* = L(X, C)$ keńislik banax keńisligi boladı.

Teorema 1.5. (Banax-Shteynxaus yamasa teń ólsheмли shegaralanǵanlıq printsipti). Eger sıızıqlı úzliksiz operatorlardıń $\{A_n\}$ izbe-izligi X banax keńisliginiń hár bir elementinde shegaralanǵan (yaǵnıy hár bir $x \in X$ ushın sonday $M_x > 0$ bar bolıp, qálegen $n \in N$ ushın $\|A_n x\| \leq M_x$ teńsizlik orınlı) bolsa, onda bul operatordıń normalarınan dúzilgen $\{\|A_n\|\}$ sanlı izbe-izlik te shegaralanǵan boladı.

Dálillew. Dáslep $\|A_n x\| \leq M_x$ shárt orınlanǵanda sonday

$$B[a_0, r_0] = \{x \in X : \|x - a_0\| \leq r_0\}$$

tuyıq shar bar bolıp, bul sharda $\{A_n x\}$ izbe-izlik shegaralanǵan ekenligin (yaǵnıy sonday $M_0 > 0$ san bar bolıp, qálegen $x \in B[a_0, r_0]$ hám barlıq $n \in N$ lerde $\|A_n x\| \leq M_0$ teńlik orınlanıwın) kórsetemiz. Kerisinen boljayıq, yaǵnıy $\{A_n x\}$ izbe-izlik hesh bir tuyıq sharda shegaralanǵan bolmasın. Qálegen $B[a_0, \varepsilon_0]$ shar alamız. $\{A_n x\}$ izbe-izlik $B[a_0, \varepsilon_0/2]$ sharda shegaralanbaǵan bolǵanı ushın sonday $x_1 \in B[a_0, \varepsilon_0/2]$ element hám n_1 nomer bar bolıp, $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ boladı. A_{n_1} operatordıń úzliksizliginen bul teńsizlik $B[x_1, \varepsilon_1/2] \subset B[a_0, \varepsilon_0/2]$ sharda da orınlanadı. $B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}$ izbe-izlik shegaralanbaǵan bolǵanı ushın sonday $x_2 \in B[x_1, \varepsilon_1/2]$ element hám n_2 nomer bar bolıp, $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ boladı. A_{n_2} operatordıń úzliksizliginen bul teńsizlik $B[x_2, \varepsilon_2] \subset B[x_1, \varepsilon_1/2]$ sharda da

orınlanadı hám taǵı basqa k -adımında $B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}]$ shardıń x_k elementinde $\|A_{n_k} x_k\| > k$ shárt orınlanadı. A_{n_k} nıń úzliksizliginen bul teńsizlik $B[x_k, \varepsilon_k] \subset B[x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}/2]$ sharda da orınlanadı. Demek, ishpe-ish jaylasqan hám radiusları nolge umtılıwshı

$$B[x_0, \varepsilon_0] \supset B[x_1, \varepsilon_1] \supset \dots \supset B[x_k, \varepsilon_k] \supset \dots$$

tuyıq sharlar izbe-izliginiń barlıǵına tiyisli bolǵan $\bar{x} \in B[x_k, \varepsilon_k]$ element bar hám barlıq $k \in N$ lerde $\|A_{n_k} \bar{x}\| > k$ teńsizlik orınlanadı. Bul $\|A_n x\| \leq M_x$ teńsizlikke qarama-qarsı. Solay etip, $\{A_n x\}$ izbe-izlik shegaralanǵan bolatuǵın $B[a_0, r_0]$ tuyıq shar bar. Qálegen $x \in B[\theta, 1]$ ushın $x' = r_0 x + a_0$ element $B[a_0, r_0]$ sharda jatadı. Sonıń ushın, qalegen n de $\|A_n x'\| \leq M_0$. Endi $x = r_0^{-1}(x' - a_0)$ teńlikten paydalansaq,

$$\begin{aligned} \|A_n x\| &= \left\| A_n \left(\frac{1}{r_0} (x' - a_0) \right) \right\| = \frac{1}{r_0} \|A_n x' - A_n a_0\| \leq \\ &\leq \frac{1}{r_0} (\|A_n x'\| + \|A_n a_0\|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + \|A_n a_0\|) \leq \frac{1}{r_0} (M_0 + M_{a_0}) = M. \end{aligned}$$

Onda

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x\| \leq M.$$

Teorema dálillendi.

Teorema 1.6. Eger X hám Y banax keńislikleri bolsa, onda $L(X, Y)$ operatorlar keńisligi kúshli jıyınalılıq boyınsha tolıq boladı.

Dálillew. Qálegen $x \in X$ ta $\{A_n x\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolǵanı ushın, hár bir $x \in X$ ta $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ bar hám onı $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = y$ teńlik penen anıqlanıwshı A operatorǵa iye bolamız. Bul operatordıń sıızıqlılıǵı teorema 1 diń dálilinde keltirildi. Endi onıń shegaralangán ekenligin kórsetemiz. Hár bir $x \in X$ ta $\{A_n x\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolǵanı ushın, ol shegaralangán boladı. Banax-Shteynxaus teoreması boyınsha, qálegen $n \in N$ de $\|A_n\| \leq M$ teńsizlik orınlı. Bunnan

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq M \|x\|.$$

Demek, $\|A\| \leq M$. Teorema dálillendi.

2-§. Fon Neyman algebrası hám onda óń funkcionallar

Meyli H - Hilbert keńisligi, al $B(H)$ - H taǵı barlıq shegaralanǵan sıızıqlı operatorlardıń C^* -algebrası bolsın. Hár bir $\varepsilon \in H$ ushın

$$\rho_\varepsilon(T) = \|T_\varepsilon\|_H, \quad T \in B(H)$$

yarım normanı anıqlaymız.

Bul $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon \in H}$ yarım normalar sisteması menen $B(H)$ ta anıqlanǵan lokal dónes topologiyanı $B(H)$ taǵı kúshli topologiya yamasa S_0 -topologiya dep ataymız. Bul topologiya Xausdorf topologiyası boladı, hámde $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq B(H)$ izbe-izligi $T \in B(H)$ operatorlarına (S_0) jıynaqlı bolıwı ushın $\forall \varepsilon \in H$ ushın $\|T_\alpha(\varepsilon) - T(\varepsilon)\|_H \rightarrow 0$ bolıwı zárúr hám jetkilikli.

(S_0) -topologiyası $B(H)$ taǵı $\|\cdot\|_{B(H)}$ norma menen anıqlanǵan teń ólshemli topologiyadan kúshsiz boladı.

$Z(M) = \{T \in M : TS = ST, \forall S \in M\}$ -topologiyaǵa qarata $B(H)$ topologiyalıq vektorlıq keńislik boladı,

yaǵnıy qosıw hám skalyarǵa kóbeytiw ámeleri úzliksiz boladı.

$B(H)$ ta jáne bir lokal dónes Xusdorf topologiyasın anıqlayız, bul topologiya tómendegi yarım normalar sisteması menen anıqlanadı:

$$\rho(\{\varepsilon_i\}, \{\eta_i\}(T)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (T\varepsilon_i, \eta_i) \right),$$

bul jerde $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ ushın

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\varepsilon_i\|_H^2 < \infty \text{ hám } \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|_H^2 < \infty$$

teńsizlikleri orınlı.

Bul topologiya ultra kúshsiz (operatorlıq) topologiya boladı $((\omega)$ -topologiya).

Ultra kúshsiz operatorlıq topologiya $B(H)$ tağı teń ólshemli topologiyadan kúshsiz boladı. $B(H)$ tağı shegaralanğan úles kópliklerde ultra kúshsiz topologiya kúshsiz operatorlıq topologiya menen sáykes keledi.

Meyli $M - B(H)$ tağı qandayda bir úles kóplik.

M' menen M kópliginiń kommutativ belgileymiz:

$$M' = \{s \in B(H) : TS = ST, \forall T \in M\}$$

Bunnan bikommutant $M'' = (M')'$ tıń M di óz ishine alıwı kelip shıǵadı, hámde M' kópligi $B(H)$ da unitar úles algebra boladı.

Anıqlama 2.1. Eger $M \subseteq B(H)$ *-úles algebrası ushın $M = M''$ teńligi orınlı bolsa, onda M algebranı fon Neyman algebrası delinedi.

Bul jaǵdayda M fon Neyman algebrası H Hilbert keńisliginde

háreket etedi. Usı menen birge M'' -kópligi $B(H)$ ta teń ólshemli topologiya boyınsha tuyıq úles kóplik boladı, onda M fon Neyman algebrası C^* -algebra boladı.

Fon Neyman algebrasınıń T operatorınıń norması $\|T\|_M$ menen belgileymiz.

Teorema 2.1. Aytayıq $M = B(H)$ taǵı unitar $*$ -algebra bolsın, al M_1 bolsa M degi birlik shar, onda tómendegi shártler ekvivalent boladı:

- 1) $M = M''$;
- 2) M - kúshli operatorlıq topologiya boyınsha tuyıq;
- 3) M - kúshsiz operatorlıq topologiya boyınsha tuyıq;
- 4) M - ultra kúshsiz operatorlıq topologiya boyınsha tuyıq;
- 5) M_1 - kúshli operatorlıq topologiya boyınsha tuyıq;
- 6) M_1 - kúshsiz operatorlıq topologiya boyınsha tuyıq;
- 7) M_1 – ultra kúshsiz operatorlıq boyınsha tuyıq.

Fon Neyman algebrasına eń ápiwayı mısallar bul $B(H)$ algebrası hámde birlik elementiniń payda etken $C_H = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ kópligi, bul jerde birlik element $B(H)$ taǵı birlik operator.

Mına $M \subseteq B(H)$ kópligi ushın $T \in M$ bolıwınan $T^* \in M$ bolıwı kelip shıqsa, onda M kópligin óz-ózine túyinles kóplik delinedi.

Eger M óz-ózine túyinles bolsa, onda bunnan kópligi fon Neyman algebrası boladı.

M -fon Neyman algebrası ushın

$$Z(M) = \{T \in M : TS = ST, \forall S \in M\}$$

kópligi M -algebranıń orayı delinedi.

Anıqlamadan $Z(M) = M \cap M' = M'' \cap M' = Z(M')$ ekenligi ayqın kórinedi, hámde $Z(M)$ -kommutativ fon Neyman algebrası boladı.

Eger $Z(M) = C_H$ teńligi orınlı bolsa, onda M fon Neyman algebrasın faktor dep ataymız.

Міна $\left(B(H)\right)' = \mathbf{C}_H$ теңлігі орынлы, яғни $B(H)$ фактор болады.

Берілген $\{H_i\}_{i \in I}$ Hilbert кеңістіктер классы үшін

$$H = \sum_{i \in I} H_i$$

gilbert qosındısı, ol

$$\left\{ \left\{ \varepsilon_i \right\}_{i \in I} : \varepsilon_i \in H_i, \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} \left\| \varepsilon_i \right\|^2 < \infty \right\}$$

кóплік sıяақılı болады, бунда algebraıq áмеллер koordinatalar boyınsha anıqlanadı, al skalyar kóbeyme bolsa

$$\left(\left\{ \varepsilon_i \right\}_{i \in I}, \left\{ \eta_i \right\}_{i \in I} \right) = \sum_{i \in I} \left(\varepsilon_i, \eta_i \right)_{H_i}$$

túrinde anıqlanadı.

Aytayıq M_i ler hár biri $i \in I$ ge sáykes túrde H_i gilbert кеңістіктерінде hárezet etiwshi fon Neyman algebraları bolsın. Міна $C^* - \prod_{i \in I} M_i$ C^* -kóbeymeniń hár bir $\{T_i\}_{i \in I}$ elementi ushın H Hilbert кеңістігінде T operatorın tómendegishe anıqlaymız:

$$T = \left(\left\{ \varepsilon_i \right\}_{i \in I} \right) = \left\{ T_i, \varepsilon_i \right\}_{i \in I}.$$

$H = \sum_{i \in I} H_i$ gilbert кеңістігінде hárezet etiwshi bunday operatorlardıń

hámмесinen kóплігі fon Neyman algebrası болады. Оны M_i , $i \in I$ fon Neyman algebralarınıń C^* -kóbeymesi delinedi, hámde

$$M = C^* - \prod_{i \in I} M_i$$

túrinde belgilenedi.

Eger indeksler kópligi I shekli bolsa, onda fon Neyman algebraların C^* -kóbeymesin

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i$$

túrinde de jazıw múmkin.

Aytayıq M -algebrası H gilbert keńisliginde háreket etiwshi fon Neyman algebrası bolsın. al M^* bolsa M ge túyinles keńislik, yaǵnıy M degi barlıq sıızıqlı hám sıızıqlı topologiyaǵa (teń ólshemli topologiyaǵa) qarata úzliksiz keńisligi.

M_* menen M degi barlıq (ω) -úzliksiz sıızıqlı funkcionallardı belgileymiz. Onda anıqlamadan M_* kóplitktiń M^* de sıızıqlı úles keńisligi ekenligi tuwrıdan tuwrı kelip shıǵadı.

Teorema 2.2. 1) M_* úles keńisligi M^* da norma boyınsha tuyıq hám $\langle f, T \rangle = f(T)$, $f \in M_*$, $T \in M$ kanonikalıq bi sıızıqlı formaǵa qarata $(M_*^*)^* = M$ boladı, usı menen birge M degi $\sigma(M, M_*)$ topologiya ultra kúshsiz topologiya menen sáykes keledi;

2) Eger $f - M$ de óń sıızıqlı funkcionallı bolsa, onda $f \in M$ bolıwı ushın hár bir $T_\alpha \uparrow T$, T_α , $T \in M$ dan $f(T_\alpha) \uparrow f(T)$ kelip shıǵıwı zárúr hám jetkilikli. (Bul jǵdayda f funkcionallı normal óń sıızıqlı funkcionallı delinedi);

3) Hár bir $f \in M_*$ sıızıqlı funkcionallı normalanǵan óń sıızıqlı funkcionallardıń sıızıqlı kombinaciyası boladı.

Fon Neyman alebrası

- atomlıq delinedi, eger qálegen nolden ózgeshe $E \in P(M)$ proektorı ushın sonday $p \in P(M)$ minimal proektor tabılıp $p \leq E$ orınlı bolsa;
- shekli delinedi, eger 1-shekli proektor bolsa;
- yarım shekli delinedi, eger qálegen $Z \in M$ oraylıq proektor ushın sonday nolden ózgeshe shekli $E \in P(M)$ proektorı tabılıp $E \leq Z$ bolsa;
- tipi I delinedi, eger qálegen $Z \in M$ oraylıq proektor ushın sonday nolden ózgeshe $E \in P(M)$ abel proektorı tabılıp $E \leq Z$ bolsa;
- tipi II delinedi, eger M yarım shekli bolıp, abel proektorına iye bolmasa;
- tipi III delinedi, eger M nolden ózgeshe shekli proektorǵa iye bolmasa;
- tipi I_{fin} delinedi, eger M -shekli tipi I algebra bolsa;
- tipi II_1 delinedi, eger M shekli tipi II algebra bolsa;
- diskret delinedi, eger M tipi I bolsa;
- úzliksiz delinedi, eger M tipi II yamasa tipi III bolsa,
- menshikli sheksiz delinedi, eger 1-menshikli sheksiz proektor bolsa.

Endi biz fon Neyman algebrası ushın salmaq, iz hámde halat túsiniqlerini kletiremiz.

M fon Neyman algebrasındaǵı ϕ – oń sıızıqlı funkconal salmaq delinedi, yaǵnıy

$$1) \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y); \quad x, y \in M$$

$$2) \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x);$$

$$3) \phi(x) \geq 0, \quad \forall x > 0;$$

shártleri orınlı.

Eger salmaq ushın

- $x = 0$ de $\phi(x) = 0$ bolsa anıq delinedi;

- $\phi(\mathbf{1}) < \infty$ bolsa shekli delinedi;
- $\phi(\mathbf{1}) = 1$ bolsa halat delinedi;
- qálegen $x \in M$ ushın $\phi(x^* x) = \phi(xx^*)$ bolsa iz delinedi.

Aytayıq $\mu - M$ fon Neyman algebrasında anıq normal yarım shekli iz bolsın. Onda Radon-Nikodim teoreması boyınsha M degi qálegen normal ϕ halat ushın M ge biriktirilgen sonday integrallanıwshı óń h operatori tabılıp, tómendegi shártler orınlı boladı:

$$\phi(x) = \mu(x), \quad \forall x \in M_+,$$

$$M(hx) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \left(h_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x h_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \right) = h(\mathbf{1} + \varepsilon h)^{-1}, \quad \varepsilon > 0$$

hám kerisinshe, M ge biriktirilgen qálegen integrallanıwshı óń peratorı M de joqarıdağı kóriniste halat anıqlaydı.

h operatorın $\frac{d\phi}{d\mu}$ menen belgileymiz, hámde ϕ halattan μ iz boyınsha

Radon-Nikodim tuwındısı dep ataymız.

Anıqlama 2.2. Anıq normal shekli M izli fon Neyman algebrasında anıqlanğan normal yarım shekli ϕ salmaq

- shekli delinedi, eger $\mu(h) < \infty$ bolsa;
- halat delinedi, eger $\mu(h) = 1$ bolsa;
- anıq delinedi, eger h^{-1} lokal ólshewli operator bolsa;
- iz delinedi, eger $h - M$ niń orayına biriktirilgen bolsa;

M fon Neyman algebrasında jáne bir anıqlama keltiremiz:

Mına $\tau : M_+ \rightarrow [0, \infty)$ funkcionalı M de iz dep ayıladı, eger

- 1) $\tau(T + S) = \tau(T) + \tau(S), \quad \forall S, T \in M_+$
- 2) $\tau(\lambda T) = \lambda \tau(T), \quad \forall T \in M_+, \quad \forall \lambda \geq 0;$
- 3) $\tau(v * Tv) = \tau(T), \quad \forall T \in M_+, \quad u, v \in U(M)$

shártler orınlı bolsa.

M fon Neyman algebrasında τ -izi

- shekli delinedi. eger qálegen $T \in M_+$ ushın $\tau(T) < \infty$ bolsa;

- yarım shekli delinedi eger qálegen $T \in M_+$ ushın

$$\tau(T) = \sup \{ \tau(s) : S \leq T, \quad \tau(s) < \infty \}$$

orınlı bolsa;

- anıq delinedi, eger $\tau(T) = 0, T \in M_+$ qatnasınan $T = 0$ ekenligi kelip

shıqsa;

- normal delinedi, eger $T_\alpha, T \in M_+$ lar ushın $T_\alpha \uparrow T$ qatnasınan

$\tau(T_\alpha) \uparrow \tau(T)$ qatnası kelip shıqsa.

3-§. Ólshewli operatorlardıń L_1 keńisligi

Meyli M -yarım shekli fon Neyman algebrası bolsın, τ -ondağı anıq normal yarım shekli iz, al $S(M, \tau)$ bolsa M ge biriktirilgen barlıq τ -ólshewli operatorlardıń $*$ -algebrası.

Аnıqlama 3.1. Eger $T \in S(M, \tau)$ operator ushın $\tau(|T|) < \infty$ bolsa, onda T operatorı τ -integrallanıwshı delinedi.

$S(M, \tau)$ $*$ -algebrasına tiyisli bolǵan barlıq τ -integrallanıwshı operatorlar kópligin $L_1(M, \tau)$ menen belgileymiz, hámde hár bir $T \in L_1(M, \tau)$ ushın

$$(\operatorname{Re} T)_+ \leq V_1 \cdot |T| V_1^*$$

belgilewin kiritemiz.

Teorema 3.1. Tómenдеgi tastıyıqlar orınlı:

- a) $L_1(M, \tau)$ kópligi $S(M, \tau)$ da sıızıqlı úles keńislik boladı, hám $\|\cdot\|_1$ funkciyası $L_1(M, \tau)$ da norma boladı;
- b) hár bir $A, B \in M$ operatorlar hám $T \in L_1(M, \tau)$ ushın tómendegi qatnaslar orınlı:

$$ATB \in L_1(M, \tau)$$

hám

$$\|ATB\|_1 \leq \|A\|_M \cdot \|B\|_M \cdot \|T\|_1;$$

- v) Eger $T \in L_1(M, \tau)$ bolsa onda $T^* \in L_1(M, \tau)$ boladı, hámde $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$;

- g) Eger $T \in L_1(M, \tau)$ hám $s \in S(M, \tau)$ lar ushın $S < T$ bolsa, onda $S \in L_1(M, \tau)$ hám $\|S\|_1 \leq \|T\|_1$ boladı.

d) Eger $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(M, \tau)$, $T \in L_1(M, \tau)$ lar ushın $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ bolsa, onda $T_n \rightarrow T$ boladı.

Dálilleniwi. a) Eger $T, S \in L_1(M, \tau)$ bolsa, onda

$$\tau(|T + S|) \leq \tau(|T|) + \tau(|S|) < \infty$$

boladı, bunnan $(T + S) \in L_1(M, \tau)$ hám $\|T + S\|_1 \leq \|T\|_1 + \|S\|_1$ boladı.

Eger $\alpha \in \mathbf{C}$ bolsa, onda $\tau(|\alpha T|) = |\alpha| \tau(|T|) < \infty$ boladı, yaǵnıy $\alpha T \in L_1(M, \tau)$ hámde $\|\alpha T\|_1 = \|\alpha\| \cdot \|T\|_1$ boladı.

Nátiyjede $L_1(M, \tau)$ kópligi $S(M, \tau)$ da sıızılı keńislik ekenligi kelip shıǵadı.

Bizge $\|T\|_1 \geq 0$ ekenligi belgili, eger $\tau(|T|) = \|T\|_1 = 0$ bolsa τ izdiń anıqlıǵınan $|T| = 0$ ekenligi, yaǵnıy $T = 0$ ekenligi kelip shıǵadı. Demek $\|\cdot\|$ funksiya $L_1(M, \tau)$ keńislikte norma boladı;

b) Aytayıq $A, B \in M$ hám $T \in L_1(M, \tau)$ bolsın. Onda qálegen $t > 0$ ushın

$$\mu(ATB)(t) \leq \|A\|_{\mu} \|B\|_{\mu} \mu(T)(t)$$

boladı. Bunnan

$$\tau(|ATB|) = \int_0^{\infty} \mu(ATB)(s) ds \leq \|A\|_M \|B\|_M \cdot \int_0^{\infty} \mu(T)(s) ds = \tau(|T|) < \infty$$

boladı, yaǵnıy $ATB \in L_1(M, \tau)$ hámde $\|ATB\|_1 \leq \|A\|_M \|B\|_M \|T\|_1$ boladı.

v) qálegen $t > 0$ ushın

$$\mu(|T *|)(t) = \mu(T *)(t) = \mu(T)(t) = \mu(|T|)(t)$$

boladı.

Sonlıqtan, $T \in L_1(M, \tau)$ ushın $T^* \in L_1(M, \tau)$ hám $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$ boladı.

g) Aytayıq $T \in L_1(M, \tau)$, $s \in S(M, \tau)$ hám $S < T$ bolsın, yaǵnıy

$$\int_0^t \mu(T)(S) ds \leq \int_0^t \mu(S)(S) ds \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(T)(S) ds = \tau(|T|) < \infty,$$

onda $S \in L_1(M, \tau)$ hám $\|S\|_1 \leq \|T\|_1$ boladı;

d) Aytayıq $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(M, \tau)$ hám $T \in L_1(M, \tau)$ ushın $\|T_n - T\|_1 \rightarrow 0$

bolsın. Tayınlangan $\varepsilon > 0$ ushın

$$|T_n - T| \geq |T_n - T| \cdot E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|) \geq \varepsilon E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|)$$

qatnası orınlı. Sonlıqtan

$$\tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \tau(|T_n - T|) = \frac{1}{\varepsilon} \|T_n - T\|_1 \rightarrow 0$$

boladı.

Nátiyjede qálegen $\delta > 0$ ushın sonday $n(\varepsilon, \delta)$ tabılıp $n \geq n(\varepsilon, \delta)$ ushın

$\tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|)) < \delta$ boladı.

Miná $0 \leq |T_n - T|(I - E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|)) \leq \varepsilon$ qatnasınan

$$\left\| |T_n - T| \left(I - E_{(\varepsilon, \infty)}(|T_n - T|) \right) \right\| \leq \varepsilon$$

boladı, bunnan $T_n \rightarrow T$ kelip shıǵadı.

Aytayıq $T \in L_1(M, \tau)$ bolsın. Onda sonday $V_1, V_2, V_3, V_4 \in M$ izometriyalar bar bolıp

$$(\operatorname{Re} T)_+ \leq V_1 \cdot |T| V_1^*$$

$$(\operatorname{Re} T)_- \leq V_2 \cdot |T| V_2^*,$$

$$(\operatorname{Im} T)_+ \leq V_3 \cdot |T| V_3^*$$

$$(\operatorname{Im} T)_- \leq V_4 \cdot |T| V_4^*$$

qatnasları orınlı boladı.

Nátiyjede

$$\begin{aligned} \tau((\operatorname{Re} T)_+) &= \int_0^\infty \mu((\operatorname{Re} T)_+)(t) dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty \mu(V_1 |T| V_1^*)(t) dt \leq \int_0^\infty \mu |T|(t) dt = \tau(|T|) < \infty \end{aligned}$$

qatnasına iye bolamız, yaǵnıy $(\operatorname{Re} T)_+ \in L_1(M, \tau)$.

Usıǵan uqsas

$$(\operatorname{Re} T)_-, (\operatorname{Im} T)_+, (\operatorname{Im} T)_- \in L_1(M, \tau)$$

boladı. Sonlıqtan

$$\tilde{\tau}(T) = \tau((\operatorname{Re} T)_+) - \tau((\operatorname{Re} T)_-) + i\tau((\operatorname{Im} T)_+) - i\tau((\operatorname{Im} T)_-)$$

sanı anıqlanadı.

Anıqlama 3.2. Joqarıdağı $\tilde{\tau}(T)$ sanı $T \in L_1(M, \tau)$ operatorınıń τ iz boyınsha integralı delinedi.

Qálegen $T \in L_1^+(M, \tau) = \{S \in L_1(M, \tau) : S \geq 0\}$ operatorı ushın $\tilde{\tau}(T)$ sanı $\tau(T)$ menen sáykes keledi.

Tastıyqlaw 3.1. Eger $T \in L_1(M, \tau)$ hám $S_1, S_2 \in L_1^+(M, \tau)$ ushın $T = S_1 - S_2$ bolsa, onda $\tilde{\tau}(T) = \tau(S_1) - \tau(S_2)$ boladı. $\tilde{\tau}$ -funkciyası $L_1(M, \tau)$ da sıızıqlı funkcional boladı.

Dálillenıwi. Mına $T = (\operatorname{Re} T)_+ - (\operatorname{Re} T)_- = S_1 - S_2$ qatnasınan $(\operatorname{Re} T)_+ + S_2 = (\operatorname{Re} T)_- + S_1$ - boladı, onda

$$\tau((\operatorname{Re} T)_+) + \tau(S_2) = \tau((\operatorname{Re} T)_- + S_1) = \tau((\operatorname{Re} T)_-) + \tau(S_1)$$

orınlı. Nátiyjede

$$\tau(S_1) - \tau(S_2) = \tau((\operatorname{Re} T)_+) - \tau((\operatorname{Re} T)_-) = \tilde{\tau}(T)$$

teńligine iye bolamız.

Endi tastıyqlawdıń ekinshi bólimin dálilleymiz.

Aytayıq $T, S \in L_1(M, \tau)$, $T^* = T$ hám $S^* = S$ bolsın. Onda

$$T + S = ((\operatorname{Re} T)_+ + (\operatorname{Re} S)_+) - ((\operatorname{Re} T)_- + (\operatorname{Re} S)_-)$$

boladı.

Tastıyıqtıń birinshi bólimi boyınsha mına

$$\tilde{\tau}(T + S) = \tau\left(\left(\operatorname{Re} T\right)_+ + \left(\operatorname{Re} S\right)_+\right) - \tau\left(\left(\operatorname{Re} T\right)_- + \left(\operatorname{Re} S\right)_-\right) = \tilde{\tau}(T) + \tilde{\tau}(S)$$

qatnasına iye bolamız.

Aytayıq $T, S \in L_1(M, \tau)$ lar qálegen operatorlar bolsın. Onda $T + S = (\operatorname{Re} T + \operatorname{Re} S) + i(\operatorname{Im} T + \operatorname{Im} S)$ boladı, sonlıqtan

$$\tilde{\tau}(T + S) = \tau(\operatorname{Re} T + \operatorname{Re} S) + i\tilde{\tau}(\operatorname{Im} T + \operatorname{Im} S) = \tilde{\tau}(T) + \tilde{\tau}(S)$$

boladı. Usıǵan uqsas, qálegen $\alpha = a + ib \in \mathbf{C}$, $a, b \in \mathbf{R}$ kompleks sanı ushın $\tilde{\tau}(\alpha T) = \alpha \tilde{\tau}(T)$ teńligi tekseriledi.

Teorema 3.2. $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ normalanǵan keńisligi tolıq normalanǵan keńislik boladı.

Dálilleniwi. Dálillewdi bir neshe etapta ámelge asıramız.

1) Aytayıq $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligi $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ keńisliginde Koshi izbe-izligi bolsın, hámde $0 \leq T_n \leq T_{n+1}$. Biz sonday $T \in L_1(M, \tau)$ operatorı bar bolıp $T_n \uparrow T$ hám $\|T - T_n\|_1 \rightarrow 0$ ekenligin kóresetemiz.

Eger $n, k \rightarrow \infty$ bolsa $\|T_k - T_n\|_1 \rightarrow 0$ bolǵanlıqtan $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligi $(S(M, \tau), t_\tau)$ da Koshi izbe-izligi boladı.

$(S(M, \tau), t_\tau)$ keńisligi tolıq topologiyalıq keńislik bolǵanlıqtan sonday $T \in S(M, \tau)$ operatorı tabılıp

$$T_n \xrightarrow{t_\tau} T$$

boladı. Onda derlik barlıq $t > 0$ ushın $T_n \uparrow T$ hám $\mu(T_n)(t) \rightarrow \mu(T)(t)$ boladı.

Endi $T \in L_1(M, \tau)$ ekenligin kórsetemiz. Haqıyqatında da,

$$\int_0^\infty |\mu(T_n)(t) - \mu(T)(t)| dt \leq \|T_n - T\|_1$$

bolǵanlıqtan $\{\mu(T_n)(t)\}_{n=1}^\infty$ funkciyalar izbe-izligi $L_1((0; \infty), m)$ banax keńisliginde Koshi izbe-izligi boladı. bull jerde $m - (0; \infty)$ yarım kósherindegi sheksiz Lebeg ólshemi. Sonlıqtan sonday $f \in L_1((0; \infty), m)$ funkciya tabılıp

$$\|\mu(T_n) - f\|_{L_1((0; \infty), m)} \rightarrow 0$$

qatnası orınlı boladı.

Derlik hámme $t > 0$ ushın $\mu(T_n)(t) \rightarrow \mu(T)(t)$ bolǵanlıqtan derlik hámme jerde $\mu(T)(t) = f(t)$ boladı, yaǵnıy $\int_0^\infty |\mu(T)(t)| dt < \infty$ yamasa $T \in L_1(M, \tau)$ boladı.

Endi $\|T - T\|_1 \rightarrow 0$ ekenligin kórsetemiz. Úles izbe-izlikke ótip,

$$\|T_{n+1} - T_n\| \leq \frac{1}{n^3}, \quad n = 1, 2 \text{ dep esaplawǵa boladı.}$$

Mına $S_n = T_1 + \sum_{k=1}^n k(T_{k+1} - T_k)$ belgilewin kiritemiz. Buniń ushın

$$\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(M, \tau), \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \text{ hámde, eger } n < m \text{ bolsa, onda}$$

$$\|S_m - S_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^m k(T_{k+1} - T_k) \right\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

qatnası $n, m \rightarrow \infty$ bolganda orınlı boladı. Bunnan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligi $L_1(M, \tau)$ keńislikte Koshi izbeizligi boladı, hámde joqarıda dálillengen boyınsha sonday $S \in L_1(M, \tau)$ operatorı tabılıp $S_n \uparrow S$ boladı.

Endi hár bir $n = 1, 2, \dots$ leer ushın

$$\begin{aligned} n(T - T_n) &= n(\sup(T_m - T_n)) = n(\sup T_m - T_n) = n\left(\sup \sum_{k=n}^{m-1} (T_{k+1} - T_k)\right) = \\ &= \sup \left(\sum_{k=n}^{m-1} n(T_{k+1} - T_k) \right) \leq \sup \sum_{k=n}^{m-1} k(T_{k+1} - T_k) \leq S \end{aligned}$$

bolıwınan $0 \leq T - T_n \leq \frac{S}{n}$ ekenligi nátiyjede $\|T - T_n\|_1 \leq \frac{1}{n} \|S\|_1$ ekenligi, yaǵnıy $\|T - T_n\|_1 \rightarrow 0$ qatnası kelip shıǵadı.

2) Aytayıq $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligi $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ keńisligide Koshi izbe-izligi bolsın, hámde $T_n = T_n^*$ bolsın.

Biz sonday $T \in L_1(M, \tau)$ operatorı tabılıp $\|T - T_n\|_1 \rightarrow 0$ bolıwın kórsetemiz.

Úles izbe-izlikke tip

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_{n+1} - T_n\|_1 < \infty$$

dep esaplawǵa boladı.

Mına

$$S_n = \sum_{k=1}^n (T_{k+1} - T_k)_+ \text{ hám } L_n = \sum_{k=1}^n (T_{k+1} - T_k)_-$$

belgilewlerin kiritemiz. Onda

$$0 \leq S_n \leq S_{n+1}, \quad 0 \leq L_n \leq L_{n+1}, \quad L_n, S_n \in L_1(M, \tau)$$

boladı

Eger $n \leq m$ bolsa, onda

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|_1 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m-1} (T_{k+1} - T_k)_+ \right\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \|(T_{k+1} - T_k)_+\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \|(T_{k+1} - T_k)_-\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

boladı. Onda $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ izbe-izligi $L_1(M, \tau)$ keńislikte Koshi izbe-izligi boladı.

Onda 1) etap boyınsha sonday $S \in L_1(M, \tau)$, $S \geq 0$ operatori tabılıp

$\|S - S_n\|_1 \rightarrow 0$ boladı. Usıǵan uqsas sonday $L \in L_1(M, \tau)$, $L \geq 0$ operatori

tabılıp $\|L - L_n\|_1 \rightarrow 0$ boladı. Onda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S_n - L_n) - (S - L)\|_1 = 0$ boladı.

Ekinshi jaqtan

$$S_n - L_n = \sum_{k=1}^n (T_{k+1} - T_k) = T_{n+1} - T_n$$

boladı. Nátiyjede

$$T_n \rightarrow (S - L + T_1) = T \in L_1(M, \tau) \text{ qatnası } \|\cdot\|_1 \text{ norma boyınsha orınlı}$$

boladı.

3) Aytayıq $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligi $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ keńisligindegi qálegen Koshi izbe-izligi bolsın. Mına $\|T_n^*\|_1 = \|T_n\|_1$ teńliginen $\{T_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izligide $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ keńisligide Koshi izbe-izligi ekenligi kelip shıǵadı. Nátiyjede tómendegishe anıqlanıwshı $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ hám $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ izbe-izlikleri $(L_1(M, \tau), \|\cdot\|_1)$ keńisliktegi óz-ózone túyinles operatorlardıń Koshi izbe-izligi boladı:

$$S_n = \operatorname{Re} T_n = \frac{T_n + T_n^*}{2}$$

hám

$$L_n = \operatorname{Im} T_n = \frac{T_n - T_n^*}{2i}$$

Ekinshi etaptaǵı dálillew boyınsha sonday $S, L \in L_1(M, \tau)$ operatorları tabılıp $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S - S_n\|_1 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L - L_n\|_1 = 0$ boladı. Onda

$$S + iL = T \in L_1(M, \tau)$$

hám

$$\|T - T_n\|_1 = \|(S + iL) - (S_n + iL_n)\|_1 \rightarrow 0$$

boladı. Demek L_1 keńisligi kommutativ emes tolıq keńislik boladı.

4-§. Fon Neyman algebralarında L_p кеңісліклер

Мейлі $S(M) - M$ фон Neyman алгебрасына бириктирилген ольшешулі операторлар алгебрасы болсын, ал $\tau - M$ деги анық нормал ярым шекели із.

Міна

$$L_p(M, \tau) = \left\{ x \in S(M) : |x|^p \in L_1(M, \tau) \right\}, \quad p \in [1; \infty)$$

көплігін L_p кеңіслік делінеді. Бул кеңіслік

$$\|x\|_p^\tau = \left(\tau(|x|^p) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L_p(M, \tau)$$

нормасы бойынша толық кеңіслік болады. Жоғарыдағы норманы x элементінің L_p нормасы делінеді.

$L_p(M, \tau)$ кеңіслігінің түйінлес кеңіслігі $L_q(M, \tau)$ кеңіслігіне изометриялық изоморф болады, бунда $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Айтайық $\phi - M$ де нормал ярымшекели салмақ болсын, һәмде $h \geq 0$ операторы M ге бириктирилген өз-өзіне түйінлес оператор болсын.

Анықлама 4.1. Һәр бир $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ үшін $m_\alpha^{1/p}$ арқалы M нің төмендегіше операторларын белгілеміз:

$$m_\alpha^{1/p} = \left\{ x \in M : h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(M, \tau) \right\} =$$

$$= \left\{ x \in M : \tau \left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right) < \infty \right\}$$

hám

$$\|x\|_{p,\alpha} = \tau \left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right)^{1/p}, \quad x \in m_\alpha^{1/p}$$

tómendegı teorema orınlı.

Teorema 4.1. $m_\alpha^{1/p}$ sızıqlı keńisligi τ izdi alıwǵa baylanıslı emes, hámde

$x \rightarrow \|x\|_{p,\alpha}$ funkcıyası $m_\alpha^{1/p}$ de norma boladı.

Dálillew. Aytayıq τ_1 jáne bir normal yarım shekli iz bolsın,

$\phi = \tau_1(h_1)$, $\tau = \tau_1(k \cdot)$ hám $h_1 = h \cdot k$. Onda hár bir $x \in M$ ushın

$$\left| h_1^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h_1^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p = k \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p$$

boladı. Mına $k_\varepsilon = k(1 + \varepsilon k)^{-1}$ belgilewin kiritemiz, bunda $\varepsilon > 0$.

Onda k hám $\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p$ operatorları ushın $k_\varepsilon \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p$ izbe-izlik

$\varepsilon \rightarrow 0$ bolǵanda $k \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p$ operatorına qaray ósedı. Onda mına

$$\tau \left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right) = \sup \tau_1 \left(\left| k_\varepsilon \cdot h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right) = \tau_1 \left(\left| h_1^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h_1^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right)$$

teńligi orınly boladı, bunnan $m_\alpha^{1/p}$ sıızıqlı keńisligi hámde $x \rightarrow \|x\|_{p,\alpha}$ funkciyası τ izdi alıwǵa baylanıslı emes ekenligi kelip shıǵadı. Onda $\|\cdot\|_{p,\alpha} - m_\alpha^{1/p}$ da norma aldı boladı, bunnan $x \rightarrow h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$, $x \in m_\alpha^{1/p}$ sáwlelendiriwi sıızıqlı ekenligi kelip shıǵıp $\|\cdot\|_p^\tau = \tau \left(\|\cdot\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$ nıń $L_p(M, \tau)$ keńislikte norma ekenligi kelip shıǵadı.

α salmaqtnıń anıq ekenliginen h singulyar emes, hámde $\|x\|_{p,\alpha} = 0$ teńligi $h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} = 0$ teńligine ekvivalent, bul tek $x = 0$ bolǵanda orınly. Teorema dálillendi.

Анықлама 4.2. Hár bir $1 \leq p \leq \infty$ hám $0 \leq \alpha \leq 1$ ushın $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ arqalı $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ norma boyınsha $m_\alpha^{1/p}$ nıń tuyıqlanıwı bolǵan banax keńisligin belgileymiz.

Teorema 4.2. Aytayıq $1 \leq p \leq \infty$ bolsın. Onda hár bir $0 \leq \alpha \leq 1$ ushın $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ banax keńisligi $L_p(M, \tau)$ banax keńisligine izometriyalıq izomorf boladı.

Дálillew. Mına

$$m_\alpha^{1/p} \ni x \rightarrow h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(\tau)$$

sızıqlı izometriyasın qaraymız, hámde $m_{\alpha}^{1/p}$ nıń bul sáwlelendiriwi boyınsha obrazı $L_p(M, \tau)$ da tıǵız ekenligin tekseremiz.

Aytayıq $h = \int_0^{\infty} \lambda de(\lambda)$ túrlendiriwi h operatorınıń spektral túrlendiriwi

bolsın hámde $l_n = \int_{1/n}^n de(\lambda)$.

Мına $m = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} l_m m_{\tau} l_n$ kópligin anıqlaymız, bul jerde

$$m_{\tau} = \{x \in M : \tau(|x|) < \infty\}$$

Onda m kópligi m_{τ} da úles bolıp, ol $*$ -úles algebra hám M de ultra kúshsiz tıǵız bolıwı ayqın kórinedi. Usı menen birge hár bir $1 \leq p \leq \infty$ ushın $m_{\tau} \subset L_p(M, \tau)$ boladı. Solay etip, dálillewdi aqırına jetkeriw ushın tómendegi shártlerdi dálillew jetkilikli:

a) m kópligi $L_p(\tau)$, $1 \leq p \leq \infty$ algebrada tıǵız;

b) hár bir $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ushın $m \subset h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot m_{\alpha}^{\frac{1}{p}} \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$ qatnası orınlı.

(a) shártti tekseriw ushın bizge belgili bolǵan

$$L_p(M, \tau)^* = L_q(M, \tau), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

qatnasınan paydalanamız.

Aytayıq $z \in L_q(M, \tau)$ ushın barlıq $x \in m_{\tau}$ larda

$$\tau\left(\left(l_m x l_m\right) \cdot z\right) = \tau\left(x \cdot l_n \cdot z l_m\right) = 0$$

teńligi orınlı bolsın.

Bizde $l_n \cdot z l_m \in L_q(M, \tau)$ hámde m_τ nıń $L_p(M, \tau)$ da tıǵız bolǵanlıǵınan qálegen $m, n = 1, 2, \dots$ operator ushın $l_n \cdot z l_m = 0$ boladı.

$n \rightarrow \infty$ bolǵanda $l_n \rightarrow 1$ bolǵanlıqtan $z l_m = 0$ hámde barlıq $m = 1, 2, \dots$ ler ushın $0 = (z l_m)^* = l_m \cdot z$ boladı. Bunnan $z^* = 0$ yaǵnıy $z = 0$. Demek (a) shárt dálillendi.

Endi (b) shárttı tekseremiz. Mına $m \subset m_\tau \subset L_p(M, \tau)$ qatnası orınlı bolǵanlıqtan tómendegi shárt orınlı bolıwın kórsetiw jetkilikli:

Qálegen $x \in m_\tau$ elementi hám qálegen $m, n = 1, 2, \dots$ ler ushın sonday $y \in M$ operator tabılıp,

$$l_m x l_n = h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot y \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \quad (*)$$

teńligi orınlı boladı.

Mına $h^{-\frac{\alpha}{p}} l_m = (h l_m)^{-\frac{\alpha}{p}}$ hám $h^{\frac{1-\alpha}{p}} l_n = (h l_n)^{\frac{\alpha-1}{p}}$ operatorların shegaralangan dep oylasaq, onda olar M ge tiyisli boladı. Mına $y = h^{-\frac{\alpha}{p}} \cdot (l_m x l_n) \cdot h^{\frac{\alpha-1}{p}}$ belgilewin kiritemiz.

Onda (*) teńligi ayqın kórinedi, hám (b) shárt dálillendi. Teorema dálillendi.

4. Meyli endi ϕ — M fon Neyman algebrasında anıq normal yarım shekli salmaq bolsın. Hár bir $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ushın lokal ólshewli operatorlardıń

$$L_{p,\alpha}(M, \phi) = \left\{ x \in L(M) : h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(M, \tau) \right\}$$

kópligin, hámde

$$\|x\|_{p,\alpha} = \tau \left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right)^{1/p}, \quad x \in L_{p,\alpha}(M, \alpha)$$

belgilewin kiritemiz. Bunda $m_\alpha^{1/p} \subset L_{p,\alpha}(M, \alpha)$ boladı.

Teorema 4.3. Aytayıq $\phi = \tau(h)$ M degi anıq normal yarımshekli salmaq bolıp h hám h^{-1} operatorları $L(M)$ ge tiyisli bolsın. Onda hár bir $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ushın tómendegiler orınlı boladı:

a) $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ sıızqlı keńisligi τ izdiń alınıwına gárezli emes, hámde $x \rightarrow \|x\|_{p,\alpha}$ funkciyası $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ de norma bolıp, onda τ ga baylanıslı emes;

b) $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ keńisligi $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ normasına qarata tolıq boladı, hámde $m_\alpha^{1/p}$ sıızqlı keńisligi $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ de tıgız boladı.

Dálilleniwi. $L(M)$ -kúshli algebralıq ámellerge qarata *-algebra bolğanlıqtan (a) shárti kelip shıgadı. (b) shártti dálillew ushın $x \rightarrow h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{\alpha-1}{p}}$ sáykeslik $L_p(M, \tau)$ hám $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ ler arasında sıızqlı izometriya bolıwın esapqa alsaq, onda $m_\alpha^{1/p}$ sıızqlı keńisligi $L_p(M, \tau)$ da tıgız bolğan $h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$ sıızqlı keńisliktiń obrazı bolğanlıqtan $m_\alpha^{1/p}$ sıızqlı keńisligi de $L_{p,\alpha}(M, \phi)$ banax keńisliginde tıgız bolıwı kelip shıgadı.

JUWMAQLAW

Pitkeriw qánigelik jumısın tayarlawda dáslep sıızıqlı úzlıksız operatorlar keńislikleri hám ondaǵı túsinikler anıqlamaları keltirilip qásiyetleri úyrenildi.

L_p keńisliklerin úyreniwde dáslep $p = 1$ bolǵan jaǵdayda, yaǵnıy L_1 keńisligi qarastırıldı.

Kiyin izge qarata L_p keńislikleri hámde salmaqqa qarata L_p keńislikleri úyrenildi.

Atap aytqanda, L_p keńisligindegi kiritilgen funksiyanın norma bolıwı hámde bul norma boyınsha L_p keńisliktiń tolıq bolıwı úyrenildi.

L_p keńisliginiń úyrenilgen qásiyetleri Arens algebraların úyreniwde qollanıladı.

ÁDEBIYATLAR

1. Mirziyoyev Sh. Buyuk kelajagimizni mard va oliyjanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: O'zbekiston, 2017.
2. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar, Bilim, 2009.
3. Ibragimov M. M., Kudaibergenov K. K., Geometric Description of L_1 -Spaces, Springer, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2013, Vol. 57, No. 9, pp. 16–21
4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Differencirovaniya algebr Arensa // Funktsionalniy analiz i ego prilozheniya. – 2007. – № 4 (41). – S. 70-72.
5. Gelfand I.M., Naymark M.A., O vklyucheni normirovannogo kolca v kolco operatorov v gilbertovom prostranstve, Matem. sb., T. 12, 1943, 197-213.
6. Danford N., Shvarc D. Lineynie operatori. T. 1.: Obshaya teoriya. Izd. inost. lit. 1962.
7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsionalniy analiz. M.: Nauka, 1977.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementi teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. M: Nauka, 1977.
9. Kutateladze S.S. Osnovi funktsional'nogo analiza. Novosibirsk, 2001.
10. Muratov M.A., Chilin V.I. Algebrı izmerimıx i lokal'no izmerimıx operatorov, Izd-vo Instituta matematiki NAN Ukrainı, 2007.
11. Rudin U. Funktsional'niy analiz. M.: Mir, 1975.
12. Sadovnichiy V.A. Teoriya operatorov. M.: Vısshaya shkola, 1999.
13. Sarimsakov T.A. Funktsional analiz kursi. Toshkent, Wqituvchi, 1980.
14. Sherstnev A.N., Lugovaya G.D. Funktsional'niy analiz. Kazan, 2008.
- Edwards R. Funktsionalniy analiz. M.: Mir, 1969.
15. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kudaybergenov K.K. Non commutative Arens algebras and their derivations // Journal of Functional Analysis, 2007. – № 1 (253). – P. 287-302.

16. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kудaybergenov K.K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Siberian Advances in Mathematics, – 2008. – № 2 (18). – P. 86-94.
17. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kудaybergenov K.K. Structure of Derivations on Various Algebras of Measurable Operators for Type I von Neumann algebras // Journal of Functional Analysis. – Amsterdam, 2009. – № 9 (256). – P. 2917-2943.
18. Kудaybergenov K.K., Kalandarov T.S. The involutive automorphisms of τ -compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Methods of functional analysis and topology, – Kiev, 2008. – № 1 (14). – P. 54-59.
19. Gutman A.E., Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces, Siberian Adv. Math. 6 (1996) 35–102.
20. Kaplansky I. Modules over operator algebras, Amer. J. Math. 75 (1953) 839–859.
21. Kaplansky I. Algebras of type I, Ann. of Math. (2) 56 (1952) 460–472.
22. www.ziynet.uz;
23. www.bilim.uz;
24. www.math.net.