

**ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTIRLIGI**

**BERDAQ ATÍNDAGÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSISTETI**

Fizika-matematika fakulteti

Ámeliy matematika kafedrasí

*«Ámeliy matematika hám informatika»
tálim baǵdarınıń 4-D kurs studentı
Keunimjaeva Gauxardıń*

**PITKERIW QÁNIGELIK
JUMÍSÍ**

**Teması: Ádettegi differenciallıq teńlemelerdi dárejeli qatarlar usılı
menen sheshiw**

Ilmiy basshısı:

prof. A.O.Otarov

Kafedra baslıǵı:

doc. M.K.Berdimuratov

Nókis-2018

Mazmunı

Kirisiw.....	2
1-§.Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesiniń qoyılıwı	8
2-§.Ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw usılları.....	10
3-§.Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwdiń juwıq analitikalıq usılları	12
3.1.Izbe-iz juwıqlasıw usılı.	12
3.2.Dárejeli qatarlar usılı.	15
3.3.Dárejeli usıldıń geypara dara jaǵdayları.	17
4-§.Ádettegi sıızıqlı differencial teńlemeler ushın qoyılǵan Koshi máselesin dárejeli qatarlar usılı menen sheshiw	20
4.1.Birinshi tártipli ádettegi sıızıqlı differncial teńlemesi ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw	20
4.2.Ekinshi tártipli ádettegi sıızıqlı differencial teńleme ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw	24
4.3.Ekinshi tártipli bir tekli ádettegi sıızıqlı differncial teńlemenin sheshimin dárejeli qatar túrinde kórsetiw.....	25
4.4. Dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantı.....	27
5-§.Dárejeli qatardıń jıynaqlılıǵın tezletiw usılları	30
5.1.Argumentin almasırw arqalı dárejeli qatardıń jıynaqlılıǵın tezletiw usılı.....	31
5.2.Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq tezligin arttırıwdıń ekinshi usılı.....	32
6-§.Sanlı mısallar	35
Juwmaqlaw	41
Paydalanılǵan ádebiyatlar	44
Qosımshalar.....	45

Kirisiw

Qatarlar hám izbe-izlikler kóp sanlı oǵada áhmiyetli ilimiy hám ámeliy máselelerdi sheshiw hám kóplegen teoriyalıq máselelerdi izertlew ushın tez-tez tabıslı qollanılıp kiyatır. Máselen, dárejeli qatarlar matematikada funkciyalardıń mánislerin hám integrallardı esaplaw, differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan hár qıylı matematikalıq máselelerdi sheshiw ushın keń qollanıladı [1,2,4,5,7].

Dárejeli qatarlar Nyutonnıń miynetlerinde 1665-jılları payda bolıp, al qálegen funkciyanı dárejeli qatarlar arqalı kórsetiwge boladı dep esaplanadı. Bunnan soń qatarlardıń teoriyasın rawajlandırıwǵa Leybnic Eyler, Dalamber, Lagranj, Gauss, Koshi, Veyershtrass, Riman hám basqa kóplegen kórnikli matematikler úlken úles qostı. Bunday ilimpazlardıń toparına Nyutonnıń shákirti B.Teylordı da jatqarıwǵa boladı. Ol 1715-jılı “Tuwrı hám keri osiw usılları” atamasındaǵı miynetin járiyaladı. Bul kitapta shekli ayırmalardıń hám tardıń terbelisiniń teoriyaların bayanlap, matematikalıq fizikanıń tiykarların jarattı. Qálegen analitikalıq funkciyanıń qatarǵa jikleniw formulasın birinshi ret keltirip shıǵardı.

K.Makloren 1742-jılı anıq emes koefficientler usılın qollanıp, sońınan óziniń atı menen atalǵan, dárejeli qatardıń formulasın keltirip shıǵaradı hám bul qatardı kóp sandaǵı funkciyalardı jiklewge qollanadı. Lagranjdıń 1772-jılı Teylor qatarın pútkil differenciallıq esabınıń tiykarına jatqarıwına baylanıslı, Teylor hám Makloren qatarlarınıń áhmiyeti oǵada artıp ketti.

Lagranj 1797-jılı Teylor qatarınıń qaldıq aǵzasınıń ańlatpasın keltirip shıǵaradı. Biraqta, bul máseleni tolıq izertlew Gausstıń (1812j), Bolcannıń (1817j), Koshidiń (1821j), Abeldiń (1826j) miynetlerinde orındandı. Olar jıynaqlı qatardıń qosındısınıń anıqlamasın berip, qatardıń qásiyetlerin anıqlaytuǵın kóp sanlı teoremalardı dálilledi. Koshi 1823-jılı qatardıń berilgen funkciyaǵa jıynaqlı bolıwın izertlep, qatardıń ulıwma jıynaqlı bolıwı menen onıń berilgen funkciyaǵa jıynaqlı bolıwınıń arasındaǵı ayırmashılıqtı kórsetti.

Solay etip, Teylor qatarınıń teoriyasın jaratıw júz jıldan aslam waqıt dawam etti. Bunnan soń funkcionallıq qatarlardıń teoriyasına Fure salmaqlı úles qostı. Ol matematikalıq fizikanıń máselelerin sheshiwge trigonometriyalıq qatarlardı keń qollandı [4,6,8].

Pitkeriw qánigelik jumısında dárejeli qatarlar usılı sızıqlı hám sızıqlı emes ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılğan Koshi máselelerin sheshiwge qollanıladı. Birinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemege , bunday teńlemelerdiń normal sistemasına hám joqarı tártipli ádettegi differenciallıq teńlemege qoyılğan Koshi máselelerin sheshiwge dárejeli qatarlar usılınıń qollanılwı óz aldına bayanlanadı.

Bul jumıs kirisiw bóliminen, altı paragraftan, juwmaqlaw bóliminen, paydalanılğan ádebiyatlar diziminen hám qosımshalardan turadı.

Kirisiw bóliminde dárejeli qatarlar usılınıń qollanılw tarawları qısqasha atap ótilip, bunday usıldıń payda bolıwınıń hám qalıplesiwiniń qısqasha tariyxı bayanlanadı.

Birinshi paragrafında joqarı tártipli ádettegi differenciallıq teńlemege Koshi (baslanğısh shártli) máselesiniń qoyılıwı berilip, bunday másele ni oğan teń kúshli bolğan, birinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemeleriniń sistemasına qoyılğan Koshi máselesi menen almastırıw, bunday másele niń sheshimge iye hám tek bir sheshimge iye bolıwınıń zárúrli hám jetkilikli shártleri keltiriledi.

Ekinshi paragrafında ádettegi differenciallıq teńlemege qoyılğan Koshi máselesin sheshiw usıllarına qısqasha sholıw jasaladı. Dál, juwıq analitikalıq hám sanlı usıllar, olardıń mánisleri, bir-birinen parqı , qollanıw tarawları qısqasha bayanlanıp, olardıń mánisleri ápiwayı mısallar menen túsindiriledi. Differenciallı teńlemelerge qoyılğan jaqsı tártiplesken hám jaman tártiplesken matematikalıq máseleler haqqında túsiniq beriledi.

Úshinshi paragrafında ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılğan Koshi máselesin sheshiwdiń geypara juwıq analitikalıq usılları bayanlanadı. Bunda izbe-iz juwıqlasıw hám dárejeli qatarlar usıllarınıń esaplaw algoritimleri berilip, bul

usıllardıń qáteligin baqalaw máseleleri talqınlanadı. Dárejeli qatarlar usılınıń geypara dara jaǵdayları keltirilip, olardıń bir-birinen parqı kórsetiledi.

Tórtinshi paragrafi jumıstıń tiykarǵı bólimin quraydı. Bul paragrafında birinshi, ekinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesiniń birden-bir golomorf sheshimge iye bolıwı hám bul qatardıń jıynaqlılıq radiusın anıqlaw haqqındaǵı teorema dálillenedi. Sonday-aq ekinshi tártipli bir tekli sızıqlı teńlemege qoyılǵan Koshi máselesiniń golomorf sheshimin tabıw hám onıń jıynaqlılıq shártleri anıqlanadı.

Dárejeli qatarlar usılınıń joqarı tártipli ádettegi sızıqlı hám sızıqlı emes teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwge arnalǵan jańa variantınıń teoriyalıq tiykarları bayanlanadı. Bul usıl, burınnan qáliplesken klassikalıq usıl menen salıstırǵanda, dárejeli qatardıń koefficientleri jeńil anıqlanatuǵın esaplaw algoritmine iye boladı hám ol qatardıń jıynaqlılıq radiusın sanlı usıl menen anıqlawǵa múmkinshilik beredi.

Besinshi paragrafında dárejeli qatardıń jıynaqlılıq tezligin arttırıw usılları bayanlanadı. Bunda dárejeli qatardıń argumentin qolaylı etip almastırıw hám Shebıshevtiń I túrdegi kópaǵzalılarınan paydalanıp, jıynaqlılıq tezligin arttırıw usıllarınıń esaplaw algoritimleri tiykarlanadı.

Altınshı paragrafında birinshi hám úshinshi tártipli ádettegi sızıqlı emes differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselelerin sheshiwge dárejeli qatarlar usılınıń jumıstıń tórtinshi paragrafında tiykarları bayanlangán jańa variant qollanıladı. Kompyuterde orınlangan esaplaw tájriybeleriniń nátiyjeleri eki kestege jaylastırılǵan. Alınǵan juwıq analitikalıq sheshimleriniń dárejeli qatarlardıń kesindileriniń jıynaqlılıq radiusları sanlı usılları menen jetkilikli dálilik penen esaplangan.

Juwmaqlaw bóliminde pitkeriw qánigelik jumısınıń tiykarǵı nátiyjeleri hám bul tema boyınsha sońǵı eki jıl dawamında orınlangan ilimiy-izertlew jumıslarınıń nátiyjeleri qısqasha atap ótileđi.

Ádebiyatlar dizimine jumıstıń temasına baylanıslı tiykarǵı oqıw hám arnawlı ádebiyatlar kirgizilgen . Qosımshalar bólimine EEM ushın C++ algoritimlik tilinde

dúzilgen programmalar hám olardıń orınlanıwınan alıńǵan tiykargı sanlı nátiyjelerdiń basıp shıǵarılǵan nusqaları qosıp tigilgen.

Jumısta formulalar tómendegi tártipte nomerlengen: 1-cifrı paragraftıń nomerin, al 2-cifrı paragraftaǵı formulanıń nomerin ańlatadı. Paragraftıń ishinde formulaǵa súyengende tek formulanıń nomeri kórsetiledi. Basqa paragraftaǵı formulaǵa súyengende paragraftıń nomeri hám ondaǵı formulanıń nomeri kórsetiledi. Máselen “(4.20) formulası” jazıwı 4-paragraftaǵı 20-formulaǵa súyeniwdi ańlatadı.

1-§. Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesiniń qoyılıwı

Ádettegi differenciallıq teńlemeler menen óz-ara tásir jasaytuǵın noqatlardıń sistemalarınıń qozǵalısqı, ximiyalıq kinetikanıń, elektr shınjırlarınıń, materiallar qarsılıqlarınıń máseleleri súwretlep jazıladı. Dara tuwındılı teńlemeler ushın qoyılǵan áhmiyetli máselelerde ádettegi differenciallıq teńlemelerge keltiriledi. Máselen, kóp ólshemli bunday teńlemelerde belgisizlerdi ajratıw múmkin bolmasa, onıń sheshimi ózgeriwshilerdiń bazı bir birikpesinen ǵárezli bolsa, onda dara tuwındılı teńlemeni ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń sistemasına keltirip sheshiwge boladı. Usı jaǵdaylarǵa baylanıslı, ádettegi differenciallıq teńlemelerdi sheshiw máselesi fizikanıń, texnikanıń, ximiyanıń qollanba máseleleriniń arasında oǵada áhmiyetli orın iyeleydi.

Berilgen ańıq ámeliy másele qálegen tártipli ádettegi differenciallıq teńlemege yamasa qálegen tártipli ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń sistemaların sheshiwge alıp keliw múmkin. Biraqta, p -tártipli

$$u^{(p)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$$

differenciallıq teńlemesiniń $u^k(x) \equiv u_k(x)$ almasırwın orınlaw arqalı, oǵan teń kúshli bolǵan, birinshi tártipli p teńlemelerdiń sistemasına keltiriwge boladı:

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), \quad 0 \leq k \leq p-2$$

$$u'_{p-1}(x) = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}), \quad u_0(x) \equiv u(x)$$

Tap usı sıyaqlı, ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń qálegen tártipli sistemalarında, olarǵa teń kúshli bolǵan birinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń sistemaları menen almasırwǵa boladı. Sonlıqtan aldaǵı waqıtları birinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń sistemasına qoyılǵan máseleler qaraladı:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), \quad 1 \leq k \leq p, \quad (1.1)$$

Ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń bul sistemasın ıqshamlap tómendegi kóriniste jazıwǵa boladı:

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u(x)), \\ u &= \{u_1, u_2, \dots, u_p\}, f = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ádettegi differenciallıq teńlemelerdiń p -tártipli (1) sisteması, ulıwma jaǵdayda $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ p parametrlerinen gárezli bolǵan kóp sheshimlerge iye boladı. Bul sheshimlerin $u = u(x; c)$ kórinisinde jazıwǵa boladı. Parametrlerdiń mánislerin anıqlaw ushın, $u_k(x)$ funkciyasınıń p qosımsha shártler qoyıladı.

Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın hár qıylı úsh tiykargı máseleler qoyıladı: Koshi máselesi, shegaralıq máseleler hám menshikli mánisler máselesi.

Koshi máselesi (baslanǵısh shártli másele). Bul máselede berilgen ádettegi differenciallıq teńlemege

$$u_k(\xi) = \eta_k, \quad 1 \leq k \leq p, \quad (1.3)$$

qosımsha shártler qoyıladı, yaǵnıy barlıq $u_k(x)$ funkciyalarınıń $x = \xi$ bir noqatındaǵı mánisleri beriledi. Bul shártlerdi, integrallıq iymekliktiń $(p+1)$ - ólshemli $(x, u_1, u_2, \dots, u_p)$ keńisliginiń baslanǵısh $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ noqatında koordinatalarınıń beriliwi dep esaplawǵa boladı. Sonda (1) yamasa (2) sistemasınıń sheshimin $\xi \leq x \leq X$ (yamasa $X \leq x \leq \xi$) kesindisinde tabıw talap etiledi. Sonlıqtan $x = \xi$ noqatın bul kesindiniń baslanǵısh noqatı dep esaplawǵa boladı.

Egerde (1) teńlemesiniń oń jaqları $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ baslanǵısh noqatınıń kishi dógereginde úzliksiz hám shegaralanǵan bolsa, onda (1),(3) Koshi máselesi sheshimge iye boladı, biraq ulıwma jaǵdayda sheshimi tek birew (jalǵız) bolmawı múmkin. Egerde (1) teńlemesiniń jaqları tek úzliksiz ǵana bolıp qalmastan, sonıń menen birge u_k ózgeriwshileri boyınsha Lipshic shártin de qanaatlandırsa, onda (1),(3) Koshi máselesi $[\xi, X]$ kesindisinde tek bir sheshimge iye boladı hám ol baslanǵısh $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ noqatınıń koordinatalarınan úzliksiz gárezli boladı, yaǵnıy

Koshi máselesi korrektli qoyılǵan másele boladı. Eger joqarıdaǵı shártke qosımsha (1) teńlemeninń on jaqları barlıq argumentleri boyınsha q -tártipli úzliksiz tuwındılarǵa iye bolsa, onda Koshi máselesinin $u(x)$ sheshimi x boyınsha $(q+1)$ -tártipli úzliksiz tuwındılarǵa iye boladı.

2-§. Ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw usılları

Ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan matematikalı máselelerdi sheshiw usılları dál, juwıq hám sanlı usıllar bolıp, úlken úsh toparǵa bólinedi.

Dál usıllarǵa, differenciallıq teńlemenin sheshimin ápiwayı funkciyalar arqalı yamasa ápiwayı funkciyalardan alınǵan kvadraturalar járdeminde ańlatatuǵın usıllar jatadı. Dara jaǵdayda (1.1),(1.3) Koshi máselesinin dál sheshimin, differenciallıq teńlemenin ulıwma sheshimin tabıw, olardı sapa jaǵınan izertlewdi jeńillestiredi.

Biraqta, dál sheshimlerin anıqlawǵa bolatuǵın differenciallıq teńlemelerinin toparı oǵada az bolıp, olar ilmiy-texnikalıq hám ámeliy máselelerdi sheshiwde payda bolatuǵın ádettegi differenciallıq teńlemelerdin oǵada kishi úlesin quraydı. Máselen, ápiwayı

$$u'(x) = x^2 + u^2(x) \quad (2.1)$$

teńlemesinin sheshimi ápiwayı funkciyalar arqalı ańlatılmaydı. Al

$$u'(x) = (u - x)(u + x) \quad (2.2)$$

teńlemesin dál integrallap, anıq ulıwma

$$u(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) + \arctg \frac{u}{x} \quad (2.3)$$

Sheshimin tabıwǵa boladı. Biraqta $u(x)$ sheshimnin mánislerinin kestegin jasaw ushın (3) transtsenidentlik funkciyasının mánislerin esaplaw kerek boladı. Bul sońǵı másele (2) teńlemesin tikkeley sanlı sheshiwden jeńil bolmaydı.

Juwıq usıllar dep, ádettegi differenciallıq teńlemelerdin $u(x)$ sheshimi funkciyalardin bazı bir izbe-izliginin shegi esabında anıqlanatuǵın usıllarǵa aytıladı.

Bunda $u_n(x)$ ápiwayı funciyalar arqalı yamasa kvadraturalar járdeminde ańlatıladı dep uyǵarıladı. Sonda bazı bir shekli n sanı menen sheklenip, differentsiyallıq teńlemenin $u(x)$ sheshiminiń juwıq ańlatpasına iye bolamız. Bunday usılarǵa differenciallıq teńlemenin sheshimin ulıwmalasqan dárejeli qatarǵa jiklew usılı misal boladı. Biraqta juwıq usıllar, aralıq esaplawlardın úlken úlesin dál orınlaǵan jaǵdaylarda ǵana qollanıwǵa boladı. Bul shárt, kóbinese sızıqlı differenciallıq teńlemeler ushın ǵana orınlanatuǵın bolǵanlıqtan, ol juwıq usıllardıń qollanıw tarawların ádewir taraytıdı [3,6,7,8].

Sanlı usıllar. Bul usıllar izlenip atırǵan $u(x)$ sheshimniń, saylap alınǵan bazı bir topardaǵı argumentleriniń x_n mánislerine sáykes, juwıq mánislerin esaplaw algoritimleri boladı. Bul usılda teńlemenin sheshimi sanlar kestesi kórinisinde tabıladı. Sanlı usıllar (1.1) teńlemeler sistemasınıń ulıwma sheshimin tabıwǵa múmkinshilik bermeydi, al tek bazı bir dara sheshimine alıp keledi. Bul sanlı usıllardıń tiykarǵı kemshiligi boladı. Biraqta, sanlı usıllar keń klasstaǵı differnciyallıq teńlemelerdi hám olarǵa qoyılǵan barlıq máselelerdin túrlerin sheshiwge qollanıladı. Sonlıqtan tez esaplaǵısh EEM lerdin payda bolıwı menen sanlı usıllar ádettegi differenciallıq teńlemelerler ushın qoyılǵan jetkilikli quramallı máselelerdi sheshiwdiń tiykarǵı usıllarınıń birine aylandı.

Sanlı usıllardı ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan tek korrektli máselelerdi sheshiw ushın ǵana qollanıwǵa boladı. Onıń ústine, bunday máselelerdin jaqsı shártlesken bolıwı, yaǵnıy baslanǵısh shártlerdin kishi shamaǵa ózgeriwine integrallıq iymekliklerdin de kishi shamaǵa ózgeriwi sáykes keliwi kerek. Egerde bul shárt orınlanbasa, yaǵnıy ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan másele jaman shártlesken bolsa, onda baslanǵısh shártlerdin kishi shamaǵa ózgeriwi sheshimniń úlken shamaǵa ózgeriwine alıp kelse, onda dáslepki máselenin sanlı sheshimi úlken qátelikler menen tabıladı [3,6,7,8].

Jaman shártlesken máselenin misalı esabında mına Koshi máselesin qaraymız:

$$u'(x) = u - x, \quad 0 \leq x \leq 100 \quad (2.4)$$

$$u(0) = 1 \quad (2.5)$$

Bundağı (4) teńlemenin ulıwma sheshimi

$$u(x, c) = 1 + c + ce^x$$

kórinisine iye boladı. Bunnan, (5) baslanğısh shártlerinen paydalanıp, $c=0$ mánisi kelip shıǵadı. Sonda (4),(5) Koshi máselesinin dara sheshimi $u(x) = 1 + x$ kórinisinde jazıladı. Sonlıqtan $u(100) = 101$ boladı. Biraqta (5) baslanğısh shárti kishi shamaǵa ózgerse: $\bar{u}(0) = 1,000001$ mánisine teń bolsa, onda $c = 10^{-6}$ mánisine iye boladı. Bul jaǵdayda $\bar{u}(100) = 2,7 \cdot 10^{37}$ boladı, yaǵnıy máselenin sheshimi oǵada úlken shamaǵa ózgeredi. Sonlıqtan (4), (5) Koshi máselesin oǵada jaman shártlesken másele dep esaplawǵa boldı.

3-§. Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwdiń juwıq analitikalıq usılları

Kópshilik jaǵdaylarda ádettegi differencial teńlemeler ushın qoyılǵan Koshi máselesinin dál sheshimin tabıw múmkin bolmaydı. Sonlıqtan bunday máselelerdi sheshiwge juwıq usıllar qollanıladı. Tórende esaplaw praktikasında keń qollanılatuǵın geypara juwıq analitikalıq usıllardı keltiremiz.

3.1. Izbe-iz juwıqlasıw usılı. Birinshi tártipli ádettegi differencial teńlemelerge qoyılǵan

$$u'(x) = f(x, u), \quad (3.1)$$

$$u(x_0) = u_0 \quad (3.2)$$

Koshi máselesin sheshiwdiń mánisi boyınsha eń ápiwayı (ámeliy iske asırıw jaǵınan emes) juwıq analitikalıq usıllarının biri izbe-iz juwıqlasıw usılı boladı. Bul usıldın mánisi tómendegilerden ibarat.

Berilgen (1), (2) Koshi máselesinin sheshimi

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u) dt \quad (3.3)$$

integrallıq teńlemesinin sheshimine teń kúshli boladı.

Bul teńlemenin on jaǵındaǵı belgisiz $u(x)$ funkciyasınıń ornına, baslanǵısh juwıqlasıw dep atalatuǵın, qálegen funkciyanı aparıp qoyıwǵan boladı. Máselen, $u = u_0$ dep alıp, integrallawdı orınlasaq, onda (3) teńlemenin sheshimine mına birinshi juwıqlasıwdı tabamız:

$$u_1(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_0) dt$$

Tap usınday usıl menen u_0 dın ornına u_1 di aparıp qoyıp, mına ekinshi juwıqlasıwına iye bolamız:

$$u_2(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_1) dt \quad (3.4)$$

Endi $n \rightarrow \infty$ ke umılǵanda (4) teńligi menen anıqlanǵan juwıq sheshimi (1), (2) Koshi máselesinin sheshimine teń ólshemli juwıqlasatuǵının kórsetemiz.

Meyli, (1) teńlemesinin on jaǵı $f(x, u)$ funkciyası (a, b) intervalın óz ishine alatuǵın bazı bir juwıq G oblastında eki argumenti boyınsha úzliksiz bolıp, u argumenti boyınsha Lipshic shártin qanaatlандıratuǵın:

$$|f(x, u_2) - f(x, u_1)| \leq L |u_2 - u_1|, L = \text{const}, \quad (3.5)$$

bunda x - G oblastına derek qálegen noqat.

Izbe-iz kelgen eki juwıqlasıwınıń ayırmasın qaraymız: $\delta_n = |u_{n+1} - u_n|$. Sonda (5) Lipshic shárti boyınsha qatnaslardı jazıwǵa boladı:

$$\delta_n = |u_{n+1} - u_n| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, u_n) - f(t, u_{n-1})] dt \right| \leq L \int_{x_0}^x |u_n - u_{n-1}| dt \leq L \delta_{n-1} |b - a|$$

Meyli, $\delta_n = \max_{x \in (a, b)} |u_{n+1} - u_n|$ bolsın. Sonda da $\delta_n \leq \delta_{n-1} L |b - a|$ teńsizligi orınlanadı.

$L |b - a| = \alpha$ dep belgilep, mına qatnaslardı jazıwǵa boladı:

$$\delta_n \leq \alpha \delta_{n-1} \leq \alpha^2 \delta_{n-2} \leq \dots \leq \alpha^n \delta_0$$

Bunda $\delta_0 = \max_{x \in (a, b)} |u_1 - u_0|$ belgilew kirkizilgen.

Solay etip, $\alpha < 1$ bolǵanda $u_0, u_1, \dots, u_{n+1}, \dots$ juwıqlasıwları bazı bir $u(x)$ funciyasına teń ólshemli jiynaqlı boladı hám bul funkciyanı óz gezeginde, mına qatar túrinde kórsetiwge boladı:

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n) + \dots \quad (3.6)$$

Bul qatar teń ólshemli jiynaqlı boladı, óytkeni onıń hár bir aǵzası $|u_0| + \delta_0 + \alpha\delta_0 + \alpha^2\delta_0 + \dots + \alpha^n\delta_0 + \dots$ san qatarınıń hár bir aǵzasınan kishi boladı.

Sonlıqtan $n \rightarrow \infty$ ke umtılganda (4) teńliginde shekke ótsek, onda (6) qatar menen anıqlanǵan $u(x)$ funkciyası (1),(2) Koshi máselesiniń sheshimi boladı.

Endi izbe-iz juwıqlasıw usılınıń qáteligin bahalaw máselesin qaraymız. Bunıń ushın u_n juwılasıwın

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

túrinde kórsetemiz hám (1),(2) Koshi máselesiniń (6) dál sheshimi menen salıstıramız. Sonda mına nátiyjelerge kelemiz:

$$u - u_n = (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \dots \leq \delta_n + \delta_{n+1} + \dots \leq \alpha^n \delta_0 + \alpha^{n+1} \delta_0 + \dots$$

Sonda $L|b-a| = \alpha < 1$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın jetkilikli kishi (a,b) intervalı ushın usıldıń qáteliginin mına bahasına iye bolamız:

$$\varepsilon_n = |u - u_n| \leq \frac{\alpha^n \delta_0}{1 - \alpha} \quad (3.7)$$

Bunnan n sheksiz óskende usıldıń qáteliginin shaması, nólge umtılatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

Izbe-iz juwıqlasıw usılı ádettegi differencial teńlemelerdiń teoriyasında Koshi máselesiniń sheshiminiń bar bolatuǵının hám birden-birligin dálillew ushın paydalanıladı.

Bul usıl sonday-aq, differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń basqa juwıq usılların teoriyalıq jaqtan izertlewde, olardı qollanǵanda járdemshi qural esabında paydalanıladı. Máselen, differenciallıq teńlemelerdi Adams usılların qollanıp

integrallaǵanda, izlenip atırǵan funkciyanıń baslanǵısh mánislerin bir neshe noqatlarda esaplaw ushın qollanıladı.

3.2.Dárejeli qatarlar usılı. Birinshi hám joqarı dárejeli ádettegi differencial teńlemelerdi juwıq sheshiw ushın, teńlemenıń izlenip atırǵan korenin Teylor qatarına jiklep, bul qatardıń belgili sandaǵı aǵzaların saqlap qaladı. Ádettegi differencial teńlemelerdiń bunday sheshimin baslanǵısh shártlerdiń kishi dógeresinde teńlemelerdi integrallaǵanda oǵada qolaylı boladı. Bunday usıl menen tabılǵan ádettegi differencial teńlemelerdiń sheshimleri, olardı juwıq integrallawdıń basqa usılların qollanǵanda járdemshi rolin atqaradı. Máselen, ádettegi differencial teńlemelerdi Adams hám Shtermer usılları menen integrallaǵanda kesteniń basın esaplaw ushın paydalanıladı [3,7,8].

Meyli, p -tártipli ádettegi differencial teńlemege qoyılǵan Koshi máselesi berilgen bolsın:

$$u^{(p)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)}), \quad (3.8)$$

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u'_0, \dots, u^{(p-1)}(x_0) = u_0^{(p-1)}, \quad (3.9)$$

Bunda $f(x, u, u', u'', \dots, u^{(p-1)})$ formulası $(x_0, u_0, u'_0, \dots, u_0^{(p-1)})$ noqatınıń kishi dógerinde analitikalıq funksiya boladı, yaǵnıy $x - x_0$ ayırmasınıń dárejeleri boyınsha dárejeli qatarǵa jiklenedi dep uyǵarıladı. Sonda (8),(9) Koshi máselesiniń $u(x)$ sheshimin tómendegi Teylor qatarına jiklewe boladı:

$$\begin{aligned} u(x) = & u_0 + u'_0(x - x_0) + \frac{u''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{u_0^{(p-1)}}{(p-1)!}(x - x_0)^{p-1} + \frac{u_0^{(p)}}{p!}(x - x_0)^p + \\ & + \frac{u_0^{(p+1)}}{(p+1)!}(x - x_0)^{p+1} + \dots + \frac{u_0^{(p+k)}}{(p+k)!}(x - x_0)^{p+k} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bunda $u_0^{(p)}, u_0^{(p+1)}, \dots, u_0^{(p+k)}$ $x = x_0$ bolǵandaǵı $u^{(p)}, u^{(p+1)}, \dots, u^{(p+k)}, \dots$ tuwındılarınıń mánisleri boladı.

Baslanǵısh (9) mánislerin tikkeley (8) teńlemesine aparıp qoyıp

$$u_0^{(p)} = f(x_0, u_0, u'_0, \dots, u_0^{(p-1)}) \quad (3.11)$$

mánisine iye bolamız.

$$u^{(p+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial u'} u'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^{(p-1)}} u^{(p)}$$
$$u^{(p+1)} = f_1(x, u, u', \dots, u^{(p-1)}) \quad (3.12)$$

Joqarıda keltirilgen ámellerdi tákirarlap, sońǵı (12) funkciyasın x boyınsha differenciallap, $u(x)$ sheshimniń $(p+2)$ - tuwındısın anıqlaytuǵın:

Bul teńlemege $u^{(p)}$ nıń ornına (8) degi mánisin ákelip qoyıp, mına ańlatpaǵa iye bolamız:

Bunda f_2 de $(x, u, u', \dots, u^{(p-1)})$ argumentlerinin toluq anıqlanğan funksiyaı boladı.

Endi $u(x), u'(x), \dots, u^{(p-1)}(x)$ lerdin $x = x_0$ bolgandagi manislerin (12), (13) h.t.b. funkciyaların aparıp qoyıp, $u(x)$ tın saykes tuvindılarının manislerine iye bolamız:

16

Bunnan soń (11) hám (14) mánislerin (10) qatarına aparıp qoyıp, (8), (9) Koshi máselesiniń izlenip atırǵan $u(x)$ sheshimniń $x-x_0$ diń dárejeleri boyınsha Teylor qatarına jiklewine iye bolamız:

$$u(x) = u_0 + u'_0(x-x_0) + \frac{u''_0}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{u^{(p-1)}_0}{(p-1)!}(x-x_0)^{p-1} + \frac{f}{p!}(x-x_0)^p + \frac{f_1}{(p+1)!}(x-x_0)^{p+1} + \dots + \frac{f_k}{(p+k)!}(x-x_0)^{p+k} + \dots \quad (3.15)$$

Bunda funkciyaların mánisleri $x=x_0, u=u_0, u'=u'_0, \dots, u^{(p-1)}=u^{(p-1)}_0$ bolǵanda esaplanılǵan dep uyǵarıladı.

3.3. Dárejeli usıldıń geypara dara jaǵdayları. Meyli $x \in [x_0, X]$ kesindisinde

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \quad (3.16)$$

Koshi máselesin sheshiw kerek bolsın. Bul máseleń sheshimniń bar bolıwı hám onıń birden-bir bolıw shártleri orınlanadı dep uyǵaramız. Bunnan tısqarı, argumentleriniń ózgeriw oblastında $f(x, y)$ funkciyası, aldaǵı waqıtları talap etiletuǵın qosımsha sıypaqlıqqa iye boladı dep esaplaymız. Sonda tiykarǵı maqset, (16) máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimin tabıwǵa múmkinshilik beretuǵın esaplaw usılın jasawdan ibarat. Bunıń ushın, (16) Koshi máselesiniń izlenip atırǵan $y(x)$ sheshimin, $x-x_0$ ayırmasınıń dárejeleri boyınsha dárejeli qatargá jiklewden paydalanamız. Bul jaǵdayda juwıq analitikalıq usıllardı jasaw jeńil orınlanadı. Dáslepki berilgen Koshi máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimi

$$u_p(x) = \sum_{i=0}^p \frac{(x-x_0)^i}{i!} u^{(i)}(x_0), \quad x_0 \leq x \leq X \quad (3.17)$$

kórinisinde izlenedi. Bunda $u^{(0)}(x_0) = u(x_0) = u_0, u^{(1)}(x_0) = u'(x_0) = f(x_0, u_0)$ boladı. Al $u^{(i)}(x_0), i=2, 3, \dots, p$ mánisleri (1) teńlemenı izbe-iz differenciallawdan alınǵan, tómendegi formulalar boyınsha anıqlanadı:

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(x_0) &= u''(x_0) = f_x(x_0, u_0) + f(x_0, u_0) f_u(x_0, u_0), \\
u^{(3)}(x_0) &= u'''(x_0) = f_{xx}(x_0, u_0) + 2 f(x_0, u_0) f_{xu}(x_0, u_0) + \\
&\quad f^2(x_0, u_0) f_{uu}(x_0, u_0) + f_{uu}(x_0, u_0) [f_x(x_0, u_0) + f(x_0, u_0) f_u(x_0, u_0)], \\
&\dots\dots\dots \\
u^{(p)}(x_0) &= F_p(f, f_x, f_u, f_{xx}, f_{xu}, f_{uu}, \dots, f_{x^{p-1}}, \dots, f_{u^{p-1}})_{x=x_0, u=u_0},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

(oğada quramallı bolğanlıǵı ushın F_p funkciyasınıń anıq kórinisi keltirilmegen).

Usılayınsha jasalğan (17) dárejeli qatarlar usılı x tıń x_0 ğa jaqın mánislerinde hám p nıń jetkilikli úlken mánislerinde (16) Koshi máselesiniń usı sheshimine jaqın juwıqlasıwları anıqlaydı.

Biraqta, (3) dárejeli qatarınıń jıynaqlılıq radiusı R di bahalaw ádewir qıyın másele boladı [1,2,4]. Sonlıqtan bul jerde toqtamaymız. Tek ǵana, egerde differenciallıq teńleme sıızıqlı bolsa: $u' = u_0(x) + u_1(x)$ hám $u_0(x), u_1(x)$ funkciaları x_0 baslanǵısh noqatında ulıwmalıq jıynaqlılıq radiusı R_1 bolǵan, dárejeli qatarlarǵa jiklenetuǵın bolsa, onda $R = R_1$ dep esaplawǵa boladı.

Meyli endi ekinshi tártipli ádettegi differencial teńlemege qoyılǵan Koshi máselesi berilgen bolsın:

$$u''(x) = f(x, u, u'), \quad (3.19)$$

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_0' \quad (3.20)$$

Bul máseledegi $f(x, u, u')$ funkciyası baslanğısh (x_0, u_0, u'_0) noqatında analitikalıq funkciya dep esaplap, (19),(20) Koshi máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimin Taylor qatarı túrinde izleybiz:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_0^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i \quad (3.20)$$

Bunda u_0 hám u_0 baslanǵısh (20) shártinen belgili. Al, (19) differentsiallıq teńlemesinen $u_0'' = f(x_0, u_0, u_0')$ mánisi anıqlanadı. Bunnan soń differentsiallıq teńlemesin x ózgeriwshisi boyınsha izbe-iz differentsiallap hám tuwındılarınıń kelip shıqqan ańlatpalarına $x = x_0$ mánisin qoyıp mına nátiyjege kelemiz:

$$u_0'' = f'_x(x_0, u_0, u_0') + f'_u(x_0, u_0, u_0')u_0' + f''_{uu}(x_0, u_0, u_0')u_0''$$

h.t.b. Solay etip, izbe-iz (20) qatarın jasawğa boladı. Sonda bul qatarda bazı bir $i = 0, 1, \dots, p$ mánisleri menen jiklenip, (19),(20) Koshi máselesiniń

$$u(x) \approx u_p = \sum_{i=0}^p \frac{u^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

juwıq analitikalıq sheshimin jazıwǵa boladı.

Dárejeli qatarlar usılı differenciallıq teńlemelerdiń normal sisteması ushın qoyılǵan

$$u_k'(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), 1 \leq k \leq p \quad (3.22)$$

$$u_k(x_0) = u_{k0}, 1 \leq k \leq p \quad (3.23)$$

Koshi máselesin sheshiw ushında joqarıda keltirilgen tártipte qollanıladı.

Egerde $f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_p), 1 \leq k \leq p$ funkciyaları analitikalıq funkciyalar bolsa, onda sistemaniń $u(x) = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_p(x)\}$ sheshiminiń dúziwshilerin tómendegi Teylor qatarı túrinde izlewge boladı:

$$u_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_{k0}^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i, 1 \leq k \leq p \quad (3.24)$$

Bul qatarlardıń koefficientleri (23) baslanǵısh shártlerin esapqa alıp, (22) sistemasınıń teńlemelerin izbe-iz differenciallaw arqalı tabılıwı múmkin.

Dárejeli qatarlar usılı, máselen (16) máselesi berilgen jaǵdayda, $f(x, u)$ funkciyasınıń hám onıń $f_{x^l k^{l-j}}, l < p$ tuwındılarınıń mánislerin esaplawdı talap etedi. Sonlıqtan usıldı bir differenciallıq teńlemenı hár qıylı baslanǵısh shártlerde sheshiwge qolaylı boladı.

Bul usıldı $[x_0, X]$ kesindisinde (16) Koshi máselesin sheshiwge qollanǵanda, kesindini $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ noqatları arqalı kishi $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, X]$ kesindilerine bólip, Koshi máselesiniń sheshimin (17) formulası menen izlew qolaylı boladı. Óytkeni, bul jaǵdayda $[x_{j-1}, x_j]$ kishi kesindisinde dárejeli qatar usılı menen tabılǵan

$u(x_j)[x_j, x_{j+1}]$ kesindisi ushın baslanğısh juwıqlasıw esabında qabıl etiledi. Bunday jaǵdaylarda dárejeli qatarlar usılın Koshi máselesin sheshiwdiń bir adımlı usıllarınıń toparına jatqarıwǵa boladı [3,7,8].

4-§. Ádettegi sıızqlı differencial teńlemeler ushın qoyılǵan Koshi máselesin dárejeli qatarlar usılı menen sheshiw

4.1. Birinshi tártipli ádettegi sıızqlı differencial teńlemesi ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw. Normal kórinisinde jazılǵan birinshi tártipli ádettegi differencial teńlemege qoyılǵan Koshi máselesin qaraymız:

$$u'(x) = p(x)u + q(x) \equiv f(x, u), \quad (4.1)$$

$$u(x_0) = u_0 \quad (4.2)$$

Egerde $f(x, u)$ funkciyası (x_0, u_0) noqatında golomorf funkciya bolsa, onda (1), (2) Koshi máselesi x_0 noqatında tek bir golomorf sheshimine iye boladı. Bunday sheshimi

$$u(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, |x - x_0| < R \quad (4.3)$$

kórinisinde jazıladı [1,2,4].

Egerde berilgen $f(x)$ funkciyası x_0 noqatınıń bazı bir dógeresinde $x - x_0$ diń dárejeleri boyınsha dárejeli qatarǵa jiklenetuǵın bolsa, onda bul funkciya x_0 noqatında golomorf funkciya dep ataladı:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, |x - x_0| < R \quad (4.4)$$

Bul jaǵdayda $f(x)$ funkciyası $|x - x_0| < R$ oblastında $(x - x_0)$ diń dárejeleri boyınsha dárejeli qatar túrindegi analitikalıq kórsetiliwge iye boladı dep ataydı. Sonda x_0 noqatınıń kórsetilgen dógeresinde $f(x)$ funkciyasına hám onıń dárejeli Qatar túrindegi analitikalıq kórsetiliwine mına úsh shárt qoyıladı: $f(x)$ funkciyası

anıqlanğan , yaǵnıy ol shekli mániske iye boladı, qatar jıynaqlı boladı hám onıń qosındısı $f(x)$ funkciyası menen sáykes keledi.

Ulıwmalıqtı joǵaltpastan, baslanǵısh (x_0, u_0) maǵlıwmatları nolge teń boladı dep uyǵarıwǵa boladı $(x_0 = 0, u_0 = 0)$. Óytkeni $x - x_0 = \xi, y - y_0 = \eta$ túrlendiriwlerin orınlap barqulla bul jaǵdayǵa keliwge boladı. Sonlıqtan aldaǵı waqıtları (1),(2) Koshi máselesiniń ornına

$$u'(x) = p(x)u + q(x), \quad (4.5)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.6)$$

Koshi máselesin qaraymız. Meyli $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaları $x=0$ noqatında golomorf funkciyalar bolsın:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \quad |x| < R \quad (4.7)$$

Teorema. Berilge (5), (6) Koshi máselesi $x=0$ noqatında tek bir golomorf sheshimine iye boladı. Bul sheshimniń analitikalıq kórsetiliwi bolǵan (3) qatarı, $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaların (7) qatarları jıynaqlı bolatuǵın

$$|x| < R \quad (4.8)$$

oblastında, jıynaqlı boladı.

Dálilleniwi. Berilgen (5) teńlemesi sıızıqlı bolǵanlıqtan, oǵan qaraǵanda ádewir keń oblastta anıqlanğan, majoranta teńlemesin alıwǵa boladı. Bul (3) sheshiminiń (8) oblastta jıynaqlı bolıwın táminleydi (egerde (8) oblastında x tıń barlıq mánislerinde $F(x)=0$ hám $f(x)=0$ teńlemeleri ushın $F(x) \geq f(x)$ teńsizligi orınlansa, onda $F(x)=0$ teńlemesi $f(x)=0$ teńlemesi ushın majoranta teńlemesi boladı).

Dáslep anıq emes koefficientler usılı menen (1), (2) Koshi máselesiniń (3) sheshimi jasaladı. Sonda

$$c_k = P_k(p_k, q_k) \quad (4.9)$$

teńligi kelip shıǵadı.

Bunnan soń (3) qatarınıń jıynaqlılıǵın dálillew ushın Koshidiń mına majorantalı máselesinen paydalanamız:

$$\bar{u}'(x) = F(x, \bar{u}), \bar{u}(0) = 0 \quad (4.10)$$

Bunda $F(x, \bar{u}) - f(x, u)$ funkciyasınıń bazı bir majorantası $(F(x, \bar{u}) \geq f(x, u))$. $F(x, \bar{u})$ majorantasın jasaw ushın $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaların olardıń ulıwmalıq $\Phi(x)$ majorantası menen almasıw jetkilikli. Bul $\Phi(x)$ funkciyasın tómendegishe anıqlawǵa boladı:

$$\Phi(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{R'}}, |x| < R' \quad (4.11)$$

Bunda M – bazı bir oń san dep esaplanadı.

Haqiqatında da, R den kishi bolǵan R' oń sanın alıp, mına teńliklerdi jazıwǵa boladı:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_k| R'^k = M_1, \sum_{k=0}^{\infty} |q_k| R'^k = M_2$$

Sonlıqtan

$$|p_k| \leq \frac{M_1}{R'^k}, |q_k| \leq \frac{M_2}{R'^k}$$

boladı hám

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_1}{R'^k} x^k = \frac{M_1}{1 - \frac{x}{R'}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2}{R'^k} x^k = \frac{M_2}{1 - \frac{x}{R'}}$$

qatarları (7) qatarları ushın majoranta boladı. Sonlıqtan $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaları ushın ulıwmalıq majoranta esabında (11) funciyanı alıwǵa boladı. Bunda $M = \max(M_1, M_2)$ dep alıńǵan.

Solay etip,

$$F(x, u) = \Phi(x)u + \Phi(x) = \Phi(x)(u + 1)$$

yamasa

$$F(x, u) = \frac{M}{1 - \frac{x}{R'}}(u + 1), \quad |x| < R'$$

dep alıwǵa boladı. Sonlıqtan Koshidiń majorant máselesi esabında mına másele ni qabıl etiwge boladı:

$$\bar{u}(x) = \frac{M}{1 - \frac{x}{R'}} (\bar{u} + 1), \quad \bar{u}(0) = 0$$

Bul másele ni sheship, mına nátiyjelerge kelemiz:

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u} + 1} = \frac{M}{1 - \frac{x}{R'}} dx, \quad \ln(\bar{u} + 1) = -MR' \ln \left(1 - \frac{x}{R'} \right) + C$$

$$\bar{u}(0) = 0, \quad C = 0, \quad \ln(\bar{u} + 1) = -MR' \ln \left(1 - \frac{x}{R'} \right)$$

Bunnan
$$\bar{u} + 1 = \left(1 - \frac{x}{R'} \right)^{-MR'}, \quad \bar{u} = -1 + \left(1 - \frac{x}{R'} \right)^{-MR'}$$

Usılayınsha anıqlanǵan $\bar{u}(x)$ sheshimi $x=0$ noqatında golomorf funkciya boladı:

$$\bar{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < R' \quad (4.12)$$

Bunnan soń (9) teńliginen paydalanıp, $\bar{c}_k > 0, |c_k| \leq \bar{c}_k, k=1, 2, \dots$ qatnaslarınń orınlanatuǵının kórsetiwge boladı. Sonlıqtan (12) qatarı (3) qatarınıń majorantası boladı. Usı sebepli (3) qatarı $|x| < R'$ oblastında sózsiz jıynaqlı boladı. Biraqta R' tı R ge qálegenshe jaqın etip saylap alıwǵa boladı. Olay bolsa, (3) qatarı (5),(6) Koshi máselesiniń barlıq (8) oblastındaǵı sheshimi boladı. Teorema dálillendi.

Sızıqlı ádettegi differencial teńlemelerge qoyılǵan Koshi máseleleriniń golomorf sheshimlerin jasaw máselesi $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyalarınń analitikalıq qásiyetlerinen hám analitikalı dúzilislerinen gárezli boladı. Egerde dara jaǵdayda, bul funkciyalar kópazǵalılar bolsa, onda x_0 hám u_0 dı erkli saylap alǵanda (3) qatarı barlıq x lar ushın jıynaqlı boladı. Al, $p(x)$ hám $q(x)$ funkciyaları kópazǵalılardıń $P(x)/Q(x)$ qatnasları bolsa, onda x_0 esabında bóliminiń nóli bolmaǵan qálegen sandı alıwǵa boladı.

Baslanğısh x_0 hám y_0 mánislerin saylap alıwǵa hám (3) qatarınıń jıynaqlı bolıwına baylanıslı sızıqlı ádettegi differencial teńlemelerdiń atap ótilgen eki artıqshalıǵı, teoriyalıq hám ámeliy jaqtan úlken áhmiyetke iye boladı. Sızıqlı emes ádettegi differencial teńlemeler bunday qásiyetlerge iye bolmaydı.

4.2. Ekinshi tártipli ádettegi sızıqlı differencial teńleme ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw. Meyli ekinshi tártipli ádettegi sızıqlı differencial teńlemege qoyılǵan Koshi máselesi berilgen bolsın:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad (4.13)$$

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u'_0, \quad (4.14)$$

Sonda bul máseleni x_0 noqatındaǵı golomorf sheshimin, yaǵnıy x_0 noqatınıń bazı bir dógerinde

$$u(x) = u_0 + u'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R \quad (4.15)$$

dárejeli qatarı menen kórsetiletuǵın sheshimin tabıw talap etilsin. Joqarıda dálillengen teoremadan: egerde x_0 noqatı p, q hám f funkciyalarınń golomorf noqatı bolsa, onda (13), (14) Koshi máselesiniń golomorf sheshiminiń bolatuǵını hám onıń birden-bir bolatuǵını kelip shıǵadı. Bul teoremadan sonday-aq p, q hám f funkciyalarınń $x - x_0$ dıń dárejeleri boyınsha dárejeli qatarları jıynaqlı bolatuǵın $|x - x_0| < R$ oblastında (15) qatarınıń da jıynaqlı bolatuǵını kelip shıǵadı.

Usı jaǵdaylarǵa baylanıslı, endi tek (15) qatarınıń c_k coefficientlerin ǵana tabıw kerek boladı. Bul máseleni bir neshe usıllar menen sheshiwge boladı:

1) Anıq emes coefficientler usılın qollanıp c_k coefficientlerin anıqlaw. Bunıń ushın (15) qatarın aǵzama-aǵza differenciallap u' hám u'' lardı tabadı, u, u', u'' lardı teńlemesine aparıp qoyadı hám p, q hám f funkciyaların $x - x_0$ dıń dárejeleri boyınsha dárejeli qatarlarǵa jikleydi. Sonda kelip shıqqan birdeylikte $x - x_0$ dıń birdey dárejeleri aldındaǵı coefficientlerin teńep, $c_k (k \geq 2)$ coefficientlerine qarata teńlemeler kelip

shıǵadı. Teńlemelerdiń bul sisteması barqulla sheshimge iye boladı hám onnan kerekli sandaǵı $c_k (k \geq 2)$ koefficientlerin bir mánisli anıqlawǵa boladı.

Is júzinde (13), (14) Koshi máselesiniń juwıq sheshimi kerekli dálilik penen alınatuǵınday etip, tek bir neshe c_k koefficientlerin esaplaw menen ǵana sheklenedi. Dara jaǵdayda, bul másleniń juwıq analitikalıq sheshimin sıızıqlandıırıw usılı menen de tabadı:

$$u(x) = u_0 + u'_0(x - x_0)$$

2) (15) qatarınıń $c_k (k \geq 2)$ koefficientlerin izbe-iz differenciallaw usılı menen de anıqlawǵa boladı. Bunıń ushın (13), (14) Koshi máselesiniń golomorf sheshimin Teylor qatarı túrinde kórsetedi:

$$u(x) = u_0 + u'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (4.16)$$

Bundaǵı $u''(x_0)$ mánisi (13) teńlemesinen anıqlanadı: ondaǵı x, u, u' lardıń ornına baslanǵısh x_0, u_0, u'_0 mánisleri qoyladı. Bunnan soń (13) teńlemesin differenciallaymız:

$$u''' + p'(x)u' + p(x)u'' + q'(x)u + q(x)u' = f'(x)$$

Bundaǵı x, u, u', u'' lardı x_0, u_0, u'_0, u''_0 sanları menen almasırap, $u'''(x_0)$ dı tabadı h.t.b.

4.3. Ekinshi tártipli bir tekli ádettegi sıızılıq differncial teńlemeniniń sheshimin dárejeli qatar túrinde kórsetiw. Meyli ekinshi tártipli bir tekli sıızılıq differenciallıq teńlemesi berilsin:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \quad (4.17)$$

Bul teńlemeniniń $p(x)$ hám $q(x)$ koefficientleri $x = x_0$ noqatınıń dógeresinde golomorf funkciyalar boladı dep esaplaymız:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k \quad (4.18)$$

Teńlemelerdiń oń jaqlarında jaylasqan qatarlar $|x - x_0| < R$ oblastında jıynaqlı boladı dep uyǵaramız.

Bul shártler orınlanganda joqarıda dálillengen teorema tiykarında (4.1. bólimine qarań) (17) teńlemenin $x = x_0$ dógeresinde golomorf hám bul noqatta aldın ala berilge qálegen u_0 hám u_0' mánislerin qabıl etetuǵın, tek bir sheshimi bar boladı. Bunday sheshim

$$u(x) = u_0 + u_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (4.19)$$

Kórinisine iye boladı hám (19) nıń oń jaǵındaǵı dárejeli qatar $|x - x_0| < R$ oblastında jıynaqlı boladı. Bunda u_0 hám u_0' - aldın ala berilgen qálegen sanlar.

Ilmiy – texnikalıq máselelerdi sheshkende (17) teńlemesiniń koefficientleri ya kóp aǵzalılar, yamasa kóp agzalılardıń qatnasları túrinde kórsetiletuǵın jaǵdaylar kóbrek ushırasadı.

Birinshi jaǵdayda (17) teńlemenin sheshimi x tıń barlıq mánislerinde jıynaqlı bolatuǵın dárejeli qatar túrinde kórsetiledi. Ekinshi jaǵdayda teńlemenin sheshimin anıqlaytuǵın dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı, $x = x_0$ noqatınan koefficientleriniń bólimleri nolge aylanatuǵın, eń jaqın noqatqa shekemgi qashıqlıqtan kishi bolmaydı.

Egerde u_0 hám u_0' mánisleri aldın ala berilgen bolsa, onda (19) formulasınıń $c_k (k \geq 2)$ koefficientleri tek bir mánisli anıqlanadı. Máselen, bul koefficientlerdi (19) qatarın (17) teńlemesine aparıp qoyıp hám teńlemenin shep jaǵındaǵı $x - x_0$ dıń hár qıylı dárejeleriniń aldındaǵı koefficientlerdi nolge teńep, anıqlawǵa boladı.

Ádette, (17) teńlemesiniń $x = x_0$ noqatında normalanǵan u_1, u_2 sheshimleriniń fundamental sistemasın jasaydı:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k, \\ u_2 &= x - x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Berilgen (17) teńlemesiniń (20) formulaları menen anıqlanǵan , sıızıqlı baylanıssız u_1 hám u_2 sheshimleri mına baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıradı:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x_0) &= 1, u_1'(x_0) = 0, \\ u_2(x_0) &= 0, u_2'(x_0) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Sonday-aq, (17) teńlemeniniń (20) formulaları menen anıqlap u_1, u_2 sheshimleri $x = x_0$ noqatınıń bazı bir $|x - x_0| < R$ dógeresinde jıynaqlı boladı. Sonlıqtan (17) teńlemesiniń sıızıqlı baylanıssız u_1 hám u_2 sheshimlerinden paydalanıp $|x - x_0| < R$, $|u| < +\infty, |u'| < +\infty$ oblastında onıń

$$u(x) = Au_1(x) + Bu_2(x) \quad (4.22)$$

ulıwma sheshimin jazıwǵa boladı.

Solay etip, berilgen (17) teńlemesiniń koefficientleriniń golomorf funkciyalar bolıwı haqqındaǵı uyǵarıwlar orınlansa, onda bul teńlemeniniń (19) dárejeli qatarı túrinde kórsetilgen golomorf sheshimin barqulla tabıwǵa boladı. Bunı tómendegi teoremada tastıyıqlaydı [1,2,4].

Teorema. Egerde (18) qatarları $|x| < R$ oblastında jıynaqlı bolsa, onda joqarıda kórsetilgen usıl menen jasalǵan (19) dárejeli qatarı da x tıń kórsetilgen mánislerinde jıynaqlı boladı hám ol (17) teńlemesiniń sheshimi boladı.

4.4. Dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantı. Dárejeli qatarlar usılı qálegen tártipli sıızıqlı hám sıızıqlı emes á.d.t.lardıń keń toparın sheshiw ushın qollanıladı. Sonlıqtan bul usıl á.d.t.lardı sheshiwge alıp keletuǵın kóp sanlı hám hár qıylı ilimiy-texnikalıq máselelerdi sheshiwde oǵada úlken áhmiyetke iye boladı.

Biraqta, bul usıldı qollanǵanda dárejeli qatardıń koefficientlerin anıqlaw ushın, ya berilgen teńlemenini izbe-iz kóp mártebe differenciallaw arqalı onıń sheshimin Teylor qatarı túrinde kórsetedi, yamasa anıq emes koefficientler usılınan paydalanadı [2,3,4,6]. Bul eki usılda, berilgen á.d.t.nıń sheshimin kerekli dálilik penen anıqlaw ushın , kóp sanlı hám quramallı esaplawlardı orınlawdı talap etedi.

Dárejeli qatarlar usılın qollanǵandaǵı kórsetilgen qolaysızlıqlardan qutılıw ushın jumıstıń bul paragrafında, onıń koefficientleri aldın ala belgili rekurrentli formula menen esaplanatuǵın, jańa variant bayanlanadı. Bul usıl dárejeli qatardı teń kúshli túrlendiriwge tiykarlanǵan bolıp, onıń tiykarǵı mánisi qatardıń koefficientlerin tikkeley esaplawǵa múmkinshilik beretuǵın formula jasawdan ibarat boladı.

Bul usıldıń mánisin

$$u^{(s)}(x) = f(x, u, u', \dots, u^{(s-1)}), \quad (4.23)$$

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u'_0, \dots, u^{(s-1)}(x_0) = u_0^{(s-1)}, \quad (4.24)$$

Koshi máselesin sheshiwge qollanıw mısasında túsindiremiz.

Berilgen differenciallıq teńlemenin on jaǵı f funkciyası $(x_0, u_0, u'_0, \dots, u_0^{(p-1)})$ baslanǵısh noqatınıń dógereginde óz argumentleriniń funkciyası boladı dep uyǵarıladı [1,2,4]. Bul shárt orınlanǵanda, x_0 noqatına jetkilikli jaqın x tiń mánislerinde, Teylor qatarına jiklenetuǵın (23), (24) Koshi máselesiniń sheshimi bar boladı [3,6,8].

Berilgen (23), (24) máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimin

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (4.25)$$

Dárejeli qatarı túrinde izleybiz. Bul qatardıń r -dárejesin tómendegishe kórsetemiz:

$$u^r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(r)} (x - x_0)^k, r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

Qálegen $r = p + q$ ushın $u^r = u^{p+q} = u^p u^q$ birdeyligi orınlanatuǵınlıqtan, Koshidin absolyut jıynaqlı dárejeli qatarlardıń kóbeymesiniń koefficientleri haqqındaǵı formulası boyınsha [1,2,4], sáykes qatarlardı kóbeytip, mına teńliklerge kelemiz:

$$c_k^{(r)} = c_k^{(p+q)} = c_0^{(p)} c_k^{(q)} + c_1^{(p)} c_{k-1}^{(q)} + \dots + c_k^{(p)} c_0^{(q)}; p, q = 1, 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Dara jaǵdayda, $k=1$ bolǵanda (26) qatarı (25) qatarı menen dál sáykes keledi. Sonlıqtan

$$c_k^{(1)} = c_k, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

teńlikleri orınlanadı. Usı sebepli u^r qatarınıń qálegen pútin dárejesiniń $c_k^{(r)}$ koefficientlerin, dáslepki berilgen (25) qatarınıń c_k koefficientleri arqalı, jeńil anıqlawǵa boladı.

Haqıyqatında da, (26) formulasınan paydalanıp, $u', u'', \dots$ tuwındıların mına qatarlar kórinisinde jazıwǵa boladı:

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{k+1} (x-x_0)^k, u''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{k+2} (x-x_0)^k, \dots, \quad (4.29)$$

Bunda

$$\dot{c}_{k+1} = (k+1)c_{k+1}, \ddot{c}_{k+2} = (k+1)(k+2)c_{k+2}, \dots \quad (4.30)$$

belgilewleri kirgizilgen. Sonlıqtan $u', u'', \dots$ tuwındılarınıń dárejelerin qatarlar menen anlatıw jeńil orınlanadı:

$$(u')^r = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{k+1}^{(r)} (x-x_0)^k, (u'')^r = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{c}_{k+2}^{(r)} (x-x_0)^k, \dots, \quad (4.31)$$

Egerde (27) formulasındaǵı c_k koefficientleri sáykes $\dot{c}_{k+1}, \ddot{c}_{k+2}, \dots$ koefficientleri menen almasırılса, onda (31) qatarınıń koefficientlerin (27) formulası menen anıqlawǵa boladı.

Sonda (25),(26),(31) qatarların dáslepki berilgen (23) differenciallıq teńlemesine aparıp qoyıp hám $x-x_0$ ayırmasınıń birdey dárejeleriniń koefficientlerin teńep, ápiwayı túrlendiriwlerdi orınlaǵannan soń, tómendegi túrdegi rekurrentli formulaǵa iye bolamız:

$$c_{k+s} = \Phi(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{k+s-1}), k=0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Bul jerdegi Φ funkciyası berilgen $f(x, u, u', \dots, u^{(s-1)})$ funkciyası menen tolıq anıqlanadı, al dáslepki s koefficientleri (24) baslanǵısh shártlerine sáykes tómendegishe anıqlanadı:

$$c_0 = u_0, c_1 = \frac{u_0'}{1!}, c_2 = \frac{u_0''}{2!}, \dots, c_{s-1} = \frac{u_0^{(s-1)}}{(s-1)!}, \quad (4.33)$$

Kórsetilgen usıl menen jasalǵan (32),(33) rekurrentli formulası (25) qatarınıń qálegen sandaǵı koefficientlerin esaplawǵa múmkinshilik beredi.

Solay etip, bayanlangan dárejeli qatarlar usılı, berilgen s -tártpılı á.d.t.ğa qoyılğan Koshi máselesin sheshiwge baylanıslı barlıq qıyınshılıqlardı (25) qatarınıń c_k koefficientlerin esaplaw ushın, kópshilik jaǵdaylarda ápiwayı algebralıq dúziliske iye bolǵan, (32) rekurrentlik formulası jasaladı.

Egerde $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k / c_{k+m})$ shegi bar bolsa, onda (25) qatarınıń jıynaqlılıq radiusın sanlı usıl menen esaplawǵa boladı. Haqıyqatında da, egerde

$$R_k^{(m)} = \frac{c_k}{c_{k+m}}, k = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

izbe-izliginiń jetkilikli sandaǵı aǵzaları esaplansa, yaǵnıy esaplawlar

$$\frac{c_k}{c_{k+m}} = \frac{c_{k+m}}{c_{k+2m}} = \frac{c_{k+2m}}{c_{k+3m}} = \dots = \text{const} = R^{(m)} \quad (4.35)$$

teńlikleri orınlanatuǵın k nıń mánislerine shekem orınlansa, onda dárejeli qatardıń jıynaqlı bolıwınıń Dalamber belgisi boyınsha [1,4,8], bul qatardıń jıynaqlılıq radiusın kerekli dálilik penen tabıwǵa boladı.

Geypara dara jaǵdaylarda (25) dárejeli qatarınıń jıynaqlılıq radiusın (32) rekurrentlik formulasınan da paydalanıp anıqlawǵa boladı.

5-§. Dárejeli qatardıń jıynaqlılıǵın tezletiw usılları

Ádettegi differencial teńlemelerdi dárejeli qatarlar usılı menen sheshkende tabılğan juwıq analitikalıq sheshiminiń jıynaqlılıq tezligi tómén hám onıń dárejesi úlken bolıp, onnan paydalanıp esaplawlardı orınlaw qolaysız bolıwı múmkin. Bunnan tısqarı, alınǵan sheshimniń qáteligin bahalaw qıyın yamasa múmkin bolmaydı da. Sonlıqtan bul usıl menen tabılğan juwıq analitikalıq sheshimniń jıynaqlılıq tezligin arttırıw hám jańa jıynaqlılıq tezligin saqlap, onıń kesindisiniń (dara qosındısınıń) dárejesin tóménletiw zárúrligi payda boladı. Jumıstıń bul paragrafinda bul máselelerdi sheshiwdiń geypara usılları keltiriledi.

5.1. Argumentin almasıw arqalı dárejeli qatardıń jıyınalıqlıq tezletiw usılı. Meyli

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots \quad (5.1)$$

dárejeli qatarı $|x| < r$ dóngeleginde jıyınalıq bolsın. Sonda x noqatı dóngelektiń orayına qansheli jaqın jaylassa, yaǵnıy $|x|/r$ qatnası qansheli kishi bolsa, onda n niń ósiwi menen qatardıń aǵzaları moduli boyınsha tez kemeyedi hám onıń jıyınalıqlıq tezligi sonshelli tezrek boladı. Sonlıqtan qatardıń x argumentin

$$x = \varphi(t) = a_1t + a_2t^2 + \dots \quad (5.2)$$

qatarı menen almastıradı. Bunday almastırwǵa mınanday talap qoyıladı: a) $f(x) = f[\varphi(t)]$ funkciyası bazı bir $|t| < R$ dóngeleginde jıyınalıq bolǵan

$$f(x) = f[\varphi(t)] = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n + \dots \quad (5.3)$$

dárejeli qatarına jiklenedi; b) t noqatı $|t| < R$ jıyınalıqlıq dóngeleginiń orayına, x noqatınıń $|x| < r$ dóngeleginiń orayına jaqınlıǵına salıstırǵanda, jaqınıraq jaylasıwı kerek, yaǵnıy

$$\frac{|t|}{R} < \frac{|x|}{r} \quad (5.4)$$

teńsizligi orınlanıwı kerek.

Egerde x argumentin (2) formulası menen almastırǵanda (4) teńsizligi orınlansa, onda (3) qatarı $f(x)$ qosındısına (1) qatarına salıstırǵanda tezrek jıyınalıq boladı.

Berilgen (1) qatarınan (3) qatarına ótiw $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ coefficientleriniń izbeizligin $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ coefficientleriniń izbe-izligine úshmúyeshli matrica járdeminde sızıqlı túrlendiriwdi orınlaw arqalı iske asırıladı.

Haqıyqatında da, $\varphi(t)$ funkciyası ushın jazılǵan (2) qatarın (1) qatarına aparıp qoyǵanda, $\varphi^n(t) (n=1, 2, \dots)$ dárejeleri ushın sáykes qatarlardı jazıw kerek boladı. Bunı, dárejeli qatarlardı kóbeytiw qádelerinen paydalanıp, ánsat orınlawǵa boladı. Meyli kerekli esaplawlar orınlanıp, kerekli qatarlar jasalǵan bolsın:

$$x^n = \varphi^n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(n)} t^k$$

Bul qatardi (1) qatarına aparıp qoyıp hám qosındılardıń tártibin ózgerтип, mına nátiyjelerge kelemiz:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{(n)} t^k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{n=1}^k a_k^{(n)} c_n = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$$

Bunday esaplawlar mına sıızqlı túrlendiriwge alıp keledi:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= c_0, \\ b_k &= a_k^{(1)} c_1 + a_k^{(2)} c_2 + \dots + a_k^{(k)} c_k, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Túrlendiriwshi matricanıń úshmúyeshli bolıwı c_k koefficientlerinen b_k koefficientlerine ótiwdi oğada jeńillestiredi. Bunday qolaylılıqqa (2) jikleniwinde a_0 saltań aǵzası joq bolıwına baylanıslı erisildi.

5.2.Dárejeli qatardıń jıynaqlıq tezligin arttırıwdıń ekinshi usılı. Esaplaw algoritmleriniń qátelikleriniń eń kishi bolıwına erisiwge baylanıslı, sanlı analizdiń kóplegen máselelerin sheshiwge Shebishevtiń I túrdegi $T_n(x)$ kóp aǵzalılar keń qollanıladı [1,2,4]. Bul kóp aǵzalılar $[-1,1]$ kesindisinde nolden en kishi awısıwǵa iye boladı. Yaǵnıy olar n -dárejeli hám úlken dárejeli aǵzasınıń koefficientleri 1 ge teń bolǵan $P_n(x)$ kóp aǵzalılarınıń arasında

$$\max_{[-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{[-1,1]} |P_n(x)|$$

shártin qanaatlandıratuǵın birden-bir n -dárejeli kóp aǵzalı boladı. Usı sebepli funkciyalardıń Shebishev kópaǵzalıları boyınsha qatarǵa jikleniw, olardıń dárejeli qatarlarǵa jikleniwi menen salıstırǵanda, tezrek jıynaqlı boladı [1,2,4,8]. Sonlıqtan bunday áhmiyetli qásiyetine baylanıslı, funkciyalardıń dárejeli qatarlarǵa jikleniwiniń dara qosındıların (kesindilerin) Shebishev kóp aǵzalılarınıń sıızqlı birikpeleri menen almasıradı. Usınıń nátiyjesinde berilgen funkciyanıń mánisin, qatardıń az sandaǵı aǵzalarınıń qosındısınan paydalanıp, joqarı dálilik penen esaplaw múmkin boladı.

Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq tezligin arttırıwǵa Shebıshevtiń $[-1,1]$ kesindisinde anıqlanǵan I túrdegi kóp aǵzalıların paydalanıwǵa baylanıslı, dáslep kópaǵzalılar haqqında qısqaşa maǵlıwmatlar keltiremiz:

1) Shebıshevtiń bunday kópaǵzalıları

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$$

formulası menen anıqlanadı ($T_0(x) = 1, T_1(x) = x$);

2) Shebıshev kópaǵzalılarınıń sisteması $[-1,1]$ kesindisinde $\varphi(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ salmaq funkciyası menen ortogonal boladı;

3) Bul kópaǵzalılardıń maksimumı +1ge, al minimum -1ge teń boladı, al $[-1,1]$ kesindisiniń ushlarında $T_n(-1) = (-1)^n, T_n(+1) = 1$ mánislerin qabıllaydı;

4) $T_n(x)$ kópaǵzalısınıń $[-1,1]$ kesindisindegi nolleri (korenleri) mına formula menen anıqlanadı:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Meyli, (1) qatarınıń dáslepki $n+1$ aǵzalılarınıń qosındısı (dara qosındısı) berilgen bolsın:

$$\bar{f}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n, x \in [-1,1] \quad (5.6)$$

Egerde (1) qatarı yamasa onıń dara qosındısı $[a,b]$ kesindisinde berilgen bolsa, onda

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

sızıqlı ornına qoyıwın orınlap, $t \in [-1,1]$ kesindisine barqulla ótiwge boladı.

Shebıshev kópaǵzalısındaǵı x tıń eń úlken x^n dárejesin x tıń kishi dárejeleri hám $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ arqalı anıqlawǵa boladı:

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) + \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) \quad (5.7)$$

Bul teńliktegi eń sońǵı qosılıwshını taslap ketip, modul boyınsha $\frac{1}{2^{n-1}}$ den artıq bolmaǵan qátelikke jol qoyamız. Óytkeni, Shebıshev kópaǵzalılarınıń mánisleri -1 menen +1 diń arasında jatadı.

Solay etip, x ózgeriwshisiniń n -dárejesin onıń kishi dárejeleriniń sıızıqlı birikpesi túrinde juwıq túrde kórsetip, payda bolǵan qátelikti ańsat bahalawǵa boladı.

Bunnan soń, (7) ni (6) ǵa aparıp qoyıp, n -dárejeli kópaǵzalıǵa iye bolamız. Bul processti usılayınsha dawam etip, dárejesi kishi, biraq jıynaqlılıq tezligi joqarı hám qátekigi kishi dárejeli qatardıń kesindisine iye bolamız.

Egerde x tıń dárejeleri Shebıshev kópaǵzalıları arqalı ańlatılса, onda dárejeli qatardıń (6) kesindisin Shebıshev kópaǵzalıları menen jıklengen qatardıń kesindisi menen almastırıwǵa boladı. Bunıń ushın x tıń dárejelerin $T_n(x)$ kópaǵzalıları menen ańlatatuǵın tayar formulalar bar [1,4,6,8]:

$$x^0 = 1 = T_0, \quad x = T_1,$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2), \quad x^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3),$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4), \quad x^5 = \frac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5),$$

$$x^6 = \frac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6), \quad x^7 = \frac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7),$$

$$x^8 = \frac{1}{128}(35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8),$$

$$x^9 = \frac{1}{256}(126T_1 + 84T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9), \quad -$$

$$x^{10} = \frac{1}{512}(126T_0 + 210T_2 + 120T_4 + 45T_6 + 10T_8 + T_{10}),$$

Juwmaǵında, kópshilik jaǵdaylarda, funkciyalardı joqarı dárejeli dárejeli qatarǵa jiklew menen alınǵan dálilikke, olardı kishi dárejeli Shebıshev kópaǵzalıları menen jiklew arqalı erisiwge bolatuǵının atap ótemiz.

6-§. Sanlı mısallar

Bul paragrafta jumıstıń – paragraflarında teoriyalıq tiykarları bayanlangan, ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılğan Koshi máselelerin sheshiwdiń dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantın qollanıp orınlangan kóp sanlı esaplaw tájriybeleriniń ayrımlarınıń nátiyjeleri keltirilgen. Kórsetilgen usıldıń basqa analitikalıq usıllar menen salıstırǵandaǵı ózgesheligi, sızıqlı emes ádettegi differenciallıq teńlemelerge qoyılğan Koshi máselesi oǵan teń kúshli bolǵan birinshi tártipli sızıqlı bunday teńlemelerdiń sistemasına qoyılğan Koshi máselesi menen almastırılmaıdı, al berilgen máseleni sheshiwge tikkeley qollanıladı. Ekinshi jaǵınan, islep shıqqan dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın sanlı usıl menen joqarı dállik penen anıqlawǵa boladı. Bul jaǵdaylar, óz gezeginde, joqarı tártipli sızıqlı emes ádettegi differenciallı teńlemelerge qoyılğan Koshi máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimin joqarı dállik penen anıqlawdı táminleydi [3,5,6,7].

Barlıq esaplawlar C++ algoritimlik tilinde programmalar dúzilip, kompyuter járdeminde orındandı. Dúzilgen programmalarardıń nusqaları pitiriw qánigelik jumısına qosımshalarda keltirilgen.

1-mısal. Tómenдеgi

$$y' = y^3 - y^2 + \frac{1}{5}e^x, \quad y(0) = 0,5 \quad x \in [-1;1] \quad (6.1)$$

Koshi máselesin altı mánili cifrlar menen dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantın qollanıp sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen (1) Koshi máselesin dárejeli qatarlar usılınıń jańa variant menen sheshiw tómendegi tártipte orınlanađı:

$$1) \text{ Dáslep (1) teńlemesine } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad y^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (x-x_0)^n, \quad (y')^k = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{c}_{n+1}^{(k)} (x-x_0)^n, \\ (y'')^k = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{c}_{n+2}^{(k)} (x-x_0)^n, \dots \quad \text{qatarların aparıp qoyıp, } x_0 = 0, k=2, k=3 \text{ bolǵanda } x^n \text{ niń}$$

koefficientlerin salıstırıp mına formulaǵa kelemiz:

$$\dot{c}_{n+1} = c_n^{(3)} - c_n^{(2)} + \gamma_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (6.2)$$

Bunda γ_n berilgen $f(x) = \frac{1}{5}e^x$ funkciyasınıń Makloren qatarınıń koefficientleri

$$f(x) = \frac{1}{5}e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n = \frac{1}{5} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right), \quad \gamma_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Endi $(n+1)! = (n+1)n!$ teńliginen paydalanıp qollanıw ushın qolaylı mına formulağa iye bolamız.

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n!} \right) = \frac{\gamma_n}{n+1}; \quad \gamma_0 = \frac{1}{5}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (6.3)$$

2) $n=0$ bolǵanda $c_0 = y(0) = 0,5$ bolǵanlıqtan (2) formuladan paydalanıp, c_1 koefficientlerin anıqlawǵa, al onnan soń esaplawlardı $n=1, 2, \dots$ mánisleri ushın dawam etiwge boladı.

Haqıyqatında da $\dot{c}_{n+1} = (n+1)c_{n+1}, \ddot{c}_{n+1} = (n+1)(n+2)c_{n+1}, \dots$ formulaları boyınsha noqatı joq

$$c_{n+1} = \frac{\dot{c}_{n+1}}{n+1} \quad (6.4)$$

koefficientin anıqlawǵa boladı. Bul formuladan paydalanıp (2) formulası boyınsha esaplawdı dawam etiwge boladı.

3) $c_n^{(2)}$ hám $c_n^{(3)}$ koefficientlerin $c_n^{(k)} = c_n^{(l+m)} = c_0^{(l)} c_n^{(m)} + c_1^{(l)} c_{n-1}^{(m)} + \dots + c_n^{(l)} c_0^{(m)}$ ($l=1, 2, 3, \dots; m=1, 2, 3, \dots; n=0, 1, 2, 3, \dots$) formulası boyınsha esaplawǵa boladı. Bul formulada dáslep $l=m=1$ dep, sońınan $l=1, m=2$ dep alıp, mına teńlemelerdi jazıwǵa boladı.

$$c_n^{(2)} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_n c_0, \quad (6.5)$$

$$c_n^{(3)} = c_0 c_n^{(2)} + c_1 c_{n-1}^{(2)} + c_2 c_{n-2}^{(2)} + \dots + c_n c_0^{(2)} \quad (6.6)$$

4) Solay etip bul usıldıń esaplaw algoritimi tómendegi izbe-izlikte orınlanadı:

a) (3) formulası boyınsha γ_n lerdiń mánisleri esaplanadı. (Olardıń mánisleri nolge teń bolǵansha!)

b) Bunnan soń (5) hám (6) formulaları boyınsha $c_0^{(2)}$ hám $c_0^{(3)}$ mánisleri esaplanadı: $c_0 = 0,5; c_0^{(2)} = c_0 \cdot c_0 = 0,25; c_0^{(3)} = c_0 \cdot c_0^{(2)} = 0,125; \quad \gamma_0 = 0,2$

v) (2) hám (4) formulaları boyınsha

$$\dot{c}_1 = c_0^{(3)} - c_0^{(2)} + \gamma_0 = 0,075 \quad c_1 = 0,075$$

g) c_1 diń tabılǵan mánisinen paydalanıp kórsetilgen esaplawlardı tákrarlap,

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ qatarınıń kerekli sandaǵı koefficientlerin esaplawǵa boladı.

Barlıq esaplawlar úsh artıq onlıq belgiler menen orındandı. Esaplawlardıń tiykarǵı nátiyjeleri tómendegi 1-kestede keltirilgen.

1-keste

Berilgen (1) ádettegi sıızılıq emes differencial teńlemege qoyılǵan Koshi máselesin dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantı menen sheshiwdiń tiykarǵı nátiyjeleri

n	c_n	c_n^2	c_n^3	γ_n	$\dot{c}_n^3$	$R_n = c_n / c_{n+1}$
0	0.5	0.25	0.125	0.2	0.075	6.666666667
1	0.075000000	0.075000000	0.056250000	0.200000000	0.181250000	0.827586207
2	0.090625000	0.096250000	0.076406250	0.100000000	0.080156250	3.391812865
3	0.026718750	0.040312500	0.040851563	0.033333333	0.033872396	3.155224110
4	0.008468099	0.020688802	0.026211426	0.008333333	0.013855957	3.055761121
5	0.002771191	0.008884180	0.013546655	0.001666667	0.006329142	2.627077695
6	0.001054857	0.003719270	0.006764579	0.000277778	0.003323087	2.222030389
7	0.000474727	0.001587748	0.003236620	0.000039683	0.001688555	2.249149786
8	0.000211069	0.000693265	0.001516957	0.000004960	0.000828652	2.292427175
9	0.000092072	0.000313079	0.000711428	0.000000551	0.000398900	2.308160626
10	0.000039890	0.000142870	0.000334435	0.000000055	0.000191620	2.289891901
11	0.000017420	0.000065257	0.000157902	0.000000005	0.000092650	2.256229943
12	0.000007721	0.000029803	0.000074674	0.000000000	0.000044872	2.236825235
13	0.000003452	0.000013630	0.000035301	0.000000000	0.000021671	2.229852315
14	0.000001548	0.000006253	0.000016675	0.000000000	0.000010422	2.227820615
15	0.000000695	0.000002876	0.000007872	0.000000000	0.000004996	2.225256192
16	0.000000312	0.000001325	0.000003715	0.000000000	0.000002390	2.220746231
17	0.000000141	0.000000611	0.000001753	0.000000000	0.000001142	2.215784471
18	0.000000063	0.000000282	0.000000827	0.000000000	0.000000545	2.211591953
19	0.000000029	0.000000130	0.000000390	0.000000000	0.000000260	2.208401860
20	0.000000013	0.000000060	0.000000184	0.000000000	0.000000124	2.205851049
21	0.000000006	0.000000028	0.000000087	0.000000000	0.000000059	2.203546578
22	0.000000003	0.000000013	0.000000041	0.000000000	0.000000028	2.201340182

Kestedeǵı maǵlıwmatlardan kórinip turǵanıday (1) Koshi máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimi

$$y(x) \approx y(x) = \sum_{n=0}^{22} c_n x^n \quad (6.7)$$

kórinisinde jazıwǵa boladı. Al, (4.35) formulası boyınsha, kelip shıqqan (7) qatarınıń jıynaqlıq radiusı $R \approx 2,2$ bolǵanda talap etilgen dállikke qálegen $|x| \leq 1$ ushın erisiwge boladı. Sonlıqtan tabılǵan (7) qatarınan paydalanıp, integrallıq iymekliktiń berilgen $[-1,1]$ kesindisindegi qálegen sandaǵı noqatların esaplawǵa boladı. $R \approx 2,2$ bolǵanlıqtan, $[-1,1]$ kesindisiniń sırtındaǵı noqatlardaǵı da (1) Koshi máselesiniń sheshiminiń mánislerin kórsetilgen dállik penen esaplawǵa boladı.

2-mısal. Úshinshi tártipli ádettegi sıızıqlı emes differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin altı onlıq belgieler menen dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantın qollanıp sheshiń:

$$\begin{aligned} y''' &= 0, 2(2y' + y^3 - \frac{1}{x} shx), \\ y(0) &= 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0,5 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Sheshiliwi. 1) (8) teńlemege $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $y^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (x-x_0)^n$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{c}_{n+1} (x-x_0)^n$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{c}_{n+2} (x-x_0)^n$, ... qatarların ákelip qoyıp, $x_0 = 0, k = 3$ bolǵanda x^n nıń aldınǵı koefficientlerin salıstırıp, mına teńlemege kelemiz:

$$\ddot{c}_{k+3} = 0, 2(2c_{k+1} + c_k^{(3)} - l_k), \quad (6.9)$$

Bunda l_k berilgen $f(x) = \frac{1}{x} shx$ funkciyasınıń Makloren qatarına jikleniw koefficientleri: $f(x) = \frac{1}{x} shx = \frac{1}{x} (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots)$

Bul jaǵdayda

$$l_{2i} = \frac{1}{(2i+1)!}, \quad l_{2i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

boladı. Ápiwayılastırıp maqsetinde $\dot{c}_{n+1} = (n+1)c_{n+1}$, $\ddot{c}_{n+1} = (n+1)(n+2)c_{n+1}$, ... formulalarınan paydalanıp, (9) daǵı $\ddot{c}_{k+1}$ koefficientin almastırıp, mına formulaǵa kelemiz:

$$\ddot{c}_{k+3} = (k+1)(k+2)(k+3)c_{k+3}$$

Biraqta baslanǵısh shártler boyınsha $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1/4 = 0,25$ ekenligin esapqa alıp, (9) formulası tiykarında mına formulanı jazıwǵa boladı:

$$c_{k+3} = \frac{2\dot{c}_{k+1} + c_k^{(3)} - l_k}{5(k+1)(k+2)(k+3)}; \quad c_0 = c_1 = 1, c_2 = 0, 25, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.11)$$

Bundağı $\dot{c}_{k+1}$ koefficientleri (2) formulasi menen, al $c_k^{(3)}$ koefficientleri (5), (6) formulaları menen esaplanadı.

Esaplawlardıń tiykargı nátiyjeleri tómecge jaylastırılğan.

2-keste

Berilgen úshinshi tártipli ádettegi sıızqlı emes differenciallıq teńlemelerge qoyılğan (8) Koshi máselesin dárejeli qatarlar usılınıń jańa variantı menen sheshiwdiń tiykargı nátiyjeleri

n	c_n	c_n^2	c_n^3	$\dot{c}_n$	γ_n	$R_n = c_n / c_{n+1}$
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	0	4
2	0.25	1.5	3.75	0.500000000	0.166666667	3.750000000
3	0.066666667	0.633333333	2.700000000	0.200000000	0.000000000	2.000000000
4	0.033333333	0.262500000	1.437500000	0.133333333	0.008333333	2.510460251
5	0.013277778	0.126555556	0.727333333	0.066388889	0.000000000	2.685393258
6	0.004944444	0.057555556	0.373458333	0.029666667	0.000198413	3.323848479
7	0.001487566	0.023947354	0.183046032	0.010412963	0.000000000	3.176836158
8	0.000468254	0.009265344	0.084057937	0.003746032	0.000002756	2.994271452
9	0.000156383	0.003537502	0.036786379	0.001407449	0.000000000	2.954683577
10	0.000052927	0.001357019	0.015714359	0.000529272	0.000000025	3.015881670
11	0.000017550	0.000512053	0.006604365	0.000193045	0.000000000	3.060562998
12	0.000005734	0.000189050	0.002718026	0.000068809	0.000000000	3.055720936
13	0.000001877	0.000068624	0.001094618	0.000024395	0.000000000	3.039380138
14	0.000000617	0.000024719	0.000433103	0.000008644	0.000000000	3.045912959
15	0.000000203	0.000008858	0.000169100	0.000003040	0.000000000	3.062590168
16	0.000000066	0.000003153	0.000065280	0.000001059	0.000000000	3.074272086
17	0.000000022	0.000001114	0.000024928	0.000000366	0.000000000	3.078068246
18	0.000000007	0.000000391	0.000009422	0.000000126	0.000000000	3.080053830
19	0.000000002	0.000000137	0.000003529	0.000000043	0.000000000	3.084336732
20	0.000000001	0.000000048	0.000001312	0.000000015	0.000000000	3.089513932
21	0.000000000	0.000000016	0.000000484	0.000000005	0.000000000	3.093598372
22	0.000000000	0.000000006	0.000000177	0.000000002	0.000000000	3.096370803
23	0.000000000	0.000000002	0.000000065	0.000000001	0.000000000	3.098746749

Esaplawlar úsh artıq mánili cifrlar menen orınlanılıp, alınğan tiykargı nátiyjeleri 2-kestede keltirilgen. Bul jaǵdayda berilgen (8) Koshi máselesiniń juwıq analitikalıq sheshimi esabında

$$y(x) \approx y(x) = \sum_{n=0}^{22} c_n x^n \quad (6.12)$$

qatarı qabıl etilgen. Kestede keltirilgen maǵlıwmatlar boyınsha bul qatardıń jıynaqlılıq radiusı $R \approx 3,0$ dep alıwǵa boladı. Solay etip $n = 22$ bolǵanda, bul jaǵdayda da, berilgen dállikke barlıq $|x| \leq 1$ ushın erisiwge boladı. Joqarıdaǵı 1-mısal jaǵdayındaǵı sıyaqlı $x \in [-1, 1]$ kesindisiniń sırtında da (12) qatarı jıynaqlı bolıp, (8) teńlemenıń integralıq iymekliginiń kóp sanlı noqatların $[-3, 3]$ kesindisinde de esaplawǵa boladı.

Juwmaqlaw

Kóplegen differenciallıq teńlemeleriniń sheshimleri ápiwayı funkciyalar menen ańlatılmaıdı. Bunday jaǵdaylarda differenciallıq teńlemelerdi integrallawdıń juwıq usıllarınan paydalanadı. Juwıq analitikalıq usıllardıń biri differenciallıq teńlemenin sheshimin dárejeli qatar túrinde kórsetiw usılı boladı [3,6,7,8]. Bul qatardıń shekli sandaǵı aǵzaların qosındısı differenciallıq teńlemenin juwıq analitikalıq sheshimi boladı. Differenciallıq teńlemenin juwıq analitikalıq sheshimin anıqlaytuǵın funcionallıq qatar anıq emes koefficientler yamasa Teylor hám Makloren qatarların qollanıwǵa tiykarlangan usıl menen jasaladı. Sońǵı usıl berilgen differenciallıq teńlemenin izbe-iz differenciallaw arqalı iske asırıladı. Usınıń nátiyjeleri boyınsha Teylor (Makloren) qatarındaǵı belgisiz funkciyanıń mánisleri izbe-iz anıqlanadı. Bul óz gezeginde berilgen differenciallıq teńlemenin sheshimine sáykes keletuǵın dárejeli qatardıń koefficientlerin anıqlawǵa múmkinshilik beredi.

Biraqta kórsetilgen usıllardı qollanıp, differenciallıq teńlemenin juwıq analitikalıq sheshimin anıqlaytuǵın dárejeli qatardı jasaw ádewir qıyınshılıqlarǵa keledi. Sonlıqtan bul usıllardı qollanıp, berilgen differenciallıq teńlemenin juwıq analitikalıq sheshimin joqarı dálilik penen anıqlaw úlken kólemdegi esaplaw jumıslardı orınlawdı talap etedi. Ekinshi jaqtan, bul usıllardı qollanǵanda kelip shıqqan dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın anıqlaw ulıwma jaǵdayda sheshilmegen másele boladı [1,2,4,6,7].

Kórsetilgen jaǵdaylarǵa baylanıslı berilgen differenciallı teńlemenin sheshimin juwıqlastırıwshı dárejeli qatardı jasawdıń qollanıw ushın qolaylı hám joqarı nátiyjeli usılın jasaw zárúrligi payda boldı. Sońǵı eki jıl dawamında bul máseleni sheshiw ústinde ilimiy-izertlew jumısları orınlanıp, onıń tiykarǵı nátiyjeleri boyınsha bir ilimiy maqala járiyalandı [5]. Bul jumısta dárejeli qatardıń koefficientlerin anıqlaw ushın rekkurentli esaplaw formulası jaratıldı hám onıń jıynaqlılıq radiusın sanlı usıl menen anıqlaw múmkinshiligi kórsetildi. Sonday-aq, dárejeli qatarınıń bul jańa variantı, ózgermeli koefficientli joqarı tártipli sızıqlı hám sızıqlı emes differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan baslanǵısh shártli hám shegaralıq máselelerdiń juwıq analitikalıq sheshimlerin joqarı dálilik penen anıqlawǵa múmkinshilik beretuǵının ayrıqsha atap ótemiz.

Endi jumıstıń tiykarǵı nátiyjelerin qısqasha keltiremiz.

1. Differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwdiń juwıq analitikalıq usılların qısqasha sholıw jasalıp, olardıń arasında kóp qollanılatuǵın izbe-iz juwıqlasıw usıllarınıń tiykarǵı rejeleri, jıynaqlılıq shártleri hám qáteligin bahalaw máseleleri bayanlanıp, bul usıldıń á.d.t.ǵa qoyılǵan Koshi máslesiniń sheshiminiń bar bolıwı hám onıń birden-birligin dálillew, kóp adımlı ayırmalar usıllarında kesteniń basın jasaw ushın qollanılatuǵınlıǵın atap ótıledi.

2. Joqarı tártipli differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw mısasında dárejeli qatarlar usılınıń klassikalıq variantlarınıń teoroyalıq tiykarları bayanlanadı, olardıń birinshi hám ekinshi tártipli á.d.t.lar ushın qoyılǵan Koshi máselelerin sheshiwge arnalǵan dara jaǵdaylarınıń esaplaw algoritimleri keltirilip, olardan nátiyjeli paydalanıw boyınsha sáykes usınıslar beriledi. Birinshi tártipli á.d.t.lardıń normal sisteması ushın qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwge dárejeli qatarlar usılınıń klassikalıq variantı qollanıladı.

3. Birinshi tártipli sıızıqlı á.d.t.ǵa qoyılǵan Koshi máselesin sheshiwge dárejeli qatarlar usılı qollanıladı. Bul máseleniń tek bir golomorf sheshimge iye hám onıń jıynaqlı bolıwınıń shártleri kórsetilgen teorema dálillenedi. Egerde birinshi tártipli sıızıqlı á.d.t.nıń koefficientleri dara jaǵdayda algebralıq kópáǵzalılar yamasa bunday kópáǵzalılardıń qatnası kórinisine iye bolsa, onda bunday teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesiniń barqulla birden-bir golomorf sheshimge iye bolatuǵını kórsetiledi.

4. Ekinshi tártipli sıızıqlı á.d.t.ǵa qoyılǵan Koshi máselesiniń birden-bir golomorf sheshimge iye bolıwınıń shártleri keltiriledi. Golomorf sheshimniń koefficientlerin anıqlaw ushın anıq emes koefficientler hám berilgen teńlemenı izbe-iz differenciallaw usılların qollanıw máseleleri talqınlandı.

5. Ekinshi tártipli bir tekli sıızıqlı á.d.t.larǵa qoyılǵan Koshi máselesiniń baslanǵısh $x = x_0$ noqatınıń dógereginde golomorf sheshimge iye bolıwınıń shártleri kórsetiledi. Egerde berilgen teńlemenıń koefficientleri algebralıq kóp áǵzalılar yamasa bunday kópáǵzalılardıń qatnası bolsa, onda bunday teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselesi barqulla dárejeli qatarlar kórinisindegi tek bir golomorf sheshimge iye bolatuǵını haqqında teorema keltiriledi.

6. Dárejeli qatarlar usılınıń klassikalıq usıllarınan ózgeshe jańa variantınıń teoriyalıq tiykarları bayanlanadı. Joqarı tártipli á.d.t.larǵa qoyılǵan Koshi máselesin sheshiw mısasında bul usıldıń esaplaw algoritimi jasaladı. Bul usılda dárejeli qatardıń qálegen sandaǵı aǵzaların esaplawǵa múmkinshilik beretuǵın rekurrentli formula jasaladı. Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın sanlı usıl menen anıqlaw múmkinshiligi kórsetiledi.

7. Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq tezligi tómén bolǵan jaǵdaylarda, onı tezletiw zárurlıǵı kelip shıǵadı. Usıǵan baylanıslı bul másele ni sheshiwdiń eki usılı keltiriledi: qatardıń argumentlerin almastırırıw hám Shebıshevtiń klassikalıq ortogonal kóp aǵzalılardan paydalanıp, bul másele ni qalay sheshiwge bolatuǵını kórsetiledi. Bul usıllardı qollanıp, dárejeli qatardıń az sandaǵı aǵzaların qosındısan paydalanıp, á.d.t.larǵa qoyılǵan Koshi máslesiniń sheshimin joqarı dálilik penen anıqlaw múmkin boladı.

8. Kompyuterden paydalanıp orınlangan kóp sanlı esaplaw tájriybeleriniń nátiyjeleri bir neshe kestelerge jaylastırılıp keltirilgen. Dárejeli qatarlar usılınıń jańa variant birinshi hám úshinshi tártipli sızıqlı emes á.d.t.larǵa qoyılǵan Koshi máselelerin sheshiwge qollanıladı, qatarlardıń dara qosındısı kórinisinde kelip shıqqan juwıq analitikalıq sheshimleriniń jıynaqlılıq radiusı sanlı usıl menen anıqlanadı.

Juwmaqlap aytqanda, pitkeriw qániygelik jumısında dárejeli qatarlar usılın, sızıqlı hám sızıqlı emes differenciallıq teńlemelerge qoyılǵan Koshi máselelerin sheshiwge qollanıwǵa baylanıslı máseleler bayanlanadı. Ayrıqsha atap ótetuǵın jańa nátiyje –bul usıldıń esaplaw máqsetleri ushın qolaylı hám joqarı nátiyjeli jańa variantınıń jasalıwı boldı. Keleshekte aldımızǵa qoyılǵan baslı máseleler –bul sońǵı usıldı á.d.t.lar ushın qoyılǵan shegaralıq hám menshikli mánisler máselelerin sheshiwge ulıwmalastırırw boyınsha ilimiy-izertlew jumısların orınlaw máseleleri boladı.

Paydalanilgan ádebiyatlar

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. –М.: Наука, 1979.
2. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы), ч.1–М.: Высшая школа, 1980.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т.2.-М.:Наука, 1977.
4. Мантуров О.В. Курс высшей математики. –М.: Высшая школа, 1991.
5. Отаров А.О., Кеунимжаева Г.П. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом степенных рядов//Журнал “Вестник КК отделения АНРУз”, 2017, №4.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.2. . –М.: Наука, 1974.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. –М.: Наука, 1985.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. –М.: Физматгиз, 1962.
9. <http://www.ziyonet.uz>
- 10.<http://www.ilim.uz>
- 11.<http://www.edu.uz>
- 12.<http://www.dxdy.ru>
- 13.<http://www.semestr.ru>

Qosımshalar

(Jeke kompyuter ushın C++ tilinde dúzilgen programmalar hám olardıń iske asırılıwınan alıńǵan sanlı nátiyjelerdiń basıp shıǵarılǵan nusqaları)

1-máseleniń C++ tilinde jazılǵan programması:

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<iomanip>
using namespace std;
int n=0;
double R[1000];
double a[1000];
double a_2[1000];
double a_3[1000];
double e = 0.0001;
double d[1000];
double b[1000];
double gamma[1000];
double delta = 0;
double kvadrat(int n)
{
    double kv = 0;
    for (int i=0; i<=n; i++)
        kv += a[n-i]*a[i];
    return kv;
}
double kup(int n)
{
    double kv = 0;
    for (int i=0; i<=n; i++)
        kv += a[n-i]*a_2[i];
    return kv;
}
double shtrix(int n)
{
    return a_3[n] - a_2[n] + gamma[n];
}
int main()
{
    a[n] = 0.5;
    a_2[n] = kvadrat(n);
    a_3[n] = kup(n);
    gamma[n] = 0.2;
    d[n] = shtrix(n);
    b[n] = d[n]/(n+1);
    R[n] = a[n]/b[n];
    cout<<setfill(' ')<<setw(6)<<n<<" ° ";
```

```

        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<a[n]<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kvadrat(n)<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kup(n)<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<gamma[n]<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<d[n]<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<R[n]<<setprecision(9)<<endl;
        int KK=10;
do
{
    n++;
    a[n] = b[n-1];
    a_2[n] = kvadrat(n);
    a_3[n] = kup(n);
    gamma[n] = gamma[n-1]/n;
    d[n] = shtrix(n);
    b[n] = d[n]/(n+1);
    R[n] = a[n]/b[n];
    delta = fabs(R[n-1]-R[n]);
    cout<<setfill(' ')<<setw(6)<<n<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<a[n]
]<<setprecision(9)<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<kva
drat(n)<<setprecision(9)<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<kup
(n)<<setprecision(9)<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<gam
ma[n]<<setprecision(9)<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<d[n]
]<<setprecision(9)<<"°";
    cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<R[n]
]<<setprecision(9)<<endl;
}

```

```
while (delta>e) ; }
```

Programmaniń nátiyjesi:

n	C_n	C_n^2	C_n^3	γ_n	$\dot{C}_n^3$	$R_n = C_n / C_{n+1}$
0	0.5	0.25	0.125	0.2	0.075	6.666666667
1	0.075000000	0.075000000	0.056250000	0.200000000	0.181250000	0.827586207
2	0.090625000	0.096250000	0.076406250	0.100000000	0.080156250	3.391812865
3	0.026718750	0.040312500	0.040851563	0.033333333	0.033872396	3.155224110
4	0.008468099	0.020688802	0.026211426	0.008333333	0.013855957	3.055761121
5	0.002771191	0.008884180	0.013546655	0.001666667	0.006329142	2.627077695
6	0.001054857	0.003719270	0.006764579	0.000277778	0.003323087	2.222030389
7	0.000474727	0.001587748	0.003236620	0.000039683	0.001688555	2.249149786
8	0.000211069	0.000693265	0.001516957	0.000004960	0.000828652	2.292427175
9	0.000092072	0.000313079	0.000711428	0.000000551	0.000398900	2.308160626
10	0.000039890	0.000142870	0.000334435	0.000000055	0.000191620	2.289891901
11	0.000017420	0.000065257	0.000157902	0.000000005	0.000092650	2.256229943
12	0.000007721	0.000029803	0.000074674	0.000000000	0.000044872	2.236825235
13	0.000003452	0.000013630	0.000035301	0.000000000	0.000021671	2.229852315
14	0.000001548	0.000006253	0.000016675	0.000000000	0.000010422	2.227820615
15	0.000000695	0.000002876	0.000007872	0.000000000	0.000004996	2.225256192
16	0.000000312	0.000001325	0.000003715	0.000000000	0.000002390	2.220746231
17	0.000000141	0.000000611	0.000001753	0.000000000	0.000001142	2.215784471
18	0.000000063	0.000000282	0.000000827	0.000000000	0.000000545	2.211591953
19	0.000000029	0.000000130	0.000000390	0.000000000	0.000000260	2.208401860
20	0.000000013	0.000000060	0.000000184	0.000000000	0.000000124	2.205851049
21	0.000000006	0.000000028	0.000000087	0.000000000	0.000000059	2.203546578
22	0.000000003	0.000000013	0.000000041	0.000000000	0.000000028	2.201340182

2-máseleniń C++ tilinde jazılǵan programması:

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<iomanip>
using namespace std;
int n=0;
double R[1000];
double a[1000];
double a_2[1000];
double a_3[1000];
double e = 0.0001;
double d[1000];
double b[1000];
double gamma[1000];
double delta = 0;
double N[1000];
double kvadrat(int n)
{
    double kv = 0;
    for (int i=0; i<=n; i++)
        kv += a[n-i]*a[i];
    return kv;
}
double kup(int n)
{
    double kv = 0;
    for (int i=0; i<=n; i++)
        kv += a[n-i]*a_2[i];
    return kv;
}
double shtrix(int n)
{
    return a[n]*n;
}
double faktarial(int n)
{
    double p=1;
    for (int i=1; i<=n; i++)
        p*=i;
    return p;
}
double getGamma(int n)
{
    if (n%2==0)
```



```

        return 1.0/faktarial(n+1);
    else
        return 0;
}
int main()
{
    a[n] = 1;    //n=0
    a_2[n] = kvadrat(n);
    a_3[n] = kup(n);
    gamma[n] = getGamma(n);
    N[n] = (n+1)*(n+2)*(n+3);
    d[n] = 1;
    b[n] = 1;
    R[n] = a[n]/b[n];
    cout<<setfill(' ')<<setw(4)<<n;
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<a[n]<<setprecision(9);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kvadrat(n)<<setprecision(9);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kup(n)<<setprecision(9);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<d[n]<<setprecision(9);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<gamma[n]<<setprecision(9);
    //    cout<<setfill('
')<<setw(15)<<N[n]<<setprecision(6);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<R[n]<<setprecision(9)<<endl;
    n++;    //n=1
    a[n] = b[n-1];
    a_2[n] = kvadrat(n);
    a_3[n] = kup(n);
    gamma[n] = getGamma(n);
    N[n] = (n+1)*(n+2)*(n+3);
    d[n] = shtrix(n);
    b[n] = 0.25;
    R[n] = a[n]/b[n];
    cout<<setfill(' ')<<setw(4)<<n;
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<a[n]<<setprecision(9);
    cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kvadrat(n)<<setprecision(9);

```

```

        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<kup(n)<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<d[n]<<setprecision(9);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<gamma[n]<<setprecision(9);
        //cout<<setfill('
')<<setw(15)<<N[n]<<setprecision(6);
        cout<<setfill('
')<<setw(10)<<R[n]<<setprecision(9)<<endl;
        int KK=10;
        do
        {
                n++;
                a[n] = b[n-1];
                a_2[n] = kvadrat(n);
                a_3[n] = kup(n);
                gamma[n] = getGamma(n);
                N[n] = (n+1)*(n+2)*(n+3);
                d[n] = shtrix(n);
                b[n] = (2.0*d[n-1]+a_3[n-2]-gamma[n-
2]))/(5.0*N[n-2]);
                R[n] = a[n]/b[n];
                cout<<setfill(' ')<<setw(6)<<n<<"°";
                cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<a[n]
]<<setprecision(9)<<"°";
                cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<kva
drat(n)<<setprecision(9)<<"°";
                cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<kup
(n)<<setprecision(9)<<"°";
                cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<d[n]
]<<setprecision(9)<<"°";
                cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<gam
ma[n]<<setprecision(9)<<"°";
                // cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<N[n]
]<<setprecision(10)<<"°";

```

```

        cout<<setfill('
')<<setw(KK)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<R[n
]<<setprecision(9)<<endl<<"°";
        delta = fabs(R[n-1]-R[n]);
    }
    while(delta>e);}

```

Programmanıń nátiyjesi:

N	c_n	c_n^2	c_n^3	$\dot{c}_n$	γ_n	$R_n = c_n / c_{n+1}$
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	0	4
2	0.25	1.5	3.75	0.500000000	0.166666667	3.750000000
3	0.066666667	0.633333333	2.700000000	0.200000000	0.000000000	2.000000000
4	0.033333333	0.262500000	1.437500000	0.133333333	0.008333333	2.510460251
5	0.013277778	0.126555556	0.727333333	0.066388889	0.000000000	2.685393258
6	0.004944444	0.057555556	0.373458333	0.029666667	0.000198413	3.323848479
7	0.001487566	0.023947354	0.183046032	0.010412963	0.000000000	3.176836158
8	0.000468254	0.009265344	0.084057937	0.003746032	0.000002756	2.994271452
9	0.000156383	0.003537502	0.036786379	0.001407449	0.000000000	2.954683577
10	0.000052927	0.001357019	0.015714359	0.000529272	0.000000025	3.015881670
11	0.000017550	0.000512053	0.006604365	0.000193045	0.000000000	3.060562998
12	0.000005734	0.000189050	0.002718026	0.000068809	0.000000000	3.055720936
13	0.000001877	0.000068624	0.001094618	0.000024395	0.000000000	3.039380138
14	0.000000617	0.000024719	0.000433103	0.000008644	0.000000000	3.045912959
15	0.000000203	0.000008858	0.000169100	0.000003040	0.000000000	3.062590168
16	0.000000066	0.000003153	0.000065280	0.000001059	0.000000000	3.074272086
17	0.000000022	0.000001114	0.000024928	0.000000366	0.000000000	3.078068246
18	0.000000007	0.000000391	0.000009422	0.000000126	0.000000000	3.080053830
19	0.000000002	0.000000137	0.000003529	0.000000043	0.000000000	3.084336732
20	0.000000001	0.000000048	0.000001312	0.000000015	0.000000000	3.089513932
21	0.000000000	0.000000016	0.000000484	0.000000005	0.000000000	3.093598372
22	0.000000000	0.000000006	0.000000177	0.000000002	0.000000000	3.096370803
23	0.000000000	0.000000002	0.000000065	0.000000001	0.000000000	3.098746749