МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы III Международной
научно-практической конференции
23 – 26 ноября 2017 г., Орел

Орел – 2017

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции, 23-26 ноября 2017 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ, 2017. – 579 с.

ISBN 978-5-9929-0559-5

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на III Международной научно-практической конференции, проходившей 23-26 ноября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

ISBN 978-5-9929-0559-5

Оглавление

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж. А. Отарова
Каракалпакский государственный университет
e-mail: *j.otarova@mail.ru*

В данной работе для уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области на основе спектрального метода доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, ряд Фурье, полнота, неоднородные условия.

В области $\Omega = \{ (x,t): \ 0 < x < p, \ \ 0 < t < T \}$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$u_{xxxx} + u_{tt} = f(x,t). \tag{1}$$

З а д а ч а A. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi_2(x), \qquad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \varphi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(p,t) = \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u_{xxx}(0,t) = \varphi_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$u_{xxx}(p,t) = \varphi_4(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Краевые задачи для уравнения (1) с однородными краевыми условиями изучены в работах [1, 3, 4, 5].

О п р е д е л е н и е. Функцию $u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи A при $f(x,t) \in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет условиям (2)-(7) и уравнению (1).

Т е о р е м а 1. Если существует регулярное решение $u(x,t)$ задачи A, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи.

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t). \tag{8}$$

Известно, что функции

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

образуют в $L_2(0,p)$ полную ортонормированную систему.

Следуя [2] рассмотрим функции

$$d_n(t) = \int\limits_0^p u(x,t)\, X_n(x)\, dx, \;\; n = 0, 1, \ldots \,. \tag{10}$$

На основании (10) введём функции

$$d_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t) \cdot X_n(x)\, dx, \;\; 0 < \varepsilon < p, \tag{11}$$

причем $(\varepsilon,\, p-\varepsilon) \neq \emptyset$. Дифференцируя равенство (11) по t дважды, из соответствующего уравнения (1) получаем

$$d_{n,\varepsilon}{}''(t) = -\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t) \cdot X_n(x)\, dx. \tag{12}$$

Правую часть (12) интегрируя четыре раза по частям, переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$, С учётом соответсвующих однородных условий (4)-(7), которые следуют из (8), получаем

$$d_n{}''(t) = -\lambda_n^4 \int\limits_0^p u(x,t)\, X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots \,.$$

В последнем равенстве учитывая (10), имеем

$$d_n''(t) + \lambda_n^4 d_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, ...,$$

т.е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Решая его учитывая условия (2) и (3) имеем

$$\int\limits_0^p u(x,t)\, X_n(x)\, dx = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{13}$$

Из (13) следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе (9). Следовательно $u(x,t) \equiv 0$. В силу (8), получаем, что $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, т.е. решение задачи единственно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Если $f(x,t) \in C_{x,t}^{2,0}\left(\overline{\Omega}\right)$, $f_{xxx} \in L_2(\Omega)$, $f_x(0,t) = f_x(p,t) = 0$, $\forall t \in [0;T]$, и $\psi_3^{(4)}(x) \in C[0,p]$, $\psi_3^{(5)} \in L_2(0,p)$ и удовлетворяет условиям $\psi_3{}'(0) = \psi_3{}'(p) = 0$, $\psi_3{}'''(0) = \psi_3{}'''(p) = 0$; а $\psi_4^{(2)}(x) \in C[0,p]$, $\psi_4^{(3)}(x) \in L_2(0,p)$, и удовлетворяет условиям $\psi_4{}'(0) = \psi_4{}'(p) = 0$, тогда регулярное решение задачи A существует и $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

$\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ определим ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём вспомогательную функцию

$$w\left(x,t\right)=x\cdot\varphi_{1}\left(t\right)+\left[\varphi_{2}\left(t\right)-\varphi_{1}\left(t\right)\right]\cdot\frac{x^{2}}{2p}-\frac{p^{2}}{8\pi^{2}}\left[\frac{p}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{p}x-x\right]\times$$

$$\times\left[\varphi_{4}\left(t\right)+\varphi_{3}\left(t\right)\right]+\frac{p^{2}}{2\pi^{2}}\left[\frac{p}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}x-x+\frac{x^{2}}{p}\right]\cdot\left[\varphi_{4}\left(t\right)-\varphi_{3}\left(t\right)\right].\qquad(14)$$

Ясно, что

$$w_{x}\left(0,t\right)=\varphi_{1}\left(t\right);\qquad w_{x}\left(p,t\right)=\varphi_{2}\left(t\right),$$
$$w_{xxx}\left(0,t\right)=\varphi_{3}\left(t\right);\qquad w_{xxx}\left(p,t\right)=\varphi_{4}\left(t\right).$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)+w\left(x,t\right),\qquad(15)$$

где, $v\left(x,t\right)$ −новая неизвестная функция. Таким образом, согласно (15) мы приходим к следующей задаче:

З а д а ч а $\widetilde{A}$. Найти в области Ω решение $v\left(x,t\right)$ уравнения

$$v_{xxxx}+v_{tt}=g\left(x,t\right),\qquad(16)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v_{x}\left(0,t\right)=v_{x}\left(p,t\right)=0,\ 0\leq t\leq T,$$
$$v_{xxx}\left(0,t\right)=v_{xxx}\left(p,t\right)=0,\ \ 0\leq t\leq T,$$
$$v\left(x,0\right)=\psi_{3}\left(x\right),0\leq x\leq p,\qquad(17)$$
$$v_{t}\left(x,0\right)=\psi_{4}\left(x\right),0\leq x\leq p,\qquad(18)$$

где

$$\psi_{3}\left(x\right)\equiv\psi_{1}\left(x\right)-w\left(x,0\right),\qquad 0\leq x\leq p,$$
$$\psi_{4}\left(x\right)\equiv\psi_{2}\left(x\right)-w_{t}\left(x,0\right),\qquad 0\leq x\leq p,$$

согласно (15).

Решение соответствующего однородного уравнения (16), ищем методом Фурье, оно имеет вид

$$v\left(x,t\right)=\left[a_{0}\left(0\right)t+b_{0}\left(0\right)+\int\limits_{0}^{t}\left(t-\tau\right)g_{0}\left(\tau\right)d\tau\right]\tfrac{1}{\sqrt{p}}+$$
$$+\sqrt{\tfrac{2}{p}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[a_{n}\left(0\right)\cos\lambda_{n}^{2}t+b_{n}\left(0\right)\sin\lambda_{n}^{2}t+\right.\qquad(19)$$
$$\left.+\tfrac{1}{\lambda_{n}^{2}}\int\limits_{0}^{t}g_{n}\left(\tau\right)\cdot\sin\lambda_{n}^{2}\left(t-\tau\right)d\tau\right]\cdot\cos\lambda_{n}x.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $a_{n}\left(0\right),\ b_{n}\left(0\right)$ используются условия (17), (18).

$$a_{0}\left(0\right)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_{0}^{p}\psi_{4}\left(x\right)dx,\qquad b_{0}\left(0\right)=\frac{1}{\sqrt{p}}\int\limits_{0}^{p}\psi_{3}\left(x\right)dx,$$

$$a_n(0)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_0^p \psi_3(x)\cos\lambda_n x dx,\quad n=1,2,...$$

$$b_n(0)=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^p \psi_4(x)\cos\lambda_n x dx,\quad n=1,2,...$$

Решение задачи представляется в виде (19), где $a_0(0)$, $b_0(0)$,$a_n(0)$, $b_n(0)$ определяются соответственно выше формулами.

Следовательно, мы построили формальное решение задачи $\widetilde{A}$ в области Ω, которое даётся формулой (19).

Л е м м а. $\forall t\in[0;T]$ при $n=1,2,..$ справедливы оценки

$$|v_0(t)|\le C_1;\qquad |v_n(t)|\le[|a_n(0)|+|b_n(0)|]+\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^2}\|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0{}'(t)|\le C_2;\qquad |v_n{}'(t)|\le\lambda_n^2[|a_n(0)|+|b_n(0)|]+\sqrt{T}\|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0{}''(t)|\le C_3;\qquad |v_n{}''(t)|\le\lambda_n^4[|a_n(0)|+|b_n(0)|]+C\|g\|_{C(\overline{\Omega})}+\lambda_n^2\sqrt{T}\|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

где C_1,C_2,C_3-положительные постоянные.

З а м е ч а н и е . Из леммы следует, что $u(x,t)\in C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д. Вольтерровость краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Тр. межд. конф. 24—28 июня 2003. — Т.1.— Стерлитамак, 2003. — С. 78—82.
2. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. — Киев, 1999.— № 8 (35) — С. 1094—1100.
3. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Докл. АН РУЗ. Ташкент, 2008 — № 1.— С. 10—14.
4. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // Узб. мат. журн. — Ташкент, 2008. — №2. — С. 74—80.
5. Otarova J. A. Volterraness of boundary value problem for fourth order equation // The Journal of Arts and Science (Sakarya University Faculty of Arts and Science). — Sakarya, 2007. — №9. — P. 152 — 162.