САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАДИЕВ УСМОН РАМАЗАНОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ТЎРТ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМА ГАМИЛЬТОНИАНИНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2019

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАРИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ШАДИЕВ УСМОН РАМАЗАНОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ТЎРТ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМА ГАМИЛЬТОНИАНИНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.PhD/FM325 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** физика-математика фанлари доктори
Расмий оппонентлар:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** физика-математика фанлари доктори
	Ёдгоров Ғайрат Рўзиевич физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги илмий даражалар берувчи PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университети Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ____________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

А.М.Халхужаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

С.Н.Лақаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар шуни кўрсатадики, тартибланган муҳитларда турғун мураккаб объектлар одатда уларнинг таркибий қисмлари боғланган вақтдаги энергиясини камайтириш имконини берувчи тортишиш кучлари таъсири натижасида вужудга келади. Ўзаро таъсирлашувчи жуфтликларни тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе-Хаббард модели, панжарадаги икки заррачали Шредингер операторларини экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси, панжаравий майдонлар назариясида учрайдиган панжарадаги икки, уч ва тўрт заррачали система гамильтонианларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда панжарадаги ихтиёрий икки, уч ва тўрт заррачали система гамильтонианларига мос Шредингер операторларининг спектрлари система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу операторларнинг спектрларига оид муаммоларни ҳал этиш долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Панжарадаги тўрт заррачали Шредингер операторлари муҳим спектрларини тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: панжарада икки заррачали контакт потенциал билан таъсирлашувчи ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианининг уч заррачали контакт потенциалли қўзғалишлардаги муҳим спектрини тадқиқ этиш; тўрт заррачали система гамиьлтонианига мос Шредингер операторининг хос функциялари учун Фаддеев типидаги тенгламани қуриш; панжарадаги тўрт заррачали системада уч заррачали қисқа таъсирлашувчи потенциалли система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектрини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига, хусусан, панжарадаги икки, уч ва тўрт заррачали система гамильтонианларига мос Шредингер операторларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Панжарадаги тўртта ихтиёрий заррачали система гамильтонианига мос Шредингер оператори муҳим спектрининг жойлашув ўрнини аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди. Математика, физика, амалий математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг назарий физика ва қаттиқ жисмлар физикасига татбиқларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Атом ва молекуляр, қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назариясининг асосий масалалари Шредингер операторларини ўрганишга келтирилади. Бу соҳада олинган натижалар тўғрисида кўплаб маълумотлар М.Рид ва Б.Саймоннинг замонавий математик физиканинг методлари «энциклопедияси» – тўрт жилдлик монографиясида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида физик олимлар Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан ўрганилиб бошланди ва унга оид тадқиқотлар жадал ривожланди.

Норелятивистик квант механикасининг баъзи бир масалаларида А.И.Могильнер томонидан панжарада N - заррачали Шредингер операторини тадқиқ этишда қўзғалиш сифатида икки ва уч заррачали потенциаллар олинади. Евклид фазосида чизиқли операторларнинг спектрал назарияси бўйича Г.М.Жислин, С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев, Х.Цикон, Р.Фрези, В.Кириш, Б.Саймон, Д.Р.Яфаев, В.Хунцикер, А.В.Соболев, С.Винтер, мос равишда панжарадаги уч ва кўп заррачали Шредингер операторларнинг икки заррачали потенциалли (уч заррачали потенциаллар қатнашмаган) ҳолатларининг спектрал хоссаларини ўрганишга Ш.А.Алимов, С.Альбеверио, С.Н.Лакаев, А.Р.Халмухаммедов, Ж.И.Абдуллаев, М.Э.Муминовларнинг қатор илмий ишлари бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг илмий-тадқиқот ишлари режалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади уч ўлчамли панжарада икки ва уч заррачали қисқа таъсирлашувчи потенциаллар билан қўзғалишли ихтиёрий тўрт квант заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектрини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри тузилиши ва жойлашув ўрнини қаралаётган системадаги қисм системаларига мос қисм гамильтонианларининг спектрлари орқали тавсифлаш;

уч ўлчамли панжарадаги икки ва уч заррачали контакт потенциал билан таъсирлашувчи ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос

Шредингер операторининг муҳим спектрини тавсифлаш;

уч ўлчамли панжарадаги уч заррачали контакт тез камаювчи потенциаллар билан таъсирлашувчи ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг спектрал хоссаларини ўрганиш;

тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг хос функциялари учун Фаддеев типидаги тенгламани қуриш.

Тадқиқотнинг объекти уч ўлчамли панжарадаги икки ва уч заррачали қисқа таъсирлашувчи потенциалли ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер оператори.

Тадқиқотнинг предмети уч ўлчамли панжарада ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос тўрт заррачали Шредингер операторларининг спектрал тадқиқотларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, функционал анализ ва чизиқли алгебранинг умумий усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

уч ўлчамли панжарада икки заррачали контакт потенциал билан таъсирлашувчи ихтиёрий тўрт квант заррачали система гамильтониани уч заррачали контакт потенциаллар билан қўзғалишларига мос Шредингер операторининг муҳим спектрига баъзи кесмалар қўшилиши мумкинлиги кўрсатилган;

тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри жойлашув ўрни шу система тўла квазиимпульси қийматларига боғлиқ равишда топилган;

уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри шу системадаги икки ва уч заррачали қисм системаларга мос қисмгамильтонианлар (канал операторлар) спектрларининг бирлашмасидан иборатлиги исботланган;

уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий тўрт заррачали системада (фақат) уч заррачали контакт ва тез камаювчи потенциал ёрдамида таъсирлашувчи система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри канал операторларининг спектрлари бирлашмасидан иборат эканлиги кўрсатилган;

тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг хос функциялари учун Фаддеев типидаги тенглама олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари муҳим спектрнинг структураси ва ўрни ҳақидаги хулосалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлаш ва сонли ҳисоблашларда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, математик физика, функционал анализ ва чизиқли алгебра усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар физикаси ва квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги кўп заррачали система гамильтонианларининг спектрлари билан боғлик масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги ихтиёрий тўрт заррачали системага мос Шредингер операторлари муҳим спектрига оид олинган натижалар асосида:

панжарадаги тўрт заррачали системага мос Шредингер операторининг муҳим спектрини тадқиқ қилиш усуллари QJ130000.2726.01K82 рақамли хорижий грантда (Малайзия технология университети, 2018 йил 19 мартдаги маълумотномаси) интеграл операторлар ва панжарадаги Шредингер операторларининг асосий хоссаларини аниқлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектридан чапда ётувчи чексизта хос қиймат мавжудлигини аниқлаш учун муҳим аҳамият касб этадиган уч заррачали Шредингер оператори хос қийматлари учун Фаддеев типидаги тенгламаларни тавсифлаш имконини берган;

уч ўлчамли панжарада икки заррачали контакт потенциаллар билан таъсирлашувчи ихтиёрий тўрт заррачали системанинг икки ва уч заррачали қисм системаларига мос операторлар (канал операторлар)нинг спектрини таҳлил усуллари Ф4-ФА-Ф079 «Сони сақланмайдиган чегараланган сонли заррачалар системаси гамильтонианлари спектрал таҳлили» мавзусидаги фундаментал лойиҳада уч заррачали дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрини аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 3 июндаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан контакт таъсирлашувчи уч (иккита фермион ва битта бозон) заррачали системага мос дискрет Шредингер оператори муҳим спектри ўрни ва тузилиши аниқ топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 7 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг хажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Дастлабки маълумотлар. Чегараланган ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал хоссалари»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар, баъзи бир таниқли натижаларнинг қисқача шарҳи ҳамда ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг асосий теоремалари баён қилинган.

Диссертациянинг **«Панжарадаги тўрт заррачали система гамильтониани муҳим спектрининг қўзғалишлари ҳақида»** деб номланувчи иккинчи бобида уч ўлчамли панжарада икки заррачали контакт (компакт бўлмаган) потенциал билан таъсирлашувчи тўртта ихтиёрий квант заррачали система гамильтонианининг уч заррачали контакт потенциалли қўзғалиши қаралади. Тўрт заррачали системага мос Шредингер оператори муҳим спектрининг жойлашув ўрни тавсифланади.

$\mathbb{Z}^3$ – уч ўлчамли панжара, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ – $\mathbb{Z}^3$ да аниқланган квадрати билан жамланувчи функцияларнинг Гильберт фазоси бўлсин.

$\mathbb{Z}^3$ панжарада тўртта ихтиёрий квант заррачали системанинг эркин гамильтониани $\hat{H}_0$ $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ – Гильберт фазосида чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида қуйидаги формула бўйича аниқланади.

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} - \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3} - \frac{1}{2m_4}\Delta_{x_4},$$

бунда m_i – i-заррачанинг массаси, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I \otimes I$, $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta \otimes I$ ва $\Delta_{x_4} = I \otimes I \otimes I \otimes \Delta$, I – $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ фазодаги бирлик оператор, $\otimes$ -тензор кўпайтма, Δ – панжарадаги Лапласиан, заррачанинг бир тугундан қўшни тугунга кўчишини тавсифловчи айирмали оператор, яъни

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x+s) - \hat{\psi}(x)], \quad \hat{\psi}(x) \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

бунда $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|$, $s = (s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}) \in \mathbb{Z}^3$.

Тўрт заррачали системадаги i ва j заррачаларнинг контактли таъсирлашувини ифодаловчи операторни $\hat{V}_{ij}$, β,γ ва θ зарралаларнинг контактли таъсирлашувини ифодаловчи операторни $\hat{V}_{\beta\gamma\theta}$ ёки $\hat{V}_{\alpha}$ орқали белгилаймиз.

Координата тасвирида икки ва уч зарралали контакт таъсирлашувга эга ихтиёрий тўрт квант зарралали система гамильтониани $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ фазода қуйидаги формула бўйича аниқланади:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \sum_{i<j} \hat{V}_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4} \hat{V}_{\alpha},$$

бунда $\hat{V}_{ij}$ ва $\hat{V}_{\alpha} \equiv \hat{V}_{\beta\gamma\theta}$ – $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ даги мос равишда $\mu_{ij}\delta_{x_i x_j}$ ва $\mu_{\beta\gamma\theta}\delta_{x_\beta x_\gamma}\delta_{x_\gamma x_\theta}$ га кўпайтириш операторлари

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3,x_4) = \mu_{ij}\delta_{x_i x_j}\hat{\psi}(x_1,x_2,x_3,x_4), \quad 1 \le i < j \le 4,$$

$$(\hat{V}_{\beta\gamma\theta}\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3,x_4) = \mu_{\beta\gamma\theta}\delta_{x_\beta x_\gamma}\delta_{x_\gamma x_\theta}\hat{\psi}(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

$$\beta < \gamma < \theta, \ \{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}.$$

Бу ерда μ_{ij} ва $\mu_{\beta\gamma\theta}$ – i, j ва β,γ,θ зарралаларга мос икки ва уч зарралали таъсир энергиялари, δ_{mn} – эса Кронекер символи.

$\mathbb{T} = (-\pi;\pi]$, $L_2((\mathbb{T}^3)^m)$, $m = 1,2,3,4$ – $(\mathbb{T}^3)^m$ да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функцияларнинг Гильберт фазоси бўлсин.

Таъкидлаб ўтамизки, $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi,\pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$ тўпламдаги қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари $\mathbb{R}^3$ даги $(2\pi\,\mathbb{Z}^1)^3$ модул бўйича амаллар сифатида тушунилади.

$\mathcal{F} : \ell_2((\mathbb{Z}^3)^4) \to L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ стандарт Фурье алмаштириши бўлсин.

Қаралаётган ихтиёрий тўрт зарралали системани тавсифловчи $\hat{H}$ гамильтонианнинг импульс тасвири $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$, $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ да қуйидаги формула бўйича аниқланади

$$H = H_0 - \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4} V_{\alpha}, \quad \beta < \gamma < \theta \quad \{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}.$$

Бу ерда

$$(H_0 g)(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1}^{4} \varepsilon_\alpha(k_\alpha) g(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3,k_4) \in (\mathbb{T}^3)^4, \quad \varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha}\sum_{i=1}^{3}(1 - cosp_i)$$

ва V_{ij}, $1 \le i < j \le 4$ – ўрама (свертка) типидаги интеграл оператор

$$(V_{ij} g)(\mathbf{k}) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3} \int\limits_{(T^3)^4} \delta(k_l - k_l')\delta(k_m - k_m')\delta(k_i + k_j - k_i' - k_j') g(\mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$

ва

$$(V_{\alpha\beta\gamma} g)(\mathbf{k}) = \frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6} \int_{(\mathbb{T}^3)^4} \delta(k_\alpha - k_\alpha')\delta(k_\beta + k_\gamma + k_\theta - k_\beta' - k_\gamma' - k_\theta') g(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'$$

бунда $\{l,m,i,j\}=\{1,2,3,4\}$, $\beta<\gamma<\theta,$ $\{\alpha,\beta,\gamma,\theta\}=\{1,2,3,4\}.$

Операторнинг тўғри интеграл ёйилмасидан фойдаланиб, координаталар системасида тўрт заррачали квазиимпульс $K\in\mathbb{T}^3$ ни киритиб, H операторнинг спектрал хоссаларини ўрганишни $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Гильберт фазосида аниқланган чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар оиласи (тўрт заррачали дискрет Шредингер оператори) $H(K),$ $K\in\mathbb{T}^3$ нинг спектрал хоссаларини ўрганишга келтириш мумкин.

$\hat{U}_s, s\in\mathbb{Z}^3$ орқали $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ Гильберт фазосида қуйидаги формула бўйича аниқланган силжитиш операторини белгилаймиз

$$(\hat{U}_s\hat{\psi})(x_1,x_2,x_3,x_4)=\hat{\psi}(x_1+s,x_2+s,x_3+s,x_4+s),\quad \hat{\psi}\in\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4).$$

$\hat{H}$ гамильтониан $\hat{U}_s, s\in\mathbb{Z}^3$ силжитиш оператори билан ўрин алмашинувчи, яъни ихтиёрий $s\in\mathbb{Z}^3$ учун $\hat{U}_s\hat{H}=\hat{H}\hat{U}_s$ тенглик ўринли бўлади.

$K=k_1+k_2+k_3+k_4-$ тўрт заррачали система тўла квазиимпульси, $F_K=\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in(\mathbb{T}^3)^4; k_1+k_2+k_3+k_4=K\}-$ ўлчами 9 га тенг бўлган кўпхиллик бўлсин.

Фурье алмаштиришидан сўнг $\hat{U}_s, s\in\mathbb{Z}^3$ силжитиш оператори $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ фазода қуйидаги формула бўйича аниқланган $U_s, s\in\mathbb{Z}^3$ операторга ўтади

$$(U_s f)(\mathbf{k})=e^{-i(s,K)}f(\mathbf{k}),\quad f\in L_2((\mathbb{T}^3)^4).$$

$L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ фазони

$$L_2((\mathbb{T}^3)^4)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus L_2(F_K)dK$$

тўғри интегралга ёйиб, $U_s,$ $s\in\mathbb{Z}^3$ операторнинг ушбу

$$U_s=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus U_s(K)dK$$

тўғри интеграл ёйилмасини ҳосил қиламиз, бунда $U_s(K)=e^{-i(s,K)}I$, $I=I_{L_2(F_K)}$ $-$ $L_2(F_K)$ Гильберт фазосидаги бирлик оператор.

$\hat{H}$ гамильтониан $\hat{U}_s, s\in\mathbb{Z}^3$ силжитиш оператори билан ўрин алмашинувчи эканлигидан, H оператор ҳам $U_s, s\in\mathbb{Z}^3$ оператор билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни $U_sH=HU_s,$ $s\in\mathbb{Z}^3.$

Бундан, H оператор ушбу

$$L_2((\mathbb{T}^3)^4)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus L_2(F_K)dK$$

ёйилмага мос

$$H=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus\widetilde{H}(K)dK$$

тўғри интегралга ёйилади.

Бу ерда $\widetilde{H}(K)$ қобиқ оператори $L_2(F_K)$ фазода аниқланган ва $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Гильберт фазосида аниқланган $H(K)$ операторга унитар эквивалент.

Унитарлик қуйидаги унитар алмаштириш орқали амалга оширилади ва қуйида $k_4 \in \mathbb{T}^3$ ўзгарувчини $k_4 = K-(k_1+k_2+k_3)$ тенглик орқали киритамиз

$$u_K : L_2(F_K) \to L_2((\mathbb{T}^3)^3), \quad (u_K g)(k_1,k_2,k_3) = g(k_1,k_2,k_3,K-\sum_{i=1}^{3} k_i).$$

$\hat{H}$ гамильтонианга мос $H(K),\ K \in \mathbb{T}^3$ операторлар оиласи Шредингер оператори деб аталади ва қуйидаги формула бўйича аниқланади

$$H(K) = H_0(K) - \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4} V_\alpha,$$

бунда $H_0(K)$, V_{ij} ва V_α операторлар қуйидаги формулалар орқали аниқланади

$$(H_0(K)f)(k_1,k_2,k_3) = \mathcal{E}_K(k_1,k_2,k_3) f(k_1,k_2,k_3),$$

$$\mathcal{E}_K(k_1,k_2,k_3) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i(k_i) + \varepsilon_4(K-k_1-k_2-k_3), \quad \varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha}\sum_{i=1}^{3}(1-cosp_i)$$

$$(V_{ij}f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3}\int_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_i+k_j-k_i'-k_j')\delta(k_l-k_l') f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_2'dk_3',$$

$$\{i,j,l\} = \{1,2,3\}\ ,$$

$$(V_{i4}f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3}\int_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_l-k_l')\delta(k_m-k_m') f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_2'dk_3',$$

$$l \neq m \neq i,$$

$$(V_{\alpha\beta\gamma}f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{\alpha\beta\gamma}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_\theta-k_\theta') f(k_1',k_2',k_3')dk_1'dk_2'dk_3',$$

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \neq \{1,2,3\},$$

$$(V_{123}f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{123}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} f(k_1',k_2',k_1+k_2+k_3-k_1'-k_2')dk_1'dk_2'.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$a_1 = \{1,2\}$, $a_2 = \{1,3\}$, $a_3 = \{1,4\}$, $a_4 = \{2,3\}$, $a_5 = \{2,4\}$,
$a_6 = \{3,4\}$, $a_7 = \{2,3,4\}$, $a_8 = \{1,3,4\}$, $a_9 = \{1,2,4\}$, $a_{10} = \{1,2,3\}$,
$M_1 = \{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $M_2 = \{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $M_3 = \{\{3\},\{1,2,4\}\}$,
$M_4 = \{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $M_5 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $M_6 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$,
$M_7 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$.

V_{a_α} орқали $a_\alpha = \{i,j\}$ бўлганда V_{ij} операторни, $a_\alpha = \{\beta,\gamma,\theta\}$

бўлганда эса $V_{\beta\gamma\theta}$ операторни белгилаймиз, яъни

$$V_{a_\alpha} = \begin{cases} V_{ij}, & агар \ \ a_\alpha = \{i, j\}, \\ V_{\beta\gamma\theta}, & агар \ \ a_\alpha = \{\beta, \gamma, \theta\}. \end{cases}$$

Таъриф. $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ фазода аниқланган M_j $\left(\{a_i \cup k \cup l\}\right)$ системага мос $H_{M_j}(K) = H_0(K) - \sum\limits_{a_i \in M_j} V_{a_i}$ $\left(\quad H_{a_i}(K) = H_0(K) - V_{a_i} \quad \right)$, $K \in \mathbb{T}^3$ операторни канал оператори деб атаймиз, бунда $\{k, l\} = a_i'$, $a_i \cup a_i' = \{1,2,3,4\}$.

Иккинчи бобнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

Теорема 1. $H(K)$ *операторнинг муҳим спектри*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{i=1}^{7} \sigma(H_{M_i}(K))$$

тўпламдан иборат.

Канал операторларининг спектри

$U_s(a_l) -$ $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ фазода қуйидаги формула бўйича аниқланган оператор бўлсин

$$U_s(a_l) = u_s(a_l) \otimes I(a_l),$$

бу ерда $I(a_l) -$ $L_2((\mathbb{T}^3)^{3-n_l})$ фазонинг бирлик оператори, $n_l -$ a_l' тўплам элементлари сони, $u_s(a_l) -$ $L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l})$ да қуйидаги формула билан аниқланган оператор

$$(u_s(a_l) f)(k_i, \ldots, k_j) = e^{(-s, k_{a_l})} f(k_i, \ldots, k_j),$$

бунда $k_{a_l} = k_i + \ldots + k_j$, $k_i, \ldots, k_j -$ лар a_l тўплам элементларига мос ўзгарувчилар.

$H_{a_l}(K)$ оператор $\{U_s(a_l)\}$, $s \in \mathbb{Z}^3$ унитар операторлар гуруҳи билан ҳар бир $l \in \{1, \ldots, 10\}$да ўрин алмаштириш хоссасига эга, шунинг учун ҳам қуйидаги ёйилма ўринли

$$H_{a_l}(K) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus [I(a_l) \otimes h_{a_l}(k_{a_l}) + E(a_l')] dk_{a_l} dk_j, \{i, j\} = a_l', \quad l = \overline{1,6} \qquad (1)$$

$$H_{a_l}(K) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus [I(a_l) \otimes h_l(K - k_{a_l}) + \varepsilon_\alpha(k_{a_l})] dk_{a_l}, \quad l = \overline{7,10} \qquad (2)$$

бунда $E(a_l') -$ $\varepsilon_i(k_i) + \varepsilon_j(K - k_{a_l} - k_i)$, $\{i, j\} = a_l'$ сонига кўпайтириш оператори, $h_{a_l}(k)$ оператор $L_2(\mathbb{T}^3)^{3-n_l}$ да қуйидаги формула орқали ифодаланади

$$(h_{a_l}(k) f)(p) = [\varepsilon_\alpha(p) + \varepsilon_\beta(k - p)] f(p) - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds, \quad \{\alpha, \beta\} = a_l, \quad l = \overline{1,6},$$

$$(h_l(k)f)(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} f(s,t)dsdt,$$

$$\{\beta,\gamma,\theta\}=a_l,\quad l=\overline{7,10},\quad \beta<\gamma<\theta.$$

Худди шундай мулоҳазалардан қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз[1]:

$$H_{M_l}(K)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus[h(k_{a_l'})+\varepsilon_l(K-k_{a_l'})]dk_{a_l'},\quad a_l'\in M_l \text{ агар } l=\overline{1,4}, \qquad (3)$$

$$h(k_{a_l'})f(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k_{a_l'}-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\theta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,q)ds-$$

$$-\frac{\mu_{\gamma\theta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(p,s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,p+q-s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} f(s,t)dsdt,$$

$$\{\beta,\gamma,\theta\}=a_l,$$

$$H_{M_l}(K)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus[I\otimes h_{a_m}(k_{a_m})+h_{a_m'}(K-k_{a_m'})\otimes I]dk_{a_m}\quad \text{агар}\quad l=\overline{5,7}.$$

Бу ерда

$$h_\alpha(k)f(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k_{a_l'}-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\theta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,q)ds-$$

$$-\frac{\mu_{\gamma\theta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(p,s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(s,p+q-s)ds$$

белгилашлардан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз

$$h(k_{a_l'})=h_\alpha(k)-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} f(s,t)dsdt \quad \text{ёки}\quad h(k_{a_l'})=h_\alpha(k)-\mu_{\beta\gamma\theta}C,$$

$$C=\frac{1}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2} f(s,t)dsdt \qquad (4)$$

бунда $I-$ $L_2(\mathbb{T}^3)$ фазодаги бирлик оператор, бунда $M_l=a_m\cup a_m'$.

Операторлар тензор кўпайтмасининг спектри ҳақидаги теорема[2] ва (1)–(4) тенгликларга кўра қуйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема 2. *Қуйидаги тенгликлар ўринли*

$$\sigma(H_{a_l}(K))=\bigcup_{k_i\in\mathbb{T}^3}\bigcup_{k_j\in\mathbb{T}^3}\{\sigma(h_{a_l}(k_{a_l'}))+\varepsilon_i(k_i)+\varepsilon_j(K-k_i-k_j)\},\ a_l=\{i,j\},$$

$$l=\overline{1,6},$$

$$\sigma(H_{a_l}(K))=\bigcup_{k_i\in\mathbb{T}^3}\{\sigma(h_l(k_i))+\varepsilon_\alpha(k_i)\},\quad a_l=\{\beta,\gamma,\theta\},\quad l=\overline{7,10},$$

---

[1] Муминов М.Э. Теорема Хунцикера-ван Винтера-Жислинадля четырехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Теор. матем. физ. – 2006. – Т. 148. – № 3. – С. 428-443.

[2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов. – М.: Мир. – 1982. – 428 с.

$$\sigma(H_{M_l}(K)) = \bigcup_{k_{a_{l'}} \in \mathbb{T}^3} \{\sigma(h(k_{a_l'})) + \varepsilon_l(K - k_{a_l'})\}, \quad \{a_l', \beta, \gamma, \theta\} = \{1,2,3,4\}, \quad l = \overline{1,4},$$

$$\sigma(H_{M_l}(K)) = \bigcup_{k_{a_m} \in \mathbb{T}^3} \bigcup_{k_{a_m'} \in \mathbb{T}^3} \{\lambda_1 + \lambda_2 : \quad \lambda_1 \in \sigma(h_{a_m}(k_{a_m})), \lambda_2 \in \sigma(h_{a_m'}(K - k_{a_m'}))\},$$

$l = \overline{5,7}.$

Бу ердан қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади

$$\sigma(H_{a_l}(K)) = \sigma_{ess}(H_{a_l}(K)), \quad l = \overline{1,10}, \qquad \sigma(H_{M_l}(K)) = \sigma_{ess}(H_{M_l}(K)), \quad l = \overline{1,7}.$$

Диссертациянинг «**Панжарадаги учта заррачаси ўзаро таъсирлашувчи тўрт заррачали система гамильтонианининг муҳим спектри»** деб номланувчи учинчи бобида уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий тўрт квант заррачали системада (фақат) уч заррачали қисқа туташувчи потенциал ёрдамида таъсирлашувчи система гамильтониани қаралган. Бу гамильтонианнинг муҳим спектри ўрни Фаддеев тенгламаси асосида тавсифланади.

Уч ўлчамли панжарада тўрт заррачали системада (фақат) уч заррачали қисқа туташувчи (контакт ёки тез камаювчи) потенциаллар ёрдамида таъсирлашувчи система гамильтонианига мос Шредингер оператори $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ – $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Гильберт фазосида қуйидаги формула бўйича аниқланади

$$H(K) = H_0(K) - \sum_{\alpha=1}^{4} \mu_\alpha V_\alpha, \tag{5}$$

бунда $H_0(K)$ ва V_α қуйидаги формулалар билан аниқланади

$$(H_0(K) f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_K(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}),$$

$$\varepsilon_K(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i(p_i) + \varepsilon_4(K - p_1 - p_2 - p_3), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$\varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{i=1}^{3} (1 - \cos p_i), \ \alpha \in \{1,2,3,4\},$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_1(p_2 - q_{2,} p_3 - q_3) f(p_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3,$$

$$(V_2 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_2(p_1 - q_{1,} p_3 - q_3) f(q_1, p_2, q_3) dq_1 dq_3, \tag{6}$$

$$(V_3 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_3(p_1 - q_{1,} p_2 - q_2) f(q_1, q_2, p_3) dq_1 dq_2,$$

$$(V_4 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_4(p_1 - q_{1,} p_2 - q_2) f(q_1, q_2, p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2) dq_1 dq_2.$$

$\upsilon_\alpha(\cdot) \equiv 1$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ бўлсин. У ҳолда (5) ва (6) формулалар билан аниқланган $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ – тўрт заррачали системада (фақат) уч заррачали контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи система гамильтонианига мос Шредингер операторини тавсифлайди.

$H_\alpha(K) = H_0(K) - \mu_\alpha V_\alpha$ бўлсин. $H_\alpha(K)$ оператор $\{\alpha\}$, $\{\beta,\gamma,\theta\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}$ система гамильтонианига мос канал оператори дейилади.

$A^{1/2}$ оператор орқали $A \geq 0$ операторнинг мусбат квадрат илдизини, $\sigma(A)$ ва $\sigma_{ess}(A)$ орқали эса A операторнинг мос равишда спектри ва муҳим спектрини белгилаймиз.

Таъкидлаб ўтамизки, V_α – мусбат оператор ҳамда $V_\alpha^{1/2} = V_\alpha$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ тенглик ўринли бўлади, яъни V_α – проекцияловчи оператор. Бундан $\mu_\alpha V_\alpha$ операторнинг мусбат квадрат илдизи $\sqrt{\mu_\alpha}\, V_\alpha$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ операторга тенг бўлади.

$L_2^{(4)}((\mathbb{T}^3)^3) = L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Гильберт фазосида қуйидаги операторни аниқлаймиз

$$\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z),\ z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)),$$

бунда $\mathbb{C}$ – комплекс текислик,

$$\mathbf{L}(K,z) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_1\mu_2}V_1R_0V_2 & \sqrt{\mu_1\mu_3}V_1R_0V_3 & \sqrt{\mu_1\mu_4}V_1R_0V_4 \\ \sqrt{\mu_2\mu_1}V_2R_0V_1 & 0 & \sqrt{\mu_2\mu_3}V_2R_0V_3 & \sqrt{\mu_2\mu_4}V_2R_0V_4 \\ \sqrt{\mu_3\mu_1}V_3R_0V_1 & \sqrt{\mu_3\mu_2}V_3R_0V_2 & 0 & \sqrt{\mu_3\mu_4}V_3R_0V_4 \\ \sqrt{\mu_4\mu_1}V_4R_0V_1 & \sqrt{\mu_4\mu_2}V_4R_0V_2 & \sqrt{\mu_4\mu_3}V_4R_0V_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}(K,z) = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 \end{pmatrix},$$

бу ерда

$$R_0 := R_0(K,z) = (H_0(K) - zI)^{-1}, W_\alpha = W_\alpha(K,z) := (I - \mu_\alpha V_\alpha R_0(K,z)V_\alpha)^{-1}.$$

Лемма 1. *Ихтиёрий* $K \in \mathbb{T}^3$ *ва* $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *да* $\mathbf{A}(K,z)$ *компакт оператор бўлади.*

Лемма 2. $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *сони* $H(K)$ *операторнинг хос қиймати бўлиши учун 1 сони* $\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z)$ *операторнинг хос қиймати бўлиши зарур ва етарли.*

Таъкидлаш жоизки,

$$[m_K, M_K] \subset \sigma_{ess}(H_\alpha(K)),$$

бунда

$$m_K = \min_{\mathbf{p} \in (\mathbb{T}^3)^3} \varepsilon_K(\mathbf{p}),\quad M_K = \max_{\mathbf{p} \in (\mathbb{T}^3)^3} \varepsilon_K(\mathbf{p}). \tag{7}$$

Эслатма 1. $\mathbf{A}(K:z)\varphi = \varphi$ *тенглама уч заррачали узлуксиз Шредингер* *оператори учун олинган Фаддеев тенгламасининг аналогидир.*

Теорема 3. *Ихтиёрий* $K \in \mathbb{T}^3$ *учун* $H(K)$ *операторнинг муҳим спектри* $\sigma_{ess}(H(K))$ *канал операторларнинг спектрлари бирлашмалари билан устма-уст тушади, яъни*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)).$$

$\mu_\alpha = 1,\ \alpha \in \{1,2,3,4\}$ бўлсин. У ҳолда (5) ва (6) формулалар билан аниқланган $H(K),\quad K \in \mathbb{T}^3$ – тўрт заррачали системада (фақат) уч заррачали тез камаювчи потенциал ёрдамида таъсирлашувчи система гамильтонианига мос Шредингер операторини тавсифлайди.

$H_\alpha(K) = H_0(K) - V_\alpha$ бўлсин. $H_\alpha(K)$ оператор $\{\alpha\}$, $\{\beta,\gamma,\theta\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}$ система гамильтонианига мос канал оператори дейилади.

$H_0(K)$ оператор $\varepsilon_K(\cdot)$ функцияга кўпайтириш оператори бўлганлиги учун

$$\sigma(H_0(K)) = [m_K, M_K]$$

тенглик ўринли, бунда m_K, M_K лар (7) тенглик билан аниқланади.

Ушбу $[m_K, M_K] \subset \sigma_{ess}(H_\alpha(K))$ муносабатга кўра ихтиёрий $z \notin \sigma(H_\alpha(K))$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ ларда $R_0(K,z) = (H_0(K) - zI)^{-1}$ – $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ фазода аниқланган ва чегараланган оператор бўлади, бунда I – оператор $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ фазодаги бирлик оператор.

Таъкидлаб ўтамизки, V_α мусбат оператор. Шунинг учун фақат ва фақат $z \notin \sigma(H_\alpha(K))$ бўлганда $W_\alpha := W_\alpha(K,z) = (I - V_\alpha^{1/2} R_0 V_\alpha^{1/2})^{-1}$ оператор мавжуд, бунда $R_0 := R_0(K,z)$.

$L_2^{(4)}((\mathbb{T}^3)^3) = L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ Гильберт фазосида ушбу

$$\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)),$$ матрицавий

операторни аниқлаймиз, бунда

$$\mathbf{L}(K,z) = \begin{pmatrix} 0 & V_1^{1/2}R_0V_2^{1/2} & V_1^{1/2}R_0V_3^{1/2} & V_1^{1/2}R_0V_4^{1/2} \\ V_2^{1/2}R_0V_1^{1/2} & 0 & V_2^{1/2}R_0V_3^{1/2} & V_2^{1/2}R_0V_4^{1/2} \\ V_3^{1/2}R_0V_1^{1/2} & V_3^{1/2}R_0V_2^{1/2} & 0 & V_3^{1/2}R_0V_4^{1/2} \\ V_4^{1/2}R_0V_1^{1/2} & V_4^{1/2}R_0V_2^{1/2} & V_4^{1/2}R_0V_3^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}(K,z) = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 \end{pmatrix}.$$

Қуйида келтириладиган тасдиқлар диссертация учинчи бобининг асосий натижаларини ташкил этади.

Лемма 3. $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *сони* $H(K)$ *операторнинг хос қиймати бўлиши учун 1 сони* $\mathbf{A}(K,z)$ *компакт операторнинг хос қиймати бўлиши зарур ва етарли.*

Эслатма 2. $\mathbf{A}(K,z)\phi = \phi$ тенглама уч заррачали узлуксиз Шредингер оператори учун олинган Фаддеев тенгламасининг аналогидир.

Теорема 4. Ихтиёрий $K \in \mathbb{T}^3$ *учун* $H(K)$ *операторнинг муҳим спектри* $\sigma_{ess}(H(K))$ *, канал операторларининг спектрлари бирлашмаси билан устма-уст тушади, яъни*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)).$$

ХУЛОСА

Ушбу диссертация панжарадаги ихтиёрий тўрт квант заррачали система гамильтонианининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг олинган асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри шу системадаги барча икки ва уч заррачали қисм система гамильтонианларига мос канал операторларининг спектрлари бирлашмасидан иборат эканлиги исботланган.
2. Тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг хос функциялари учун Фаддеев типидаги тенглама олинган.
3. Тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри жойлашув ўрни система тўла квазиимпульси қийматларига боғлиқ равишда топилган.
4. Уч ўлчамли панжарадаги ихтиёрий иккита заррачаси ўзаро контакт таъсирлашувчи тўрт заррачали система гамильтониани уч заррачали контакт потенциаллар таъсири билан қўзғатилганда унинг муҳим спектрига баъзи кесмалар қўшилиши, муҳим спектрдаги қисм системаларга мос қисмгамильтонианларнинг спектрлари эса уч заррачали қисм система бўлмаганда ўзгармаслиги кўрсатилган.
5. Уч ўлчамли панжарадаги қаралаётган (фақат) уч заррачали тез камаювчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи тўрт заррачали система гамильтонианига мос Шредингер операторининг муҳим спектри канал операторларнинг спектрлари бирлашмасидан иборат эканлиги кўрсатилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ШАДИЕВ УСМОН РАМАЗАНОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЁХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Самарканд – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2019.3.PhD/FM325

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** доктор физико-математических наук
	Ёдгоров Гайрат Рузиевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(реестр протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

С.Н.Лакаев

Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, академик

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые в мировом уровне, показывают, что всюду в физике устойчивые сложные объекты обычно образуются в результате действия сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить энергию при их связывании. Модель Бозе-Хаббарда, используемая для описания взаимодействующих пар, т.е. оператор Шредингера на решетке, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух, трех и четырех частиц на решетке, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также решетчатой теории поля, является одним из приоритетных направлений.

В настоящее время, поскольку спектры операторов Шредингера, соответсвующих гамильтонианам систем двух, трех и четырех произвольных частиц на решетке являются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса системы, важную роль играет решение проблем, относящихся к исследованию спектров этих операторов. Одним из важных вопросов является исследование существенных спектров четырехчастичных операторов Шредингера на решетке. В связи с этими целевыми научными исследованиями являются: исследование существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц с парными контактными потенциалами взаимодействия на решетке, при возмущении трехчастичными контактными потенциалами; получения уравнения типа Фаддеева для собственных функций оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх частиц; изучучение спектральных свойств оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх частиц с трехчастичными короткодействующими потенциалами взаимодействия на решетке.

В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, ученые нашей страны обратили большое внимание изучению операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух, трех и четырех частиц на решетке. Значительные результаты были достигнуты по определению местоположения существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх произвольных частиц на решетке. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математики, физики, прикладной математики обозначено основной задачей и направлением деятельности[1]. При исполнении этого постановления важную роль играет развитие спектральной теории самосопряженных операторов и ее приложения в

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан»

теоретической физике, физике твердого тела.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основные задачи атомной и молекулярной физики, квантовой теории поля, физики твердого тела приводятся к изучению операторов Шредингера. Наиболее полный обзор результатов по этой области содержится в энциклопедии современные методы математической физики – четырехтомной монографии М. Рида и Б. Саймона. Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С. Маттисом, А.И.Могильнером и после чего исследования бурно развились. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. А именно, следует сначала изучить одночастичные операторы, а затем двух, трех, четырех и т.д. многочастичные операторы Шредингера.

В некоторых задачах нерелятивистской квантовой механики приходится исследовать N- частичный оператор Шредингера на решетке, где в качестве возмущений А.И.Могильнером берутся двухчастичные и трехчастичные потенциалы. Ряд работ Г.М.Жислина, С.П. Меркурьева, Л.Д.Фаддеева, Х.Цикона, Р.Фрези, В.Кириша, Б.Саймона, Д.Р. Яфаева, В. Хунцикера, А.В.Соболева, С. Винтера по спектральной теории операторов Шредингера посвящены изучению спектральных свойств трехчастичных и многочастичных операторов Шредингера с парными потенциалами (при отсутствии трехчастичного потенциала) в евклидовом пространстве и Ш.А.Алимова, С.Альбеверио, С. Н.Лакаева, А.Р.Халмухаммедова, Ж.И.Абдуллаева, М.Э.Муминова соответственно на решетке.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является изучение существеного спектра четырехчастичного оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных квантовых частиц с двухчастичными, трехчастичными короткодействующими потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке.

Задачи исследования:

описать структуру и местоположение существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц, через подгамильтонианы соответствующих подсистем рассматриваемой системы на трехмерной решетке;

описать существенный спектр оператора Шредингера соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц с парными и трехчастичными контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке;

изучить спектральные свойства оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц с трехчастичными быстро убывающими контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке;

получить уравнение типа Фаддеева для собственных функций оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх частиц.

Объект исследования – оператор Шредингера, соответствующий гамильтониану системы четырех произвольных частиц с двухчастичными и трехчастичными короткодействующими потенциалами на трехмерной решетке.

Предмет исследования – спектральный анализ четырехчастичного оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц на трехмерной решетке.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, математической физики, функционального анализа и линейной алгебры.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

показано, что к спектру оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных квантовых частиц с двухчастичными контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке при возмущении трёхчастичными контактными потенциалами прибавляются некоторые отрезки;

найдено местоположение существенного спектра оператора Шредингера, в зависимости от значений полного квазиимпульса, соответствующего гамильтониану системы четырех частиц;

доказано, что существенный спектр оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц состоит из объединения спектров подгамильтонианов (операторов каналов) соответствующих подсистем двух и трех частиц на трехмерной решетке;

показано, что существенный спектр оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц (только) с трехчастичными быстро убывающим потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке, состоит из объединения спектров операторов каналов;

получено уравнение типа Фаддеева для собственных функций оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх частиц.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения выводов о структуре и местоположении существенного спектра при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционального анализа и линейной алгебры, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решении задач, связанных со спектром гамильтонианов систем многих частиц на решетке.

Практическое значение данной диссертационной работы определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в сферах физики твердого тела и квантовой механики.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов, относящихся к существенным спектрам операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем четырех произвольных частиц на решетке сделаны следующие внедрения:

методы исследования существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе четырех частиц на решетке использованы для определения основных свойств интегральных операторов и операторов Шредингера в исследованиях зарубежного гранта QJ130000.2726.01K82 (Технологический университет Малайзии, справка от 19 марта 2018 г.). Применение этих научных результатов дало возможность получить уравнение типа Фаддеева для собственных значений трехчастичного оператора Шредингера, которое сыграло важную роль в доказательстве существования бесконечных собственных значений, лежащих левее существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке;

способы исследования спектров операторов (канальных операторов), соответствующих подсистем двух и трех частиц системы четырех произвольных частиц с двухчастичными контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке использованы при выполнении фундаментального гранта Ф4-ФА-Ф079 «Спектральный анализ гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц» (Справка министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 03.06.2019 г.). Применяя эти методы точно найдены структура и местоположение существенного спектра дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе трех частиц (два фермиона и один бозон) с парными контактными взаимодействиями на одномерной и двумерной решетках.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 международных и 7 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов иследования. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 4 в научных изданиях, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 2- в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения. Спектральные свойства ограниченных самосопряженных операторов»**, приведены необходимые предварительные сведения, краткий обзор некоторых известных результатов, а также основные теоремы спектральной теории и теории возмущенных самосопряженных операторов, которые используются при изложении основных результатов диссертации.

Во второй главе диссертации, названной **«О возмущениях существенного спектра гамильтониана системы четырех частиц на решетке»**, рассматривается гамильтониан системы четырех произвольных квантовых частиц с двухчастичными контактными (некомпактными) потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке при возмущении трёхчастичными контактными потенциалами. Описано местоположение существенного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе четырех частиц.

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трёхмерная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $\mathbb{Z}^3$.

Рассмотрим свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ системы четырех произвольных квантовых частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$, который определяется как ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ и действует по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} - \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3} - \frac{1}{2m_4}\Delta_{x_4},$$

где m_i – масса i– й частицы, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I \otimes I \otimes I,\ \Delta_{x_2} = I \otimes \Delta \otimes I \otimes I,$ $\Delta_{x_3} = I \otimes I \otimes \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_4} = I \otimes I \otimes I \otimes \Delta,$ I– тождественный оператор в $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ и $\otimes$ - тензорное произведение, Δ– решетчатый Лапласиан есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1}[\hat{\psi}(x+s) - \hat{\psi}(x)], \quad \hat{\psi}(x) \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|,\ s = (s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}) \in \mathbb{Z}^3$.

Обозначим через $\hat{V}_{ij}$ потенциал контактного взаимодействия i-й и j-й частиц, а через $\hat{V}_{\beta\gamma\theta}$ или $\hat{V}_\alpha$- потенциал контактного взаимодействия β, γ и θ-й частиц системы четырех частиц.

В координатном представлении гамильтониан системы четырех произвольных квантовых частиц с двухчастичными и трёхчастичными контактными взаимодействиями действует в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ по формуле:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \sum_{i<j}\hat{V}_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4}\hat{V}_\alpha,$$

где $\hat{V}_{ij}$ и $\hat{V}_\alpha = \hat{V}_{\beta\gamma\theta}$ – операторы умножения соответственно на $\mu_{ij}\delta_{x_i x_j}$ и $\mu_{\beta\gamma\theta}\delta_{x_\beta x_\gamma}\delta_{x_\gamma x_\theta}$ в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$:

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mu_{ij}\delta_{x_i x_j}\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad 1 \le i < j \le 4,$$

$$(\hat{V}_{\beta\gamma\theta}\hat{\psi})(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mu_{\beta\gamma\theta}\delta_{x_\beta x_\gamma}\delta_{x_\gamma x_\theta}\hat{\psi}(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$\beta < \gamma < \theta, \{\alpha, \beta, \gamma, \theta\} = \{1,2,3,4\}.$$

Здесь μ_{ij} и $\mu_{\beta\gamma\theta}$ – энергии двухчастичных и трехчастичных взаимодействий, соответственно частиц i, j и $\beta, \gamma,\ \theta$ а δ_{mn} – символ Кронекера.

Пусть $L_2((\mathbb{T}^3)^m), m = 1,2,3,4$– гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^m,\ \mathbb{T} = (-\pi; \pi]$.

Заметим, что всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $\mathbb{T}^3 \subset \mathbb{R}^3$ понимаются как операции на $\mathbb{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z}^1)^3$, где $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

Пусть $\mathcal{F} : \ell_2((\mathbb{Z}^3)^4) \to L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ стандартное преобразование Фурье.

Импульсное представление $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$ рассматриваемого гамильтониана $\hat{H}$, описывающего систему четырех произвольных квантовых частиц, действует в $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ по формуле:

$$H = H_0 - \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4} V_\alpha, \quad \beta < \gamma < \theta, \quad \{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}.$$

Здесь

$$(H_0 g)(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1}^{4} \varepsilon_\alpha(k_\alpha) g(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3,k_4) \in (\mathbb{T}^3)^4, \quad \varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{i=1}^{3} (1 - cosp_i)$$

и V_{ij}, $1 \le i < j \le 4$, $V_{\beta\gamma\theta}$ – интегральные операторы типа свертки:

$$(V_{ij} g)(\mathbf{k}) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3} \int_{(T^3)^4} \delta(k_l - k_l')\delta(k_m - k_m')\delta(k_i + k_j - k_i' - k_j') g(\mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$

$\{l,m,i,j\} = \{1,2,3,4\}$,

и

$$(V_{\alpha\beta\gamma} g)(\mathbf{k}) = \frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6} \int_{(\mathbb{T}^3)^4} \delta(k_\alpha - k_\alpha')\delta(k_\beta + k_\gamma + k_\theta - k_\beta' - k_\gamma' - k_\theta') g(\mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$

где $\beta < \gamma < \theta$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}$.

Используя разложение в прямой операторный интеграл, вводя четырехчастичный квазиимпульс $K \in \mathbb{T}^3$ относительно системе координат, изучение спектральных свойств оператора H, можно свести к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ (четырехчастичных дискретных операторов Шредингера), действующих в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$.

Обозначим через $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}^3$, оператор сдвига, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^4)$ по формуле

$$(\hat{U}_s \hat{\psi})(x_1,x_2,x_3,x_4) = \hat{\psi}(x_1+s, x_2+s, x_3+s, x_4+s), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^4).$$

Гамильтониан $\hat{H}$ коммутирует с оператором сдвига $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}^3$, т.е. для любого $s \in \mathbb{Z}^3$ имеет место равенство $\hat{U}_s \hat{H} = \hat{H} \hat{U}_s$.

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ – полный квазиимпульс системы четырех частиц, $F_K = \{(k_1,k_2,k_3,k_4) \in (\mathbb{T}^3)^4; k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = K\}$ – многообразие размерности 9.

После преобразования Фурье оператор сдвига $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}^3$ переходит в оператор $U_s, s \in \mathbb{Z}^3$, действующий в пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ по формуле

$$(U_s f)(\mathbf{k}) = e^{-i(s,K)} f(\mathbf{k}), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^3)^4).$$

Разлагая пространство $L_2((\mathbb{T}^3)^4)$ в прямой интеграл

$$L_2((\mathbb{T}^3)^4) = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus L_2(F_K) dK$$

получим разложение оператора U_s, $s \in \mathbb{Z}^3$ в прямой интеграл

$$U_s = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus U_s(K)dK,$$

где $U_s(K) = e^{-i(s,K)}I$, $I = I_{L_2(F_K)}$ означает тождественный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(F_K)$.

Так как гамильтониан $\hat{H}$ коммутирует с оператором сдвига, $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}^3$, оператор H коммутирует с оператором $U_s, s \in \mathbb{Z}^3$, т.е. $U_s H = HU_s$, $s \in \mathbb{Z}^3$.

Следовательно, оператор H разлагается в прямой интеграл

$$H = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus \tilde{H}(K)dK,$$

соответствующий разложению

$$L_2((\mathbb{T}^3)^4) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \oplus L_2(F_K)dK.$$

Здесь слойный оператор $\tilde{H}(K)$ действует в $L_2(F_K)$ и унитарно эквивалентен оператору $H(K)$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$.

Унитарность осуществляется с помощью унитарного преобразования и в дальнейшем в качестве переменной $k_4 \in \mathbb{T}^3$ будем принимать $k_4 = K - (k_1 + k_2 + k_3)$

$$u_K : L_2(F_K) \to L_2((\mathbb{T}^3)^3), \quad (u_K g)(k_1, k_2, k_3) = g(k_1, k_2, k_3, K - \sum_{i=1}^{3} k_i).$$

Семейство операторов $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, называется оператором Шредингера, соответствующего гамильтониана $\hat{H}$ и определяется в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - \sum_{i<j} V_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{4} V_\alpha,$$

где операторы $H_0(K)$, V_{ij} и V_α определяются по формулам

$$(H_0(K)f)(k_1, k_2, k_3) = \mathcal{E}_K(k_1, k_2, k_3) f(k_1, k_2, k_3),$$

$$\mathcal{E}_K(k_1, k_2, k_3) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i(k_i) + \varepsilon_4(K - k_1 - k_2 - k_3), \quad \varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{i=1}^{3} (1 - cosp_i)$$

$$(V_{ij} f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_i + k_j - k_i' - k_j') \delta(k_l - k_l') f(k_1', k_2', k_3') dk_1' dk_2' dk_3',$$

$$\{i, j, l\} = \{1,2,3\}$$

$$(V_{i4} f)(k_1, k_2, k_3) = \frac{\mu_{ij}}{(2\pi)^3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_l - k_l') \delta(k_m - k_m') f(k_1', k_2', k_3') dk_1' dk_2' dk_3',$$

$$l \neq m \neq i,$$

$$(V_{\alpha\beta\gamma} f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{\alpha\beta\gamma}}{(2\pi)^6} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^3} \delta(k_\theta - k'_\theta) f(k'_1,k'_2,k'_3)dk'_1dk'_2dk'_3,$$

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \neq \{1,2,3\},$$

$$(V_{123} f)(k_1,k_2,k_3) = \frac{\mu_{123}}{(2\pi)^6} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} f(k'_1,k'_2,k_1+k_2+k_3-k'_1-k'_2)dk'_1dk'_2.$$

Введем следующие обозначения

$a_1=\{1,2\}$, $a_2=\{1,3\}$, $a_3=\{1,4\}$, $a_4=\{2,3\}$, $a_5=\{2,4\}$,
$a_6=\{3,4\}$, $a_7=\{2,3,4\}$, $a_8=\{1,3,4\}$, $a_9=\{1,2,4\}$, $a_{10}=\{1,2,3\}$,
$M_1=\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $M_2=\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $M_3=\{\{3\},\{1,2,4\}\}$,
$M_4=\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $M_5=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $M_6=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$,
$M_7=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.

Обозначим через V_{a_α} оператор V_{ij} при $a_\alpha=\{i,j\}$ и $V_{\beta\gamma\theta}$ при $a_\alpha=\{\beta,\gamma,\theta\}$, т.е.

$$V_{a_\alpha} = \begin{cases} V_{ij}, & при \quad a_\alpha=\{i,j\}, \\ V_{\beta\gamma\theta}, & при \quad a_\alpha=\{\beta,\gamma,\theta\}. \end{cases}$$

Определение. Оператор $H_{M_j}(K) = H_0(K) - \sum\limits_{a_i\in M_j} V_{a_i}$ $(H_{a_i}(K)=H_0(K)-V_{a_i})$, $K\in\mathbb{T}^3$ действующий в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ назовем канальным оператором, соответствующим системе M_j $(\{a_i\cup k\cup l\})$, где $\{k,l\}=a'_i$, $a_i\cup a'_i=\{1,2,3,4\}$.

Основным результатом главы 2 является

Теорема 1. *Существенный спектр оператора* $H(K)$ *есть множество*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{i=1}^{7} \sigma(H_{M_i}(K)).$$

Спектр операторов каналов

Пусть $U_s(a_l)-$ оператор, действующий в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ по формуле

$$U_s(a_l)=u_s(a_l)\otimes I(a_l),$$

здесь $I(a_l)-$ единичный оператор пространства $L_2((\mathbb{T}^3)^{3-n_l})$, n_l- число элементов множества a'_l, $u_s(a_l)-$ оператор в $L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l})$, определенный по формуле

$$(u_s(a_l)f)(k_i,\ldots,k_j) = e^{(-s,k_{a_l})} f(k_i,\ldots,k_j),$$

где $k_{a_l}=k_i+\ldots+k_j$, $k_i,\ldots,k_j-$ переменные, соответствующие элементам множества a_l.

Оператор $H_{a_l}(K)$ коммутирует с группой унитарных операторов $\{U_s(a_l)\}$, $s\in\mathbb{Z}^3$ при каждом $l\in\{1,\ldots,10\}$, поэтому имеет место разложение

$$H_{a_l}(K)=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\oplus\int\limits_{\mathbb{T}^3}\oplus[I(a_l)\otimes h_{a_l}(k_{a_l})+E(a_l')]dk_{a_l}dk_j,\{i,j\}=a_l',\quad l=\overline{1,6} \qquad (1)$$

$$H_{a_l}(K)=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\oplus[I(a_l)\otimes h_l(K-k_{a_l})+\varepsilon_\alpha(k_{a_l})]dk_{a_l},\quad l=\overline{7,10} \qquad (2)$$

где $E(a_l')-$ оператор умножения на число $\varepsilon_i(k_i)+\varepsilon_j(K-k_{a_l}-k_i),\ \{i,j\}=a_l'$ оператор $h_{a_l}(k)$ действует в $L_2(\mathbb{T}^3)^{3-n_l}$ по формуле

$$(h_{a_l}(k)f)(p)=[\varepsilon_\alpha(p)+\varepsilon_\beta(k-p)]f(p)-\frac{\mu_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3}f(s)ds,\quad \{\alpha,\beta\}=a_l,\ \ l=\overline{1,6},$$

$$(h_l(k)f)(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int_{(\mathbb{T}^3)^2}f(s,t)dsdt,$$

$\{\beta,\gamma,\theta\}=a_l,\quad l=\overline{7,10},\quad \beta<\gamma<\theta.$

Рассуждая аналогично, получим следующие разложения[1]:

$$H_{M_l}(K)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus[h(k_{a_l'})+\varepsilon_l(K-k_{a_l'})]dk_{a_l'},\quad a_l'\in M_l\ \ при\ \ l=\overline{1,4}, \qquad (3)$$

$$h(k_{a_l'})f(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k_{a_l'}-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\theta}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(s,q)ds-$$

$$-\frac{\mu_{\gamma\theta}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(p,s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(s,p+q-s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2}f(s,t)dsdt,$$

$$\{\beta,\gamma,\theta\}=a_l,$$

$$H_{M_l}(K)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus[I\otimes h_{a_m}(k_{a_m})+h_{a_m'}(K-k_{a_m'})\otimes I]dk_{a_m}\quad при\quad l=\overline{5,7}.$$

Здесь используя обозначения

$$h_\alpha(k)f(p,q)=[\varepsilon_\beta(p)+\varepsilon_\gamma(q)+\varepsilon_\theta(k_{a_l'}-p-q)]f(p,q)-\frac{\mu_{\beta\theta}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(s,q)ds-$$

$$-\frac{\mu_{\gamma\theta}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(p,s)ds-\frac{\mu_{\beta\gamma}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}f(s,p+q-s)ds$$

получим

$$h(k_{a_l'})=h_\alpha(k)-\frac{\mu_{\beta\gamma\theta}}{(2\pi)^6}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2}f(s,t)dsdt\ \ \text{или}\ \ h(k_{a_l'})=h_\alpha(k)-\mu_{\beta\gamma\theta}C,$$

$$C=\frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2}f(s,t)dsdt \qquad (4)$$

где $I-$ единичный оператор пространства $L_2(\mathbb{T}^3)$, где $M_l=a_m\cup a_m'$.

---

[1] Муминов М.Э. Теорема Хунцикера-ван Винтера-Жислина четырехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Теор. матем. физ. – 2006. – Т. 148. – № 3. – С. 428-443.

В силу теоремы о спектре тензорных произведений операторов[1] и по (1)–(4) справедлива

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$\sigma(H_{a_l}(K)) = \bigcup_{k_i\in\mathbb{T}^3}\bigcup_{k_j\in\mathbb{T}^3}\{\sigma(h_{a_l}(k_{a_l'}))+\varepsilon_i(k_i)+\varepsilon_j(K-k_i-k_j)\},\ a_l=\{i,j\},$$

$l=\overline{1,6},$

$$\sigma(H_{a_l}(K)) = \bigcup_{k_i\in\mathbb{T}^3}\{\sigma(h_l(k_i))+\varepsilon_\alpha(k_i)\},\quad a_l=\{\beta,\gamma,\theta\},\quad l=\overline{7,10},$$

$$\sigma(H_{M_l}(K)) = \bigcup_{k_{a_{l'}}\in\mathbb{T}^3}\{\sigma(h(k_{a_l'}))+\varepsilon_l(K-k_{a_l'})\},\quad \{a_l',\beta,\gamma,\theta\}=\{1,2,3,4\},\quad l=\overline{1,4},$$

$$\sigma(H_{M_l}(K)) = \bigcup_{k_{a_m}\in\mathbb{T}^3}\bigcup_{k_{a_m'}\in\mathbb{T}^3}\{\lambda_1+\lambda_2:\ \ \lambda_1\in\sigma(h_{a_m}(k_{a_m})),\lambda_2\in\sigma(h_{a_m'}(K-k_{a_m'}))\},$$

$l=\overline{5,7}.$

Отсюда следует, что

$$\sigma(H_{a_l}(K))=\sigma_{ess}(H_{a_l}(K)),\quad l=\overline{1,10},$$

$\sigma(H_{M_l}(K))=\sigma_{ess}(H_{M_l}(K)),\quad l=\overline{1,7}$

В третьей главе диссертации, названной **«Существенный спектр гамильтониана системы четырех частиц с трехчастичными взаимодействиями на решетке»**, рассмотрен гамильтониан системы четырех произвольных квантовых частиц (только) с трехчастичными короткодействующими потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке. Описано местоположение существенного спектра этого гамильтониана на основании уравнения Фаддеева.

Операторы Шредингера $H(K)$, $K\in\mathbb{T}^3$, соответствующие гамильтониану системы четырех частиц (только) с трёхчастичными короткодействующими (контактными или быстро убывающими) потенциалами взаимодействия, действуют в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ по формуле

$$H(K)=H_0(K)-\sum_{\alpha=1}^{4}\mu_\alpha V_\alpha, \tag{5}$$

где операторы $H_0(K)$ и V_α определяются по формулам

$$(H_0(K)f)(\mathbf{p})=\varepsilon_K(\mathbf{p})f(\mathbf{p}),$$

$$\varepsilon_K(\mathbf{p})=\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i(p_i)+\varepsilon_4(K-p_1-p_2-p_3),\quad \mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{T}^3,$$

$$\varepsilon_\alpha(p)=\frac{1}{m_\alpha}\sum_{i=1}^{3}(1-\cos p_i),\ \alpha\in\{1,2,3,4\},$$

---

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов. – М.: Мир. – 1982. – 428 с.

$$(V_1 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_1(p_2 - q_{2,} p_3 - q_3) f(p_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3,$$

$$(V_2 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_2(p_1 - q_{1,} p_3 - q_3) f(q_1, p_2, q_3) dq_1 dq_3, \qquad (6)$$

$$(V_3 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_3(p_1 - q_{1,} p_2 - q_2) f(q_1, q_2, p_3) dq_1 dq_2,$$

$$(V_4 f)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^2} \upsilon_4(p_1 - q_{1,} p_2 - q_2) f(q_1, q_2, p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2) dq_1 dq_2.$$

Пусть $\upsilon_\alpha(\cdot) \equiv 1, \ \alpha \in \{1,2,3,4\}$. Тогда $H(K), \ K \in \mathbb{T}^3$, определенные формулами (5) и (6) описывает оператора Шредингера, соответствующий гамильтониану системы четырёх частиц (только) с трехчастичным контактным потенциалом взаимодействия.

Положим, $H_\alpha(K) = H_0(K) - \mu_\alpha V_\alpha$. Оператор $H_\alpha(K)$ называется оператором канала соответствующий гамильтониану системы $\{\alpha\}, \ \{\beta,\gamma,\theta\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}$.

Обозначим через $A^{1/2}$ положительный квадратный корень оператора $A \geq 0$, а через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$, соответственно спектр и существенный спектр оператора A . Отметим , что оператор V_α – является положительным оператором и имеет место равенство $V_\alpha^{1/2} = V_\alpha, \alpha \in \{1,2,3,4\}$, т.е. V_α – проектор. Следовательно, положительный квадратный корень оператора $\mu_\alpha V_\alpha$ равен оператору $\sqrt{\mu_\alpha} V_\alpha$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$.

Определим оператор

$$\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z), \ z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)),$$

в гильбертовом пространстве

$$L_2^{(4)}((\mathbb{T}^3)^3) = L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3),$$

где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость,

$$\mathbf{L}(K,z) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_1\mu_2} V_1 R_0 V_2 & \sqrt{\mu_1\mu_3} V_1 R_0 V_3 & \sqrt{\mu_1\mu_4} V_1 R_0 V_4 \\ \sqrt{\mu_2\mu_1} V_2 R_0 V_1 & 0 & \sqrt{\mu_2\mu_3} V_2 R_0 V_3 & \sqrt{\mu_2\mu_4} V_2 R_0 V_4 \\ \sqrt{\mu_3\mu_1} V_3 R_0 V_1 & \sqrt{\mu_3\mu_2} V_3 R_0 V_2 & 0 & \sqrt{\mu_3\mu_4} V_3 R_0 V_4 \\ \sqrt{\mu_4\mu_1} V_4 R_0 V_1 & \sqrt{\mu_4\mu_2} V_4 R_0 V_2 & \sqrt{\mu_4\mu_3} V_4 R_0 V_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}(K,z) = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 \end{pmatrix},$$

здесь

$$R_0 := R_0(K,z) = (H_0(K) - zI)^{-1}, W_\alpha = W_\alpha(K,z) := (I - \mu_\alpha V_\alpha R_0(K,z) V_\alpha)^{-1}.$$

Лемма 1. *Оператор* $\mathbf{A}(K,z)$ *при любых* $K \in \mathbb{T}^3$ *и* $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *является компактным.*

Лемма 2. *Число* $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *является собственным значением оператора* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда число 1 есть собственное значение оператора* $\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z)$.

Отметим, что

$$[m_K, M_K] \subset \sigma_{ess}(H_\alpha(K)),$$

где

$$m_K = \min_{\mathbf{p} \in (\mathbb{T}^3)^3} \varepsilon_K(\mathbf{p}), \quad M_K = \max_{\mathbf{p} \in (\mathbb{T}^3)^3} \varepsilon_K(\mathbf{p}). \tag{7}$$

Замечание 1. *Уравнение* $\mathbf{A}(K:z)\varphi = \varphi$ *есть аналог уравнения Фаддеева, которое получено для трёхчастичного непрерывного оператора Шредингера.*

Теорема 3. *Для любого* $K \in \mathbb{T}^3$ *существенный спектр* $\sigma_{ess}(H(K))$ *оператора* $H(K)$ *совпадает с объединением спектров операторов каналов, т.е.*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)).$$

Пусть $\mu_\alpha = 1,\ \alpha \in \{1,2,3,4\}$. Тогда $H(K),\ K \in \mathbb{T}^3$, определенный формулами (5) и (6) описывает оператор Шредингера, соответствующий гамильтониану системы четырёх частиц (только) с трехчастичным быстро убывающим потенциалом взаимодействия.

Положим

$$H_\alpha(K) = H_0(K) - V_\alpha.$$

Оператор $H_\alpha(K)$ называется оператором канала, соответствующим гамильтониану системы $\{\alpha\}, \{\beta,\gamma,\theta\}, \{\alpha,\beta,\gamma,\theta\} = \{1,2,3,4\}$.

Поскольку $H_0(K)$ является оператором умножения на функцию $\varepsilon_K(\cdot)$, то

$$\sigma(H_0(K)) = [m_K, M_K]$$

где m_K, M_K определяются с равенствами (7).

Согласно включению $[m_K, M_K] \subset \sigma_{ess}(H_0(K))$ для $\alpha \in \{1,2,3,4\}$ оператор

$$R_0(K,z) = (H_0(K) - zI)^{-1}$$

существует и ограничен в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$ при всех $z \notin \sigma(H_\alpha(K))$, $\alpha \in \{1,2,3,4\}$, где $I -$ тождественный оператор в $L_2((\mathbb{T}^3)^3)$.

Отметим, что V_α является положительным оператором. Поэтому оператор $W_\alpha := W_\alpha(K,z) = (I - V_\alpha^{1/2} R_0 V_\alpha^{1/2})^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z \notin \sigma(H_\alpha(K))$, где $R_0 := R_0(K,z)$.

Определим матричный оператор

$$\mathbf{A}(K,z) = \mathbf{W}(K,z)\mathbf{L}(K,z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)),$$

в гильбертовом пространстве

$$L_2^{(4)}((\mathbb{T}^3)^3) = L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3) \oplus L_2((\mathbb{T}^3)^3),$$

где

$$\mathbf{L}(K,z) = \begin{pmatrix} 0 & V_1^{1/2} R_0 V_2^{1/2} & V_1^{1/2} R_0 V_3^{1/2} & V_1^{1/2} R_0 V_4^{1/2} \\ V_2^{1/2} R_0 V_1^{1/2} & 0 & V_2^{1/2} R_0 V_3^{1/2} & V_2^{1/2} R_0 V_4^{1/2} \\ V_3^{1/2} R_0 V_1^{1/2} & V_3^{1/2} R_0 V_2^{1/2} & 0 & V_3^{1/2} R_0 V_4^{1/2} \\ V_4^{1/2} R_0 V_1^{1/2} & V_4^{1/2} R_0 V_2^{1/2} & V_4^{1/2} R_0 V_3^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}(K,z) = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 \end{pmatrix}.$$

Основными результатами главы 3 диссертации являются следующие утверждения.

Лемма 3. *Число* $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K))$ *является собственным значением оператора* $H(K)$ *тогда и только тогда, когда число 1 – собственное значение компактного оператора* $\mathbf{A}(K,z)$.

Замечание 2. Уравнение $\mathbf{A}(K,z)\phi = \phi -$ это аналог уравнения Фаддеева, которое получено для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера.

Теорема 4. *Для любого* $K \in \mathbb{T}^3$ *существенный спектр* $\sigma_{ess}(H(K))$ *оператора* $H(K)$ *совпадает с объединением спектров операторов каналов, т.е.*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^{4} \sigma(H_\alpha(K)).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию спектральных свойств гамильтониана системы произвольных четырех частиц на решетке.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказано, что существенный спектр оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц совпадает с объединениями спектров канальных операторов соответствующих подгамильтонианам подсистем двух и трех частиц на трехмерной решетке.
2. Получено уравнение типа Фаддеева для собственных функций оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырёх частиц.
3. Найдено местоположение существенного спектра оператора Шредингера, зависящего от значений полного квазиимпульса, соответствующего гамильтониану системы четырех частиц.
4. Показано, что к спектру оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных квантовых частиц с двухчастичными контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке при возмущении трёхчастичными контактными потенциалами взаимодействия прибавляются некоторые отрезки, а спектры подгамильтонианов соответствующих подсистем системы четырех частиц без трехчастичных подсистем, содержащиеся в существенном спектре не изменяются.
5. Показано, что существенный спектр оператора Шредингера, соответствующего гамильтониану системы четырех произвольных частиц (только) с трехчастичными короткодействуюшими потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке состоит из объединения спектров операторов каналов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SHADIEV USMON RAMAZANOVICH

THE SPECTRAL PROPERTIES OF HAMILTONIAN OF A SYSTEM OF FOUR PARTICLES ON A LATTICE

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM325.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University
The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Abdullayev Janikul Ibragimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Official opponents:	**Eshkabilov Yusup Khalbayevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Yodgorov Gayrat Ruziyevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National university of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

A.M. Xalxujayev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

S.N. Lakaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to investigate the essential spectrum of the four-particle Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four arbitrary quantum particles with two-particle, three-particle short-range interaction potentials on a three-dimensional lattice.

The object of the research work – Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four arbitrary particles with two-particle and three-particle short-range potentials on a three-dimensional lattice.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is shown that the spectrum of the Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four arbitrary quantum particles with two-particle interaction contact potentials of a three-dimensional lattice perturbated by three-particle contact potentials adds some segments;

the location of the essential spectrum of the Schrödinger operator is found, depending on the values of the total quasimomentum corresponding to the Hamiltonian of the system of four particles;

it is proved that the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four arbitrary particles consists of combining the spectrum of sub-Hamiltonians (channel operators) of the corresponding subsystems of two and three particles on a three-dimensional lattice;

It is shown that the essential spectrum of the Schrödinge operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four arbitrary particles (only) with three-particle rapidly decreasing interaction potentials on a three-dimensional lattice consists of combining the spectrum of channel operators;

an Faddeev-type equation is obtained for the eigenfunctions of the Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of four particles.

Implementation of the research results.

Based on the results obtained relating to the essential spectrum of the Schrödinger operators corresponding to the Hamiltonians of systems of four arbitrary particles on the lattice, the following implementations are made:

The methods for studying the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to the system of four particles on the lattice used in scientific research QJ130000.2726.01K82 (University of Technology of Malaysia, certificate of March 19, 2018) to determine the basic properties of the integral operators and Schrödinger operators. Using scientific result enabled to obtain an Faddeev-type equation for the eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator, which played an important role in proving the existence of infinite eigenvalues lying to the left of the essential spectrum of the three-particle Schrödinger operator on the lattice;

The methods for studying the spectrum of operators (channel operators), corresponding subsystems of two and three particles of a system of four arbitrary particles with two-particle interaction contact potentials on a three-dimensional lattice used in scientific research Ф4-ФА-Ф079 “Spectral analysis of Hamiltonians of systems with an unconserved limited number of particles” (Reference Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of Uzbekistan dated 06.06.2019). Using these methods, the structure and location of essential spectrum of the discrete Schrödinger operator corresponding to a system of three particles (two fermions and one boson) with paired contact interactions on one- and two-dimensional lattices are found.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 98 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Абдуллаев Ж.И., Шодиев У.Р. Спектр четырехчастичного оператора Шредингера с трехчастичным взаимодействием // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 1998. – №6, – С.15-18. (01.00.00; №6).
2. Шодиев У. Р. О существенном спектре четырехчастичного оператора Шредингера с трехчастичным контактным взаимодействием на решетке // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2008. – №3. – С. 110-120. (01.00.00; №6)
3. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. О спектральных свойствах одного гамильтониана системы четырех частиц на решетке // Известия высших учебных заведений. Математика. – Россия, 2010. – №12. – С 32-43. (№ 22. Springer. IF=0.225).
4. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. О сушественном спектре одного четырехчастичного оператора Шредингера на решетке // Математические труды. – Россия, 2010. Т. 13. – №1. – С. 169-185 (Springer. IF=0.531).

II бўлим (II часть; II part)

5. Абдуллаев Ж.И., Шодиев У.Р. О спектре четырехчастичного оператора Шредингера на решетке // Операторная алгебра и квантовая теория вероятностей: Труды международной научной конференции. 7-10.09.2005. – Ташкент, – С. 124-126.
6. Шодиев У.Р.О существенном спектре четырехчастичного оператора Шредингера с трехчастичным контактным взаимодействием на решетке // Труды Комплексного научно-исследовательского института региональных проблем Самаркандского отделения АН РУз. Выпуск 3, – Самарканд, 2007. – С. 97-102.
7. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. Некоторые спектральные свойства четырехчастичного оператора Шредингера с трехчастичным контактным взаимодействием на решетке // Новые направления в теории динамических систем и некоторых задач. Материалы международной конференции 19-20 октября 2007 г. – Самарканд, 2007. – С. 202-204.
8. Муминов М.Э., Шодиев У.Р. О конечности связанных состояний гамильтониана системы четырех частиц с трехчастичными контактными взаимодействиями на решетке // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий. Материалы республиканской научной конференции посвященной 90 летнему юбилею НУУз, 8 мая 2008 г. – Ташкент, – С. 178-179.
9. Muminov M.I., Shodiyev U.R. On the number of eigenvalues lying in the gap

of the essential spectrum of the three-particle Schrödinger operators on lattice // International Seminar on Mathematics and Natural Sciences. 15-17.08.2013. – Samarkand, 2013. – P. 19.

10. Шодиев У.Р. Существенный спектр четырехчастичного оператора Шредингера с трёхчастичным контактным взаимодействием на решетке // Ёш олимларнинг анъанавий XI республика илмий-амалий конференцияси материаллари. 23-24 май, 2014. – Самарканд, 2014. – 8-11 б.
11. Шодиев У.Р. Существенный спектр четырехчастичного оператора Шредингера с трёхчастичным контактным взаимодействием на решетке // Современные методы математической физики и их приложения. Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 15-17 апреля 2015. - Ташкент, 2015. – С. 106-108.
12. Шодиев У.Р. О компактности оператора, описывающего аналог уравнения Фаддеева четырехчастичного оператора Шредингера // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўкитиш муаммолари: Респуб. илмий амалий конф. 20-21.04.2015 й. – Навоий, 2015. 157-158 б.
13. Шодиев У.Р. О существенном спектре четырёхчастичного оператора Шредингера с трёхчастичным контактным взаимодействием на решетке // Актуальные проблемы математики. Респуб. илмий амалий конф. 17.05.2016 й. – С. 406-408.
14. Шодиев У.Р. Число связанных состояний гамильтониана системы четырех частиц с трёхчастичными контактными взаимодействиями на решетке // International Conference on Nonlinear Analysis and Applications ICNAA- 2016. 19-21.09.2016. – Samarkand, 2016. P. 69-71.
15. Шодиев У.Р. О спектральных свойствах четырехчастичного оператора Шредингера на трехмерной решетке // Новые результаты математики и их приложения. Тезисы докладов респ. науч. конф. 14-15.05.2018 г. – Самарканд, 2018. – С. 103-104.
16. Шодиев У.Р. Спектр операторов каналов гамильтониана системы четырёх частиц на решетке // Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics. 17-20.09.2018. – Samarkand, 2018. – С. 84-86.
17. Шадиев У.Р. Существенный спектр гамильтониана системы четырех частиц с трехчастичными взаимодействиями на решетке // VI Международная научно-практическая конференция «Global science and innovations 2019: Central Asia». 9-13.05.2019. – Нур-Султан (Астана), 2019. – С. 172-176.

Автореферат “Самарқанд давлат университети таҳририй-нашриёт бўлими”
таҳририятида таҳрирдан ўтказилди ва ўзбек, рус, инглиз (резюме) тиллардаги
матнлари мослиги текширилди (17.09.2019 й.).

Гувоҳнома №18-4025.

18.09.2019 йилда босишга рухсат этилди.
Шартли босма табоғи 2,75. Қоғоз бичими 60x84$_{1/16.}$
“Times” гарнитураси. Адади 100 нусха. Буюртма №7/2.

“Nafis poligraf servis” МЧЖ босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Самарқанд ш., Буюк ипак йўли кўчаси, 67-А.