

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Amaliy matematika kafedrası

“Amaliy matematika va informatika “

ta'lim yo`nalishi IV-kurs talabasi

Umarova Hamidaning

BITIRUV

MALAKAVIY ISHI

**Mavzu: Oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan
chegaraviy masalalarni otish usuli bilan yechish**

Ilmiy rahbar: _____ prof. A.O.Otarov

Kafedra mudiri: _____ dots.M.Q.Berdimuratov

Nukus – 2018

Mazmuni

Kirish	3
1-§. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalaning qo'yilishi ...	8
2-§. Oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishning otish usulining asosiy rejalari	12
2.1. Otish usulining asosiy ma'nosi.....	12
2.2. Birinchi tartibli ikki tenglamalar sistemasiga qo'yilgan chegaraviy masalani yechish	15
3-§. Yuqori tartibli o.d.t.larga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishi.....	16
4-§. Otish usulining chiziqli chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishi ...	19
5-§. Otish usulini amalga oshirishning sonli hisoblash algoritmlari	21
6-§. Hisoblash tajribasining natijalari.....	26
Xulosa.....	33
Foydalanilgan adabiyotlar.....	37
Qo'shimchalar	39

Kirish

Fan va texnikaning ko'plab sohalarining ko'pgina masalalari eng so'ngi hisobda differentsial tenglamalarni yechishga keltiriladi [1,2,3,9,10]. Shuning uchun differentsial tenglamalarni yechish eng ahamiyatli matematik masala bo'ladi. Ammo, ko'p hollarda bunday tenglamalarga qo'yilgan boshlang'ich va chegaraviy masalalarning umumiy yechimlari kvadraturalarda ifodalanmaydi. Shu sababli bunday masalalarni yechish uchun taqribiy usullar keng qo'llaniladi. So'ngi davrlarda EHMlarning jadal rivojlantirilishi fan va texnikaning yangi murakkab masalalarini yuqori aniqlikda yechish uchun avvaldan ma'lum bo'lgan taqribiy usullarni takomillashtirishni va yuqori natijali yangi usullarni yaratishni talab qildi. So'ngi paytlarda ilmiy-tadqiqot ishlarining juda katta yutuqlariga qaramasdan, topilgan taqribiy yechimning xatoligini baholash, berilgan differentsial masalaning yechimini kerakli aniqlik bilan olish kabi ko'pgina ahamiyatli masalalari hozirgacha to'liq yechilmagan, ancha qiyin masalalar bor.

Differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishning har tomonlama (universal) usullarining biri chekli ayirmalar (to'rlar) usuli bo'ladi [2,4,9,12]. Bu usul differentsial tenglamalarni yechishni algebraik tenglamalarning sistemalarini yechishga olib keladi. Biroq ko'pgina yaxshi xususiyatlariga qaramasdan ushbu usul quyidagi katta kamchilikka ega: differentsial tenglamaning yechimini yuqori aniqlik bilan aniqlash uchun algebraik tenglamalar sistemasining tartibini yuqorilatish kerak bo'ladi. Bu o'z navbatida hisoblash jarayonining noturg'un bo'lishiga olib keladi [2,4,9,10]. Buning ma'nosi quyidagicha: algebraik sistemaning tartibining o'sishi, yaxlitlash va boshqa xatoliklarning yig'ilib borishiga olib kelib, taqribiy yechimning aniqligini ancha pasaytiradi. Ikkinchi tomondan, yuqori tartibli algebraik sistemalarni yechganda EHMning xotirasining chegaralanganligiga bog'liq, bunday sistemalarni yechishga uning kuchi yetmasligi mumkin.

Ilm va texnikaning murakkab masalalarini natijali yechish uchun chegaraviy masalalardan sonli yechish uchun qulay bo'lgan Koshi masalasiga o'tishga olib keladigan taqribiy usullar hisoblash amaliyotida keng qo'llanila boshladi [3,4,6,11]. Sababi, bu usullarning hisoblash algoritmlari hisoblash xatoliklariga nisbatan turg'un bo'ladi. Bunday usullarning guruhiga yotadigan superpozitsiyalar, haydash, otish, ortogonallashtirish va hokazo usullari hisoblashlarda keng qo'llaniladi [4,6,11,12].

Superpozitsiyalar usulida oddiy chiziqli differentsial tenglamalariga qo'yilgan chegaraviy masalalar ikki yoki bir nechta Koshi masalalarini yechishga keltiriladi. So'ngi masalalarni yechish uchun o'z navbatida bir qadamli yoki ko'p qadamli usullarning birortasini qo'llanadi (Eyler, Runge-Kutta, Adams va h.k. usullarining birortasini qo'llanadi). Bundan so'ng dastlabki berilgan chegaraviy masalaning yechimi Koshi masalasining topilgan yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi sifatida aniqlanadi. Bunday usul iteratsiyalarni bajarishni talab qilmaydi.

Haydash usulida boshlang'ich nuqtada berilgan chegaraviy shartdan foydalanib, tartibi berilgan differentsial tenglamaning tartibidan birga kam bo'lgan differentsial tenglamaga keltirilib yechiladi. Bunday tenglamaning koeffitsientlari ikkita noma'lum funksiyalar bo'ladi. Ularni bir qiymatli aniqlash uchun ikki Koshi masalasi yechiladi: ulardan biri boshlang'ich nuqtadan oldinga qarab integrallanadi, ikkinchisi esa teskarisiga, oxirgi nuqtadan ortga qarab integrallanadi. Shunday qilib, dastlabki berilgan chegaraviy masalaning taqribiy yechimini haydash usuli bilan topish uchun to'g'ri haydash va teskari haydash hisoblash jarayonlari bajariladi [3,4,6,12].

Ortogonallashtirish usuli [3,4,6,12] superpozitsiyalar usulining bevosita umumlashuvi bo'lib, bu usulda integrallash oralig'i bir nechta kichik kesmalarga bo'linib, ularning har birida dastlabki berilgan chegaraviy masala superpozitsiya usuli bilan yechiladi. Usulning har bir qadamida qo'shni kichik oraliqlarda

topilgan taqribiy yechimlar ortogonal bo'ladigan qilib, yechimlar matritsasi turlantirib boriladi. Shuning natijasida butun integrallash oralig'ida berilgan masalaning yechimlarining chiziqli bog'liqli bo'lmasligi ta'minlanadi.

Otish usulining ma'nosi quyidagicha [3,4,6,11,12]: integrallash oralig'ining boshlang'ich nuqtasida yetishmay turgan boshlang'ich sharti saylab olinib, uning qiymatini aniqlash uchun maxsus tuzulgan Koshi masalasi butun integrallash oralig'ida sonli usullarning birini (Eyler, Runge-Kutta va h.k. usullarining birortasini) qo'llab yechiladi. Bundan so'ng yetishmagan boshlang'ich shartning qabul qilingan qiymati ko'rsatilgan usul bilan topilgan qiymati bilan solishtiriladi. Bu jarayon noma'lum funksiyaning oldingi qiymati bilan oxirgi topilgan qiymati berilgan aniqlik bilan mos kelguncha davom ettiriladi.

Bakalavr bitiruv malakaviy ishida oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni Koshi masalalarini yechishga olib keladigan otish usulining nazariy asoslari bayon qilinadi va bu usulning berilgan chiziqli emas chegaraviy masalasini yechishga qo'llanilishi ko'rsatiladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, olti paragraf, xulosa bo'limi, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va qo'shimchalardan iborat.

Kirish qismi bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligiga asoslanadi va oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni Koshi masalalarini yechishga olib keladigan superpozitsiyalar, haydash, ortogonallashtirish va otish usullariga qisqacha to'xtalib o'tiladi.

Birinchi paragrafda yuqori tartibli oddiy differentsial tenglamalarga (o.d.t.larga) va ularning sistemalariga chegaraviy masalalarning qo'yilishi, ularning turlari, chiziqli chegaraviy masalalarning yechimga ega bo'lish masalalari qisqacha bayon qilinadi.

Ikkinchi paragrafda o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishning otish usulining asosiy rejalari bayon qilinadi: ikkinchi tartibli chiziqli

bo'lmagan tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani va ikki chiziqli emas tenglamalar sistemasi uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish misollarida otish usulining ma'nosi tushuntiriladi.

Uchinchi paragraf yuqori tartibli o.d.t.larga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun otish usulining qo'llanilishiga asoslanadi. Bunday chegaraviy masalalarni yechishga otish usulini qo'llaganda kelib chiqadigan ba'zi bir muammolar qaraladi.

To'rtinchi paragrafda otish usuli ikkinchi tartibli chiziqli o.d.t.ga qo'yilgan chiziqli chegaraviy masalalarni yechishga qo'llaniladi. Bunda umumiy turda qo'yilgan va oddiy chegaraviy shartlar berilgan holatlar alohida qaraladi.

Beshinchi paragrafda otish usulining ikkinchi tartibli chiziqli emas o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qaratilgan ko'p sonli hisoblash algoritmlari keltiriladi: kesmani teng o'rtasidan bo'lish – Eyler usuli, vatarlar – Eyler-Koshi usullari, Nyuton usuli – Eylerning takomillashtirilgan usuli va h.k. usullarning juftlari foydalanilgan hisoblash formulalari yasaladi.

Oltinchi paragrafda chiziqli bo'lmagan o.d.t. uchun qo'yilgan aniq chegaraviy masalalarni yechishga otish usulining yuqorida keltirib chiqarilgan hisoblash algoritmlarining qo'llanilishi ko'rsatilgan. Otish usulini qo'llab, o.d.t. uchun qo'yilgan chegaraviy masalani yechish bo'yicha kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko'p sonli hisoblash tajribalarining natijalari bu usulning qo'llash uchun qulay va yuqori natijali sonli usul ekanligini to'liq tasdiqlaydi.

Xulosa bo'limida ishning asosiy natijalari ta'kidlab o'tilib, uni berilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo'llash va uning asosiy natijalarini kelgusida davom etib, kengaytirish va chuqurlashtirish bo'yicha ko'rsatmalar va takliflar beriladi. Diplom ishga qo'shimchalar sifatida kompyuter uchun C++ algoritmik tilida tuzilgan dasturlar va ularning bajarilishidan olingan asosiy natijalar keltirilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida formulalar quyidagi tartibda keltirilgan: birinchi nishon paragrafning tartibini, ikkinchi nishon paragrafdagi formulaning tartibini bildiradi. Paragrafning ichida formulaga murojaat qilinganda faqat formulaning tartibi ko'rsatiladi, boshqa paragrafdagi formulaga murojaat qilinganda esa paragrafning tartibi va undagi formulaning tartibi ko'rsatiladi. Masalan, “ (5.3) formulasi ” yozuvi 5-paragrafdagi 3-formulsiga murojaatni bildiradi.

1-§. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalaning qo'yilishi

Mayli yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan p -tartibli oddiy differentsial tenglamasi (o.d.t) berilgan bo'lsin:

$$y^{(p)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}) \quad (1.1)$$

Bu tenglamaga chegaraviy masala umumiy turda quyidagicha qo'yiladi: berilgan $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, q, q \geq 2$) nuqtalar sistemasida hosilalarining

$$y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \delta_i$$

qiymatlari o'zaro erkli n ta chiziqli bo'lmagan

$$V_\nu \left(y_1, y_1', \dots, y_1^{(\delta_{1\nu})}, \dots, y_q, y_q', \dots, y_q^{(\delta_{q\nu})} \right) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi (1)-tenglamaning $y = y(x)$ yechimini topish talab qilinadi. Shuningdek, (1)-tenglamasidan foydalanib $y, y', y'', \dots, y^{(p)}$ hosilalarini $y(x)$ orqali ifodalash mumkin bo'lgani uchun,

$$\delta_{i\nu} \leq n-1, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

bo'ladi deb hisoblash mumkin.

Shu tariqa shakllantirilgan (1)-(2)-chegaraviy masalasini tadqiqotlashning va yechishning eng qulay usuli $y^{(k)}(x) = y_k(x)$ almashtirishidan foydalanib unga teng kuchli bo'lgan birinchi tartibli p tenglamalarning sistemasiga keltirish bo'ladi:

$$\frac{d}{dx} y_k(x) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_p), \quad 1 \leq k \leq p. \quad (1.3)$$

O.d.t.larning (3)-sistemasining yechimi izlanayotgan $[a, b]$ kesmasida $y_k(x)$ funksiyasining qiymatlariga birdan ortiq nuqtalarda chegaraviy shartlar qo'yiladi. Albatta, chegaraviy masalalar tartibi ikkidan kam bo'lgan tenglamalarning sistemalariga qo'yiladi.

Yuqori tartibli differentsial tenglamalar yoki ularning sistemalari uchun har xil chegaraviy shartlar qo'yiladi. Chegaraviy shartlarning bir qismini $[a, b]$ kesmasining ichki nuqtalarida berilishi mumkin. Ular **ichki chegaraviy shartlar** deb ataladi. Odatda $[a, b]$ kesmasining $x=a$ va $x=b$ uchlarida berilgan ikki nuqtali chegaraviy shartlar ko'proq uchraydi. Bunday ikki nuqtali chegaraviy shartlar (1)-tenglamasi uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned}\varphi_i(y(a), y'(a), y''(a), \dots, y^{(p-1)}(a)) &= 0, i = 1, 2, \dots, l; \\ \psi_i(y(b), y'(b), y''(b), \dots, y^{(p-1)}(b)) &= 0, i = l+1, l+2, \dots, p;\end{aligned}\tag{1.4}$$

Chegaraviy shartlarning o'zlari bir nechta funksiyalarning bir yoki har xil nuqtalardagi qiymatlarini o'zaro bog'lashi mumkin. Bunday holatda p -tartibli differentsial tenglamalarning sistemasiga

$$\varphi_k(y_1(\xi_k), y_2(\xi_k), \dots, y_p(\xi_k)) = \eta_k, \quad 1 \leq k \leq p, \quad a \leq \xi_k \leq b \tag{1.5}$$

ko'rinishidagi chegaraviy shartlar qo'yiladi. Ko'rinishi bo'yicha murakkab chegaraviy shartlar qo'yilgan masalalar ham uchraydi. Masalan, kvant mexanikasining ko'pgina masalalarida

$$\int_a^b y_k^2(x) dx = 1 \tag{1.6}$$

normalash shartlari qo'yiladi.

Chegaraviy shartlarning har xil ko'rinishda qo'yilishiga qaramasdan, o.d.t.larga qoyilgan chegaraviy masalalar bir xildagi sonli usullar bilan yechiladi.

Agarda p -tartibli (1)-differentsial tenglamasi va unga qo'yilgan (2)-chegaraviy masalasi izlanayotgan $y(x)$ funksiyasiga va bu funksiyaning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda bu masala **chiziqli chegaraviy masala** deb ataladi. Agarda, xususiyl holda $p=2$ bo'sa, unda bunday tenglama va unga qo'yilgan ikki nuqtali chegaraviy masala quyidagicha yoziladi:

$$y''(x) + p(x)y'(x) - q(x)y(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{1.7}$$

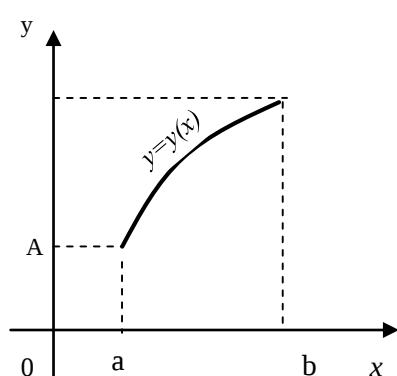
$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \quad (1.8)$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \quad (1.9)$$

Bunda $p(x), q(x), f(x) \in [a, b]$ – berilgan funksiyalar, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – berilgan sonlar, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, j = 0, 1$.

Bu masalada (7)-differentsial tenglamasini va (8)-(9)-chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyasini topish talab qilinadi.

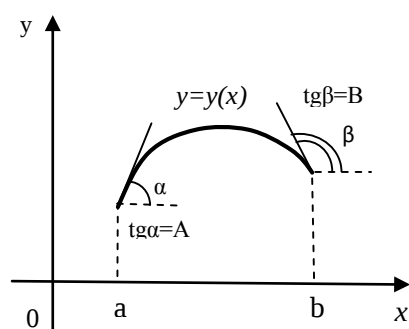
Agarda xususiy holda (8)- va (9)-chegaraviy shartlarda $\beta_0 = 0$ va $\beta_1 = 0$



1-rasm

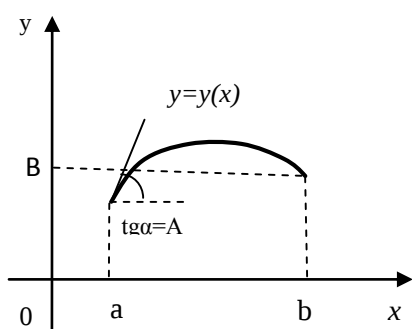
bo'sa, u holda chegaraviy shartlar $[a, b]$ kesmasining uchlarida $y(a), y(b)$ qiymatlarini aniqlaydi. Bu holatda (7)-(9)-chegaraviy masalasi **birinchi chegaraviy masala** deb ataladi.

Agarda (8)- va (9)-chegaraviy shartlarda $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0$ bo'lsa, unda $[a, b]$ kesmasining uchlarida $y'(a), y'(b)$ qiymatlari beriladi. Shunda kelib chiqqan chegaraviy masala **ikkinchi chegaraviy masala** deb ataladi.



2-rasm

Umumiy holda $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0, i = 0, 1$ bo'lsa, unda (7)-(9)- chegaraviy masalasi **uchinchi chegaraviy masala** deb ataladi. Masalan, (7)-differentsial tenglamasiga birinchi turdagi $y(a) = A, y(b) = B$ oddiy chegaraviy shartlari qo'yilgan bo'lsin. Bu masala quyidagicha geometrik ma'noga ega bo'ladi: ya'ni bunday masala (7)-tenglamasining berilgan $(a, A), (b, B)$ nuqtalari orqali o'tadigan integral egri chizig'ini topishni anglatadi (1-rasm).



3-rasm

Agarda (7)-tenglamaga ikkinchi turdagi $y'(a), y'(b)$ chegaraviy shartlari qo'yilgan bo'lsa, unda bunday chegaraviy masala quyidagi geometrik ma'noga ega bo'ladi: $x=a, x=b$ to'g'ri chiziqlarini α, β burchaklarini hosil qilib kesib o'tadigan integral egri chizig'ini topish kerak bo'ladi. Bunda $tg\alpha = A, tg\beta = B$ tengliklari bajariladi (2-rasm).

Shuningdek, $y'(a)=A, y'(b)=B$ chegaraviy sharti $\alpha_0=0, \beta_0=1, \alpha_1=1, \beta_1=0$ bo'lgandagi uchinchi turdagi chegaraviy shartining xususiy holi bo'ladi. Bunday chegaraviy masala quyidagicha geometrik ma'noga ega bo'ladi: differentsial tenglamasining $x=a$ to'g'ri chizig'ini α burchagi bilan ($tg\alpha = A$) kesib o'tadigan va (b, B) nuqtasi orqali o'tadigan integral egri chizig'ini topishni anglatadi (3-rasm).

Umumiy holda chegaraviy masala faqat bir yechimga ega bo'lishi, yechimga ega bo'lmasligi, bir nechta yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin.

O.d.t.larga qo'yilgan chegaraviy masalalarning oddiy funksiyalar bilan ifodalangan aniq yechimlarini faqat ba'zi hollardagina topish mumkin bo'ladi. Buning uchun differentsial tenglamaning umumiy yechimini topib, uning tarkibidagi o'zgarmaslarning qiymatlarini chegaraviy shartlardan foydalanib aniqlash kerak bo'ladi.

Ko'p hollarda o.d.t.larga qo'yilgan chegaraviy masalalar taqribiy usullar bilan yechiladi. Bunday usullarga yechimni Fure qatoriga yoyish, Rits va Galerkin usullari kiradi. Fure qatorlari chiziqli chegaraviy masalalarni yechish uchun qo'llaniladi. Rits va Galerkin usullarini esa chiziqli va chiziqli bo'lmagan chegaraviy masalalarni yechish uchun qo'llash mumkin.

Chegaraviy masalalarni sonli yechish uchun otish va chekli-ayirmalar usullari qo'llaniladi. Otish usuli berilgan chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirib yechishga asoslangan. Chekli-ayirmalar usulida berilgan chegaraviy

masalaning noma'lumlari soni ko'p sonli chiziqli yoki chiziqli emas algebraik tenglamalarning sistemasiga keltirib yechiladi. Chiziqli emas chegaraviy masalalarini yechganda bu ikkala usul ham iteratsion xususiyatga ega bo'ladi va ko'pchilik hollarda yaqinlashuvchi iteratsion jarayonlarni tuzish ancha-muncha murakkab bo'ladi. Quyida otish usulining nazariy asoslari va uning berilgan aniq chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishi to'liq bayon qilinadi.

2-§. Oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishning otish usulining asosiy rejalari

2.1. Otish usulining asosiy ma'nosi

Bu usulning asosiy ma'nosi o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalani, maxsus tuzilgan yordamchi Koshi masalalariga keltirib yechishdan iborat bo'ladi. Usulning ma'nosini $[0, l]$ kesmasida ikkinchi tartibli chiziqli emas o.d.t.ga qo'yilgan ikki nuqtali chegaraviy masalani yechish misolida qaraymiz:

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad (2.1)$$

$$\varphi_1(y(0), y'(0)) = 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi_2(y(l), y'(l)) = 0. \quad (2.3)$$

Bunda f, φ_1, φ_2 – o'z argumentlarining berilgan funksiyalari. Mayli, f, φ_1, φ_2 funksiyalari yetarlicha silliq funksiyalar bo'lib, (1)-(3)-chegaraviy masalasining yechimi mavjud va yagona bo'lish shartlari bajarilsin. Bundan tashqari, $x=0$, $x=1$ nuqtalarida berilgan ixtiyoriy boshlang'ich shartlarda (1)-tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasining yagona yechimi mavjud deb faraz qilamiz. Dastlab, (2)-chap chegaraviy shartini qanoatlantiruchi, ba'zi bir $\bar{y}(0) = \bar{y}_0, \bar{y}'(0) = \bar{y}_1$ boshlang'ich shartlarini tanlab olamiz. Bunday shartlarni $\bar{y}_0$ sonini tanlab olib va shunda kelib chiqqan

$$\varphi_1(\bar{y}_0, \bar{y}'(0)) = 0 \quad (2.4)$$

tenglamasini $\bar{y}'(0) = \bar{y}_1$ noma'lumiga nisbatan yechib, oson aniqlash mumkin.

Yuqorida keltirilgan farazimiz bo'yicha (1)-tenglamaning ko'rsatilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi $\bar{y}(x)$ yechimini topish masalasi yagona yechimga ega bo'ladi. Shunday qilib,

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y, y'), \\ \bar{y}(0) &= \bar{y}_0, \bar{y}'(0) = \bar{y}_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Koshi masalasini yechish orqali aniqlangan $\bar{y}(x)$ funksiyasi (3)-chegaraviy shartini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\varphi_2(\bar{y}(l), \bar{y}'(l)) = 0 \quad (2.6)$$

tengligi bajarilsa, u holda $\bar{y}(x)$ funksiyasi dastlabki berilgan (1)-(3)-chegaraviy masalasining ham yechimi bo'ladi. Ammo, umumiy holda (5)-Koshi masalasining yechimi bo'lgan $\bar{y}(x)$ funksiyasi (3)-o'ng chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi. O'zining yozilish usuli bo'yicha $\bar{y}(x)$ funksiyasi $\bar{y}_0$ qiymatiga bog'liq bo'ladi: $\bar{y}(x, \bar{y}_0)$ va Koshi masalasining yechimining umumiy xususiyatlari bo'yicha bu bog'liqlik uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $\bar{y}_0$ qiymatini o'zgartirib va yuqorida keltirilgan algoritmni takrorlab, (5)-Koshi masalasining (2)-chap chegaraviy shartini qanoatlantiradigan va y_0 parametriga bog'liq bo'lgan $\bar{y}(x, y_0)$ yechimga ega bo'lamiz. Shunga bog'liq $\bar{y}(x, y_0)$ bitta parametrga bog'liq bo'lgan yechimlar to'plamidan (3)-o'ng chegaraviy shartini qanoatlantiradigan yechimini ajratib olish masalasi kelib chiqadi. Buni har xil usullar bilan amalga oshirish mumkin. Masalan, $\bar{y}_0$ ni ixtiyoriy tanlab olib, uning bir-biriga yaqin $\bar{y}_{0i-1}, \bar{y}_{0i}$ qiymatlarida (3)-ning chap tomoni har xil ishoralarga ega bo'lguncha hisoblashlarni bajarish mumkin. Bunday hollarda, (5)-Koshi masalasining yechimining boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liq bo'lganligi

sababli, $\bar{y}_0$ ning izlanayotgan qiymati $\bar{y}_{0i-1}$ va $\bar{y}_{0i}$ larning orasida yotadi. Berilgan (1)-(3)-chegaraviy masalasini yechishning bunday usuli otish usuli deb ataladi.

Agarda (5)-Koshi masalasining $\bar{y}(x, y_0)$ yechimi topilgan bo'lsa, u holda (6)-tengligi izlanayotgan $\bar{y}_0$ qiymatiga nisbatan chiziqli emas tenglama bo'ladi:

$$\psi(y_0) = \varphi_2(\bar{y}(l, \bar{y}_0), \bar{y}'(l, \bar{y}_0)) = 0 \quad (2.7)$$

Shunday qilib, $\bar{y}_0$ parametrini tanlab olish masalasi (7) chiziqli emas tenglamasining ildizini topishga keltiriladi. Bu tenglamani yechib, dastlabki berilgan (1)-(3)-chegaraviy masalasining yechimi qanoatlantiradigan $y(0), y'(0)$ boshlang'ich shartlariga ega bo'lamiz.

Umumiy holda, $y(x_0, \bar{y}_0)$ funksiyalari aniq analitik ifodalarga ega bo'lmaydi. Shu sababli ular $\bar{y}_0$ parametrining har bir qiymatida faqatgina son ko'rinishida aniqlanadi. Shuning uchun (7)-tenglamasini yechish uchun chiziqli emas tenglamalarni yechishning sonli usullaridan: kesmani teng o'rtasidan bo'lish, vatarlar (kesuvchilar), Nyuton (urinmalar) va h.k. usullardan foydalanish mumkin [3,4,6,9,10].

Masalan, yuqorida ko'rsatilgan algoritm bo'yicha $\bar{y}_0$ ning $\bar{y}_{0i-1}$ va $\bar{y}_{0i}$ ga teng qiymatlari uchun $\bar{y}(x, \bar{y}_{0i-1})$ va $\bar{y}(x, \bar{y}_{0i})$ funksiyalarini yasash mumkin. Shunda parametrning yangi $\bar{y}_{0i+1}$ qiymati vatarlar usulining hisoblash algoritmi bo'yicha quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\bar{y}_{0i+1} = \bar{y}_{0i} - \frac{(\bar{y}_{0i} - \bar{y}_{0i-1})\psi(\bar{y}_{0i})}{\psi(\bar{y}_{0i}) - \psi(\bar{y}_{0i-1})} \quad (2.8)$$

Agarda $\bar{y}_0$ qiymati (7) tenglamasining ildiziga yaqin qilib tanlab olingan bo'lsa, u holda (8)-iteratsion jarayon tez yaqunlashuvchi bo'ladi [3,4,9,10].

Bu usulni n -tartibli o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun ham umumlashtirish mumkin ekanligini aytib o'tamiz.

2.2. Birinchi tartibli ikki tenglamalar sistemasiga qo'yilgan chegaraviy masalani yechish

Endi otish usulining qo'llanilishini birinchi tartibli chiziqli bo'lmagan ikki tenglamalar sistemasiga umumiy turda qo'yilgan, chegaraviy masalani yechish misolida qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= f(x, u, v) \\ v'(x) &= g(x, u, v) \end{aligned} \right\}, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.9)$$

$$\varphi(u(a), v(a)) = 0, \psi(u(b), v(b)) = 0 \quad (2.10)$$

Ixtiyoriy $u(a) = \eta$ qiymatini tanlab olib, chap chegaraviy shartini chiziqli emas $\varphi(\eta, v(a)) = 0$ tenglamasi ko'rinishida qarab, uni qanoatlantiradigan $v(a) = \xi(\eta)$ qiymatini aniqlaymiz. Bundan so'ng, $u(a) = \eta$, $v(a) = \xi(\eta)$ qiymatlarini tenglamalarning (9) sistemasiga qo'yilgan Koshi masalasining boshlang'ich shartlari sifatida qarab, kelib chiqqan Koshi masalasini sonli usullarning biridan foydalanib yechamiz (masalan, Eyler, Runge-Kutta va h.k. usullarning birini qo'llab yechamiz [3,4,9,10,12]). Shunda η parametriga bog'liq bo'lgan $u(x, \eta)$, $v(x, \eta)$ yechimlariga ega bo'lamiz.

Usulning ma'nosi bo'yicha ξ miqdori, topilgan yechimi (10)-dagi chap chegaraviy shartini qanoatlantiradigan qilib tanlab olinadi. Biroq topilgan $u(x, \eta)$, $v(x, \eta)$ yechimlari (10)-dagi o'ng chegaraviy shartini qanoatlantirmaydi. Bu yechimni o'ng chegaraviy shartning chap tomoniga olib borib qo'yganda kelib chiqqan η parametrining

$$\overline{\psi}(\eta) = \psi(u(b; \eta), v(b; \eta)) \quad (2.11)$$

funksiyasi nolga aylanmaydi. Biror bir usulni qo'llab, η parametrining qiymatini kerakli aniqlik bilan $\psi(\eta) \approx 0$ taqribiy tenglik bajariladigan qilib almashtirish kerak bo'ladi. Shunday qilib, (9),(10)-chegaraviy masalasini yechish

$$\bar{\psi}(\eta) = 0 \quad (2.12)$$

chiziqli emas tenglamasining ildizini topishga keltiriladi. Bu tenglamani yechish uchun vatarlar, kesmani teng o'rtasidan bo'lish, Nyuton (urinmalar) va h.k. usullarning biridan foydalanish mumkin [3,4,6,9,10].

Ko'rsatilgan usullarning ilmdagi eng oddiysi kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli hisoblanadi. Chiziqli emas (12)-tenglamasini yechish uchun bu usulni qo'llaganda ixtiyoriy η_i qiymati tanlab olinib, hisoblashlar $\bar{\psi}(\eta_i)$ qiymatlarining orasida ishoralari har xil qiymatlilari kelib chiqmaguncha davom ettiriladi. Masalan, $\bar{\psi}(\eta_i)$ va $\bar{\psi}(\eta_{i+1})$ qiymatlari har xil ishoralarga ega bo'lsa, u holda (12)-tenglamasining yechimi bo'lgan $\eta = \eta^*$ qiymati $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ kesmasida yotadi. Bunday kesmalarni teng o'rtasidan bo'lishni davom etib, η parametrining qiymati kerakli aniqlik bilan aniqlanadi.

3-§. Yuqori tartibli o.d.t.larga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishi

Yuqori tartibli differentsial tenglamalarni noma'lum funksiyaning va uning hosilalarini chiziqli almashtirish orqali, unga teng kuchli birinchi tartibli differentsial tenglamalarning sistemasi bilan har doim almashtirish mumkin bo'ladi [3,4,9,10,12]. Shuning uchun bu paragrafda chiziqli emas p tenglamalar sistemasiga qo'yilgan chegaraviy masalani yechishga otish usulining qo'llanilishini qaraymiz:

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_p), \quad 1 \leq k \leq p, \quad a \leq x \leq b, \quad (3.1)$$

$$\varphi_k(y_1(a), y_2(a), \dots, y_p(a)) = 0, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (3.2)$$

$$\varphi_k(y_1(b), y_2(b), \dots, y_p(b)) = 0, \quad m+1 \leq k \leq p \quad (3.3)$$

Aniqlik uchun bu yerda $m \geq p/2$ deb olinadi. Berilgan $[a, b]$ kesmasida chegaraviy shartlarning katta qismi berilgan uch nuqtasini boshlang'ich nuqta deb hisoblaymiz. Berilgan (1)-(3)-chegaraviy masalasi uchun $x = a$ uchi bunday nuqta bo'ladi. Shu sababli otish parametrlarini aniqlaydigan $p - m$ funksiyalari sifatida $u_k(x)$ ($1 \leq k \leq p$) funksiyalarining orasidan, masalan,

$$u_q(a) = \eta_q, \quad 1 \leq q \leq p - m \quad (3.4)$$

funksiyalarini qabul qilamiz. Agarda bu (4)-qiymatlarini (2)-chap chegaraviy shartlariga olib borib qo'ysak, u holda boshqa funksiyalarning boshlang'ich qiymatlariga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Tenglamalarning bu sistemasini yechib quyidagi natijalarga kelimiz:

$$u_q(a) = \psi_q(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-m}), \quad p - m + 1 \leq q \leq p \quad (3.5)$$

Bundan so'ng tenglamalarning (1)-sistemasiga (4)-(5)-boshlang'ich shartlarida qo'yilgan Koshi masalasini qaraymiz. Sonli integrallash orqali topilgan bu Koshi masalasining yechimi (2)-chap chegaraviy shartini qanoatlantiradi va u $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-m})$ parametrlariga bog'liq bo'ladi. Bu yechimni (3)-o'ng chegaraviy shartiga olib borib qo'yib, parametrlarning yordamchi funksiyasini aniqlash mumkin:

$$\varphi_k(\eta) = \varphi_k(y_1(b, \eta), \dots, y_p(b, \eta)), \quad m+1 \leq k \leq p \quad (3.6)$$

Parametrlarning

$$\varphi_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-m}) = 0, \quad m+1 \leq k \leq p \quad (3.7)$$

algebraik tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi qiymatlari, (1)-(2)-chegaraviy masalasining izlanayotgan yechimini aniqlaydi.

Otish parametrlarining soni ko'p bo'lganda ularni (7)-chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi sifatida aniqlash ancha murakkab masala bo'ladi. Shu sababli chiziqli emas chegaraviy masalalar berilganda otish usulini qo'llashni yengillashtirish uchun ko'pincha $p-m=1$ deb hisoblanadi. Ko'p sonli o.d.t.lardan iborat chiziqli emas tenglamalarning sistemalariga qo'yilgan chegaraviy masalalarni otish usuli bilan yechganda bunday hollar ko'p uchraydi.

Agarda (1)-(3) chiziqli o.d.t.larning sistemasiga qo'yilgan chiziqli chegaraviy masala bo'lsa, u holda bu masalani yechishga otish usulini qo'llash ancha soddalashadi. Bunday holda ixtiyoriy sondagi $p-m$ parametrlari uchun (7)-chiziqli algebraik tenglamalarning sistemasini yechish oson bajariladi. Haqiqatdan ham, bu holatda $\varphi_k(\eta)$ funksiyalari chiziqli funksiyalar bo'lib, ular o'zlarining $p-m+1$ nuqtalardagi $\eta^{(s)}, 1 \leq s \leq p-m+1$ qiymatlari bilan teng qiymatli aniqlanadi. Shu sababli (1),(4),(5)-Koshi masalasini parametrning har xil qiymatlarida $p-m+1$ marta integrallab η parametrining izlanayotgan qiymatlarini aniqlash mumkin bo'ladi.

Hisoblashlarni quyidagi tartibda bajarish qulay. Dastlab $\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_{p-m}^0$ parametrlari tanlab olinadi va bu parametrlardagi (6)-funksiyasining $\varphi_k^0 = \bar{\varphi}_k(\eta^{(0)}), m+1 \leq k \leq p$ qiymatlari aniqlanadi. Shundan so'ng birinchi parametrning qiymati $\Delta\eta=1$ miqdoriga o'zgartirilib, $\eta_1^0+1, \eta_2^0, \dots, \eta_{p-m}^0$ parametrlaridagi $\bar{\varphi}_k^1$ qiymati aniqlanadi va hokazo. Bunday hisoblashlarni parametrlarning barcha qiymatlari uchun bajarib, har bir funksiyani Nyutonning birinchi darajali ko'p o'lchamli interpolatsion ko'phadi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\bar{\varphi}_k(\eta) = \varphi_k^0 + \sum_{q=1}^{p-m} \left(\bar{\varphi}_k^q - \varphi_k^0 \right) (\eta_q - \eta_q^0), \quad m+1 \leq k \leq p \quad (3.8)$$

Bu funksiyalarni nolga tenglab, izlanayotgan η_q parametrlarini aniqlash uchun chiziqli algebraik tenglamalarning quyidagi sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{q=1}^{p-m} \left(\overline{\varphi}_k^q - \overline{\varphi}_k^0 \right) = \sum_{q=1}^{p-m} \left(\overline{\varphi}_k^q - \overline{\varphi}_k^0 \right) \eta_q^0 - \overline{\varphi}_k^0, \quad m+1 \leq k \leq p \quad (3.9)$$

4-§. Otish usulining chiziqli chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishi

O.d.t.larga qo'yilgan chiziqli chegaraviy masalalarni yechishga otish usulini qo'llash ancha oson bajariladi. Mayli ikkinchi tartibli o.d.t.ga qo'yilgan quyidagi chiziqli chegaraviy masalani yechish talab qilinsin:

$$L[y] = \frac{d}{dx} [p(x)y'] - q(x)y(x) = f(x), \quad (4.1)$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad (4.2)$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \quad (4.2)$$

Bu chegaraviy masalani yechish, kam sonli Koshi masalalarini yechishga keltiriladigan, otish usulining o'zgartirilgan variantini keltiramiz.

Buning uchun dastlab (1)-bir jinsli emas differentsial tenglamasining

$$y_1(0) = \alpha_1, \quad y_1'(0) = -\beta_1 \quad (4.4)$$

boshlang'ich shartlaridagi $y_1(x)$ yechimi topiladi. Shunda (4)-boshlang'ich shartlari bo'yicha $y_1(x)$ funksiyasi (2)-chap chegaraviy shartini qanoatlantiradi. Bundan so'ng

$$y_0(0) = \alpha_1, \quad y_0'(0) = -\beta_1 \quad (4.5)$$

boshlang'ich shartlarida (1)-bir jinsli differentsial tenglamasining ($f(x)=0$) $y_0(x)$ yechimi aniqlanadi. Berilgan (1)-(3)-chegaraviy masalasining chiziqli va (2),(3)- chegaraviy shartlarining bir jinsli bo'lishiga bog'liq, $Cy_0(x)$ ($C = const$) funksiyasi, (1) bir jinsli tenglamasining (2)-chap chegaraviy shartini

qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi. Shuning uchun dastlabki berilgan (1)-(3) chegaraviy masalasining yechimini

$$y(x) = y_1(x) + Cy_0(x) \quad (4.6)$$

ko'rinishida qidirish mumkin. Bundagi C o'zgarmasi (6) funksiyasi (3)-o'ng chegaraviy shartini qanoatlantirishi talabidan kelib chiqib tanlab olinadi:

$$\alpha_2 y_1'(l) + \beta_2 y_1(l) + C[\alpha_2 y_0'(l) + \beta_2 y_0(l)] = 0. \quad (4.7)$$

Dastlabki berilgan (1)-(3) chegaraviy masalasi yagona yechimga ega bo'ladi deb faraz qilishimiz bo'yicha, (7)-dagi kvadrat qavs ichidagi ifoda noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun (7) tengligidan C o'zgarmas soni bir qiymatli aniqlanadi. Shunday qilib, (1)-(3)-chiziqli chegaraviy masalasi berilgan holatda, bu masalani yechishni hammasi bo'lib ikki Koshi masalasini yechishga olib kelish mumkin.

Endi birinchi tartibli chiziqli ikki tenglamalar sistemasiga qo'yilgan chiziqli chegaraviy masalasini yechishga otish usulining qo'llanilishini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= \alpha_1(x)u + \beta_1(x)v + \gamma_1(x), \\ v'(x) &= \alpha_2(x)u + \beta_2(x)v + \gamma_2(x) \end{aligned} \right\} \quad a \leq x \leq b, \quad (4.8)$$

$$p_1 u(a) + q_1 v(a) = r_1, \quad p_2 u(b) + q_2 v(b) = r_2. \quad (4.9)$$

Bunday holda mos Koshi masalasiga qo'yiladigan boshlang'ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$u(a) = \eta, \quad v(a) = \xi = (r_1 - p_1 \eta) / q_1. \quad (4.10)$$

Shunda (8)-(10)-Koshi masalasining yechimining η parametriga chiziqli bog'liq bo'lishi ko'rinib turibdi. Shuning uchun $\bar{\psi}(\eta)$ funksiyasi ham chiziqli funksiya bo'ladi. Ammo bir argumentning chiziqli funksiyasi ixtiyoriy ikki η_0 va η_1 nuqtalaridagi o'zining qiymatlari bilan to'liq aniqlanadi, uning grafigi esa to'g'ri chiziqli bo'ladi, ya'ni o'zining vatari bilan mos keladi. Shuning uchun vatarlar usuli bilan topilgan η_2 qiymati $\bar{\psi}(\eta) = 0$ tenglamasining ildizi bilan mos keladi.

Shunday qilib, berilgan (8)-(9)-chegaraviy masalasini otish usuli bilan yechish uchun Koshi masalasini uch marta yechish yetarli bo'ladi.

Chiziqli chegaraviy masalalarni otish usuli bilan yechganda hisoblashlarning hajmini ancha kamaytirish mumkin. Chunki, bir jinsli emas chiziqli differentsial tenglamalarning sistemasining umumiy yechimi uning ba'zi bir xususiy yechimining va bu sistemaga mos bir jinsli tenglamalarning sistemasining umumiy yechimining yig'indisiga teng bo'ladi. Ushbu holatlarni hisobga olib, dastlab tenglamalarning (8)-sistemasiga qo'yilgan (10)-Koshi masalasining $\eta_0 = 0$ qiymatidagi $u_0(x), v_0(x)$ xususiy yechimini topamiz. Bundan so'ng unga mos quyidagi bir jinsli Koshi masalasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \alpha_1(x)u + \beta_1(x)v, \quad v'(x) = \alpha_2(x)u + \beta_2(x)v, \\ u(a) &= \eta_1 = 1, \quad v(a) = -p_1/q_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bu Koshi masalasining yechimini topamiz va uni $u_1(x), v_1(x)$ orqali belgilaymiz. Shunda bir jinsli Koshi masalasining (9)-chap chegaraviy shartini qanoatlantiradigan umumiy yechimi

$$u(x) = u_0(x) + cu_1(x), \quad v(x) = v_0(x) + cv_1(x). \quad (4.12)$$

Bunda c parametrining qiymati (12)-yechimi (9)-dagi o'ng chegaraviy shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olinadi:

$$c = -\frac{p_2 u_0(b) + q_2 v_0(b) - r_2}{p_2 u_1(b) + q_2 v_1(b)} \quad (4.13)$$

Bundan so'ng dastlabki berilgan (8)-(9)-chegaraviy masalasining yechimi (12)-(13)-formulalari bilan aniqlanadi.

5-§. Otish usulini amalga oshirishning sonli hisoblash algoritmlari

Ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ikkinchi tartibli chiziqli bo'lmagan oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan ikki nuqtadagi chegaraviy masalani qaraymiz:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.1)$$

Ushbu tengamaning $y = y(x)$ yechimini $[0,1]$ kesmasidan qidiramiz. Sababi ixtiyoriy $[a,b]$ kesmani o'zgaruvchini $t = (x-a)/(b-a)$ formulasi bilan almashtirib, $[0,1]$ kesmasiga olib kelish mumkin. Shunda (1)-tenglamaga bu kesmaning uchlarida oddiy chegaraviy shartlar qo'yilgan deb hisoblaymiz:

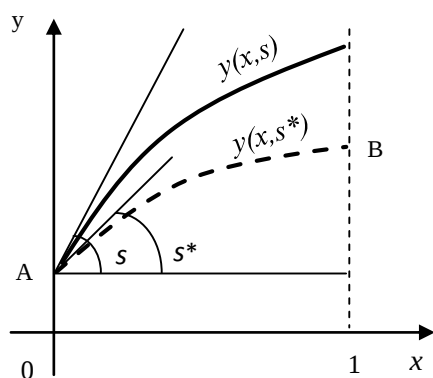
$$y(0) = A, \quad y(1) = B. \quad (5.2)$$

Otish usulining mazmuni (1)-(2)-chegaraviy masalasini birinchi tartibli ikkita differentsial tenglamalar sistemasiga qo'yilgan Koshi masalasiga keltirib yechishdan iborat:

$$\begin{aligned} y' &= z(x), & y(0) &= A, \\ z' &= f(x, y, z), & y'(0) &= z(0) = s \end{aligned} \quad (5.3)$$

Bu yerda A – ordinata o'qidagi nuqta bo'lib, izlanayotgan integral egri chizig'ining boshlang'ich nuqtasi, s – bu nuqta orqali integral egri chizig'iga yurgizilgan qiyalik burchagi (4-rasm).

Berilgan differentsial tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x, y, z)$ ($z = y'$) funksiyasi yetarlicha silliq funksiya bo'lib, (1),(2)-chegaraviy masalasining yechimi mavjud va yagona bo'lish shartlarini qanoatlantiradi deb faraz qilinadi. Shuningdek, $x=0$ yoki $x=1$ bo'lganda (3)-Koshi masalasining ixtiyoriy boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan faqat yagona yechimi bor bo'ladi deb hisoblanadi.



4-rasm

Masala shundan iboratki, s parametrining shunday qiymatini topish kerak, bunda (3)-Koshi masalasining yechimi kesmaning ikkinchi $x=1$ uchidagi $y(1) = B$ chegaraviy shartni qanoatlantirsin. Boshqacha aytganda, agarda (3)-Koshi masalasining yechimlarini $y(x, s)$ va $z(x, s)$ orqali belgilasak,

$$y(1, s) - B = \varphi(s) = 0 \quad (5.4)$$

tenglamasini qanoatlantiradigan, s ning qiymatini topish talab qilinadi.

Demak, otish usulida $(0, A)$ nuqtasidan chiqib, $(1, B)$ nuqtasi orqali o'tadigan $y(x, s^*)$ integral egri chizig'i qidiriladi. Bundan, agarda $s = s^*$ bo'lsa, u holda (3)-Koshi masalasining $y(x, s)$ yechimi (1)-(2)-chegaraviy masalasining $y(x)$ yechimi bilan mos kelishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalani yechishning otish usuli bir-birining ichida yotadigan ikkita usulning juftlashuvidan iborat bo'ladi: tashqi usul – (4)-chiziqli emas tenglamasini yechish, ichki usul – (3)-Koshi masalasi yechish (masalan, kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli bilan Eylerning aniq usulining jufti [3,4,9,10]).

Shuni nazarda tutish kerakki, (4)-tenglamasining oddiy chiziqli emas tenglamalardan farqi $\varphi(s)$ funksiyasi analitik ko'rinishga ega bo'lmaydi, sababi u (3)-Koshi masalasining yechimi sifatida aniqlanadi. Shunga qaramasdan, (4)-tenglamasini yechish uchun chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishning ixtiyoriy usullidan foydalanish mumkin [3,4,9,10].

Bir noma'lumli (4)-chiziqli bo'lmagan tenglamasini yechish uchun kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli, Urinmalar (Nyuton), vatarlar va sh.k. usullarning birini qo'llashimiz mumkin. Misol uchun, kesmani teng o'rtasidan bo'lish usulida s^* parametrini o'z ichiga oluvchi boshlang'ich $[s_0, s_1]$ kesmasi tanlab olinadi. Bu kesmaning uchlari s_0 va s_1 qiymatlarida

$$\varphi(s_0) \cdot \varphi(s_1) = [y(1, s_0) - B] \cdot [y(1, s_1) - B] < 0$$

sharti bajariladigan qilib tanlab olinadi. Buning uchun (3)-Koshi masalasining $y(1, s_0)$ yechimi $(1, B)$ nuqtasidan quyida, $y(1, s_1)$ yechimi bu nuqtadan yuqorida joylashishi kerak. Bundan so'ng $s_2 = (s_0 + s_1)/2$ deb olinib, (3)-Koshi masalasini $s = s_2$ qiymatida qaytadan yechamiz. Agarda $\varphi(s_0) \cdot \varphi(s_2) < 0$ bo'lsa, unda $[s_2, s_1]$

kesmasi tashlab ketilib, $s_3 = (s_0 + s_2)/2$ deb olinadi, agarda $\varphi(s_2) \cdot \varphi(s_1) < 0$ bo'lsa, unda $[s_0, s_2]$ kesmasi tashlab ketilib, $s_3 = (s_2 + s_1)/2$ deb olinadi. Bu jarayon kerakli aniqlik bilan (1)-(2)-chegaraviy masalasining yechimi aniqlanguncha, ya'ni $|y(1, s_k) - B| \leq \varepsilon$ sharti bajarilguncha davom etadi. Bu shartni qanoatlantiradigan (3)-Koshi masalasining yechimi (1),(2)-chegaraviy masalasining yechimi sifatida qabul qilinadi.

Chiziqli emas (4)-tenglamasini yechish uchun vatarlar usulidan foydalanganda s_0 va s_1 boshlang'ich qiymatlari beriladi, kelgusi s_i qiymatlari esa quyidagi rekurrent formula bo'yicha hisoblanadi:

$$s_{k+1} = s_k - \frac{\varphi(s_k)}{\varphi(s_k) - \varphi(s_{k-1})} (s_k - s_{k-1}), k = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Agarda s_0 boshlang'ich qiymati $s = s^*$ ildiziga yaqin qilib tanlab olingan bo'lsa, unda (5)-iteratsion jarayoni tez yaqinlashuvchi bo'ladi [3,4,9,10].

Eng ishonchli va tez yaqinlashuvchi usullardan biri Nyuton (urinmalar) usuli hisoblanadi. Chiziqli emas (4)-tenglamasini yechish ushuncha Nyuton usulini qo'llash quyidagicha amalga oshiriladi. Mayli $s_0 - s^*$ ga boshlang'ich yaqinlashuv bo'lib, $s^* = s_0 + \Delta s - s$ parametrining izlanayotgan qiymati bo'lsin. Dastlab (3)-Koshi masalasini $s = s_0$ qiymatida yechib $y(1, s_0)$ yechimi aniqlanadi. Shunda $y(1, s^*) = y(1, s_0 + \Delta s)$ funksiyasini Teylor qatoriga yoyib, va Δs ga nisbatan faqatgina chiziqli bo'lgan azolarini saqlab qolib, quyidagi taqribiy tenglikni yozishimiz mumkin:

$$y(1, s_0 + \Delta s) \approx y(1, s_0) + \frac{\partial y}{\partial s} \Delta s.$$

Bunda $y(1, s_0 + \Delta s) = y(1, s^*) = B$ deb faraz qilib, Δs ning quyidagi qiymatiga ega bo'lamiz:

$$\Delta s = \frac{B - y(1, s_0)}{\partial y(1, s_0) / \partial s} \quad (5.6)$$

Bu ifodaning maxrajidagi hosilaning qiymatini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\frac{\partial y(1, s_0)}{\partial s} \approx \frac{y(1, s_0 + \delta s) - y(1, s_0)}{\delta s}, \quad (5.7)$$

bunda δs – s parametriga berilgan ixtiyoriy kichik orttirma.

Oxirgi (7)-taqribiy tengligining o'ng tomonini hisoblash uchun (3)-Koshi masalasini $s = s_0 + \delta s$ qiymatida yechib $y(1, s_0 + \delta s)$ yechimi topiladi. Keyin (6)-formulasi bo'yicha Δs qo'shimchasi hisoblanadi va kelgusi $s_1 = s_0 + \Delta s$ qiymati aniqlanadi va hokazo. Bunday iteratsion jarayon $|\varphi(s_k)| \leq \varepsilon$ yoki $|\varphi(s_k)| \leq \varepsilon$ shartlari bajarilguncha davom etadi.

Bu usulda (1)-(2)-chegaraviy masalasini yechishning aniqligi s parametrining qiymatini hisoblash aniqligi bilangina emas, balki mos Koshi masalasini yechishning aniqligi bilan ham bog'liq. Shuning uchun s parametrining qiymatini yuqori aniqlikda hisoblash bilan bir qatorda (3)-Koshi masalasining yechimini aniqroq topish kerak bo'ladi.

Otish usulini chiziqli va chiziqli emas o.d.t.lar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo'llash mumkin va Koshi masalasini sonli integrallaganda aniqligi yuqori tartibli ayirma sxemalarini qo'llashga imkon beradi (Eylerning takomillashtirilgan usuli, Runge-Kutta usullarini va h.k. usullardan foydalanish mumkin bo'ladi).

Ammo bu usulni qo'llaganda quyidagicha muammo paydo bo'lishi mumkin: dastlabki berilgan chegaraviy masala yaxshi shartlashgan, ammo unga mos keltirilgan Koshi masalasi yomon shartlashgan masala bo'lishi mumkin. Bunday hollarda Koshi masalasini sonli integrallaganda katta xatoliklar paydo bo'lib, ular usulning iteratsiyalarini bajarishni qiyinlashtiradi.

Bunday qiyinchiliklardan qutilish uchun boshlang'ich shartni $[0,1]$ kesmasining $x=1$ uchida qo'yib, (3)-Koshi masalasini integrallash o'ngdan chapga qarab bajariladi. Ko'pincha bunda Koshi masalasining turg'unligi yaxshilashadi. Agar bu usul chegaraviy masalaning yechimining aniqligini orttirishga yordam bermasa, unda dastlabki chegaraviy masalasi yoki maxsus ishlab chiqilgan yoki chekli-ayirmalar usullaridan foydalanib yechiladi.

6-§. Hisoblash tajribasining natijalari

Nazariy asoslari yakunlangan otish usulining chiziqli va chiziqli emas oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo'llanilishini ko'rsatish uchun kompyuterdan foydalanib va sonli hisoblash tajribalari o'tkazildi. Ammo ushbu usulning nazariy asoslari va qo'llanilishi tizimli bayon qilingan o'quv yoki maxsus ilmiy adabiyotlarda yo'q bo'lganligi sababli usulning ma'nosi va adabiyotlarda bor ma'lumotlardan foydalanib, uning hisoblash algoritmini chuqur o'rganish va takomillashtirish maqsadida so'ngi ikki yil davomida ilmiy-tadqiqot ishlari bajarildi, ikkita ilmiy maqolalar bosib chiqarildi [7,8]. Bu maqolalarda avvaldan ma'lum bo'lgan hisoblash algoritmlari takomillashtirildi va yangi hisoblash algoritmlari joriy qilindi. Ularni oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chiziqli va chiziqli emas chegaraviy masalalarni yechishga qo'llab, sinab ko'rish uchun ko'p sonli hisoblash tajribalari bajarildi. Ularning ba'zilarining asosiy natijalari quyida keltirildi.

Misol. Ikkinchi tartibli chiziqli emas oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani otish usuli bilan yeching:

$$y'' = -[1 + a^2(y')^2], y(0) = 0, y(b) = 0, \quad (6.1)$$

Bu masala uzunligi b ga teng bo'lgan ($0 \leq x \leq b$) tebranuvchi torning tashqi kuch ta'sirida shaklining o'zgarishini o'rganganda kelib chiqadi [1]. Uning $a^2 = 0.49$ va $b=1$ bo'lgandagi aniq yechimi quyidagi analitik ko'rinishga ega:

$$y(x) = \frac{1}{a^2} \ln[\cos a(x-0,5) / \cos(a/2)] \quad (6.2)$$

Berilgan (1)-chegaraviy masalasi uchun (5.3) Koshi masalasi va (5.4) tenglamasi mos ravishda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} y' &= z(x), y(0) = 0, \\ z' &= -(1 + a^2 z^2), z(0) = s \end{aligned} \quad (6.3)$$

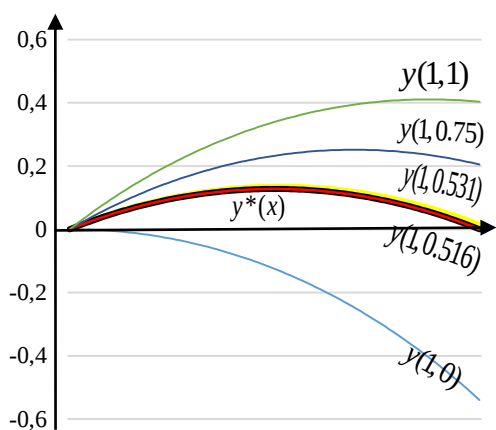
$$\varphi(s) = y(1, s) = 0 \quad (B=0) \quad (6.4)$$

Dastlab (3) Koshi masalasini yechish uchun $h=0.1$ qadami bilan **Eylerning takomillashtirilgan** usuli [3,4,9,10], (4) chiziqli emas tenglamasini yechish uchun kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli qo'llaniladi. Buning uchun s parametrining $s_0=0$, $s_1=1$ qiymatlari tanlab olindi. Parametrning bu qiymatlari $\varphi(s)$ funksiyasining qiymatlarining har xil ishoraga ega bo'lishini taminlaydi. Shu sababli $s_0=0$, $s_1=1$ qiymatlari dastlabki noaniq intervalining mos ravishda chap va o'ng uchlari bo'ladi. Bundan so'ng s parametrining $\varphi(s^*)=0$ tengligini qanoatlantiruvchi qiymatini izlash jarayoni $|\varphi(s_i)| \leq \varepsilon = 10^{-5}$ sharti bajarilguncha davom etadi.

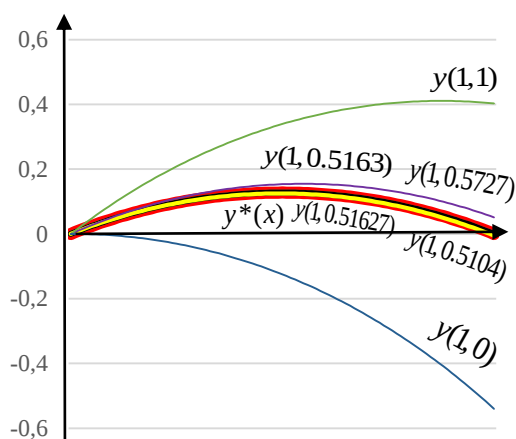
Otish usulining (3) Koshi masalalarini $h=0.1$ qadami bilan **Eylerning takomillashtirilgan usuli** bilan integrallashning va s parametrining kerakli qiymatini **kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli** bilan hisoblashlarning asosiy natijalari 1,2-jadvallarga joylashtirilgan. Dastlabki beshta $y(1, s_i)$ ($i = \overline{0,4}$) yechimlarining grafiklari 5-rasmda ko'rsatilgan.

Jadvaldan ko'rinib turganidek $\varphi(s)$ funksiyasining eng so'ngi qiymati iteratsion jarayonni to'xtatish shartini qanoatlantiradi.

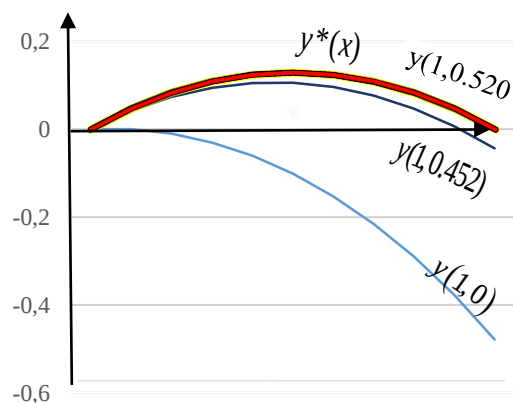
Yuqorida keltirilgan (2)-Koshi masalasini va (3)-tenglamasini yechish uchun **Eylerning takomillashtirilgan usuli** bilan ($h = 0.1$) **vatarlar usulining** juftligi foydalanildi. Bunda s parametrining qiymatlari (5.5) formulasi yordamida hisoblanadi. Hisoblashlarning natijalari 3,4- jadvallarda keltirilgan.



5-rasm



6-rasm



7-rasm

Dastlabki beshta $y(1, s_i)$ ($i = \overline{0,4}$) yechimlarning grafiklari 6-rasmda ko`rsatilgan.

Jadvaldan ko`rinib turganidek  $\varphi(s)$  funksiyasining eng so`ngi qiymati iteratsion jarayonni to`xtatish shartini qanoatlantiradi.

Bundan tashqari (2)-Koshi masalasining va (3)-chiziqli emas tenglamasini yechish uchun **Eylerning takomillashtirilgan usuli** ($h = 0.1$) **Nyuton usuli** bilan birga ($\delta s = 0.001$) qo`llanildi. Shunda olingan asosiy natijalar 5-,6-jadvallarga joylashtirilgan. Dastlabki beshta  $y(1, s_i)$  ( $i = \overline{0,4}$ ) yechimlarining grafiklari 7-rasmda ko`rsatilgan.

Jadvaldan ko`rinib turganidek  $\varphi(s)$  funksiyasining eng so`ngi qiymati iteratsion jarayonni to`xtatish shartini qanoatlantiradi.

Chiziqli emas (1)-chegaraviy masalasining yuqorida keltirilgan hisoblash algoritmlaridan foydalanib topilgan y_i taqribiy yechimlari 2-,4-,6-jadvallarida keltirilgan. Dastlabki berilgan chegaraviy

masalasining $y(x_i)$ aniq yechimining qiymatlarini otish usuli bilan topilgan y_i qiymatlari bilan solishtirish ularning beshta o`nlik belgilargacha anqlik bilan mos kelishini ko`rsatadi. Bunday anqlikka erishish uchun bajarilgan iteratsiyalarning soni 1-,3-,5-jadvallarda ko`rsatilgan.

Usulning birinchi algoritmini qo`llaganda berilgan anqlikga $n_1=18$ iteratsiyalar bajarilganda, ikkinchi algoritmi bilan hisoblashlarni bajarganda $n_2=6$ iteratsiyalarni bajarganda, uchinchi algoritmdan foydalanganda esa $n_3=3$ iteratsiyalarni bajarganda erishildi.

Otish usulining ushbu bitiruv malakaviy ishining 5-paragrafida keltirilgan hisoblash algoritmini yuqori tartibli differentsial tenglamalarga qo`yilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun umumlashtirish mumkin. Ammo (5.4) bir chiziqli emas tenglamalarining o`rniga usulning har bir qadamida $s_1, s_2, \dots, s_p$ parametrlariga nisbatan p chiziqli emas tenglamalarning sistemasini yechish kerak bo`ladi. (p -chap chegaraviy shartlarining soni). Bu ancha katta qiyinchiliklarga olib keladi. Chiziqli chegaraviy shartlar berilgan holatda usulning har bir qadamida $s_1, s_2, \dots, s_p$ parametrlariga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalarning sistemalarini yechish talab qilinadi.

1-jadval

i	s_i	$y(1, s_i)$	$ \varphi(s_i) $
0	0.00000000	-0.54709699	0.54709699
1	1.00000000	0.39876914	0.39876914
2	0.50000000	-0.01985148	0.01985148
3	0.75000000	0.20017350	0.20017350
4	0.62500000	0.09312467	0.09312467
5	0.56250000	0.03741824	0.03741824
6	0.53125000	0.00898425	0.00898425
7	0.51562500	-0.00538269	0.00538269
8	0.52343750	0.00181343	0.00181343
9	0.51953125	-0.00178146	0.00178146
10	0.52148438	0.00001677	0.00001677
11	0.52050781	-0.00088214	0.00088214
12	0.52099609	-0.00043264	0.00043264
13	0.52124023	-0.00020792	0.00020792
14	0.52136230	-0.00009557	0.00009557
15	0.52142334	-0.00003940	0.00003940
16	0.52145386	-0.00001131	0.00001131
17	0.52146912	0.00000273	0.00000273
18	0.52146149	-0.00000429	0.00000429

2-jadval

x_i	y_i	$y(x_i)$	ε_i
0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,04656939	0,04657096	-0,00000157
0,2	0,08230118	0,08230399	-0,00000281
0,3	0,10756923	0,10757300	-0,00000377
0,4	0,12263009	0,12263459	-0,00000450
0,5	0,12763367	0,12763868	-0,00000501
0,6	0,12262927	0,12263459	-0,00000532
0,7	0,10756758	0,10757300	-0,00000542
0,8	0,08229868	0,08230399	-0,00000531
0,9	0,04656602	0,04657096	-0,00000494
1,0	-0,00000429	-0,00000000	-0,00000429

3-jadval

i	s_i	$y(1, s_i)$	$ \varphi(s_i) $
0	0.00000000	-0.54709699	0.54709699
1	1.00000000	0.39876914	0.39876914
2	0.57840848	0.05174241	0.05174241
3	0.51554829	-0.00545347	0.00545347
4	0.52154184	0.00006966	0.00006966
5	0.52146625	0.00000009	0.00000009

4-jadval

x_i	y_i	$y(x_i)$	ε_i
0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,04656985	0,04657096	-0,00000111
0,2	0,08230207	0,08230399	-0,00000192
0,3	0,10757055	0,10757300	-0,00000246
0,4	0,12263182	0,12263459	-0,00000277
0,5	0,12763581	0,12763868	-0,00000287
0,6	0,12263183	0,12263459	-0,00000277
0,7	0,10757055	0,10757300	-0,00000245
0,8	0,08230208	0,08230399	-0,00000191
0,9	0,04656985	0,04657096	-0,00000111
1,0	-0,00000000	-0,00000000	-0,00000000

5-jadval

i	s_i	$y(1, s_i)$	$ \varphi(s_i) $
0	0.00000000	-0.54709699	0,54709699
1	0.45482760	-0.06226762	0,06226762
2	0.52047000	-0.00091696	0,00091696
3	0.52146615	0.00000000	0,00000000

6-jadval

x_i	y_i	$y(x_i)$	ε_i
0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,04656985	0,04657096	-0,00000111
0,2	0,08230207	0,08230399	-0,00000192
0,3	0,10757055	0,10757300	-0,00000246
0,4	0,12263182	0,12263459	-0,00000275
0,5	0,12763581	0,12763868	-0,00000287
0,6	0,12263183	0,12263459	-0,00000277
0,7	0,10757055	0,10757300	-0,00000245
0,8	0,08230208	0,08230399	-0,00000191
0,9	0,04656985	0,04657096	-0,00000111
1,0	-0,00000000	-0,00000000	-0,00000000

Xulosa

Hozirgi zamon hisoblash texnikasidan foydalanib, boshlang'ich shartlari to'liq berilgan oddiy chiziqli emas differentsial tenglamalarning katta sistemalarini tez va yuqori aniqlik bilan yechish mumkin. Shuning uchun fizik, biologik, iqtisodiy, ilmiy-texnik masalalar oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasiga keltirilsa, unda ularni yechish yakuniy bosqichga keldi deb hisoblash mumkin. Shu sababli oldinlar chiziqli emas tenglamalarni soddalashtirib, chiziqli tenglamaga keltirib taqribiy yechilgan bo'lsa, hozirgi vaqtda hisoblash masalalarini turlantirib, oddiy chiziqli yoki chiziqli emas differentsial tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasiga keltirib yechish keng tarqalmoqda.

Masalan, XX-asrning 50-60-yillaridan boshlab oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni bunday tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasi bilan almashtirib yechishga asoslangan bir nechta yangi usullari yaratildi: o'zgarmaslarni variatsiyalash (o'zgartirish), ortogonallashtirish, differentsial haydash, haydash usullari [6,9,12]. Bu usullarning asosiy ma'nosi quyidagidan iborat: oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masala birinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalar sistemasiga qo'yilgan Koshi masalasi bilan almashtiriladi. Chegaraviy masalaning yechimi izlanayotgan kesmaning bir uchidagi chegaraviy sharti boshlang'ich shartlarning bir qismini anglatishga, qolgan boshlang'ich shartlar kesmaning ikkinchi uchidagi chegaraviy shartning bajarilishi talabidan aniqlanadi. Chiziqli chegaraviy masala berilgan hollarda buni amalga oshirish nisbatan oson bajariladi. Bu holatda berilgan chegaraviy masalani yechish, shunday tartibdagi oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasini va algebraik tenglamalarning sistemasini yechishga qo'llaniladi. Chiziqli emas chegaraviy masala berilgan holda noma'lum boshlang'ich shartlarni aniqlash ancha-muncha

murakkablashadi. Sababi bu holatda oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan boshlang'ich shartlarni aniqlash uchun iteratsion usuldan foydalanish va chiziqli emas algebraik tenglamalarning sistemasini yechish kerak bo'ladi [7,8,11,12].

Ushbu bitiruv malakaviy ishida oddiy chiziqli va chiziqli emas differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga otish usuli qo'llaniladi. Bu usulning asosiy rejalari bayon qilinib, uning yangi hioblash algoritmlari yasaladi va ular oddiy ikkinchi tartibli chiziqli emas differentsial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalani yechishga qo'llaniladi. Kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko'p sonli hisoblash tajribalarining natijalari otish usulining amaliyotda qo'llash uchun qulay va yuqori natijali usul ekanligini ko'rsatdi. Otish usulining nazariy asoslarini takomillashtirish va amalda qo'llashni yengillashtirish bo'yicha bajarilgan ilmiy-tadqiqot ishlarining natijalariga muvofiq ikkita ilmiy maqolalar bosib chiqarildi.

Endi bitiruv malakaviy ishining asosiy natijalarini qisqacha keltirib o'tamiz.

1. Ikkinchi tartibli oddiy chiziqli emas differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechish misolida otish usulining nazariy asoslari bayon qilinadi. Usulning hisoblash algoritmining boshqa usullardan farqi ko'rsatiladi. Bu usulda oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasi bilan birgalikda chekli o'lchamli chiziqli emas tenglamani yechish kerak bo'ladi. Shu sababli bu usulning hisoblash algoritmda oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasini sonli yechish usuli bilan birgalikda chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamani yechish usuli birgalikda qo'llaniladi (Eyler usuli – kesmani teng o'rtasidan bo'lish usuli, Eylerning takomillashtirilgan usuli – vatarlar usuli, Runge-Kutta usuli – Nyuton usullarining juftlari foydalaniladi).

2. Otish usuli chiziqli emas ikki differentsial tenglamalarining sistemasiga qo'yilgan integral masalani yechish uchun umumlashtiriladi. Bir jinsli emas chiziqli differentsial tenglamasining umumiy yechimi uning bitta xususiy

yechimi bilan unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimining yig'indisiga teng bo'lishini hisobga olib, chiziqli tenglamalarning sistemalariga qo'yilgan chegaraviy masalalarni otish usuli bilan yechishni ancha yengillashtirish mumkin ekanligi ko'rsatiladi.

3. Yuqori tartibli oddiy differentsial tenglamalarga qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishga otish usulining qo'llanilishi talqin qilinadi. Bunday chegaraviy masala unga teng kuchli bo'lgan, birinchi tartibli tenglamalarning sistemasiga qo'yilgan chegaraviy masala bilan almashtirilib, oxirgi masalani yechishga otish usuli qo'llaniladi. Agarda dastlabki berilgan chegaraviy masala chizili chegaraviy masala bo'lsa, u holda uni yechishga otish usulini qo'llash nisbatan oson bajariladi. Agarda chiziqli emas chegaraviy masala berilsa, u holda Koshi masalasining boshlang'ich shartlarini aniqlash chiziqli emas algebraik tenglamalarining sistemasini yechishga olib keladi. Bu masalani yechishga iteratsion usullarni qo'llash va katta hajmdagi hisoblashlarni bajarish talab qilinadi.

4. Ikkinchi tartibli chiziqli emas differentsial tenglamaga qo'yilgan chegaraviy masalasini yechish misolida otish usulini qo'llashning qulay va yuqori natijali hisoblash algoritmlari yasalgan. Masalan, oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasini yechishning sonli usuli bilan chiziqli emas algebraik tenglamalarni yechishning sonli usullarini birga qo'llashning hisoblash algoritmlari yasali, ularni natijali amalga oshirish bo'yicha mos takliflar beriladi.

5. Otish usulining ushbu bitiruv malakaviy ishida keltirib chiqarilgan yangi hisoblash algoritmlari, uzunligi b ga teng bo'lgan ($0 \leq x \leq b$) tebranuvchi torning tashqaridan ta'sir qilgan kuchga bog'liq tebranishini o'rganish natijasida kelib chiqqan, ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglamaga qo'yilgan chiziqli bo'lmagan chegaraviy masalani yechishga qo'llaniladi. Olingan natijalar masalaning aniq yechimi bilan solishtiriladi: ular $\varepsilon = 10^{-5}$ aniqligi bilan mos

keladi. Usulning ketma-ket kelgan yaqinlashuvlarining masalaning aniq yechimiga yaqinlashuvlari kompyuterda yasalgan grafiklar orqali ko`rsatilgan.

So`ngi ikki yil davomida bajarilgan ilmy-tadqiqot ishlarining va kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko`p sonli hisoblash tajribalarining natijalari bo`yicha otish usuli, oddiy differentsial tenglamaga qo`yilgan chiziqli va chiziqli bo`lmagan chegaraviy masalani yechishning qulay va yuqori natijali usuli bo`ladi degan xulosaga kelimiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968.
2. Годунов С.К. Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2008.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.
6. Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Краснодар: Изд-во университета, 2017.
7. Отаров А.О., Умарова Х.У. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом стрельбы // Материалы VII Республиканской научно – практической конференции, проведенной 20.05.2017 г. в Нукусском филиале Ташкентского аграрного университета. – Нукус. 2017.
8. Отаров А.О., Умарова Х.У., Карабеков С.А. Алгоритмы численной реализации метода пристрелки решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Журнал “Вестник КГУ”, №1, 2018.
9. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 2006.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003.
11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
12. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990.

13. www.twirpx.com
14. www.acm.tuit.uz
15. www.ru.Wikipedia.org
16. www.acm.timus.ru
17. www.tami.uz

Qo`shimchalar

(Kompyuter uchun C++ algoritmik tilida tuzilgan
dasturlar va ulardan olingan asosiy natijalarning
bosmadan chiqarilgan nusxasi)

**Eylerning takomillashtirilgan va kesmani teng o`rtasidan bo`lish
usullarining jufti qo`llab yechilishi ($h=0.01$)**

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<math.h>
using namespace std;
vector<double>x,y,z;
int n;
double h=0.01, eps=1E-5;
double f(double x,double y,double z)
{
    return -1-0.49*z*z;
}
double Eyler_tak(double s)
{
    x[0]=0;y[0]=0;z[0]=s;
    double x0,y0,z0;
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        x0=x[i]+h/2.0;
        y0=y[i]+h/2.0*z[i];
        z0=z[i]+h/2.0*f(x[i],y[i],z[i]);

        x[i+1]=x[i]+h;
        y[i+1]=y[i]+h*z0;
        z[i+1]=z[i]+h*f(x0,y0,z0);
    }
    return y[n];
}
double aniq_yechim(double x)
{
    return 1.0/0.49*log(cos(sqrt(0.49)*(x-0.5))/cos(sqrt(0.49)/2.0));
}
int main()
{
    double s0=0, s1=1, s2, B=0;
```

```

int cnt=0;
double F0, F1, F2;
n=1/h;
x.resize(n+1);
y.resize(n+1);
z.resize(n+1);
F0= Eyler_tak(s0)-B;
printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s0,fabs(F0),(F0+B));
F1=Eyler(s1)-B;cnt++;
printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s1,fabs(F1),(F1+B));
do
{
    s2=(s0+s1)/2.0;
    F2= Eyler_tak(s2)-B;
    if(F0*F2>0 && F2*F1<0)s0=s2;
    if(F0*F2<0 && F2*F1>0)s1=s2;
    ++cnt;
    printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s2,fabs(F2),(F2+B));
    if(fabs(s1-s0)<eps && fabs(F2)<eps)break;
}while(1);
cout<<"Iteraciya: "<<cnt<<endl;
cout<<"n\tx[i]\ty[i]\t\ty*[i]\t\ty[i]-y*[i]\n";
for(int i=0;i<=n;i++)
    printf("%d\t%.2f\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",i,x[i],y[i],anIQ_yechim(x[i]),y[i]
]-anIQ_yeshim(x[i]));
return 0;
}

```

D:\4-KURS\DIPLOM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-kesma.1.exe				
0	0.000000000	0.54709699	-0.54709699	
1	1.000000000	0.39876914	0.39876914	
2	0.500000000	0.01985148	-0.01985148	
3	0.750000000	0.20017350	0.20017350	
4	0.625000000	0.09312467	0.09312467	
5	0.562500000	0.03741824	0.03741824	
6	0.531250000	0.00898425	0.00898425	
7	0.515625000	0.00538269	-0.00538269	
8	0.523437500	0.00181343	0.00181343	
9	0.519531250	0.00178146	-0.00178146	
10	0.521484380	0.00001677	0.00001677	
11	0.520507810	0.00088214	-0.00088214	
12	0.520996090	0.00043264	-0.00043264	
13	0.521240230	0.00020792	-0.00020792	
14	0.521362300	0.00009557	-0.00009557	
15	0.521423340	0.00003940	-0.00003940	
16	0.521453860	0.00001131	-0.00001131	
17	0.521469120	0.00000273	0.00000273	
18	0.521461490	0.000000429	-0.000000429	
Iteraciya: 18				
n	x[i]	y[i]	y*[i]	y[i]-y*[i]
0	0.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000
1	0.01	0.00515795	0.00515813	-0.00000017
2	0.02	0.01020316	0.01020350	-0.00000034
3	0.03	0.01513616	0.01513667	-0.00000051
4	0.04	0.01995752	0.01995819	-0.00000067
5	0.05	0.02466774	0.02466857	-0.00000083
6	0.06	0.02926736	0.02926834	-0.00000098
7	0.07	0.03375685	0.03375799	-0.00000114
8	0.08	0.03813671	0.03813799	-0.00000128
9	0.09	0.04240740	0.04240883	-0.00000143
10	0.10	0.04656939	0.04657096	-0.00000157
11	0.11	0.05062311	0.05062482	-0.00000171
12	0.12	0.05456899	0.05457083	-0.00000184
13	0.13	0.05840745	0.05840942	-0.00000197
14	0.14	0.06213889	0.06214099	-0.00000210
15	0.15	0.06576371	0.06576593	-0.00000223
16	0.16	0.06928228	0.06928462	-0.00000235
17	0.17	0.07269496	0.07269742	-0.00000247
18	0.18	0.07600211	0.07600469	-0.00000258
19	0.19	0.07920407	0.07920677	-0.00000270
20	0.20	0.08230118	0.08230399	-0.00000281
21	0.21	0.08529374	0.08529666	-0.00000292
22	0.22	0.08818207	0.08818509	-0.00000302
23	0.23	0.09096646	0.09096959	-0.00000312
24	0.24	0.09364719	0.09365042	-0.00000322
25	0.25	0.09622454	0.09622786	-0.00000332
26	0.26	0.09869876	0.09870218	-0.00000342
27	0.27	0.10107011	0.10107362	-0.00000351
28	0.28	0.10333882	0.10334242	-0.00000360
29	0.29	0.10550512	0.10550881	-0.00000369
30	0.30	0.10756923	0.10757300	-0.00000377
31	0.31	0.10953136	0.10953521	-0.00000386
32	0.32	0.11139170	0.11139563	-0.00000394
33	0.33	0.11315043	0.11315445	-0.00000402
34	0.34	0.11480774	0.11481183	-0.00000409
35	0.35	0.11636378	0.11636795	-0.00000417

D:\4-KURS\DIPLOM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-kesma.1.exe				
36	0.36	0.11781872	0.11782295	-0.00000424
37	0.37	0.11917269	0.11917699	-0.00000431
38	0.38	0.12042582	0.12043020	-0.00000437
39	0.39	0.12157825	0.12158269	-0.00000444
40	0.40	0.12263009	0.12263459	-0.00000450
41	0.41	0.12358144	0.12358600	-0.00000456
42	0.42	0.12443239	0.12443701	-0.00000462
43	0.43	0.12518302	0.12518770	-0.00000468
44	0.44	0.12583342	0.12583815	-0.00000473
45	0.45	0.12638364	0.12638842	-0.00000478
46	0.46	0.12683374	0.12683858	-0.00000483
47	0.47	0.12718376	0.12718865	-0.00000488
48	0.48	0.12743375	0.12743867	-0.00000493
49	0.49	0.12758371	0.12758868	-0.00000497
50	0.50	0.12763367	0.12763868	-0.00000501
51	0.51	0.12758363	0.12758868	-0.00000505
52	0.52	0.12743358	0.12743867	-0.00000509
53	0.53	0.12718352	0.12718865	-0.00000513
54	0.54	0.12683341	0.12683858	-0.00000516
55	0.55	0.12638323	0.12638842	-0.00000519
56	0.56	0.12583293	0.12583815	-0.00000522
57	0.57	0.12518245	0.12518770	-0.00000525
58	0.58	0.12443173	0.12443701	-0.00000528
59	0.59	0.12358070	0.12358600	-0.00000530
60	0.60	0.12262927	0.12263459	-0.00000532
61	0.61	0.12157735	0.12158269	-0.00000534
62	0.62	0.12042484	0.12043020	-0.00000536
63	0.63	0.11917162	0.11917699	-0.00000537
64	0.64	0.11781757	0.11782295	-0.00000539
65	0.65	0.11636255	0.11636795	-0.00000540
66	0.66	0.11480642	0.11481183	-0.00000541
67	0.67	0.11314903	0.11315445	-0.00000542
68	0.68	0.11139021	0.11139563	-0.00000542
69	0.69	0.10952979	0.10953521	-0.00000542
70	0.70	0.10756758	0.10757300	-0.00000542
71	0.71	0.10550338	0.10550881	-0.00000542
72	0.72	0.10333700	0.10334242	-0.00000542
73	0.73	0.10106820	0.10107362	-0.00000541
74	0.74	0.09869677	0.09870218	-0.00000540
75	0.75	0.09622247	0.09622786	-0.00000539
76	0.76	0.09364504	0.09365042	-0.00000538
77	0.77	0.09096422	0.09096959	-0.00000537
78	0.78	0.08817975	0.08818509	-0.00000535
79	0.79	0.08529133	0.08529666	-0.00000533
80	0.80	0.08229868	0.08230399	-0.00000531
81	0.81	0.07920149	0.07920677	-0.00000528
82	0.82	0.07599944	0.07600469	-0.00000525
83	0.83	0.07269220	0.07269742	-0.00000522
84	0.84	0.06927943	0.06928462	-0.00000519
85	0.85	0.06576078	0.06576593	-0.00000516
86	0.86	0.06213587	0.06214099	-0.00000512
87	0.87	0.05840434	0.05840942	-0.00000508
88	0.88	0.05456580	0.05457083	-0.00000504
89	0.89	0.05061983	0.05062482	-0.00000499
90	0.90	0.04656602	0.04657096	-0.00000494
91	0.91	0.04240394	0.04240883	-0.00000489
92	0.92	0.03813316	0.03813799	-0.00000484

D:\4-KURS\DIPLOM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-kesma.1.exe				
93	0.93	0.03375321	0.03375799	-0.00000478
94	0.94	0.02926362	0.02926834	-0.00000472
95	0.95	0.02466392	0.02466857	-0.00000465
96	0.96	0.01995360	0.01995819	-0.00000459
97	0.97	0.01513215	0.01513667	-0.00000452
98	0.98	0.01019905	0.01020350	-0.00000445
99	0.99	0.00515376	0.00515813	-0.00000437
100	1.00	-0.00000429	-0.00000000	-0.00000429

Process exited with return value 0				
Press any key to continue . . .				

Eylerning takomillashtirilgan va Vatarlar usullarining jufti qo'llanib yechilishi ($h=0.01$)

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<math.h>
using namespace std;
vector<double>x,y,z;
int n;
double h=0.01, eps=1E-5;
double f(double x,double y,double z)
{
    return -1-0.49*z*z;
}
double Eyler_tak(double s)
{
    x[0]=0;y[0]=0;z[0]=s;
    double x0,y0,z0;
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        x0=x[i]+h/2.0;
        y0=y[i]+h/2.0*z[i];
        z0=z[i]+h/2.0*f(x[i],y[i],z[i]);

        x[i+1]=x[i]+h;
        y[i+1]=y[i]+h*z0;
        z[i+1]=z[i]+h*f(x0,y0,z0);
    }
    return y[n];
}
double aniq_yechim(double x)
{

```

```

        return 1.0/0.49*log(cos(sqrt(0.49)*(x-0.5))/cos(sqrt(0.49)/2.0));
    }
int main()
{
    double s0=0, s1=1, s2, B=0;
    int cnt=0;
    double F0, F1, F2;
    n=1/h;
    x.resize(n+1);
    y.resize(n+1);
    z.resize(n+1);
    F0=Eyler_tak(s0)-B;
    printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s0,F0,fabs(F0+B));
    ++cnt;
    F1=Eyler_tak(s1)-B;
    printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s1,F1,fabs(F1+B));
    do
    { F0=Eyler_tak(s0)-B;
      F1=Eyler_tak(s1)-B;
      s2=s1-F1*(s1-s0)/(F1-F0);
      ++cnt;
      F2=Eyler_tak(s2)-B;
      printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s2,F2,fabs(F2+B));
      s0=s1;s1=s2;
      if(fabs(s1-s0)<eps && fabs(F2)<eps)break;
    }while(1);
    cout<<"Iteraciya: "<<cnt<<endl;
    cout<<"n\tx[i]\ty[i]\ty*[i]\ty[i]-y*[i]\n";
    for(int i=0;i<=n;i++)

```

```

printf("%d\t%.2f\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",i,x[i],y[i],aniq_yechim(x[i]),y[i]-
aniq_yechim(x[i]));
return 0;}

```

D:\4-KURS\DIPLM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-vatar.exe

0	0.00000000	-0.54709699	0.54709699
1	1.00000000	0.39876914	0.39876914
2	0.57840848	0.05174241	0.05174241
3	0.51554829	-0.00545347	0.00545347
4	0.52154184	0.00006966	0.00006966
5	0.52146625	0.00000009	0.00000009
6	0.52146615	-0.00000000	0.00000000
Iteraciya: 6			
n	x[i]	y[i]	y*[i]
0	0.00	0.00000000	0.00000000
1	0.01	0.00515800	0.00515813
2	0.02	0.01020325	0.01020350
3	0.03	0.01513630	0.01513667
4	0.04	0.01995770	0.01995819
5	0.05	0.02466797	0.02466857
6	0.06	0.02926763	0.02926834
7	0.07	0.03375717	0.03375799
8	0.08	0.03813708	0.03813799
9	0.09	0.04240782	0.04240883
10	0.10	0.04656985	0.04657096
11	0.11	0.05062361	0.05062482
12	0.12	0.05456953	0.05457083
13	0.13	0.05840804	0.05840942
14	0.14	0.06213953	0.06214099
15	0.15	0.06576439	0.06576593
16	0.16	0.06928299	0.06928462
17	0.17	0.07269572	0.07269742
18	0.18	0.07600292	0.07600469
19	0.19	0.07920492	0.07920677
20	0.20	0.08230207	0.08230399
21	0.21	0.08529468	0.08529666
22	0.22	0.08818305	0.08818509
23	0.23	0.09096748	0.09096959
24	0.24	0.09364826	0.09365042
25	0.25	0.09622564	0.09622786
26	0.26	0.09869991	0.09870218
27	0.27	0.10107130	0.10107362
28	0.28	0.10334005	0.10334242
29	0.29	0.10550639	0.10550881
30	0.30	0.10757055	0.10757300
31	0.31	0.10953272	0.10953521
32	0.32	0.11139310	0.11139563
33	0.33	0.11315187	0.11315445
34	0.34	0.11480922	0.11481183
35	0.35	0.11636531	0.11636795
36	0.36	0.11782028	0.11782295
37	0.37	0.11917429	0.11917699
38	0.38	0.12042747	0.12043020
39	0.39	0.12157994	0.12158269
40	0.40	0.12263182	0.12263459
41	0.41	0.12358321	0.12358600
42	0.42	0.12443420	0.12443701
43	0.43	0.12518488	0.12518770
44	0.44	0.12583532	0.12583815
45	0.45	0.12638558	0.12638842
46	0.46	0.12683572	0.12683858
47	0.47	0.12718579	0.12718865

```
D:\4-KURS\DIPLOM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-vatar.exe
48 0.48 0.12743581 0.12743867 -0.00000287
49 0.49 0.12758581 0.12758868 -0.00000287
50 0.50 0.12763581 0.12763868 -0.00000287
51 0.51 0.12758581 0.12758868 -0.00000287
52 0.52 0.12743581 0.12743867 -0.00000287
53 0.53 0.12718579 0.12718865 -0.00000286
54 0.54 0.12683572 0.12683858 -0.00000285
55 0.55 0.12638558 0.12638842 -0.00000284
56 0.56 0.12583532 0.12583815 -0.00000283
57 0.57 0.12518488 0.12518770 -0.00000282
58 0.58 0.12443420 0.12443701 -0.00000280
59 0.59 0.12358321 0.12358600 -0.00000279
60 0.60 0.12263183 0.12263459 -0.00000277
61 0.61 0.12157995 0.12158269 -0.00000274
62 0.62 0.12042748 0.12043020 -0.00000272
63 0.63 0.11917430 0.11917699 -0.00000269
64 0.64 0.11782029 0.11782295 -0.00000267
65 0.65 0.11636531 0.11636795 -0.00000264
66 0.66 0.11480923 0.11481183 -0.00000260
67 0.67 0.11315188 0.11315445 -0.00000257
68 0.68 0.11139310 0.11139563 -0.00000253
69 0.69 0.10953272 0.10953521 -0.00000249
70 0.70 0.10757055 0.10757300 -0.00000245
71 0.71 0.10550640 0.10550881 -0.00000241
72 0.72 0.10334005 0.10334242 -0.00000236
73 0.73 0.10107130 0.10107362 -0.00000231
74 0.74 0.09869991 0.09870218 -0.00000226
75 0.75 0.09622565 0.09622786 -0.00000221
76 0.76 0.09364826 0.09365042 -0.00000215
77 0.77 0.09096749 0.09096959 -0.00000210
78 0.78 0.08818306 0.08818509 -0.00000204
79 0.79 0.08529469 0.08529666 -0.00000197
80 0.80 0.08230208 0.08230399 -0.00000191
81 0.81 0.07920493 0.07920677 -0.00000184
82 0.82 0.07600292 0.07600469 -0.00000177
83 0.83 0.07269573 0.07269742 -0.00000170
84 0.84 0.06928300 0.06928462 -0.00000162
85 0.85 0.06576439 0.06576593 -0.00000154
86 0.86 0.06213953 0.06214099 -0.00000146
87 0.87 0.05840805 0.05840942 -0.00000138
88 0.88 0.05456954 0.05457083 -0.00000129
89 0.89 0.05062361 0.05062482 -0.00000120
90 0.90 0.04656985 0.04657096 -0.00000111
91 0.91 0.04240782 0.04240883 -0.00000101
92 0.92 0.03813708 0.03813799 -0.00000091
93 0.93 0.03375718 0.03375799 -0.00000081
94 0.94 0.02926764 0.02926834 -0.00000070
95 0.95 0.02466798 0.02466857 -0.00000060
96 0.96 0.01995770 0.01995819 -0.00000048
97 0.97 0.01513630 0.01513667 -0.00000037
98 0.98 0.01020325 0.01020350 -0.00000025
99 0.99 0.00515800 0.00515813 -0.00000013
100 1.00 -0.00000000 -0.00000000 -0.00000000

-----
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Eyler takomillashtirilgan va Nyuton usullari birgalikda qo'llanib yechilishi ($h=0.01$)

```
#include<iostream>
#include<vector>
#include<math.h>
using namespace std;
vector<double>x,y,z;
int n;
double h=0.01, eps=1E-5;
double f(double x,double y,double z)
{
    return -1-0.49*z*z;
}
double Eyler_tak(double s)
{
    x[0]=0;y[0]=0;z[0]=s;
    double x0,y0,z0;
    for(int i=0;i<n;i++)
    {
        x0=x[i]+h/2.0;
        y0=y[i]+h/2.0*z[i];
        z0=z[i]+h/2.0*f(x[i],y[i],z[i]);

        x[i+1]=x[i]+h;
        y[i+1]=y[i]+h*z0;
        z[i+1]=z[i]+h*f(x0,y0,z0);
    }
    return y[n];
}
double aniq_yechim(double x)
```

```

{
    return 1.0/0.49*log(cos(sqrt(0.49)*(x-0.5))/cos(sqrt(0.49)/2.0));
}
int main()
{
    double s0=0, ds=0.001, Ds, s1, B=0;
    int cnt=0;
    double F0, F1;
    n=1/h;
    x.resize(n+1);
    y.resize(n+1);
    z.resize(n+1);
    F0=Eyler_tak(s0)-B;
    printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s0,F0,fabs(F0+B));
    do
    { F0=Eyler_tak(s0)-B;
        F1=Eyler_tak(s0+ds)-B;
        Ds=(F1-F0)/ds;
        Ds=(-F0)/Ds;
        s1=s0+Ds;
        F1=Eyler_tak(s1)-B;
        ++cnt;
        printf("%d\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",cnt,s1,F1,fabs(F1+B));
        if(fabs(s1-s0)<eps && fabs(F1)<eps)break;
        s0=s1;
    }while(1);
    cout<<"Iteraciya: "<<cnt<<endl;
    cout<<"n\tx[i]\ty[i]\t\ty*[i]\t\ty[i]-y*[i]\n";
    for(int i=0;i<=n;i++)

```

```

printf("%d\t%.2f\t%.8f\t%.8f\t%.8f\n",i,x[i],y[i],aniq_yechim(x[i]),y[i]-
aniq_yechim(x[i]));
return 0;}

```

D:\4-KURS\DIPLLOM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-nyuton.exe				
0	0.00000000	-0.54709699	0.54709699	
1	0.45482760	-0.06226762	0.06226762	
2	0.52047000	-0.00091696	0.00091696	
3	0.52146615	0.00000000	0.00000000	
4	0.52146615	-0.00000000	0.00000000	
Iteraciya: 4				
n	x[i]	y[i]	y*[i]	y[i]-y*[i]
0	0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	0.01	0.00515800	0.00515813	-0.00000013
2	0.02	0.01020325	0.01020350	-0.00000025
3	0.03	0.01513630	0.01513667	-0.00000037
4	0.04	0.01995770	0.01995819	-0.00000049
5	0.05	0.02466797	0.02466857	-0.00000060
6	0.06	0.02926763	0.02926834	-0.00000071
7	0.07	0.03375717	0.03375799	-0.00000081
8	0.08	0.03813708	0.03813799	-0.00000092
9	0.09	0.04240782	0.04240883	-0.00000102
10	0.10	0.04656985	0.04657096	-0.00000111
11	0.11	0.05062361	0.05062482	-0.00000121
12	0.12	0.05456953	0.05457083	-0.00000130
13	0.13	0.05840804	0.05840942	-0.00000138
14	0.14	0.06213953	0.06214099	-0.00000147
15	0.15	0.06576439	0.06576593	-0.00000155
16	0.16	0.06928299	0.06928462	-0.00000163
17	0.17	0.07269572	0.07269742	-0.00000170
18	0.18	0.07600292	0.07600469	-0.00000178
19	0.19	0.07920492	0.07920677	-0.00000185
20	0.20	0.08230207	0.08230399	-0.00000192
21	0.21	0.08529468	0.08529666	-0.00000198
22	0.22	0.08818305	0.08818509	-0.00000204
23	0.23	0.09096748	0.09096959	-0.00000210
24	0.24	0.09364826	0.09365042	-0.00000216
25	0.25	0.09622564	0.09622786	-0.00000222
26	0.26	0.09869991	0.09870218	-0.00000227
27	0.27	0.10107130	0.10107362	-0.00000232
28	0.28	0.10334005	0.10334242	-0.00000237
29	0.29	0.10550639	0.10550881	-0.00000241
30	0.30	0.10757055	0.10757300	-0.00000246
31	0.31	0.10953272	0.10953521	-0.00000250
32	0.32	0.11139310	0.11139563	-0.00000254
33	0.33	0.11315187	0.11315445	-0.00000257
34	0.34	0.11480922	0.11481183	-0.00000261
35	0.35	0.11636531	0.11636795	-0.00000264
36	0.36	0.11782028	0.11782295	-0.00000267
37	0.37	0.11917429	0.11917699	-0.00000270
38	0.38	0.12042747	0.12043020	-0.00000272
39	0.39	0.12157994	0.12158269	-0.00000275
40	0.40	0.12263182	0.12263459	-0.00000277
41	0.41	0.12358321	0.12358600	-0.00000279
42	0.42	0.12443420	0.12443701	-0.00000281
43	0.43	0.12518488	0.12518770	-0.00000282
44	0.44	0.12583532	0.12583815	-0.00000283
45	0.45	0.12638558	0.12638842	-0.00000285
46	0.46	0.12683572	0.12683858	-0.00000285
47	0.47	0.12718579	0.12718865	-0.00000286
48	0.48	0.12743581	0.12743867	-0.00000287
49	0.49	0.12758581	0.12758868	-0.00000287
50	0.50	0.12763581	0.12763868	-0.00000287

```
D:\4-KURS\DIPLM_ISHIM\4-misol_qaytadan\EYLER_TAKOMIL-nyuton.exe
51 0.51 0.12758581 0.12758868 -0.00000287
52 0.52 0.12743581 0.12743867 -0.00000287
53 0.53 0.12718579 0.12718865 -0.00000286
54 0.54 0.12683572 0.12683858 -0.00000285
55 0.55 0.12638558 0.12638842 -0.00000284
56 0.56 0.12583532 0.12583815 -0.00000283
57 0.57 0.12518488 0.12518770 -0.00000282
58 0.58 0.12443420 0.12443701 -0.00000280
59 0.59 0.12358321 0.12358600 -0.00000279
60 0.60 0.12263183 0.12263459 -0.00000277
61 0.61 0.12157995 0.12158269 -0.00000274
62 0.62 0.12042748 0.12043020 -0.00000272
63 0.63 0.11917430 0.11917699 -0.00000269
64 0.64 0.11782029 0.11782295 -0.00000267
65 0.65 0.11636531 0.11636795 -0.00000264
66 0.66 0.11480923 0.11481183 -0.00000260
67 0.67 0.11315188 0.11315445 -0.00000257
68 0.68 0.11139310 0.11139563 -0.00000253
69 0.69 0.10953272 0.10953521 -0.00000249
70 0.70 0.10757055 0.10757300 -0.00000245
71 0.71 0.10550640 0.10550881 -0.00000241
72 0.72 0.10334005 0.10334242 -0.00000236
73 0.73 0.10107130 0.10107362 -0.00000231
74 0.74 0.09869991 0.09870218 -0.00000226
75 0.75 0.09622565 0.09622786 -0.00000221
76 0.76 0.09364826 0.09365042 -0.00000215
77 0.77 0.09096749 0.09096959 -0.00000210
78 0.78 0.08818306 0.08818509 -0.00000204
79 0.79 0.08529469 0.08529666 -0.00000197
80 0.80 0.08230208 0.08230399 -0.00000191
81 0.81 0.07920493 0.07920677 -0.00000184
82 0.82 0.07600292 0.07600469 -0.00000177
83 0.83 0.07269573 0.07269742 -0.00000170
84 0.84 0.06928300 0.06928462 -0.00000162
85 0.85 0.06576439 0.06576593 -0.00000154
86 0.86 0.06213953 0.06214099 -0.00000146
87 0.87 0.05840805 0.05840942 -0.00000138
88 0.88 0.05456954 0.05457083 -0.00000129
89 0.89 0.05062361 0.05062482 -0.00000120
90 0.90 0.04656985 0.04657096 -0.00000111
91 0.91 0.04240782 0.04240883 -0.00000101
92 0.92 0.03813708 0.03813799 -0.00000091
93 0.93 0.03337518 0.03337599 -0.00000081
94 0.94 0.02926764 0.02926834 -0.00000070
95 0.95 0.02466798 0.02466857 -0.00000060
96 0.96 0.01995770 0.01995819 -0.00000048
97 0.97 0.01513630 0.01513667 -0.00000037
98 0.98 0.01020325 0.01020350 -0.00000025
99 0.99 0.00515800 0.00515813 -0.00000013
100 1.00 -0.00000000 -0.00000000 -0.00000000

-----
Process exited with return value 0
```