

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И.С. ТУРГЕНЕВА»

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы III Международной
научно-практической конференции
23 – 26 ноября 2017 г., Орел

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:

Дорофеева В.И., кандидат физико-математических наук, доцент
Зарубин А.Н., доктор физико-математических наук, профессор
Можарова Т.Н., кандидат физико-математических наук, профессор
Марков О.И., доктор физико-математических наук, профессор
Селютин В.Д., доктор педагогических наук, профессор
Тарасова О.В., доктор педагогических наук, профессор
Федяев Ю.С., кандидат физико-математических наук, доцент

Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции, 23-26 ноября 2017 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Орел: ОГУ, 2017. – 579 с.

ISBN 978-5-9929-0559-5

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на III Международной научно-практической конференции, проходившей 23-26 ноября на базе физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева.

Материалы издаются в авторской редакции с незначительной технической корректурой.

ISBN 978-5-9929-0559-5

© ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева», 2017 г.
© Коллектив авторов, 2017 г.

Оглавление

Предисловие	10
Математический анализ и дифференциальные уравнения	11
Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. Обратная задача определения источника в двумерном псевдопараболическом уравнении. Случай задачи Коши	11
Аблабеков Б.С., Курманбаева А.К. Задача Гурса для линейного нагруженного уравнения и связанные с ней обратная задача	14
Аксёнов Н.А. Задача для интегрально-операторного уравнения с нелокальным условием	19
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое	24
Антоновская О.Г. Применение квадратичных функций Ляпунова в задачах оценивания макроструктуры пространства состояний нелинейной динамической системы	27
Бородинова И.А., Родионова И.Н. Задача с несколькими условиями для уравнения гиперболического типа третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве	32
Васильев В.Б. О разрешимости некоторых дискретных уравнений	37
Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Конечномерные спектрально-обратимые динамические системы	42
Зарубин А.Н. Об алгоритме решения краевой задачи для функционально-дифференциального опережающе-запаздывающего гиперболического уравнения	45
Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В. Об общем решении задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа с интегрированным функциональным запаздыванием и опережением	52
Клопов Н.В. Изучение понятия комплексной интерполяции	57
Козлов А.А., Бурак А.Д. Глобальная управляемость характеристических показателей Ляпунова трехмерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами и наблюдателем	61
Корниенко Д.В. Граничная задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных	64
Можарова Т.Н. Об элементах локально выпуклого пространства H_α^p	68
Ноздрунов В.В. Алгоритм построения группы эквивалентности по параметрам для произвольной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	72
Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с неоднородными краевыми условиями	76
Русаков А.А., Чубариков В.Н. Математика и компьютерное моделирование	80
Сагателян Т.М. О равномерной сходимости двойных рядов по системе Кристенсона-Леви	86
Соломатин О.Д. К вопросу о полноте системы обобщенных экспонент в полном метрическом пространстве	89

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж. А. Отарова

Каракалпакский государственный университет

e-mail: *j.otarova@mail.ru*

В данной работе для уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области на основе спектрального метода доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: краевая задача, ряд Фурье, полнота, неоднородные условия.

В области $\Omega = \{ (x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T \}$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$u_{xxxx} + u_{tt} = f(x, t). \quad (1)$$

Задача А. Найти в области Ω решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = \varphi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(p, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$u_{xxx}(0, t) = \varphi_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$u_{xxx}(p, t) = \varphi_4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Краевые задачи для уравнения (1) с однородными краевыми условиями изучены в работах [1, 3, 4, 5].

О п р е д е л е н и е. Функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи А при $f(x, t) \in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет условиям (2)-(7) и уравнению (1).

Т е о р е м а 1. Если существует регулярное решение $u(x, t)$ задачи А, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи.

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t). \quad (8)$$

Известно, что функции

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

образуют в $L_2(0, p)$ полную ортонормированную систему.

Следуя [2] рассмотрим функции

$$d_n(t) = \int_0^p u(x, t) X_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

На основании (10) введём функции

$$d_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u(x, t) \cdot X_n(x) dx, \quad 0 < \varepsilon < p, \quad (11)$$

причем $(\varepsilon, p - \varepsilon) \neq \emptyset$. Дифференцируя равенство (11) по t дважды, из соответствующего уравнения (1) получаем

$$d_{n,\varepsilon}''(t) = - \int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x, t) \cdot X_n(x) dx. \quad (12)$$

Правую часть (12) интегрируя четыре раза по частям, переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учётом соответствующих однородных условий (4)-(7), которые следуют из (8), получаем

$$d_n''(t) = -\lambda_n^4 \int_0^p u(x, t) X_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

В последнем равенстве учитывая (10), имеем

$$d_n''(t) + \lambda_n^4 d_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

т.е. получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Решая его учитывая условия (2) и (3) имеем

$$\int_0^p u(x, t) X_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Из (13) следует ортогональность $u(x, t)$ к полной системе (9). Следовательно $u(x, t) \equiv 0$. В силу (8), получаем, что $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, т.е. решение задачи единственно. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $f(x, t) \in C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega})$, $f_{xxx} \in L_2(\Omega)$, $f_x(0, t) = f_x(p, t) = 0$, $\forall t \in [0; T]$, и $\psi_3^{(4)}(x) \in C[0, p]$, $\psi_3^{(5)} \in L_2(0, p)$ и удовлетворяет условиям $\psi_3'(0) = \psi_3'(p) = 0$, $\psi_3'''(0) = \psi_3'''(p) = 0$; а $\psi_4^{(2)}(x) \in C[0, p]$, $\psi_4^{(3)}(x) \in L_2(0, p)$, и удовлетворяет условиям $\psi_4'(0) = \psi_4'(p) = 0$, тогда регулярное решение задачи A существует и $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega})$.

$\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ определим ниже.

Доказательство. Введём вспомогательную функцию

$$w(x, t) = x \cdot \varphi_1(t) + [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] \cdot \frac{x^2}{2p} - \frac{p^2}{8\pi^2} \left[\frac{p}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{p} x - x \right] \times \\ \times [\varphi_4(t) + \varphi_3(t)] + \frac{p^2}{2\pi^2} \left[\frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} x - x + \frac{x^2}{p} \right] \cdot [\varphi_4(t) - \varphi_3(t)]. \quad (14)$$

Ясно, что

$$w_x(0, t) = \varphi_1(t); \quad w_x(p, t) = \varphi_2(t), \\ w_{xxx}(0, t) = \varphi_3(t); \quad w_{xxx}(p, t) = \varphi_4(t).$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (15)$$

где, $v(x, t)$ — новая неизвестная функция. Таким образом, согласно (15) мы приходим к следующей задаче:

Задача \tilde{A} . Найти в области Ω решение $v(x, t)$ уравнения

$$v_{xxxx} + v_{tt} = g(x, t), \quad (16)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v_x(0, t) = v_x(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$v_{xxx}(0, t) = v_{xxx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$v(x, 0) = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (17)$$

$$v_t(x, 0) = \psi_4(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (18)$$

где

$$\psi_3(x) \equiv \psi_1(x) - w(x, 0), \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$\psi_4(x) \equiv \psi_2(x) - w_t(x, 0), \quad 0 \leq x \leq p,$$

согласно (15).

Решение соответствующего однородного уравнения (16), ищем методом Фурье, оно имеет вид

$$v(x, t) = \left[a_0(0)t + b_0(0) + \int_0^t (t - \tau) g_0(\tau) d\tau \right] \frac{1}{\sqrt{p}} + \\ + \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(0) \cos \lambda_n^2 t + b_n(0) \sin \lambda_n^2 t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^t g_n(\tau) \cdot \sin \lambda_n^2 (t - \tau) d\tau \right] \cdot \cos \lambda_n x. \quad (19)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $a_n(0)$, $b_n(0)$ используются условия (17), (18).

$$a_0(0) = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^p \psi_4(x) dx, \quad b_0(0) = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^p \psi_3(x) dx,$$

$$a_n(0) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \psi_3(x) \cos \lambda_n x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n(0) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^p \psi_4(x) \cos \lambda_n x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение задачи представляется в виде (19), где $a_0(0)$, $b_0(0)$, $a_n(0)$, $b_n(0)$ определяются соответственно выше формулами.

Следовательно, мы построили формальное решение задачи \tilde{A} в области Ω , которое даётся формулой (19).

Л е м м а. $\forall t \in [0; T]$ при $n = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$|v_0(t)| \leq C_1; \quad |v_n(t)| \leq [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^2} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0'(t)| \leq C_2; \quad |v_n'(t)| \leq \lambda_n^2 [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + \sqrt{T} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

$$|v_0''(t)| \leq C_3; \quad |v_n''(t)| \leq \lambda_n^4 [|a_n(0)| + |b_n(0)|] + C \|g\|_{C(\bar{\Omega})} + \lambda_n^2 \sqrt{T} \|g_n\|_{L_2(0;T)},$$

где C_1, C_2, C_3 — положительные постоянные.

З а м е ч а н и е. Из леммы следует, что $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д. Вольтерровость краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Тр. межд. конф. 24–28 июня 2003. — Т.1.— Стерлитамак, 2003. — С. 78–82.
2. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. — Киев, 1999.— № 8 (35) — С. 1094–1100.
3. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Докл. АН РУЗ. Ташкент, 2008 — № 1.— С. 10–14.
4. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // Узб. мат. журн. — Ташкент, 2008. — №2. — С. 74–80.
5. Otarova J. A. Volterra-ness of boundary value problem for fourth order equation // The Journal of Arts and Science (Sakarya University Faculty of Arts and Science). — Sakarya, 2007. — №9. — P. 152 — 162.