

Kirish	
I bob. Fazoda koordinatalar metodining nazariy asoslari.	
1.1 Fazoda koordinata nuqtalari. Sodda masalalarning koordinatalar orqali yechilishi.....	
1.2 Fazoning orientatsiyasi(nisbatan belgilangan yo'nalish).....	
1.3 Fazoda koordinatalarning boshqa sistemalari.....	
1.4 Fazoda koordinatalarni almashtirish formulalari.....	
1.5 Koordinatalarni bog'lovchi tenglama va tengsizliklarning geometrik talqini.....	
II bob. Ba'zi murakkabroq masalalarni koordinatalar metodi bilan yechish	
2.1 Koordinatalar metodining stereometriya masalalarini yechishga tadbiqi.....	
2.2 Masalalarni koordinatalar metodi bilan yechish bosqichlari.....	
2.2.1. Koordinatalar metodi orqali geometrik masalalarni yechish algoritmi.....	
2.2.2. Koordinatalar metodi orqali berilgan to'g'ri chiziqlar, tekisliklar orasidagi burchakni topishga doir masalalar yechish.....	
2.2.3. Koordinatalar metodi orqali masofani topishga doir masalalar yechish.....	
III. Bob namnaviy dasr islanmasini tuzilmasi.	
Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik.	
To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpenikulyarligi haqidagi teoremlar.....	
Xulosa	
Foydalanilgan adabiyotlar	
Glossariy	

Kirish .

Koordinatalar usulini o'rganishning asosiy xossalari.

Koordinatalar yordamida masalalar yechish bir xildir. Elementar geometriyada o'quvchilar har bir masalani yechishning alohida usullarini qidirishga to'g'ri keladi, masalalar aniq algoritm asosida yechilib , har qanday masalaoson yechiladi. Koordinatalar usulining asosiy qiymati shundan iboratki, bunda bu usulning algebradan geometriyaga o'tkazishda masalalar yechishning katta umumiyligini ko'ramiz. Shuningdek, bu usuldan foydalanishda murakkab fazoviy tasvirlardan ko'rgazmali qilib foydalanib bo'lmaydi

Koordinatalar usulini o'rganda quyidagi maqsadlar ko'zga tutadi

- o'quvchilarga masalar yechish va qator teoremlar yechishning yangi usullarini berish
- Koordinatalar usuli yordamida geometriya va algebra orasidagi uzviy bog'lanishni ko'rsatish
- O'quvchilarga hisoblashva grafik madaniyatini rivojlantirishga erishish

Maktabda koordinatalar usulini o'rgatish va qo'llashda (turli matematik masalalarni yechish) bir necha bosqichda o'tadi.

- 1- bosqich (5-6 sinflarda) asosiy tushunchalar kiriladi va sistemali ravishda geometriyaga kiriladi. 5-sinfda o'quvchilar koordinata nuri bilan tanishishadi. 6 – sinfda rasional sonlar manfiy sonlar o'rganishda koordinatalar chizig'i to'ldiriladi va koordinata tekisligi o'rganiladi.
- 2- bosqichda o'quvchilar to'g'ri chiziq va aylana tenglamasi bilan tanishadilar. Bu tushunchalar algebrada ham, geometriyada ham alohida mazmunga ega bo'lib , o'quvchilar shu uchun ular orasidagi bog'lanishni ko'rmaydi. Shuning uchun bu usul mohiyatini yaxshi o'zlashtirmaydi. 8- sinf algebra kursida asosiy funksiyalarning grafiklari va analitik formulalari orqali nuqtalarni yasash orqali o'rganiladi. Geometriya kursida to'g'ri chiziq va aylana tenglamasi geometrik xossalari orqali kiriladi(to'g'ri chiziq uchun ikki nuqtaning teng uzoqligi , aylana uchun bir nuqtadan uzoqligi asosida).9 sinf geometriyasida masalalar yechishda koordinatalar usulini qo'llash asoslari o'rganiladi. Buning uchun usulning asosiy bosqichlarining qo'llanishi ochiladi, bir qator masalalar yechishda shu usulning qo'llanishi ko'rsatiladi.

Koordinatalar usulining mohiyati

Koordinatalar usulining mohiyati shundaki , shakllarni tenglamalar yordamida berib , turli geometrik munosabatlardan koordinatalarda ifodalab , biz geometrik masalani algebra usullarida yechamiz. Koordinatalar foydalanib , algebrik va geometrik munosabatlari , faktlarni qo'llab , geometrik va algebrik masalalarni yechishga tatbiq qilish mumkin. Koordinatalar usuli – universal usuli. Bu usul algebra va geometriya uzviy bog'lanishini beradi. Maktab geometriya kursi haqida shunday deyish mumkin: ko'p hollarda koordinatalar usuli isbotlashlarni va ko'pgina masalalar yechimini rasional , chiroyli (toza geometrik usulga nisbatan) koordinatalar usulining

bitta qiyin tomoni bor: masalaning o'zi tanlangan koordinata sistemasiga ko'ra turlicha analitik ko'rinishiga ega bo'ladi. Faqat yetarli tajribasiga optimal koordinata sistemasini tanlashga imkon beradi

Geometrik masalalarni koordinata metodi bilan yechishi uchun oddiy formula , ayniyatlar va qoidalarni bilish kerak. Bu usulning afzalligi shundaki, u masalani yechishni soddalashtiradi va qisqartiradi. Bunda proyeksiyalarda murakkab masalalarni yechish mumkin, lekin bu usulda ham kamchiliklar bor – u juda ko'p hisoblashni talab qiladi. Koordinatalar usulini qo'llashning algoritmi quyidagicha :

1. Fazoda koordinata sistemi tanlash
2. Kerakli nuqta koordinatalari va vektorlarning tenglamalarni topish
3. Asosiy masalalar va formulalardan foydalanib misol yechish
4. Analitik munosabatlardan metric munosabatga o'tish

Bu algoritim umumiy bo'lib , ba'zi bir masalalarni yechishda qo'shimcha qadamlar qo'shishga to'g'ri keladi.

5. Koordinatalar usulini o'rganuvchi shu usulni fikrlovchini logik strukturasini tanlash qobiliyatiga bog'liq

Koordinata usulini o'rganuvchidan shu usulni amaliyotda qo'llash ko'nikmalarini talab qiladi.

Bir necha masalalarni yechish orqali taxlil qilamiz. Bu taxlillar orqali masala yechishda koordinatalar usulini qo'llashdagi ko'nikmalarni ajratamiz. Ko'nikmalarning bu komponentlari usullarining bosqichma-bosqich amalga oshirish imkonini beradi.

I bob. Fazoda koordinatalar metodining nazariy asoslari.

Koordinatalar metodi- sonlar yoki turli belgilar orqali nuqta yoki jism tutgan o'rnini belgilash usuli. Nuqta (jism)ning to'g'ri chiziqda, tekislikda, fazoda tutgan o'rnini aniqlovchi sonlar (belgilar) quyida uning koordinatalari deb yuritiladi.

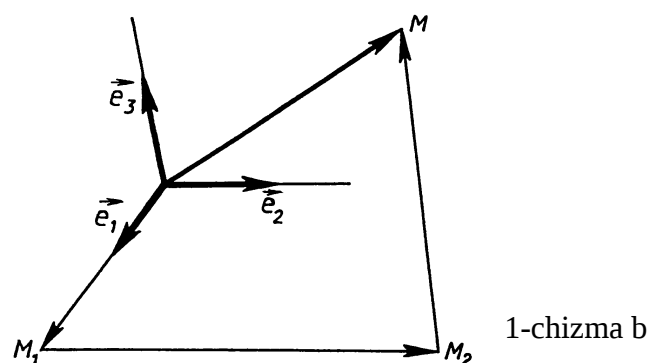
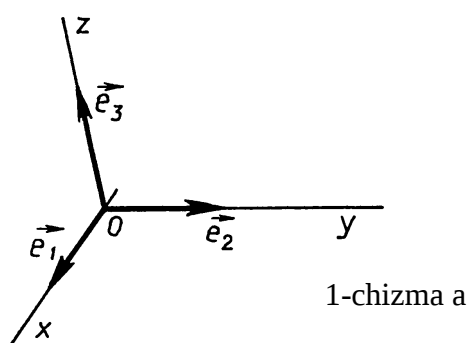
Koordinatalar sistemasi- tartiblangan sonlar yoki turli belgilar sistemasi orqali nuqta yoki jism tutgan o'rnini belgilash usuli. Sonlar yoki belgilarning birgalikdagi holati aniq bir nuqtaning holatini aniqlaydi va shu nuqtaning koordinatalari deb ataladi.

Matematikada koordinatalar- ba'zi aniqlangan atlas xaritasini ko'p xillikka qiyoslab, birgalikda olingan sonlar.

Elementar geometriyada - nuqta holatini tekislikda va fazoda aniqlash o'lchami. Tekislikda nuqta holati ko'proq ikki to'g'ri chiziq (koordinata o'qlari) orasidagi masofa bilan aniqlanadi, bir nuqtada kesishib (koordinatalar boshi) to'g'ri burchak hosil qilgan bo'lsa;

1.1 Fazoda koordinata nuqtalari. Sodda masalalarning koordinatalar orqali yechilishi.

1. Fazoda koordinatalar sistemasi tekislikda koordinatalar sistemasiga



o'xshash tartibda kiritiladi. Fazoda biror O nuqta va ixtiyoriy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisni olaylik. O nuqta va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazislar to'rtligi fazoda affın koordinatalar sistemasini tashkil etadi va $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ yoki $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ kabi belgilanadi (1-chizma a). O nuqta koordinatalar boshi, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar esa- vektor

koordinatalari deyiladi. ($\vec{e}_1$ -birinchi koordinata vektori, $\vec{e}_2$ -ikkinchi, $\vec{e}_3$ -uchunchi) . Koordinata boshidan o'tuvchi va vektorlar koordinatasiga parallal bo'lgan, shu bilan bir qatorda musbat yo'nalishi shu vektorlar bilan aniqlangan yo'naltirilgan to'g'ri chiziqlar koordinatalar o'qi deyiladi. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarga parallel bo'lgan o'qlarni o'z navbatida absissa, ordinate va aplikata deyiladi va Ox, Oy va Oz kabi belgilanadi. (1-chizma a). Ox va Oy, Ox va Oz, Oy va Oz o'qlari bilan aniqlangan tekisliklar *koordinata tekisliklari* deyiladi va o'z navbatida Oxy, Oxz va Oyz kabi belgilanadi.

2. $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin, M nuqta esa fazoda ixtiyoriy olingan nuqta bo'lsin. (1-chizma b). $\overrightarrow{OM}$ vektor m nuqtaning radius-vektori deyiladi(o nuqtaga nisbatan). $\overrightarrow{OM}$ vektor koordinatalari x, y, z $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinatalar sistemasi nuqtaning koordinatalari deyiladi. M nuqtaning x soni- abscissa, y soni – ordinata, z soni – aplikata (yoki birinchi, ikkinchi, uchinchi koordinata) deb nomlanadi. M (x, y, z) kabi yoziladi. Shu tarzda, $O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sistemada M nuqta koordinatalari deb shunday x, y, z sonlarga aytiladiki

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (1).$$

Tekislikdagi koordinatalar sistemasiga o'xshash tushuncha orqali ta'kidlab o'tamizki: agar fazoda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda fazoda berilgan (x, y, z) tartiblangan haqiqiy sonlar uchligi fazoda o'zaro bir ma'noli bog'liqlik o'rnatadi ya'ni fazo nuqtalari va R^3 to'plam elementlari bilan. Bu yerda $R^3 = R \times R \times R$ -dekart haqiqiy sonlar kub to'plami.

Agar M nuqtaning z aplikatasi nolga teng bo'lsa, u holda (1) tenglikdan

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

hosil bo'ladi.

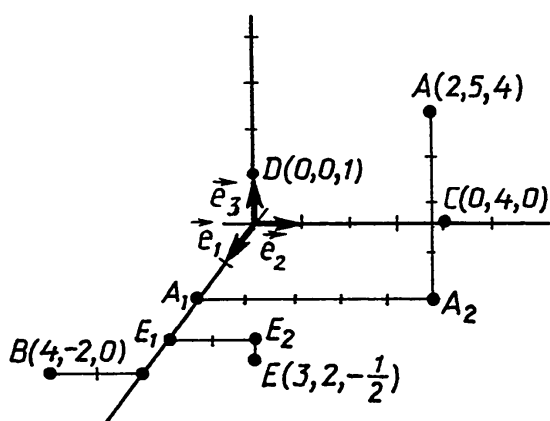
$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ vektorlar chiziqli bog'liq, shuning uchun ular komplanardir. Bu esa M nuqta Oxy tekislikka tegishli ekanini bildiradi. Yuqoridagi tenglikdan, $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ koordinatalar sistemasi Oxy tekislikda M nuqta (x, y) koordinatalarga ega bo'ladi. Analogik xulosa orqali, agar y=0 bo'lsa, u holda M nuqta Oxz tekislikda yotadi, agar x=0 bo'lsa, unda Oyz tekislikda. Bu yerdan, ixtiyoriy absissa o'qi nuqtasi uchun y=z=0, ixtiyoriy ordinate o'qi nuqtasi uchun x=z=0, ixtiyoriy applikata o'qi nuqtasi uchun x=y=0 bo'ladi. Koordinatalar boshi (0,0,0) koordinataga ega bo'ladi.

$O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ koordinatalar sistemasi da M(x, y, z) nuqtani qurish uchun (1) formuladan foydalaniladi. Koordinatalar boshi O dan $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{e_1}$ vektorni o'tkazamiz, keyin M_1 nuqtadan $\overrightarrow{M_1M_2} = y\overrightarrow{e_2}$ vektorni o'tkazamiz, va nihoyat, M_2 nuqtadan $\overrightarrow{M_2M} = z\overrightarrow{e_3}$ vektorni otkazamiz. (1-chizma b)

Ko'pburchak qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. Shu tarzda, M nuqta- izlangan nuqta. OMM_1M_2 siniq chiziqni M nuqta *siniq koordinatasi* deyiladi. Shunday qilib, M nuqtani hosil qilish uchun uning o'zi kifoya. Umuman M(x,y,z) nuqtani yasash uchun, ya'ni

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \quad (2)$$

vektorning oxirini topish uchun quyidagi qoidadan foydalaniladi: koordinatalar boshidan Ox o'q bo'yicha $x\overrightarrow{e_1}$ vektor, uning oxiridan Oy o'qqa parallel holda



$y\overrightarrow{e_2}$

2-chizma

vektor qo'yiladi, so'ngra uning oxiridan $z\overrightarrow{e_3}$ vektor

yasaladi, shu vektor oxiri izlangan nuqta bo'ladi. 2-chizmada $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ affin koordinatalar sistemasi va unda qurilgan A(2, 5, 4), B(4, -2, 0), C(0, 4, 0),

$D(0,0,1), E(3,2,-\frac{1}{2})$ nuqtalar tasvirlangan.

3. Misol: Affin koordinatalar sistemasida $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektor koordinatalarini toping.

Yechish: vektorlarni ayirish qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ ga ega bo'lamiz. $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_1}$ vektorlar M_2 va M_1 nuqtalarning radius-vektori bo'lgani uchun ularning koordinatalari bizga ma'lum: $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$ va $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$.

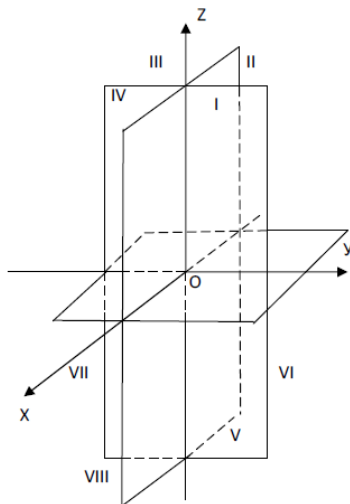
Shu singari, $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektor koordinatalari

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (3)$$

bo'ladi.

Xullas, vektorning har bir koordinatasi vektorning oxiri va boshining mos koordinatalarining ayirmasiga teng.

Ucha koordinata tekisligi birgalikda fazoni sakkiz qismga ajratadi, ularning har biri *oktantalar* deb ataladi.



Oktantalar

Koordinatalar

Quyidagi

jadvalda

oktantalar va

undagi nuqta koordinatalarining ishoralari berilgan.

Oktantalar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Koordinatalar								
X	+	-	-	+	+	-	-	+
Y	+	+	-	-	+	+	-	-

$$Z \quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad -$$

3-chizma.

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Biror affin sistemasida $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ ($M_1 \neq M_2$) nuqtalar va haqiqiy λ ($\lambda \neq -1$) son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. M nuqta uchun

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$$

shart bajarilsa, M nuqta $\overrightarrow{M_1M}$ kesmani λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

M_1, M nuqtalarning koordinatalari orqali M nuqtaning x, y, z koordinatalarini topaylik. (2) ga asosan

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = (x - x_1)\vec{e}_1 + (y - y_1)\vec{e}_2 + (z - z_1)\vec{e}_3,$$

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x)\vec{e}_1 + (y_2 - y)\vec{e}_2 + (z_2 - z)\vec{e}_3$$

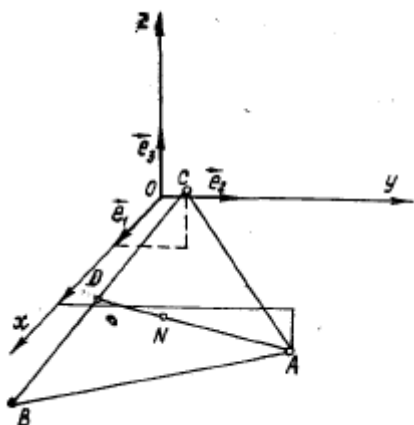
$$\overrightarrow{MM_2}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

Bu ifodani (3) ga qo'yib va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ning chiziqli erkliligini e'tiborga olsak,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Bulardan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$



4-chizma

Berilgan kesmani berilgan nisbatta bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulalari shulardir. M nuqta M_1M_2 kesmaning o'rtasi bo'lsa, (4) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

Bu formulalar kesmani o'rtasining koordinatalarini topish formulalaridir.

Misol: $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ affin koordinatalar sistemasida $A(2;3;-1)$, $B(3;0;-1)$, $C(1;1;1)$ nuqtalarni yasab, ABC uchburchak og'irlik markazining (medianalarining kesishgan nuqtasi) koordinatalarini toping.

Yechish:

$$A(2,3,-1) \Rightarrow \overrightarrow{AO}(2;3;-1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$B(3,0,-1) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(3;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3,$$

$$C(1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OC}(1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

A,B,C nuqtalarni yasash natijasida 4-chizmadagi ABC uchburchak hosil qilinadi. BC kesmaning o'rtasi D ning koordinatalarini topaylik:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, z = \frac{-1+1}{2} = 0, D\left(2; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Medianalarning kesishgan nuqtasi AD ni A dan boshlab $\lambda = 2:1$ nisbatda bo'lgani uchun izlangan N nuqtani AD kesmani $\lambda = 2:1$ nisbatda bo'ladi, ya'ni

$$x = \frac{2+2 \cdot 2}{1+2} = 2, y = \frac{3+2 \cdot \frac{1}{2}}{1+2} = \frac{4}{3}, z = \frac{-1+2 \cdot 0}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$N\left(2; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

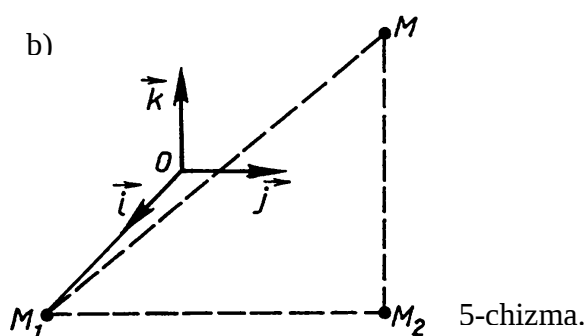
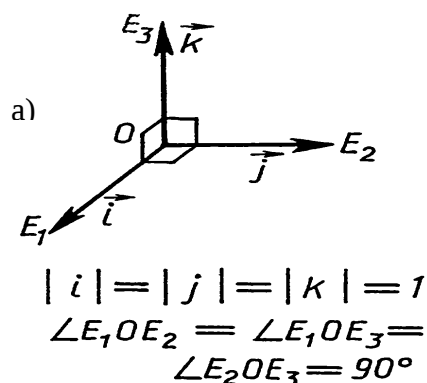
4. Agar berilgan koordinatalar sistemasi ortonormallangan ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisni ortonormallangan deyiladi, qachonki u quyidagi ikki shartni bajarsa:

1. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ya'ni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar.

2. $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}, \overrightarrow{OE_2} = \vec{j}, \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ deb olsak, u holda $\angle E_1OE_2, \angle E_1OE_3, \angle E_2OE_3$ burchaklar to'g'ri burchakli bo'ladi. (5-chizma a)) bo'lsa, u holda bu koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli dekart yoki oddiy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi. koordinatalar boshi O nuqta bo'lgan bunday sistema $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ yoki $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ kabi belgilanadi, bu yerda

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0 \quad (6)$$

bo'ladi (5-chizma b)



$M(x;y;z)$ nuqtaning koordinatalari to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida oddiy geometrik ma'noga ega. OM_1M_2M shu nuqtaning koordinat siniq chizig'i bo'lsin. Bu holda M_1 - M nuqtaning absissa o'qidagi proyeksiyasi bo'ladi (5-chizma b). $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ bo'lgani uchun, $OM_1 = |x|$ bo'ladi. Shunday qilib, $x = OM$, agar M_1 nuqta musbat yarim o'qning nuqtasi bo'lsa, va $x = 0$ bo'ladi, $x = -OM$, agar M_1 nuqta manfiy yarim o'qning nuqtasi bo'lsa, va $x = 0$ bo'ladi. Agar M_1 O nuqta bilan ustma-ust tushsa, M nuqtaning ordinata va Z aplikatsiyasi ham analogik geometrik ma'noga ega.

Bu sistemada metrik xarakterdagi masalalarni yechish ancha qulay,

a) $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ vektorning uzunligini hisoblaylik. Vektorning uzunligini hisoblaylik:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (7)$$

b) ikki $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorning skalyar ko'paytmasini hisoblaylik:

$$\vec{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (8)$$

c) shu ikki vektor orasidagi burchakning kosinusi:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{ab}}{|\vec{ab}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (9)$$

$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ koordinatalarga ega nuqtalar berilgan

bo'lsin. Ikki nuqta orasidagi masofani aniqlaylik. (3) formulga ko'ra

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ bo'ladi, $\overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{M_1M_2}|$ ekanligini

hisobga olib to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan

vektorning uzunligi ni hisoblaymiz

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (10)$$

Misol : $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ to'g'ri burchakli

koordinatalar sistemasida uchlari $A(7;2;4)$,

$B(4;-4;2)$, $C(6;-7;8)$, $D(9;-1;10)$ nuqtalarda

bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligini isbotlang.

Yechish : Avvalo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ vektorlarning

koordinatalarini topaylik:

$$\overrightarrow{AB}(-3;-6;-2), \quad \overrightarrow{DC}(-3;-6;-2)$$

Bulardan ko'rinadiki, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, demak, ABCD to'rtburchak parallelogram ekan,

uning kvadrat ekanligini ko'rsatish uchun diagonalari o'zaro teng va

perpendikulyan ekanligini isbotlash kerak(6-chizma). Haqiqatdan ham,

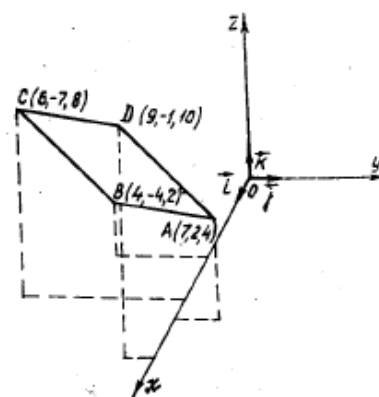
$\rho(A, C)$ va $\rho(B, D)$ ni (5) formula bo'yicha hisoblasak,

$$\rho(A, C) = \sqrt{(6-7)^2 + (-7-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98},$$

$$\rho(D, B) = \sqrt{(4-9)^2 + (-4+1)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98},$$

Bundan

$$\rho(A, C) = \rho(D, B)$$



6-chizma

$\overrightarrow{AC}(-1;-9;4)$, $\overrightarrow{DB}(-5;-3;-8)$ bo'lgani uchun (7)ga asosan:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (-1)(-5) + (-9)(-3) + 4(-8) = 5 + 27 - 32 = 0,$$

demak,

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$$

1.2 Fazoning orientatsiyasi(nisbatan belgilangan yo'nalish).

1. O'z koordinatalari bilan berilgan uch vektorning komplanarlik bo'lish shartini anglatuvchi teoremani isbot qilamiz:

Teorema. Ixtiyoriy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda koordinatalari bilan berilgan

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ va $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ vektorlar bilan komplanar bo'lishi uchun quyidagi tenglikni bajarilishi shart va yetarli:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

◻◻◻ Isbot. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar vektorlar bo'lsin. U holda ular chiziqli bog'liqdir ya'ni bir vaqtda hammasi nolga teng bo'lmagan α, β va γ sonlar mavjudki va ular

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \quad (12)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu tenglikni koordinatalarda yozamiz:

$$\begin{aligned} \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{b}_1 + \gamma \vec{c}_1 &= 0 \\ \alpha \vec{a}_2 + \beta \vec{b}_2 + \gamma \vec{c}_2 &= 0 \\ \alpha \vec{a}_3 + \beta \vec{b}_3 + \gamma \vec{c}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Shunday qilib Δ determinantning ustunlari(chap tarafi) chiziqli bog'liq. Algebra kursidan ma'lumki, bu holda $\Delta = 0$, ya'ni (11) tenglik o'rinli.

Teskarisiga faraz qilaylik, (11) tenglik bajarilsin. U holda determinant ustunlari Δ chiziqli bog'liq, ya'ni (13) sistema bir jinsli chiziqli tenglamalar α, β va γ sonlarga nisbatan nol bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi. (13) tenglikni mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ va $\vec{e}_3$ ga ko'paytirib va qo'shib, (12) tenglikni hosil qilamiz.

Demak, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar chiziqli bog'liq, shuning uchun ular komplanardir. Isbot qilindi.

2. Fazoda orientatsiyalash tushunchasi tekislikda arientatsiyalash tushunchasi kabi kiritiladi. Sunday qilib, ma'lum tartibda olingan, ixtiyoriy nokomplanar bo'lgan vektorlar uch o'lchamli V vektor fazo bazisini tashkil etadi. V fazoda cheksiz ko'p bazislar mavjud. Shulardan ikkitasini ko'raylik: $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ va $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. B bazis vektorlarini a bazis vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2 + c_{31}\vec{a}_3, \\ \vec{b}_2 &= c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2 + c_{32}\vec{a}_3, \\ \vec{b}_3 &= c_{13}\vec{a}_1 + c_{23}\vec{a}_2 + c_{33}\vec{a}_3.\end{aligned}$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$ va $\vec{b}_3$ vektor koordinatalari orqali 3-tartibli matritsa tuzish mumkin:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$\vec{b}_1$ vektor koordinatalari matritsaning birinchi qatorini tashkil etadi, $\vec{b}_2$ vektor koordinatalari –ikkinchi qatorni, $\vec{b}_3$ vektor koordinatalari esa- uchinchi qatorni. Bu matritsa A bazisdan B bazisga o'tish matritsasi deyiladi: $A|B$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$A|B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) | (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$ va $\vec{b}_3$ vektorlar chiziqli erkli ekanligidan, yuqorida ko'rilgan teoremaga ko'ra $A|B \neq 0$.

Fazoda ixtiyoriy A, B va C bazislar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$1^0. A|A = 1.$$

$$2^0. (A|B) \cdot (B|C) = A|C$$

$$3^0. (A|B) \cdot (B|A) = 1$$

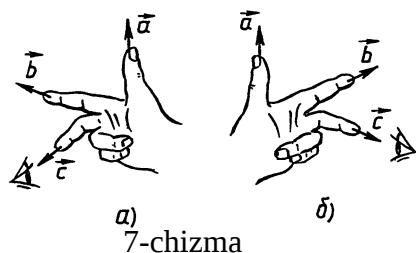
Fazoda hamma bazislar to'plamini $\mathbf{B}$ to'plam bilan belgilaylik. Faraz qilaylik, $A, B \in \mathbf{B}$ bazislari Δ ga nisbatan bir xil orientirlangan bo'lsin, agar $A|B > 0$ bo'lsa, u holda $A \Delta B$ bo'ladi. Demak xulosa qilsak, Δ determinantning nisbiyligi $\mathbf{B}$ fazodagi barcha bazislar to'plamidagi bazisga ekvivalentligi kabi bo'ladi.

Faktor-to'plam $\mathbf{B}/\Delta$ faqat ikki elementdan tashkil topgan ekanligini isbotlaylik. Buning uchun $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ va $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3)$ bazislarni ko'raylik.

$$A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ ekanligidan } K_A \text{ va } K_B \text{ ekvivalentlik sinflari mos kelmaydi.}$$

Boshqa tarafdin, ixtiyoriy $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ bazis yo K_A sinfga, yoki K_B sinfga tegishli bo'ladi. 2^0 $A|C = (A|B)(B|C) = -B|C$ xossadan, yo $A|C > 0$, yo $B|C > 0$ bo'lishi mumkin ekani ko'rinadi. 1-holda $C \in K_A$, 2-holda esa $C \in K_B$.

Faktor-to'plam $\mathbf{B}/\Delta$ har bir elementini V vektor fazoning orientatsiyasi deb ataymiz. Orientatsiyalardan birini ajratib olib, uni *musbat* deb ataymiz (ikkinchisini *manfiy* deb). Musbat orientatsiya tanlangan V vektor fazoni orientirlangan fazo deb ataladi. Musbat bazis orientatsiyasini o'n bazislar, manfiy orientatsiyani chap bazislar deb nomlanadi.



V vektor fazo orientatsiyalan bo'lsa, bunday fazo orientirlangan fazo bo'ladi. Bu holda koordinatalar sistemasi $\vec{Oe}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ni o'ng(chap) deyiladi, agar $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - o'ng(chap) bo'lsa. Odatda fazo orientatsiyasi shunday tanlanadiki, o'ng

koordinata sistemasining Ox, Oy, Oz o'qlari $Oxyz$ o'ng qo'l katta, ko'rsatkich va o'rta barmoq yo'nalishiga mos kelsin (7-chizma, a) chap koordinatalar o'qini bunday tanlashda o'q chap qo'lning barmoqlariga mos keladi (7-chizma, b).

Keyingi masalalarda agar bitta koordinatalar sistema haqida gap ketsa, uni o'ng sistema deb qarash qabul qilingan. Shunday qilib, fazoda koordinatalar sistemasi berilsa, bu sistema orientirlangan deb qabul qilinadi.

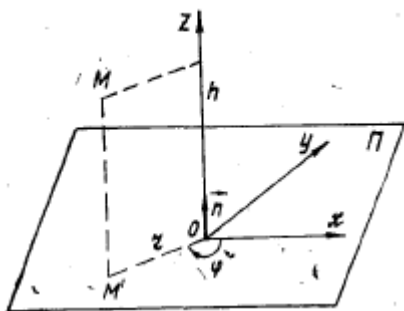
1.3 Fazoda koordinatalarning boshqa sistemalari

Fazoda yuqorida ko'rilgan affin va dekart sistemalari bilan bir qatorda boshqa sistemalar ham mavjud bo'lib, ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1. Silindrik koordinalar. Bu sistema quyidagicha hosil qilinadi. Fazodagi biror P tekislik va undan tayin bir O nuqta olinadi. P ga tegishli va uchi shu O nuqtada bo'lgan l nur belgilanadi hamda l nurning yo'nalishini aniqlovchi

$\vec{i}$ birlik vektor olinadi (ya'ni P da koordinatalarning qutb sistemasi kiritiladi). $\vec{n}$

birlik vektor P ning O dan qo'yilgan normal vektori bo'lsa, $\vec{n}$ ning uchidan qaraganda P ni shu vektor atrofida burishdagi harakatning yo'nalishi soat mili harakatiga teskari bo'lsa, burish burchagini musbat deb olinadi. Bu vaqt fazodagi har bir nuqtaning o'rnini yuqoridagi



8-chizma

berilganlarga nisbatan uchta son to'liq aniqlash mumkin.

Haqiqatdan, M fazodagi biror nuqta bo'lsa, uning P dagi ortogonal proyeksiyasini M' deb belgilasak, $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{n}$, demak, $\overrightarrow{MM'} = h\vec{n}$. M' nuqtaning P qutb sistemasiga nisbatan koordinatalarini r, φ desak, (r, φ, h) sonlar M nuqtaning *silindrik koordinatalari* deb ataladi.

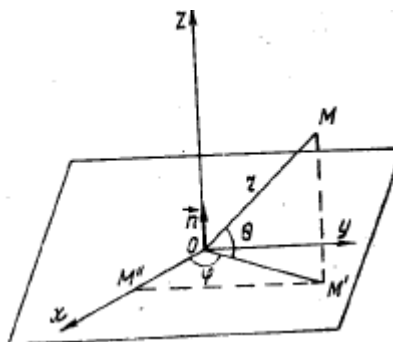
Dekart sistemasini 8-chizmada ko'rsatilgandek qilib tanlab olinsa, M

10-chizma

nuqtaning dekart koordinatalari x, y, z ni shu nuqtaning silindrik koordinatalari r, φ, h orqali ifodalash mumkin:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h. \quad (15)$$

2. Sferik koordinalar. P tekislikda qutb koordinatalari sistemasi



9-chizma

kiritiladi, $\vec{n} \perp P$ birlik vektor qo'yiladi. Fazoda har bir M nuqtaning o'rnini uchta r, φ, θ son bilan aniqlash mumkin, bunda $r = |OM|$, φ - bu $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ vektorlar orasidagi burchak, bu uch son M nuqtaning *sferik koordinatalari* deyiladi va $M(r, \varphi, \theta)$ ko'rinishda

yoziladi. Biz $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ deb faraz qilamiz, bundan

tashqari, xOy koordinatalar tekisligidan “yuqori” turgan nuqtalar uchun

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ va “quyi” yarim fazoga tegishli nuqtalar uchun $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$ olinadi. (9-chizma)

Koordinatalarning dekart sistemasi 9-chizmadagidek tanlab olinsa, sferik va dekart koordinatalarini bo’livchi ushbu formuladan topish mumkin:

$$\begin{aligned}x &= |\overrightarrow{OM'}| \cos \varphi = r \cos \theta \cos \varphi, \\y &= |\overrightarrow{OM'}| \sin \varphi = r \cos \theta \sin \varphi, \\z &= |\overrightarrow{MM'}| = r \sin \theta.\end{aligned} \quad (16)$$

Silindrik va sferik koordinatalar asosan mexanik, matematik fizika fanlarida ko’proq ishlatiladi.

1.4 Fazoda koordinatalarni almashtirish formulalari

Fazodagi biror nuqtaning tayin bir sistemasidagi koordinatalaridan boshqa sistemadagi koordinatalariga o’tishga to’g’ri keladi. Biz shu masalani ikkita affin reper uchun hal qilamiz. $B = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $B' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ affin sistemasi(reperi) berilgan bo’lsin.

I hol. Reperlarning boshlari har xil bo’lib, bazis vektorlari mos ravishda kollinear bo’lsin, ya’ni $O \neq O'$, $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}'_1, \vec{e}_2 \parallel \vec{e}'_2, \vec{e}_3 \parallel \vec{e}'_3$ hamda O ’ning Bga nisbatan koordinatalari a, b, c bo’lsin (10-a chizma). U holda fazodagi ixtiyoriy M nuqtaning B va B’ ga nisbatan koordinatalari mos ravishda x, y, z va x', y', z' bo’lsa. Shular orasidagi bog’lanishni izlayliz:

$$\begin{aligned}M(x, y, z) &\Rightarrow \overrightarrow{OM}(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\M(x', y', z') &\Rightarrow \overrightarrow{O'M}(x', y', z') \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3, \\ \overrightarrow{OO'}(a, b, c) &\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Lekin $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ bo’lgani uchun

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3.$$

Bundan tashqari, bazis vektorlar mos ravishda collinear bo’lgani uchun

$$\vec{e}'_1 = \lambda_1 \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \lambda_2 \vec{e}_2, \vec{e}'_3 = \lambda_3 \vec{e}_3,$$

demak,

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (\lambda_1 x' + a)\vec{e}_1 + (\lambda_2 y' + b)\vec{e}_2 + (\lambda_3 z' + c)\vec{e}_3. \quad (17)$$

Bundan

$$x = \lambda_1 x' + a, \quad y = \lambda_2 y' + b, \quad z = \lambda_3 z' + c. \quad (18)$$

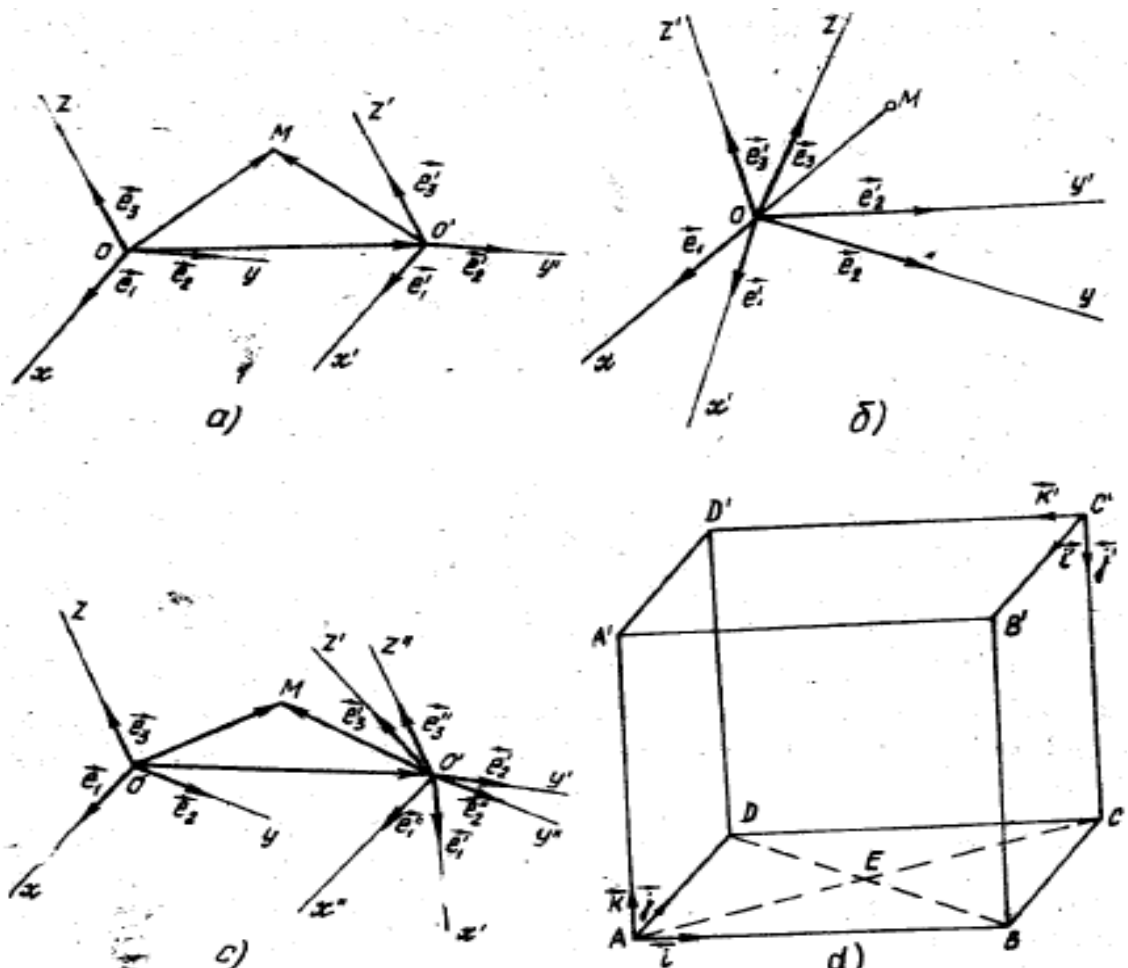
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ bo'lsa, ya'ni bais vektorlar mos ravishda o'zaro teng bo'lsa, yuqoridagi tengliklar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \quad (19)$$

Bu formulalar ba'zan *koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulalari* deb yuritiladi.

II hol. Reperlarning boshlari bir xil, bazis vektorlarning yo'nalishlari esa har xil bo'lsin, u holda (10-b chizma)

$$\begin{aligned} O = O', \quad \vec{e}_1' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$



10-chizma

bo'lsin. Endi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (20)$$

matritsani tuzamiz. Bu matritsani *bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi* deb ataymiz, $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazis vektorlar bo'lgani uchun A matritsaning determinanti noldan farqlidir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (21)$$

Aks holda, detirminantning bir satri qolgan ikki satrining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lib, $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ ham chiziqli bog'liq bo'lar edi.

Fazoda ixtiyoriy M nuqtaning B va B' bazisga nisbatan koordinatalarini mos ravishda x, y, z va x', y', z' deb olsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{OM} &= x'\overrightarrow{e'_1} + y'\overrightarrow{e'_2} + z'\overrightarrow{e'_3},\end{aligned}$$

ya'ni

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = x'\overrightarrow{e'_1} + y'\overrightarrow{e'_2} + z'\overrightarrow{e'_3}.$$

Endi bu tenglikka $\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}$ ning qiymatlarini qo'yib, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ga nisbatan gruppallasak,

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} = (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\overrightarrow{e_1} + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\overrightarrow{e_2} + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\overrightarrow{e_3},$$

bundan

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \quad (22)$$

Ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (23)$$

matritsa *almashtirish matritsasi* deb ataladi. (23) va (20) matritsalar o'zaro transponirlangan matritsalaridir. Bu matritsalar kvadrat matritsalar bo'lgani uchun ularning uchunchi tartibli determinantlari o'zaro teng bo'lib, (21)ga asosan (23) ning determinanti noldan farqlidir, demak (22) ni x', y', z' ga nisbatan yechsak,

$$\begin{aligned}x' &= a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z, \\ y' &= a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z, \\ z' &= a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z\end{aligned} \quad (24)$$

hosil bo'lib, bunda

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A}; (i, k = 1, 2, 3),$$

A_{ik} esa A matritsa a_{ki} elementining ad'yunktidir, ya'ni algebraik yo'ldiruvchisidir.

III hol. Reperlar fazoda ixtiyoriy vaziyatda joylashgan, B reper berilgan bo'lib, shu sistemaga nisbatan B' reper elementlarining koordinatalari quyidaicha bo'lsin:

$$\begin{aligned} O'(a, b, c), \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (*)$$

B dan B' ga o'tish uchun biz yana shunday uchinchi $B''(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3)$ effin reperini qaraymizki, u B ni $\vec{OO'}$ vektor qadar parallel ko'chirishdan hosil bo'lsin. U holda fazodagi ixtiyoriy M nuqtaning koordinatalarini bu sistemalarga nisbatan mos ravishda $x, y, z; x'', y'', z''$ va x', y', z' deb belgilasak (10- c chizma), B bilan B'' orasidagi bog'lanish (19) ga asosan

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \quad z = z'' + c, \quad (25)$$

B'' bilan B' orasidagi bog'lanish esa (24) ga asosan

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y'' &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z'' &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}$$

buni (25) ga qo'ysak, izlanayotgan quyidagi ifoda hosil qilinadi:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{aligned} \quad (26)$$

(26) ni x', y', z' ga ((*) shart o'rinli bo'lgani uchun) nisbatan ham yechish mumkin, demak, M nuqtaning B ga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa, shu nuqtaning koordinatalarini B' ga nisbatan ham topish mumkin.

Bir affın sistemasidan ikkinchi affın sistemaga o'tish 12 ta parametrga bog'liqdir, chunki (26) ga almashtirishni aniqlaydigan ushbu 12 ta parametr kiradi:

$$a, b, c, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}.$$

Agar B, B' dekart reperlari bo'lsa, ularni almashtirish 12 ta parametrga emas, balki eng ko'pi bilan 6ta parametrga bog'liq bo'lib qoladi. Haqiqatdan ham, $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$ va $\vec{e}'_1 = \vec{i}', \vec{e}'_2 = \vec{j}', \vec{e}'_3 = \vec{k}'$ bo'lsa, (6) ni e'tiborga olsak,

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad \begin{matrix} (27) \\ (28) \end{matrix}$$

Demak, (26) dagi 12 ta parametr (27) va (28) dagi 6 ta shartni qanoatlantirishi kerak, u holda jami 6 ta ixtiyoriy parametr qoladi. “ Algebra va sonlar nazariyasi” kursidan ma'lumki, (25) ko'rinishdagi kvadrat matritsaning elementlari (27) va (28) shartlarning barchasini qanoatlantirsa, bunday matritsa *ortogonal matritsa* deb ataladi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: bir dekart reperidan ikkinchi dekart reperiga o'tish matritsasi *orthogonal matritsadan* ibarat.

1-misol. Yangi affın reperning boshi eski reperga nisbatan $O'(0,3,-1)$ nuqtada, bazis vektorlar $\vec{e}'_1(1,3,0), \vec{e}'_2(0,-3,1), \vec{e}'_3(1,1,-2)$ bo'lsa, bu reperlarni almashtirish formulalarini yozing:

Yechish: berilishiga ko'ra:

$$\begin{aligned} a &= 0, b = 3, c = -1 \\ a_{11} &= 1, a_{21} = 3, a_{31} = 0, \\ a_{12} &= 0, a_{22} = -3, a_{32} = 1, \\ a_{13} &= 1, a_{23} = 1, a_{33} = -2. \end{aligned}$$

Bu qiymatlarni (26) ga qo'ysak,

$$\begin{aligned} x &= x' + z', \\ y &= 3x' - 3y' + z' + 3, \\ z &= y' - 2z' - 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Endi eski bazisdan yangi bazisga o'tish formulasini topish uchun bu sistemani x', y', z' ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z, \\y' &= \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1, \\z' &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z.\end{aligned}$$

2-misol. Qirrasini a ga teng bo'lgan ABCDA'B'C'D' kub berilgan. $B(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ va $B'(C, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ dekart reperlari 10-d chizmada ko'rsatilganidek aniqlangan. Shu reperlarni almashtirish formulalarini yozing hamda E nuqtaning koordinatalarini ikkala reperda aniqlang.

Yechish. Avvalo C' nuqtaning B reperga nisbatan koordinatalarini topaylik.

$$\overrightarrow{AB} = a\vec{i}, \overrightarrow{BC} = a\vec{j}, \overrightarrow{CC'} = a\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}, \quad C'(a, a, a).$$

Endi $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ning kordinatalari topaylik, chizmadan

$$\vec{i} = -\vec{j}, \vec{j} = -\vec{k}, \vec{k} = -\vec{i} \Rightarrow \vec{i}'(0, -1, 0), \vec{j}'(0, 0, -1), \vec{k}'(-1, 0, 0).$$

$\vec{e}_1' = \vec{i}', \vec{e}_2' = \vec{j}', \vec{e}_3' = \vec{k}'$ desak, (26) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = -z' + a, \quad y = -x' + a, \quad z = -y' + a. \quad (\Delta)$$

Bu izlanayotgan formuladir.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} \Rightarrow B \text{ reperda } E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right).$$

E ning B' reperdagi koordinatalarini topish uchun E ning B dagi koordinatalarini (Δ) dagi x, y, z ning o'rniga qo'yamiz:

$$\begin{aligned}\frac{a}{2} &= -z' + a, & x' &= \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} &= -x' + a & \text{yoki } y' &= a \\ 0 &= -y' + a & z' &= \frac{a}{2}\end{aligned}$$

bulardan

$$E\left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right).$$

1.5 Koordinatalarni bog'lovchi tenglama va tengsizliklarning geometrik talqini

Faraz qilaylik, fazoda biror $B = (\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ affın reper berilgan bo'lib, $F(x, y, z)$ ifoda ham berilgan bo'lsin (bu ifodada x, y, z o'zgaruvchilardan kamida bittasi ishtirok etsin).

x_0, y_0, z_0 sonlar uchun $F(x_0, y_0, z_0)$ ifoda haqiqiy sonlardan iborat bo'lsa x_0, y_0, z_0 sonlar $F(x, y, z)$ ifodaning aniqlanish sohasiga tegishli deyiladi, bu sonlar uchligi esa berilgan reperda fazodalanish sohasining geometrik ma'nosi fazodagi biror geometrik figuradan iborat, jumla haqiqiy dan, bu figura butun fazodan, fazoning bir qismidan, bo'sh to'plamdan va hakazolardan iborat bo'lishi mumkin.

1 –misol. $F(x_0, y_0, z_0) = x^2 + 2y - z$ bu ifodada x, y, z ning har qanday haqiqiy qiymatlarida ma'noga ega, demak, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'lib, u fazodagi barcha nuqtalar to'plamidir.

2 –misol. $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z$ bu ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun $x \neq 0, y \neq 0$ shart bajarilishi kerak, demak, bu ifodaning aniqlanish sohasi fazodagi xOz, yOz koordinata tekisliklaridan boshqa barcha nuqtalar to'plamini tashkil etadi.

3 –misol. $F(x, y, z) = \sqrt{-x^2 - y^2 - z^4}$ ifoda faqatgina $x = y = z = 0$ haqiqiy qiymatga ega bo'lib fazodagi tasviri bittagina nuqtadan iborat.

Endi

$$F(x, y, z) = 0$$

ko'rinishdagi tenglamani ko'raylik, bu tenglamani qanoatlantiruvchi barcha sonlar uchligi uning yechimlari deyilib, fazodagi biror nuqtalar to'plamini aniqlaydi (shuni ta'kidlash lozimki agar x, y, z , ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida tenglama qanoatlantirilsa, u ayniyat bo'lib qoladi.

Bunday to'plamni sirt deb ataylik

Endi sirt tenglamasini ta'rifini beraylik

Ta'rif. Agar Φ sirtga tegishli har bir nuqtaning koordinatalari $F(x, y, z) = 0$ tenglamani qanoatlantirib Φ ga tegishli bo'lmagan birorta ham nuqtaning koordinatalari uni qanoatlantirmasa, ya'ni $\forall (x_0, y_0, z_0) \in \Phi \Leftrightarrow F(x_0, y_0, z_0)$ bo'lsa, bu tenglama Φ sirtning tenglamasi deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, sirtning tenglamasi berilgan bo'lsa, fazodagi har bir nuqta shu sirtga tegishli yiki tegishli emas degan savolga yagona javob topiladi. Buni aniqlash uchun nuqtaning koordinatalarini tenglamadagi o'zgaruvchilar o'rniga mos ravishda qo'yib hisoblash kerak, agar tenglik o'rinli bo'lsa, nuqta shu sirtga tegishli, aks holda esa tegishli emas.

1-misol. Fazoda $F(x, y, z) = x = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plamini (sirtini) topaylik. Tenglamaning berilishidan ko'rinib turibdiki (y va z lar ishtirok etmagani uchun ixtiyoriy sonlar deb olinishi mumkin), izlanayotgan nuqtalar to'plamining har bir nuqtasi uchun uning birinchi koordinatasi ya'ni absissasi nolga tengdir. Fazodagi bunday nuqtalar to'plami yOz koordinatalar tekisligidan iboratdir, demak, berilgan tenglama bilan aniqlangan sirt yOz tekisligidan iborat.

2-misol. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ tenglama bo'sh to'plamni ifodalaydi, chunki fazoda koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi birorta ham nuqta yo'q.

3-misol. $F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$ tenglama markazi (a, b, c) nuqtada radiusi r ga teng bo'lgan sferani aniqlaydi

Endi $F(x, y, z) > 0 (< 0)$ ifodani tekshiraylik . Bu ifoda ham $F(x, y, z)$ funksiya aniqlanish sohasining shunday qismini aniqlaydiki , uning uning barcha nuqtalarida va faqat shu nuqtalarida yuqoridagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4 – misol. $F(x, y, z) = z > 0$. Bu tengsizlik shunday nuqtalar to'plamini aniqlangki, u nuqtalarning har birining pplikatasi musbat sondan iborat.

Ravshanki, bunday nuqtalar to'plami xOy koordinatalar tekisligi bilan chegaralanib , applikatalar o'qining musbat qismini o'z ichiga oluvchi yarim fazodir. xOy tekislik nuqtalar bunga kirmaydi.

5-misol. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0$. Fazoda bu tengsizlik bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plami radiusi 1 birlikka teng, markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera bilan chegaralangan va shu sfera bilan chegaralangan va shu sfera markazini o'z ichiga oladigan fazo qismidir.

Ba'zan birgina tenglama yoki tengsizlik bilan aniqlanadigan shaklgina emas , balki tenglamalar sestemasi bilan, yoki tenglama va tengsizliklar sistemasi bilan , yoki faqat tengsizliklar sistemasi bilan aniqlanadigan shakllarni tekshirishga to'g'ri keladi, masalan,

$$F_1(x, y, z) = 0$$

$$F_2(x, y, z) = 0$$

sistema bilan aniqlanadigan shakl har bir tenglama bilan aniqlanadigan shakllar kesishmasidan iborat shaklni aniqlaydi, bunday shaklni biz xozircha chiziq deb ataylik, demak fazodagi chiziq umumiy ikki sirtning kesishmasi deb qaraladi.

6 –misol

$$F_1(x, y, z) = x = 0$$

$$F_2(x, y, z) = y = 0$$

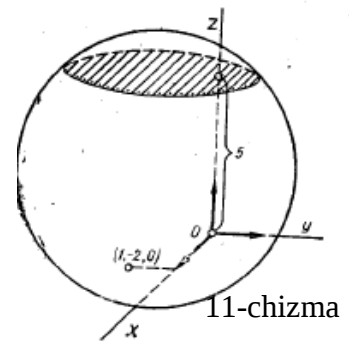
Bu sestema bilan aniqlanadigan chiziq applikatalar chizig'idir, chunki birinchi tenglama yOz tekislikni , ikkinchi tenglamaesa xOz tekislokni aniqlab ulaning kesishmasi esa $yOz \cap xOz = Oz$ ni aniqlaydi

7 –misol.

$$F_1(x, y, z) = z = 5$$

$$F_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 36 = 0$$

tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasi applikaatasi faqat 5 ga teng bo'lgan nuqtalarini aniqlaydi: bunday nuqtalar to'plami Oz o'qning musbat qismini koordinatalar boshidan 5 birlik masofa kesib o'tib xOy tekislikka parallel tekislikdir.(11-chizma)

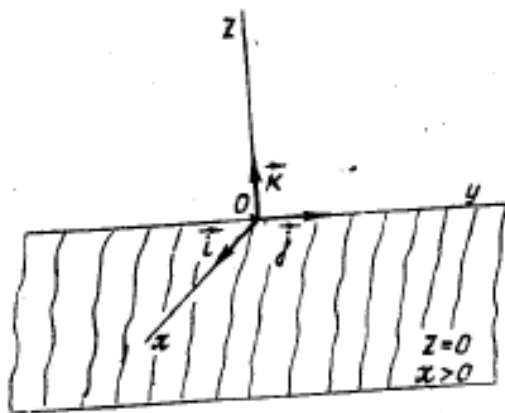


Ikkinchi tenglama esa markazi (1,-2,0) nuqtada va radiusi 6 birlik bo'lgan sferani aniqlaydi. Demak, bu figuralarning kesishmasi $z=5$ tekislikdagi

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 11 \text{ tenglamabilan aniqlanuvchi aylanadir}$$

8-misol

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = z = 0 \\ F_2(x, y, z) = x \geq 0 \end{cases}$$



12-chizma

Bundagi birinchi tenglama zOy tekislikni, ikkinchi tengsizlik esa yOz tekislik bilan aniqlanuvchi va absissalar o'qining musbat qismini o'z ichiga oluvchi yarim fazodir. bu yarim fazoning xOy tekislik bilan kesishmasi Oy to'g'ri chiziq bilan aniqlanuvchi va absissalar o'qining musbat qismini o'z ichiga olgan yarim tekislikdir.

II bob. Ba'zi murakkabroq masalalarni koordinatalar metodi bilan yechish

2.1-§ Koordinatalar metodining stereometriya masalalarini yechishga tadbiqu.

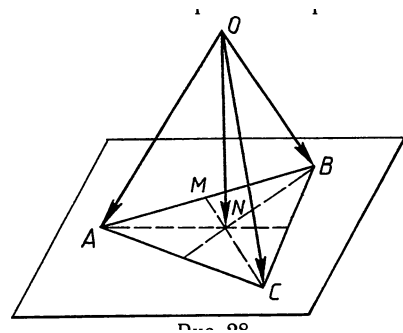
1-masala. $\vec{Oe_1e_2e_3}$ affin koordinatalar sistemasida

o'zining korrdinaralari quyidagicha bo'lgan:

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) C(x_3, y_3, z_3)$$

uchburchak koordinatalari og'irlik markazini

(medianalar kesishish nuqtasi) toping.



Yechish: N- uchburchak ABC ning og'irlik markazi

bo'lsin, (x, y, z) - bnuqtaning koordinatalari deb belgilaylik. M- AB kesmaning

o'rtasi bo'lsin.(13-chizma) Uchburchak qoidasiga ko'ra

13-chizma

$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ va $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$. Bu tengliklarni qo'shsak,

$$2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AM} + \vec{BM}).$$

M- AB kesmaning o'rtasi bo'lganidan $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$ bo'ladi. Natijada

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad (30)$$

at eng bo'ladi. Endi uchburchak qoidasidan $\vec{ON} = \vec{OC} + \vec{CN}$ deb olviz, lekin

$$\vec{CN} = \frac{2}{3}\vec{CM} \text{ bo'lganidan, } \vec{ON} = \vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{CM} = \vec{OC} + \frac{2}{3}(\vec{CO} + \vec{OM}) = \frac{1}{3}\vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{OM}.$$

Bu formulaga $\vec{OM}$ ning qiymatini (30) formuladan qo'ysak,

$$\vec{ON} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}). \quad (31)$$

hosil bo'ladi. Lekin $\vec{ON}, \vec{OA}, \vec{OB}$ va $\vec{OC}$ vektorlar N, A, B va C nuqtaning radius

vektorlari bo'lganligi uchun bu vektorlar $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bazisda

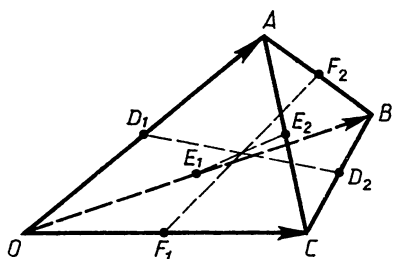
$\vec{ON}(x, y, z), \vec{OA}(x_1, y_1, z_1), \vec{OB}(x_2, y_2, z_2), \vec{OC}(x_3, y_3, z_3)$ koordinatalarga egadir.

(31) formuladan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \quad (32)$$

2-masala. Tetraedrning qarama-qarshi qirralarining o'rtasini birlashtiruvchi

kesmalar bir nuqtada kesishishini va shu nuqtada teng ikkiga bo'linishini isbot qiling.



Yechish : OABC- berilgan tetraedr bo'lsin. $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$ - nuqtalar esa mos ravishda OA va BC, OB va AC, OC va AB qirralari o'rtasi bo'lsin.(14-chizma)

Affin koordinatalar sistemasi $\vec{Oe_1e_2e_3}$ ni shunday tanlab olaylikki natijada $\vec{e_1} = \vec{OA}, \vec{e_2} = \vec{OB}, \vec{e_3} = \vec{OC}$ bo'lsin. Bunday koordinatalar sistemasida tetraedrning uchlari O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) koordinatalarga ega bo'ladi.

14-chizma

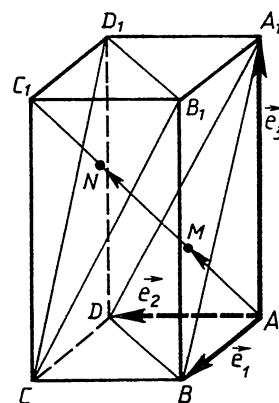
D_1D_2 kesmaning o'rtasi M nuqtaning koordinatalarini topamiz. D_1 va D_2 - OA va BC kesmalar o'rtalari, shuning uchun ularning koordinatalari

$D_1(\frac{1}{2}, 0, 0), D_2(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kabi bo'ladi. Demak, M nuqtaning koordinatalari

$M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ kabi bo'ladi.

Xuddi shu usul bilan E_1E_2 va F_1F_2 kesmalar o'rtalarini koordinatalarini topsak, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ bo'ladi, demak nuqtalar M nuqta bilan ustma-ust tushadi.

3-masala. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ parallelepiped berilgan, M va N nuqtalar – uchburchak A_1BD va B_1D_1C larning og'irlik markazi(15-chizma). $\vec{Oe_1e_2e_3}$ affin koordinatalar



sistemasini $\vec{e_1} = \vec{AB}, \vec{e_2} = \vec{AD}, \vec{e_3} = \vec{AA_1}$ deb tanlab olaylik. Bu sistemada 15-chizma parallelepipedning uchlari A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0),

$A_1(0,0,1), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1)$ koordinatalarga ega, shuning uchun (32)

formuladan M va N nuqtalar koordinatalarini topylik: $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), N(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

$\vec{AM}, \vec{MN}$ va $\vec{NC_1}$ vektorlar koordinatalari $\vec{AM}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \vec{MN}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \vec{NC_1}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ gat

eng bo'ladi. Bu yerdan $\vec{AM} = \vec{MN} = \vec{NC_1}$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun M va N nuqtalar AC_1 deagonalda yotadi va uni uchta teng qismga ajratadi.

2.2-§ Masalalarni koordinatalar metodi bilan yechish bosqichlari

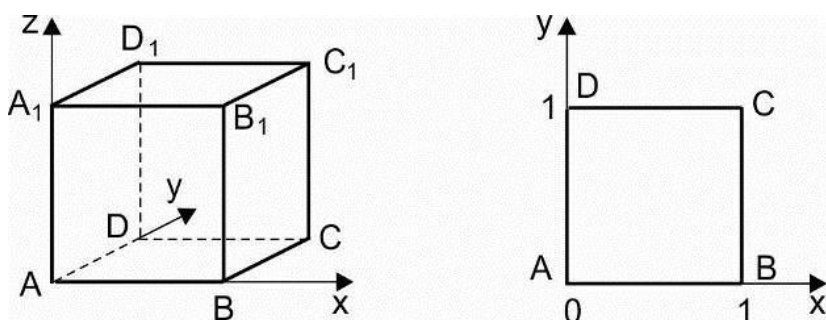
2.2.1. Koordinatalar metodi orqali geometrik masalalarni yechish algoritmi

quyidagicha bo'ladi:

- fazoda masala shartidan kelib chiqqan holda shaklni yaqqol aks ettira oladigan koordinatalar sistemasini tanlab olamiz;
- koordinatalar sistemasida masalani yechish uchun kerakli nuqtalar koordinatalari topiladi;
- koordinatalar metodining asosiy tushunchalari orqali masalani yechamiz;
- analitik munosabatlardan geometrik munosabatlarga o'tamiz.
- Masalalarni yechishda ba'zi asosiy ko'pyoqlarning koordinatalarini bilish zarur. Quyida biz ba'zi bir ko'pyoqlarni koordinatalar sistemasiga joylashtirish orqali aniqlanilgan uzunliklarini ko'rib o'tamiz:

1. Birlik kub

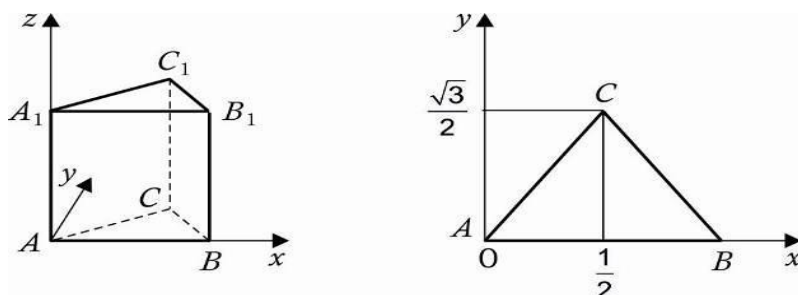
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



Koordinata uzunliklari:

$A(0,0,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $B_1(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $D_1(0,1,1)$, $C(1,1,0)$, $C_1(1,1,1)$.

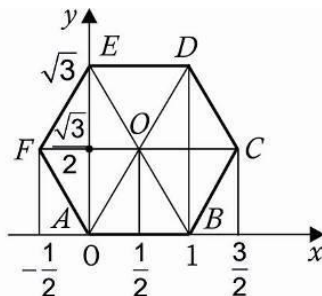
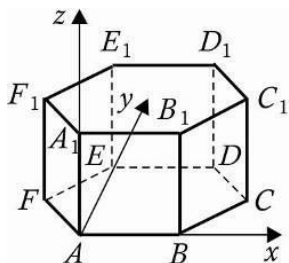
2. To'g'ri burchakli uchburchakli prizma $ABCA_1 B_1 C_1$ hamma qirralari 1 ga teng.



Koordinata uzunligi:

$A(0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), B_1(1,0,1), C(0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C_1(0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}, 1).$

3. To'g'ri oltiburchakli prizma $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ hamma qirralari 1 ga teng.

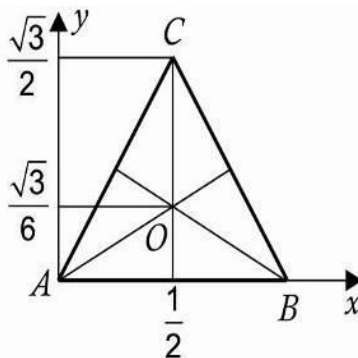
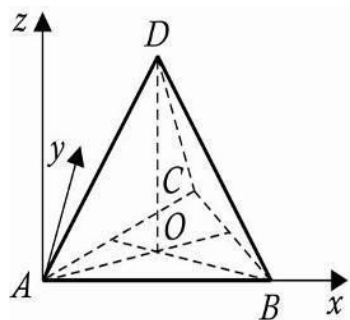


Koordinata uzunliklari

$A(0,0,0), A_1(0,0,1), B(1,0,0), B_1(1,0,1), C(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0), C_1(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1),$

$D(1, \sqrt{3}, 0), D_1(1, \sqrt{3}, 1), E(0, \sqrt{3}, 0), E_1(0, \sqrt{3}, 1), F(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0), F_1(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1).$

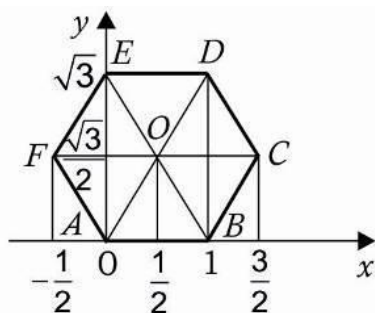
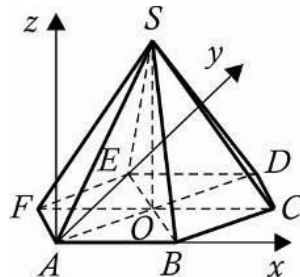
4. to'g'ri uchburchakli piramida (tetradr) ABCD hammasi qirralari 1 ga teng.



Koordinata uzunliklari

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), D(0,5; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

5. To'g'ri to'rtburchakli piramida SABCD, hamma qirralari 1 ga teng.



Koordinata uzunliklari:

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), D(1, \sqrt{3}, 0), E(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), F(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), S(0.5, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}).$$

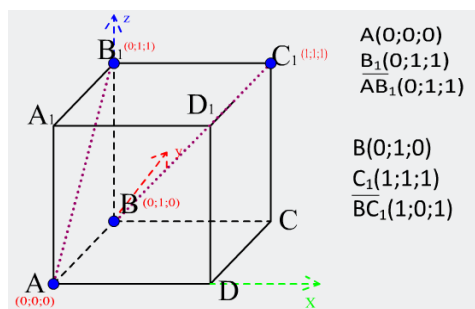
2.2.2. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish algoritmi quyidagicha bo'ladi:

- rasmda ko'rsatilgan to'g'ri chiziqlar tasvirini yasaymiz(ularni yo'nalish beramiz ya'ni ularning vektorlarini hosil qilamiz)
- shaklni koordinatalar sistemasiga chizamiz
- vektorlar oxirlarining koordinatalarini topamiz
- vektorlar koordinatasini topamiz
- topilgan koordinatalarni "vektorlar orasidagi burchak kosinusi" formulasiga qo'yamiz
- shundan so'ng (agar masala shartida talab qilinsa), kosinusni bilgan holda, burchak o'lchovini topamiz.

Bu turdagi masalalar algoritmini aniq tushunish uchun quyida sh turdagi masalalarni ko'rib o'tamiz:

1-masala. Birlik kub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ da AB_1 va BC_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish : Kubga koordinatalar sistemasini joylashtiramiz



- Kesmalar oxirlarining koordinatalarini topamiz:

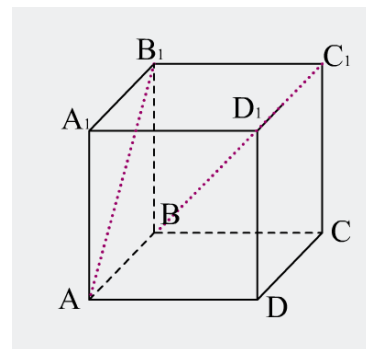
$$A(0,0,0), B(0,1,0), B_1(0,1,1), C_1(1,1,1)$$

- vektor koordinatalarini topamiz:

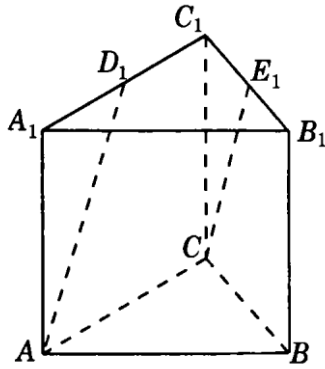
$$\overrightarrow{AB}(0,1,1) \quad \overrightarrow{BC_1}(1,0,1)$$

- burchak kosinusini topamiz.

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$



2-masala. Uchburchakli to'g'ri prizma $ABCA_1B_1C_1$ hamma qirralari 1ga



16-chizma

teng, AD_1 va CE_1 to'g'ri chiziqlar orasidaagi

burchak kosinusini toping. D_1 va E_1 - mos

ravishda A_1C_1 va B_1C_1 qirralarining o'rtalari. (16-

chizma)

Yechish: 1) masala shartidan koordinata

nuqtalarini aniqlaymiz:

$$A(0,0,0), D_1\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), E_1\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right).$$

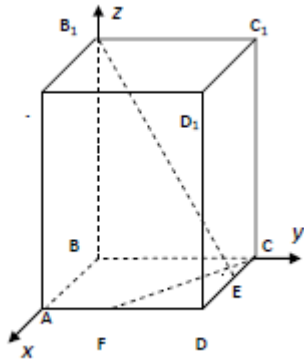
2) vektor koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{AD_1}\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right) \text{ va } \overrightarrow{CE_1}\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$$

3) vektorlar orasidagi burchakni topamiz:

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \cdot 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 1}} = 0,7$$

Javob: 0.7



17-chizma chizma)

3-masala To'rtburchakli to'g'ri prizma $ABCD A_1B_1C_1D_1$

tomonlari 2 ga, balandligi 4 ga teng bo'lsa, CD kesma

o'rtasi E nuqta, AD kesma o'rtasi F nuqta. CF va B_1E

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping. (17-

Yechish: parallelepipedni to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga joylashtiramiz. 17-chizmada ko'rsatilgandek.

B_1, E, C, F nuqtalar koordinatalarini bu sistemadan topamiz:

$$B_1(0,0,4), E(1;2;0), C(0;2;0), F(2;1;0).$$

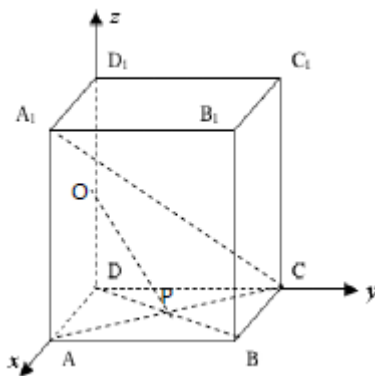
Demak, $\overrightarrow{CF}(2;-1;0)$, $\overrightarrow{B_1E}(1;2;-4)$ bo'ladi. Bu vektorlar orasidagi burchak kosinusi formulasi orqali:

$$\cos(\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{B_1E}) = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0$$

Ya'ni izlanayotgan burchak $\alpha = 90^\circ$.

Javob: 90°

4-masala. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning DD_1 qirrasining o'rtasi O nuqta joylashgan. P nuqta kubning ABCD yoqining diagonalalar kesishish nuqtasi. Agar



18-chizma

$DO : DD_1 = 1 : 5$ nisbatda bo'lsa, kubning C nuqtasidan chiqqan kub diagonalasi to'g'ri chizig'i va OP to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak kosinusini toping.

Yechish: kubni 18-rasmda ko'rsatilgani kabi koordinatalar sistemasiga joylashtiramiz. Shartli

ravishda kub qirralarini bir birlik qilib olamiz. Agar boshqa biror arfiy ifoda yordamida belgilsak ham, ular baribir qisqarib ketadi. P, O, C va A_1 nuqtalar koordinatalarini aniqlaymiz:

$P(0,5;0,5;0)$, $O(1;1;0,5)$, $C(0;1;0)$, $A_1(1;0;1)$.

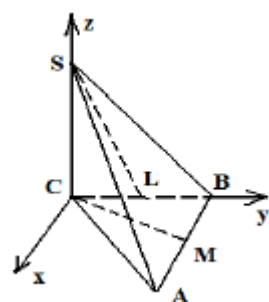
Koordinatalar orqali to'g'ri chiziq vektorlarini tuzamiz, ularning koordinatalarini aniqlayliz:

$$\overrightarrow{OP}\{-0,5;-0,5;-0,2\}, \overrightarrow{A_1C}\{-1;1;1\}$$

Vektorlar orasidagi burchakni topamiz:

$$\cos \alpha = \frac{|0,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 1 - 0,2 \cdot 1|}{\sqrt{(-0,5)^2 + (-0,5)^2 + (-0,2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

Javob: $\frac{\sqrt{2}}{9}$



5-masala. SABC piramida asosi ABC teng tomonli uchburchakdan iborat bo'lib, tomoni $2\sqrt{2}$ ga teng. SC

piramida yon qirradi asosga perpendikulyar va 1 ga teng. S nuqta va BC qirra o'rtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq va C nuqta va AB qirra o'rtasidan o'tuvchi ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish: piramidani dekart koordinatalar sistemasiga C nuqta koordinatalar boshi bo'ladigan qilib joylashtiramiz.

M va L nuqtalarni mos ravishda AB va BC qirralar o'rtasi deb belgilaymiz. S, L, C va M nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz:

$S(0;0;1)$, $L(0;\sqrt{2};0)$, $C(0;0;0)$ bo'lishi koordinatalar sistemasida yaqqol aks etgan.

Endi M nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz, buning uchun teng tomonli uchburchak xossalariidan foydalanamiz. Teng tomonli uchburchak hamma burchaklari 60° dan bo'ladi va M nuqta AB tomonni teng ikkiga bo'lganidan u mediana va shu bilan birga teng tomonli uchburchak uchun bisektrisa ham bo'ladi, shuning uchun $\angle ACM = \angle MCB = 30^\circ$ bo'ladi.

Teng tomonli uchburchak uchun $h = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$x(CM) = CM \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $y(CM) = CM \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ gat eng

bo'ladi. To'g'ri chiziq vektorlari $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{SL}$ koordinatalarini aniqlaymiz:

$\overrightarrow{CM} \left\{ \frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4}; 0 \right\}$, $\overrightarrow{SL} \{0; \sqrt{2}; -1\}$. Yuqorida ko'rilgan masalalar singari tartibdan

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ekanini topamiz.

Javob: 45° .

2.2.3. Ikki tekislik orasidagi burchakni topishga doir masalalarni yechish algoritmi:

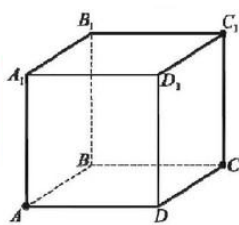
Bu turdagi masalalarni yechish algoritmini tuzishdan avval, ikki tekislik



orasidagi burchak nima ekanligi haqida so'z yuritsak.

Ikki o'zaro kesishuvchi tekisliklar ikki yoqli

burchaklarni hosil qiladi: ikki yoqli burchak kattaligi unga



mos chiziqli burchak orqali o'lchanadi. Ikki yoqli burchakning chiziqli burchagini yasash uchun tekisliklar kesishish chizig'idan ixtiyoriy nuqtani tanlab olamiz va tekisliklardan shu nuqtaga perpendikulyarlar nurlar o'tkazamiz. Bu nurlar orqali hosil bo'lgan burchak ikki yoqli burchak chiziqli burchagini tashkil etadi.

Qoida. Fazoda ikki tekislik orasidagi burchak bu tekisliklardagi normallar orasidagi burchak moduliga teng.

Shunday qilib, agar biz normal vektor koordinatalarini topsak, vektorlar orasidagi burchak kosinusi formulasi orqali tekisliklar orasidagi izlanayotgan burchakni topish mumkin. Normal- urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq. Kub shaklida normal yaqqol ko'rinib turadi. Asos tekislik (ABCD) uchun AA_1, BB_1, DD_1 va CC_1 yoqlari normal bo'ladi, DD_1C_1C asos uchun esa- AD, CB, A_1D_1 va C_1B_1 normal bo'ladi.

Agar tekisli o'zining tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bilan berilgan bo'lsa, u holda tekislik normal vektori $\vec{n}\{A; B; C\}$ koordinatalarga ega bo'ladi. Tekislik tenglamasini hosil qilish uchun uchinchi tartibli detirminantdan foydalanamiz, bunda biz Sarryus qoidasi asosida hisoblaymiz.

Faraz qilaylik hech bir uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik berilgan bo'lsin. Bu tekislik tenglamasini koordinatalar orqali ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Bu matritsani hisoblab berilgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Ikkila tekislik normallarini topganimizdan so'ng ikki kesishuvchi tekisliklar orasidagi burchakni ikki normal orasidagi burchak formulasi orqali hisoblash mumkin:

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \text{ yoki } \cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \text{ bu yerda}$$

$n_1\{A_1; B_1; C_1\}$ - $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tekislik normal vektori, $n_2\{A_2; B_2; C_2\}$ -

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekislik normal vektori.

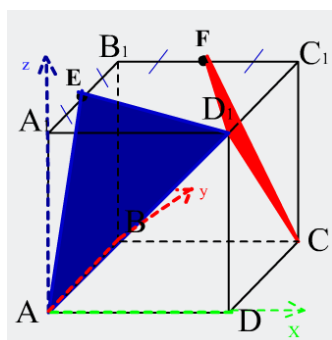
2.2.4. Ikki tekislik orasidagi burchakni topishga doir masalalarni yechish algoritmi:

- koordinatalar orqali tekisliklar tenglamasini tuzamiz
- tekislik tenglamasidan normal vektor koordinatalarini topamiz.
- normallar orasidagi burchakni berilgan formula orqali topamiz

Bu turdagi masalalar algoritmini aniq tushunish uchun quyida shu turdagi masalalarni ko'rib o'tamiz:

1-masala Birlik kubda ABCD $A_1B_1C_1D_1$ AD_1E va D_1FC tekisliklar orasidagi burchakni toping. E va F- mos ravishda A_1B_1 va B_1C_1 yoqlarning o'rtalaridir.

Yechish:



kubga dekart koordinatalar sistemasini koordinatalar boshi A nuqtada bo'ladigan qilib joylashtiramiz.

Tekisliklar o'tadigan nuqtalar koordinatalarini topamiz

$A(0;0;0)$, $E(0;0,5;1)$, $D_1(1;0;1)$, $F(0,5;1;1)$ va $C(1;1;0)$

Bu nuqtalar koordinatalari orqali tekislik tenglamasini tuzamiz va ular orqali normal vektor koordinatalarini

topamiz: $(FD_1C): D_1(1;0;1)$, $F(0,5;1;1)$, $C(1;1;0)$

$$\begin{vmatrix} x-0,5 & y-1 & z-1 \\ 1-0,5 & 0-1 & 1-1 \\ 1-0,5 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ matritsani hisoblab,}$$

$x+0,5y+0,5z-1,5=0$ - (FD_1C) tekislik tenglamasi, bundan $\vec{n}_1\{1;0,5;0,5\}$

$(AED_1): A(0;0;0)$, $E(0;0,5;1)$, $D_1(1;0;1)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 0,5-0 & 1-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \text{ matritsani hisoblab, } 0,5x+y-0,5z=0 \text{ -(AED}_1\text{) tekislik}$$

tenglamasi, bundan $\vec{n}_2\{0,5;1;-0,5\}$

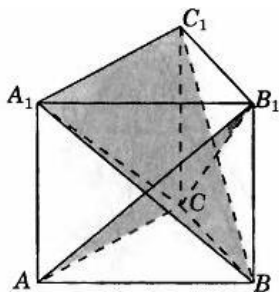
Tekisliklar orasidagi burchakni hisoblaymiz:

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,5|}{\sqrt{1^2 + 0,5^2 + 0,5^2} \cdot \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2}} = 0,5 \text{ demak } \varphi = 60^\circ$$

Javob: $\varphi = 60^\circ$

2-masala. Uchburchakli to'g'ri prizma $ABCA_1B_1C_1$ hamma yoqlari 1 ga teng.

ACB_1 va BA_1C_1 tekisliklar orasidagi burchak kosinusini toping.



1) $A(0;0;0)$, $B_1(1;0;1)$, $C(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ koordinatalar orqali

(AB_1C) tekislik tenglamasini tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 0,5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ tekislik tenglamasi: } \sqrt{3}x - y - \sqrt{3}z = 0, \text{ bundan normal vektor}$$

koordinatalari $\vec{n}_1\{\sqrt{3};-1;\sqrt{3}\}$

2) $A_1(0;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C_1(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$ koordinatalar orqali (A_1BC_1) tekislik

tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0,5-0 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Bundan tekislik tenglamasi $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z = 0$, demak normal vektor

$$\vec{n}_2 \{ \sqrt{3}; -1; \sqrt{3} \}$$

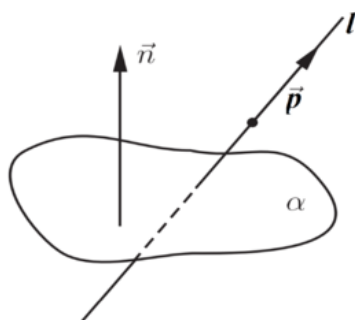
3) (AB_1C) va (A_1BC_1) tekisliklar orasidagi burchak kosinusini topamiz:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1+3} \cdot \sqrt{3+1+3}} = \frac{1}{7}.$$

Javob: $\frac{1}{7}$.

2.2.5 Berilgan tekislik va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topishga doir masalalarni yechish algoritmi:

- masala sharti asosida to'g'ri chiziq va tekislikni ta'svirlaymiz(yo'nalish beramiz, ya'ni vektor)
- Shaklni koordinatalr sistemasida akslantiramiz
- Yo'naltirilgan vektorning oxirlari koordinatalarini topamiz
- Vektorning koordinotalarini topamiz
- Tekislik normal vektor kooordinatalari topiladi



19-CHUZIMA

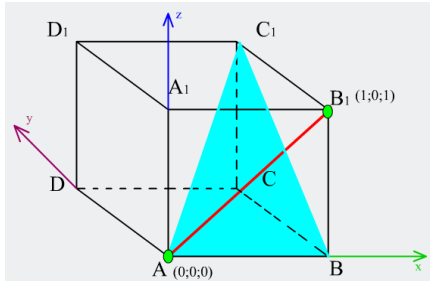
formulasi

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \text{ yoki } \sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

Bu yerda $\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\}$ -berilgan tekislik normal vektori koordinatalari,

$\vec{a}\{x_2; y_2; z_2\}$ - berilgan to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektor.

Bu turdagi masalalar algoritmini aniq tushunish uchun quyida shu turdagi masalalarni ko'rib o'tamiz:



1-masala. Birlik kub $ABCD A_1B_1C_1D_1$ berilgan bo'lsin. AB_1 tekislik va ABC_1 tekisliklar orasidagi burchakni toping.
Yechish : 1) Kubga dekart koordinatalar sistemasini A nuqta koordinata boshi bo'ladigan qilib kiritamiz.

2) AB_1 kesma oxirining va AB_1 vektor koordinatalarini topamiz:

$A(0;0;0)$, $B_1(1;0;1)$ koordinatalardan $\overrightarrow{AB_1}(1;0;1)$

3) ABC_1 tekislik tenglamasini tuzamiz: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C_1(1;1;1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ABC_1 tekislik tenglamasi $y+z=0$, normal vektor $\vec{n}\{0;1;1\}$

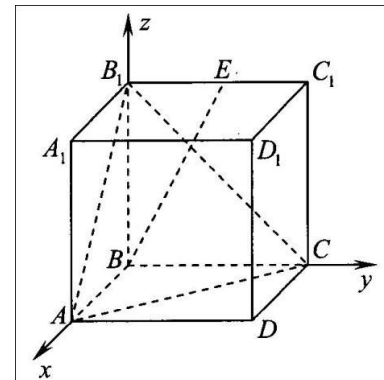
4) burchak sinusini topamiz:

$$\overrightarrow{AB_1}(1;0;1), \vec{n}\{0;1;1\} \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Javob: $\varphi = 30^\circ$

2-misol. To'g'ri burchakli

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ parallelepiped AB va AA_1 qirralari 1 ga teng, AD qirrasi 2 ga teng. E nuqta - B_1C_1 qirraning o'rtasi. BE to'g'ri chiziq va AB_1C tekislik orasidagi burchakni toping.



Yechish: bu masalani yechish uchun $A(1; 0; 0)$, $B_1(0;0;1)$, $C(0;2;0)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzish kerak. Izlanayotgan tekislik tenglamasi quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$2x+y+2z-2=0$. Bundan, bu tekislik normal vektori koordinatalari $\vec{n}\{2;1;2\}$ bo'ladi.

$\overrightarrow{BE}$ vektor koordinatalarini geometrik yo'l bilan aniqlash oson:

$$|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{BB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{2}, \text{ uning koordinatalari ham bizga kerak } \overrightarrow{BE}\{0;-1;-1\}.$$

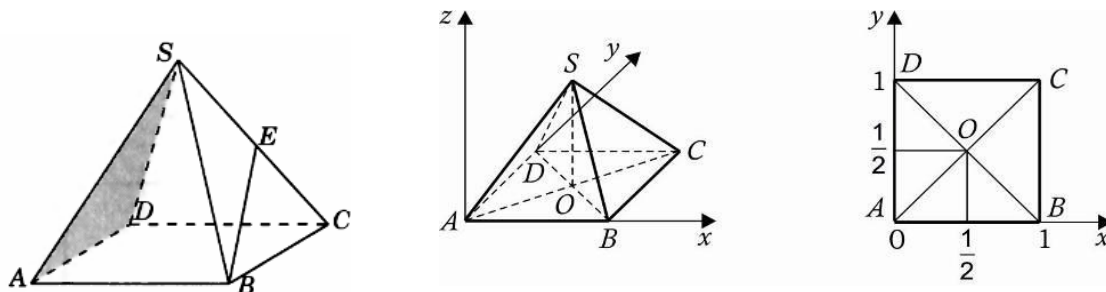
$\overrightarrow{BE}$ vektor va tekislik normali orasidagi burchakni vektorlarning skalyar ko'paytmasi orqali topiladi:

$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Javob: 45°

3-masala. To'g'ri to'rtburchakli piramida SABCD berilgan bo'lib, uning qirralari 1 ga teng. BE to'g'ri chiziqli va SAD tekislik orasidagi burchak sinusini toping. E nuqta- SC qirrasining o'rtasi.

Yechish: 1) piramidaga koordinatalar sistemasini kiritamiz. Bunda A nuqtani koordinatalar boshi sifatida olamiz.



2) koordinata nuqtalari $B(1;0;0)$, $E(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$ orqali $\overrightarrow{BE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$ vektorni topdik.

3) $A(0;0;0)$, $D(0;1;0)$ $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik (ADS) tenglamasini tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

Tekislik tenglamasi $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}z = 0$, bundan normal vektor koordinatalari

$$\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{2})$$

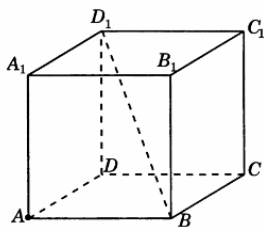
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{BE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right|}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Javob: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

2.2.6 Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani aniqlash

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa – nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar uzunligidir.

1-masala. Birlik kub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ berilgan bo'lsin. A nuqtadan BD_1 to'g'ri chiziqqacha masofani aniqlang.



Yechish: 1) 1) Kubga dekart koordinatalar sistemasini A nuqta koordinata boshi bo'ladigan qilib kiritamiz.

2) $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D_1(0;1;1)$, $\vec{BD_1}(-1;1;1)$ koordinatalar topdik.

3) BD_1 to'g'ri chiziqqa AK perpendikulyarni o'tkazamiz.

$A(x_1, y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ koordinatalar bilan berilgan kesmani

$K(x; y; z)$ nuqta λ da bo'lsa, u holda K nuqta koordinatalarini quyidagi formula orqali topamiz.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

$$x = \frac{1+0}{1+\lambda}, y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}, z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}, \text{ demak } K\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$$

Bundan $\vec{AK} = \left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$ ekanligini topamiz.

4) BD_1 to'g'ri chiziqqa AK perpendikulyar bo'lganidan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\vec{AK} \cdot \vec{BD_1} = 0$$

Tenglikka koordinatalarni qo'yib λ qiymatini topamiz:

$$-\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Topilgan qiymatni K koordinatalariga qo'yib $K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ga ega bo'lamiz.

5) $\overrightarrow{AK}(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ vektor uzunligini hisoblaymiz, $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Javob: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

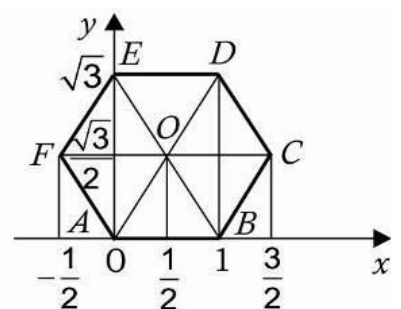
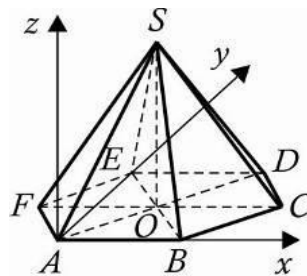
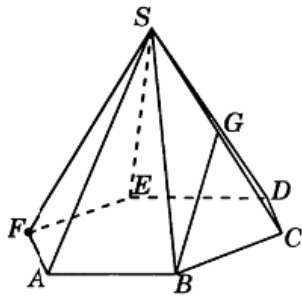
2-masala. To'g'ri oltiburchakli piramida SABCDEF berilgan, asos tomonlari 1 ga, yon qirralari 2ga teng. F nuqtadan BG to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping. G nuqta – SC yoqning o'rtasi.

Yechish:

1) piramidaga A nuqta koordinatalar boshi bo'ladigan qilib koordinata chizamiz.

2) koordinata o'lchivlarini aniqlaymiz:

$$B(1;0;0), F(-0.5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0), G(1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{BG}\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$



3) BG to'g'ri chiziqqa

perpendikulyar qilib FK to'g'ri chiziq o'tkazmiz. BG kesmani K nuqta λ nisbatda bo'lganligidan, K nuqta koordinatalarini tuzib olamiz:

$$x = \frac{1+\lambda}{1+\lambda}, y = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}, z = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}, \text{ demak } K(1, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda})$$

$$\overrightarrow{FK}(1.5; \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda})$$

$$4) \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$$

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

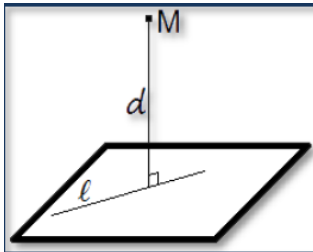
$$K(1; \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

$$5) \overrightarrow{FK} = (1, 5; -\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}), \text{ demak } |\overrightarrow{FK}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{21}{8}} = \frac{\sqrt{42}}{4}.$$

$$\text{Javob: } \frac{\sqrt{42}}{4}$$

2.2.7. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa, bu tekislikka tegishli bo'lmagan



nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar kesma uzunligiga aytiladi.

Demak, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish uchun, avvalo, bizga berilgan nuqta koordinatalari va tekislik normal vektori koordinatalari kerak bo'ladi.

Shundan so'ng quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bu yerda $M(x_0; y_0; z_0)$, α tekislik $ax + by + cz + d = 0$ tenglama bilan berilgan.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topishga doir masalalarni yechish algoritmi:

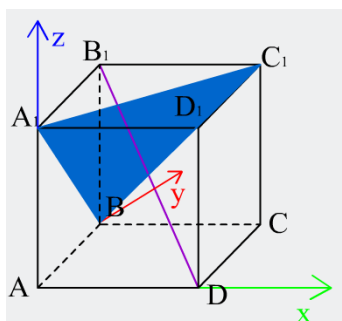
1. Chizma orqali berilgan to'g'ri chiziqlarni chizib olamiz (yo'nalish bergan holda, ya'ni vektroni)
2. Shaklni koordinatalar sistemasiga kiritamiz.
3. Nuqtalar koordinatasini topamiz (berilgan va tekislikka tegishli uchta nuqta koordinatalari)
4. Tekislik tenglamasini tuzamiz.
5. Tekislik normal vektorini topamiz.

6. “Nuqtadan tekislikkacha bo’lgan masofa” formulasiga qo’yib hisoblaymiz.

Bu turdagi masalalar algaritmini aniq tushunish uchun quyida shu turdagi masalalarni ko’rib o’tamiz:

1-masala. Birlik kub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ berilgan bo’lsin. Kubdan $B_1 D$ diagonal o’tkazilgan. Bu diagonalni $A_1 B C_1$ tekislik B_1 nuqtadan hisoblaganda qanday nisbatda bo’ladi?

Yechish: 1. Kubni koordinatalar sistemasiga A nuqta koordinatalar boshi



bo’ldigan qilib tanlab olamiz.

2. nuqtalar koordinatalarini kiritamiz:

$$A_1(0;0;1), B_1(0;1;1), C_1(1;1;1) D(1;0;0)$$

3. tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$A_1(0;0;1), C_1(1;1;1) D(1;0;0)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ bundan } x - y - z + 1 = 0 \text{ tekislik tenglamasini hosil qildik.}$$

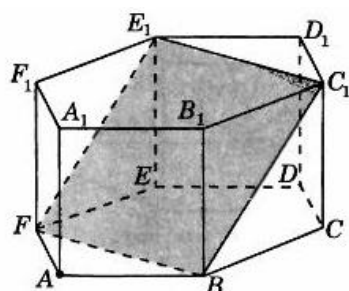
Tenglamadan normal vektor $\vec{n}(1;-1;-1)$ ekanligini topamiz.

4. Nuqtadan tekislikkacha bo’lgan masofani aniqlaymiz:

$$\rho(B_1; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 - 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rho(D; \alpha) = \frac{|1 - 0 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ masala shartidan } \frac{\rho(B_1; \alpha)}{\rho(D; \alpha)} = 1:2$$

Javob: 1:2 nisbatda bo’ladi.



2-masala

To’g’ri oltiburchakli prizma $ABCDEFA_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ berilgan. Hamma qirralari birga teng. A nuqtadan BFE_1 tekislikkacha bo’lgan masofani toping.

Yechish:1. Prizmani A nuqta koordinatalar boshi

bo'ladigan qilib joylashtiramiz.

2. Nuqtalar koordinatalarini topamiz:

$$A(0;0;0), B(1;0;0), E_1(0;\sqrt{3};1), F(-0,5;\frac{\sqrt{3}}{2};0)$$

3. E_1BF tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & \sqrt{3}-0 & 1-0 \\ -0,5-1 & \frac{\sqrt{3}}{2}-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ -1,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bundan tekislik tenglamasini topamiz:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - 1,5y + \sqrt{3}z - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ demak, tekislik normal vektori } \vec{n}(\sqrt{3}; -3; 2\sqrt{3}).$$

3. A nuqtadan E_1BF tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 0 + 2\sqrt{3} \cdot 0 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

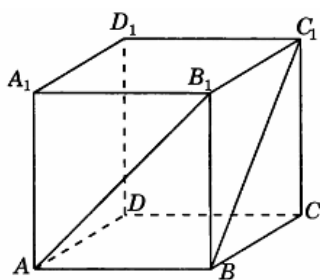
Javob: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2.2.8. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topish.

Turli tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi.

To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lish sharti. Ikki to'g'ri chiziqdan biri qandaydir tekislikda yotsa, ikkinchi to'g'ri chiziq shu tekislikni bir nuqta orqali tekis o'tsa va birinchi to'g'ri chiziq yotmagan tekislikda yotsa, u holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlardir.

1-masala. Birlik kub $ABCD A_1B_1C_1D_1$ berilgan bo'lsin. AB_1 va BC_1 to'g'ri chizilar orasidagi masofani toping.



Yechish: 1. 1. Kubni koordinatalar sistemasiga A nuqta koordinatalar boshi bo'ldigan qilib tanlab olamiz.

2. Nuqtalar koordinatalarini kiritamiz:

$$A(0;0;0), B(1;0;0), B_1(1;0;1), C_1(1;1;1)$$

3. K nuqta $\overrightarrow{BC_1}(0;1;1)$ vektorda yotadi desak, u holda K nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{1+\lambda}{1+\lambda}; y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda} \text{ bundan } K\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right), q = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

belgilash kiritsak, $K(1;q;q)$ bo'ladi.

4. $A(0;0;0)$, $B_1(1;0;1)$. M nuqta $\overrightarrow{AB_1}(1;0;1)$ vektorda yotadi desak,

$$x = \frac{0+\mu}{1+\mu}; y = \frac{0+0\cdot\mu}{1+\mu}; z = \frac{0+\mu}{1+\mu} \text{ bundan } M\left(\frac{\mu}{1+\mu}; 0; \frac{\mu}{1+\mu}\right), p = \frac{\mu}{1+\mu}$$

belgilash kiritsak, $M(p;0;p)$. Demak, $\overrightarrow{KM} = (p-1; 0-q; p-q)$

koordinatalarga ega bo'ladi.

5. $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$;
 $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$; bu tengliklardan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -q + p - q = 0 \\ p - 1 + p - q = 0 \end{cases} \text{ sistemani yechish orqali, } p = \frac{2}{3}; q = \frac{1}{3} \text{ topamiz.}$$

5. topilgan qiymatlar orqali vektor koordinatalarini topamiz $\overrightarrow{KM}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$,

demak AB_1 va BC_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

$$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ga teng.}$$

III. Bob namnaviy dasr islanmasini tuzilmasi.

3.1-§ “Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik.

To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpenikulyarligi haqidagi teoremlar” mavzusi bo'yicha dars ishlanma

Darsning maqsadlari:

Ta'limiy O'quvchilarga kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik, to'g'ri chiziq, tekisliklarning parallellik perpendikulyarligi haqidagi teoremlar va ular yordamida mashqlar ishlash ko'nikmasini shakllantirish

Tarbiyaviy: O'quvchilarni musatqillik ruhida tarbiyalash va dunyoqarashini kengaytirish, matematika tafakkurini rivojlantirish, o'quvchilarni kasbiy bilimlaridan foydalanib, o'rganilayotgan mavzuga qiziqish o'rgatish va o'z-o'ziga ishonchni shakllantirish.

Rivojlantiruvchi: O'quvchilarning fikrlash qobiliyatini o'stirish, fanga bo'lgan qiziqishini orttirish, bilimlarni mustahkamlash, darslik ustida mustaqil ishlash, mantiqiy fikr yuritish ko'nikmalarini rivojlantirish, ko'zlangan maqsadga erishishga intilish, taqqoslash, umumlashtirish, xulosa chiqarib ishlash ko'nikmasini shakllantirish va oliy o'quv yurtlariga tayyorlash.

Darsdan kutilayotgan natijalar – mavzuni o'zlashtirgandan so'ng o'quvchilar quyidagi bilim va ko'nikmaga ega bo'ladilar:

1. Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislikga doir bilimga ega bo'ladi
2. To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpendikulyarligi haqidagi teoremlar haqida bilimlari chuqurlashadi
3. Perpendikulyar to'g'ri chiziq va tekislikning xossalari haqida bilimga ega bo'ladi
4. Quyi bosqichda o'tilgan darslardan kompleks sonlarni takrorlash.

Ta'limiy metodlari: Yangiliklar bilan tanishish va muammoli holarlarni yechish, ma'ruza matn bilan ishlash, *insert- stad ta'lim metodi, klaster usuli va takrorlash, funny English*

Baholash metodlari: O'quvchilarni darsdagi faolligiga 2 ball, mustaqil fikrlash qobiliyatiga 1 ball, formula va ta'riflarni yod olishiga 1 ball, uyga vazifa 1 ball, jami 5 ball.

Axborot manbalari va texnik vositalar: www.lex.uz, www.ziynet.uz, tarqatma materiallar, darsliklar, formulalar to'plami, mavzuga doir misollar.

Dars turi: Amaliy, yangi bilimlarni bayon qilish darsi

Darsga ajratilgan vaqt miqdori: 80 minut

Uyga vazifa: H.V. Sayfullayeva "Geometriya" 2-bob \$1-3 54 – 60 betlarni o'qib, savollarga javob berish, ta'rif va formulalarni o'rganish.

DARSNING TEXNOLOGIK XARITASI

T/r	Mashg'ulot bosqichlari	Mashg'ulot mazmuni		
		Mazmuni	Ta'lim shakli	Ta'lim vositalari
1	Tashkiliy qism (4-daqiqa)	Dars boshlaydi.Davomatni aniqlaydi.Siyosiy daqiqa o'tkaziladi.Xona tozaligi nazorat qilinadi. O'quvchilarga baxolash mezonini tushuntiradi.O'tilgan mashg'lot mavzusini eslatadi.	Yangiliklar bilan tanishish.	Doskaning tayyorgarligi, bo'r, doska lattasining mavjudligi, o'quvchilarning o'quv qurollarining mavjudligi.
2	Kirish qismi Motivatsiya (16-daqiqa)	O'tilgan mashg'ulotni o'quvchilardan so'rashni boshlaydi. O'quvchilarga ma'ruzalar matni va o'quv topshiriqlarni tarqatadi Matematika haqida savol-javob o'tkaziladi.	Ma'ruza matn bilan ishlash, insert- stad ta'lim metodi	Doska, bo'r, o'quv adabiyoti, A ₁ formatdagi oq qog'oz, tarqatma materiallar, test manbalari, slaydlar, grafik organayzerlar blankasi
3	Yangi mavzu bayoni (35-daqiqa)	1.Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislikga doir bilimga ega bo'ladi 2.To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpendikulyarligi haqidagi teoremlar haqida bilimlari chuqurlashadi 3.Perpendikulyar to'g'ri chiziq va tekislikning xossalari haqida bilimga ega bo'ladi 4.Quyi bosqichda o'tilgan darslardan kompleks sonlarni takrorlash.	Ma'ruza matn. Klaster usuli	Doska, bo'r, o'quv adabiyoti, A ₁ formatdagi oq qog'oz, tarqatma materiallar, test manbalari, slaydlar, grafik organayzerlar blankasi,

4	Mustahkam lash (20-daqiqa)	O'quvchilarni 3 ta kichik guruxga ajratgan holda o'quv vazifalarini tarqatamiz. Topshiriqlarni bajarilishini nazorat qiladi. O'quvchilar mavzuni qay darajada egallaganliklarini aniqlash maqsadida savol javob qilishadi savol-javob usulida darsni mustaxkamlaydi. Savol bo'yicha kamchilik ari va xatolarni to'g'rilaydi, yakuniy xulosa chiqaradi.	Kitob bilan mustaqil ishlash, savollariga javob berish. misollar	Doska, bo'r, o'quv adabiyoti, A ₁ farmatdagi oq qog'oz, tarqatma materiallar, test manbalari, slaydlar, grafik organayzerlar blankasi
5	Yakuniy qism (5-daqiqa)	O'tilgan mavzuga xulosa qiladi va faol ishtirok etgan o'quvchilarni baxolaydi. Uyga vazifa beriladi	O'quvchilarni bilimi mustaxkamlashda uyga vazifa qilib masala yechish	Matematika I-qism o'quv adabiyoti, tarqatma materiallar, slaydlar, masala yechish kitobi.

Darsni jihozlash

- fanga oid adabiyotlar;
- ko'rgazmali qurollar, sxemalar, jadvallar tushirilgan plakatlar;
- turli usullarni bajarish uchun foydalaniladigan mahsus kartochkalar
- fanga, mavzuga oid qiziqarli ma'lumotlar to'plami, boshqotirma, tarqatma materiallar, savollar tuzilgan kartochkalar, vazifalar belgilangan eslatmalar

Tashkiliy qism:

(1-ilova)

Assalomu alaykum.
Hurmatli o'quvchilar.

O'quv xonasini darsga
tayyorgarligi to'g'risida
o'zimni fikrimni bildiraman

O'quv jurnali asosida
davomat olaman va
belgilayman

**Jaxonda va O'zbekistonda
bo'layotgan siyosiy
yangiliklar haqida
ma'lumot beraman.**

**Kesishuvchi parallel to'g'ri
chiziq va tekislik haqida
ma'lumot beraman.**

Kirish qismi (Motivatsiya)

(2-ilova)

O'tilgan mavzu savol javob tariqasida so'raladi. Bunda kichik guruhlariga quyidagi savollar beriladi. Savollarda o'tilgan mavzuning barcha ma'lumotlarini qamrab olinadi. Bunda mavzuning ilmiyligi, kundalik hayotimiz bilan bog'langanligiga e'tibor beriladi. O'tilgan mavzuda uyga berilgan qo'shimcha ma'lumotlarni ham bajarganligiga alohida e'tibor beriladi.

Tarqatma savollar:

1. Quyida berilgan ko'phadlar, $x^4 - 1$ ko'phadning bo'luvchilari ekanligini isbotlang.
 - a) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
 - b) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
 - c) $x - 1$; $x + 1$; $x^3 + x^2 + x + 1$;
 - d) $x^3 - x^2 + x - 1$; $x^2 + 1$; $x^2 - 1$
2. $x - 1$ ko'phad $f(x) = x^3 - 1$ ko'phadni ildizi bo'ladimi?
3. $x - a$ va $x + a$ ko'phadlar $x^2 - a^2$ ikkihadni ildizi bo'lishini isbotlang.

Yangi mavzuni:

(3-ilova)

Bu bosqichda o'qituvchi o'quv dasturiga asoslanib, o'quvchilarga kerakli bilim doirasi bo'yicha mavzuni tushuntiradi va o'quvchilar ma'ru'zaning asosiy qismlarini daftarga yozib oladilar. Oqituvchi yangi mavzuni tushuntirishda innovatsion va yangi axborot texnologiyalaridan foydalanib o'quvchilar hamkorligida ularning fikrlashi uchun yo'llanmalar berib ishlaydi

MAVZU: Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik.

**To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpenikulyarligi
haqidagi teoremlar.**

Reja:

1. Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik.
2. To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik haqidagi teoremlar.
3. To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpenikulyarligi haqidagi teoremlar.

Tayanch iboralar: Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik, to'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpenikulyarligi haqidagi teoremlar.

Tekislikning parallellik alomati .Agar ikki tekislik kesishmasa, ular *parallel* tekisliklar deyiladi.

1-teorema. *Agar bir tekislikning kesishuvchi ikki to'g'ri chizig'i ikkinchi tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqqa mos holda parallel bo'lsa, bu tekisliklar parallel bo'ladi.*

Masala . Ikki ayqash to'g'ri chiziq orqali parallel tekisliklar o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Berilgan tekislikka parallel tekislikning mavjudligi.

2-teorema. *Tekislikdan tashqaridagi nuqta orqali berilgan tekislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.*

Ma'sala α va β tekisliklar γ tekislikka parallel, α va β tekisliklar kesishishi mumkinmi?

Parallel tekisliklarning xossalari.

Agar ikkita parallel tekislik uchinchi tekislik bilan kesishsa, u holda kesishish to'g'ri chiziqlari parallel bo'ladi. Haqiqatan, ta'rifga ko'ra parallel to'g'ri chiziqlar —bu bitta tekislikda yotuvchi va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlardir. Aytilgan to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda kesuvchi tekislikda yotadi. Ular kesishmaydi, chunki ularni o'z ichiga olgan parallel tekisliklar kesishmaydi. Demak, to'g'ri chiziqlar parallel. ***Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to'g'ri chhiqlarning kesmalari teng.***

To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik alomati

Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi istalgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, to'g'ri chiziq shu *tekislikka perpendikulyar* deyiladi .

3.- teorema. *Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'ladi.*

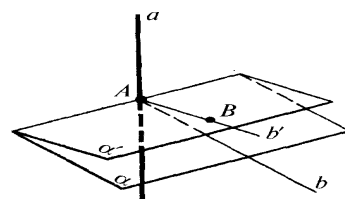
Perpendikulyar to'g'ri chiziq va tekislik yasash.

Ma'sala 1 a (6). To'g'ri chiziqda berilgan nuqta orqali unga perpendikulyar bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Yechilishi: a — berilgan to'g'ri chiziq va A —undagi nuqta bo'lsin (73- rasm). Bu to'g'ri chiziq orqali ikkita tekislik o'tkazamiz va ularda A nuqta orqali a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar b va c to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi α tekislik 3.2- teoreмага ko'ra a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar. Bu tekislikning yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz

qilaylik, α tekislikdan tashqari A nuqtadan o'tuvchi va a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan boshqa α' tekislik mavjud bo'lsin (1- rasm).

tekislikning α tekislikda yotmagan nuqtasi bo'lsin. B nuqta va a to'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik α va α' tekisliklarni a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan turii b va b' to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Bilamizki, bunday bo'lishi mumkin emas, chunki tekislikda to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasidan unga perpendikulyar faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi. Shunday qilib, A nuqtadan o'tib, a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislik yagona ekan.

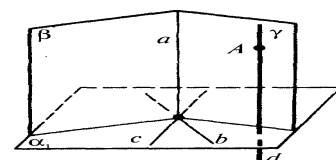


1 - rasm.

Masala (7). Tekislikda berilgan nuqta orqali unga perpendikulyar bitta va faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Perpendikulyar to'g'ri chiziq va tekislikning xossalari.

4-teorema. *Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikulyar bo'lsa, u holda ikkinchisiga ham perpendikulyardir.*

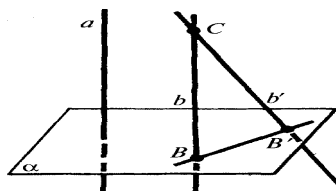


2- rasm.

M a s a l a (8). Istalgan A nuqta orqali berilgan α tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Y e c h i l i s h i. α tekislikda kesishuvchi ikkita b va c to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (2- rasm). Ularning kesishish nuqtasidan mos ravishda b va c to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar bo'lgan β va γ tekisliklarni o'tkazamiz. Bu tekisliklar biror a to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. a to'g'ri chiziq b va c to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar, va demak, α tekislikka ham perpendikulyar. Endi A nuqta orqali a ga parallel d to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. 3.3- teoreмага ko'ra u α tekislikka perpendikulyar.

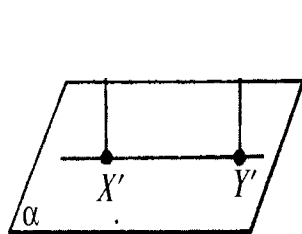
5- teorema. *Bitta tekislikka perpendikulyar ikki to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.*



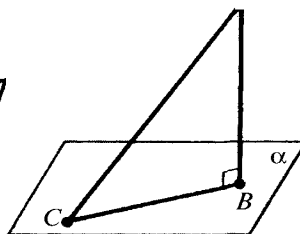
Isboti. a va b to'g'ri chiziqlar α tekislikka perpendikulyar bo'lsin Faraz qilaylik, a va b to'g'ri chiziqlar parallel emas. b to'g'ri chiziqda α tekislikka tegishli bo'lmagan birorta C nuqtani tanlab olamiz. C nuqta orqali a to'g'ri chiziqqa parallel qilib b^1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. b^1 to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikulyar (3.3- teorema). B va B nuqtalar b va b^1 to'g'ri chiziqlarning a tekislik bilan kesishish nuqtalari bo'lsin. U holda BB to'g'ri chiziq kesishuvchi

b va b' to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar. Bunday bo'lishi mumkin emas. Biz qarama-qarshilikka duch keldik. Teorema isbotlandi.

Tekislik va unda yotmaydigan nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka tushirilgan *perpendikulyar* deb berilgan nuqtani tekislikning nuqtasi bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqda yotuvchi kesmaga aytiladi. Bu kesmaning tekislikda yotgan oxiri *perpendikulyarning asosi* deyiladi. Nuqtadan tekislikkacha *masofa* deb shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligiga aytiladi. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka o'tkazilgan *og'ma* deb berilgan nuqtani tekislikdagi nuqta bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikulyar bo'lmagan istalgan kesmaga aytiladi. Kesmaning tekislikda yotgan oxiri *og'maning asosi* deyiladi. Bitta nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar va og'maning asoslarini tutashtiruvchi kesma *og'maning proyeksiyasi* deyiladi. 80- rasmda α nuqtadan a tekislikka AB perpendikulyar $\angle AC$ og'ma o'tkazilgan. B nuqta perpendikulyarning asosi, C nuqta og'maning asosi, BC esa AC og'maning a tekislikdagi proyeksiyasi.



80- rasm.



81- rasm.

M a sal a . Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, uning hamma nuqtalari tekislikdan bir xil masofada turishini isbotlang.

To'g'ri chiziqdan unga parallel tekislikkacha bo'lgan *masofa* deb shu to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan tekislikkacha bo'lgan masofaga aytiladi.

Insert-stad ta'lim metodi

Grafik tashkil etuvchini turi, ahamiyati va hususiyati

O'quv faoliyatini tashkillashtirishning jarayonli tuzilmasi

“INSERT” jadvali mustaqil o'qish vaqtida olgan ma'lumotlarni, eshitgan ma'ruzalarni tizimlashtirishni ta'minlaydi; olingan ma'lumotni tasdiqlash, aniqlash, chetga chiqish, kuzatish. Avval o'zlashtirgan ma'lumotlarni bo'g'lash qobiliyatni shakllantirishga yordam beradi.

Insert jadvalini to'ldirish qoidasi bilan tanishadilar. Alohida o'zlari to'ldiradilar

O'qish jarayonida olingan ma'lumotlarni alohida o'zlari tizimlashtiradilar-jadval ustunlariga “kiritadilar” matnda belgilangan quyidagi belgilarga muvofiq:

“V”-men bilgan ma'lumotlarga mos;

“ ” -men bilgan ma'lumotlarga mos;

	“V”-men bilgan ma’lumotlarga mos	“+” -men uchun yangi ma’lumot	“-” -men bilgan ma’lumotlarga zid	“?” -men uchun tushunarsiz
Kesishuvchi parallel to'g'ri chiziq va tekislik				
To'g'ri chiziq va tekisliklarning haqidagi teoremlar				
Parallellik va perpenikulyarligi haqidagi teoremlar				

Klaster

KLASTER

(Klaster-tutam, bog'lam)-axborot xaritasini tuzish yoli-barcha tuzilmaning mohiyatining markazlashtirish va aniqlash uchun qandaydir biror asosiy omil atrofida g'oyalarni yig'ish.

Bilimlarni faollashtirishni tezlashtiradi, fikrlash jarayoniga mavzu bo'yicha yangi o'zaro bog'lanishli tasavurlarni erkin va ochiq jalb qilishga yordam beradi.

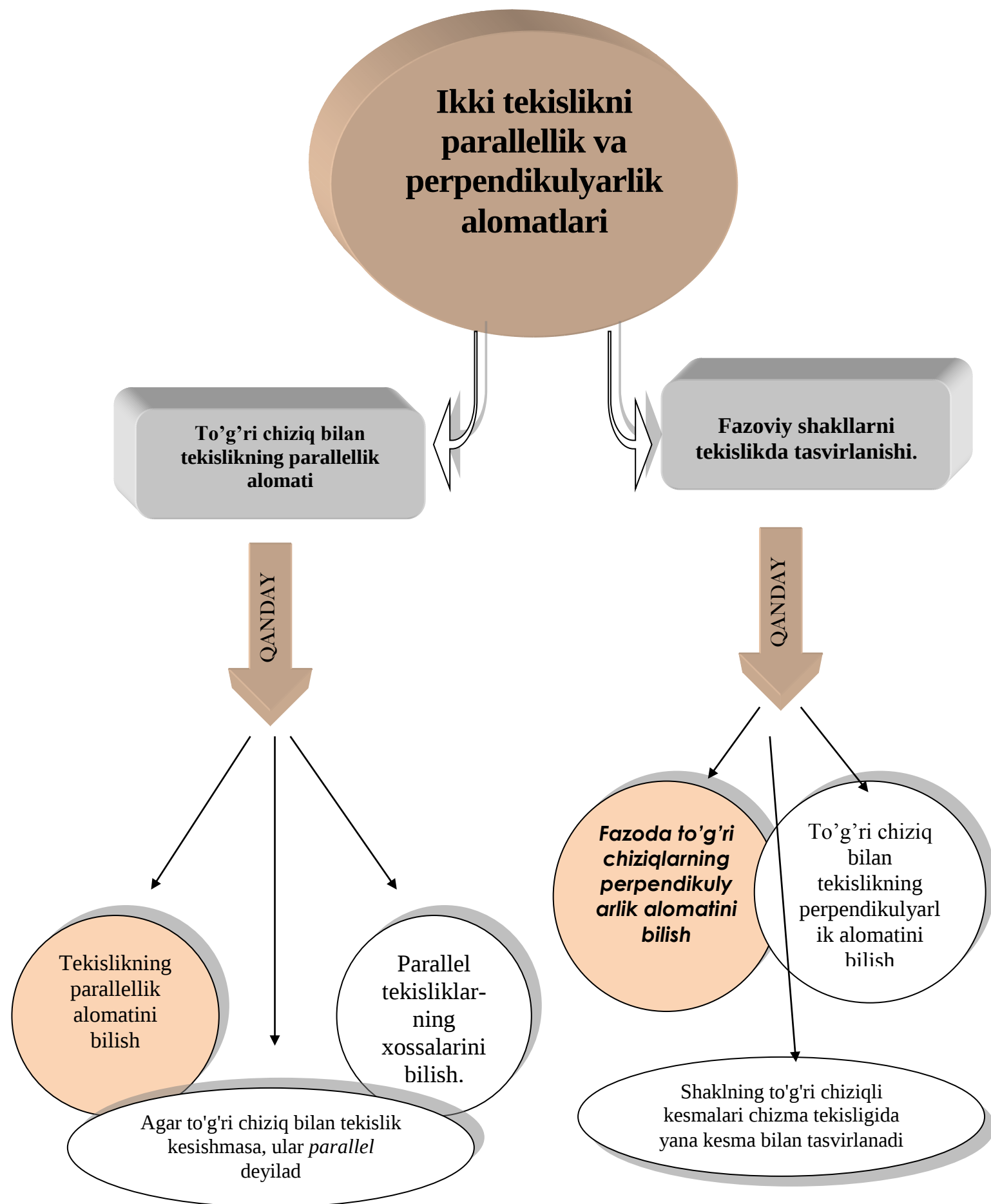
Klaster tuzish qoidasi bilan tanishadilar. Yozuv taxtasi yoki katta qog'oz varag'ni o'rtasiga asosiy so'z yoki 1-2 so'zdan iborat bo'lgan mavzu nomi yoziladi.

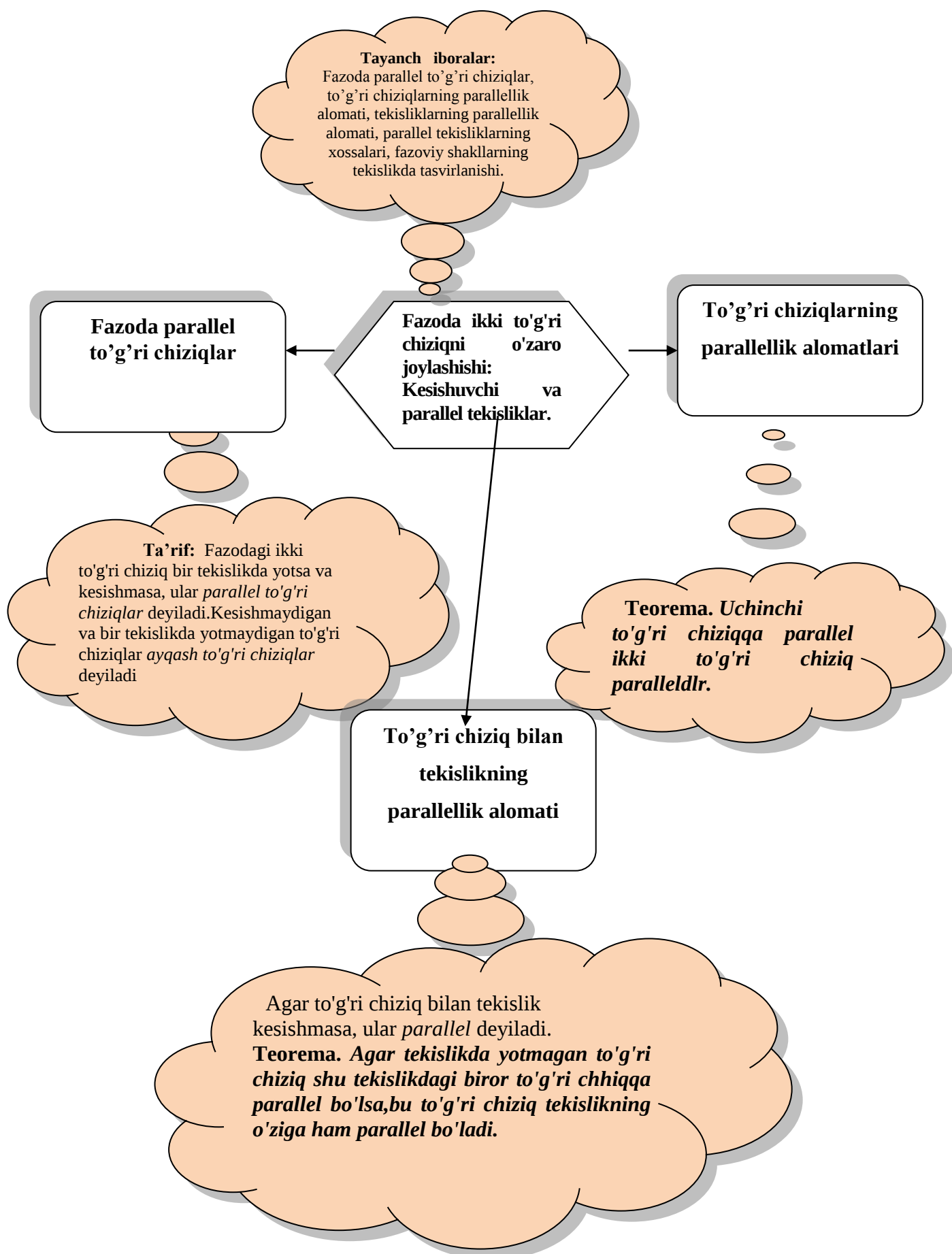
Birikma bo'yicha asosiy so'z bilan uning yonida mavzu bilan bog'liq so'z va takliflar kichik doirachalar "yo'ldoshlar" yozib qo'shiladi. Ularni "asosiy" so'z bilan chiziqlar yordamida birlashtiriladi. Bu "yo'ldoshlarda" "kichik yo'ldoshlar" bo'lishi mumkin. Yozuv ajratilgan vaqt davomida yoki g'oyalar tugaguncha davom etishi mumkin.

Muhokama uchun klasterlar bilan almashtiriladi

KLASTERNI TUZISH QOIDASI

1. Aqlingizga nima kelsa, barchasini yozing. G'oyalari sifatini muhokama qilmang faqat ularni yozing.
2. Xatni to'htatadigan imlo hatolarga va boshqa omillarga e'tbor bermang.
3. Ajratilgan vaqt tugaguncha yozishni to'xtatmang. Agarda aqlingizda g'oyalar kelishi birdan to'xtasa, u holda qachonki yangi g'oyalar kelmaguncha qog'ozga rasm chib turing.





Mustaxkamlash uchun savollar:

(4-ilova)

1. Qanday tekisliklar parallel tekisliklar deyiladi?
2. Tekisliklarning parallellik alomatlarini isbotlang.
3. Berilgan tekislikdan tashqaridagi nuqtadan berilgan tekislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.
4. Agar ikkita parallel tekislik uchinchi bilan kesishsa, kesishish to'g'ri chiziqlari parallel bo'lishini isbotlang.
5. Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to'g'ri chiziqlar kesmalarining tengligini isbotlang.
6. Parallel proyeksiyalash xossalari sanab o'ting.
7. Fazodagi qanday to'g'ri chiziqlar perpendikulyar to'g'ri chiziqlar deyiladi?
8. Perpendikulyar to'g'ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning o'zlari perpendikulyar ekanini isbotlang.
9. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligiga ta'rif bering.
10. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik alomatini isbotlang.
11. Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikulyar bo'lsa, uning ikkinchi to'g'ri chiziqqa ham perpendikulyar ekanini isbotlang.
12. Bitta tekislikka perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziqning o'zaro parallel bo'lishini isbotlang.
13. Berilgan nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar nima?
14. Nuqtadan tekislikkacha masofa nima?
15. Berilgan nuqtadan tekislikka o'tkazilgan og'ma nima? Og'maning proyeksiyasi nima?
16. Qanday tekisliklar perpendikulyar tekisliklar deyiladi?
17. Tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini isbotlang.
18. Ayqash to'g'ri chiziqlarning umumiy perpendikulyari nima?

19. Ayqash to'g'ri chiziqlar bitta va faqat bitta umumiy perpendikulyaiga ega ekanini va bu umumiy perpendikulyaming shu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi parallel tekisliklar uchun umumiy perpendikulyar ekanini isbotlang.

20. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa nima?

MUSTAQIL UCHUN TOPSHIRIQ:

1. To'g'ri chiziqda berilgan nuqta orqali unga perpendikulyar bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

2. Istalgan A nuqta orqali berilgan α tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

3. α va β tekisliklar γ tekislikka parallel, α va β tekisliklar kesishishi mumkinmi?

4. Tekislikda berilgan nuqta orqali unga perpendikulyar bitta va faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang. 5. Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, uning hamma nuqtalari tekislikdan bir xil masofada turishini isbotlang.

Darsni yakuniy qismi

(5-ilova)

Uyga vazifa

H.V. Sayfullayeva "Geometriya" 2-bob §1-3 54 – 60 betlarni o'qib, savollarga javob berish, ta'rif va formulalarni o'rganish.

Tavsiya qilinadigan adabiyotlar:

1. T.To'laganov, A.Normatov. Matematikadan praktikum. «O'qituvchi», T., 1989 y. A.V.Pogorelov. Geometriya, 7-11. «O'qituvchi», T., 1991 y. V.Klopskiy, Z.Skopets, M.I.Yagodovski. Geometriya, 9-10. «O'qituvchi», T., 1985 y. N. Dadajonov, R.Yunusmetov, T. Abdullayev. Geometriya-9-11. «O'qituvchi», T. 2000 y.



Foydalanilgan adabiyotlar

1. А.А Гусак Справочник по высшей математике / А.А Гусак, Г.М.Гусак, Е.А. Бричикова. – 9-е изд. – Минск: ТеатрСистема, 2009. - 640с.
2. Л.С.Атанасян Геометрия: Учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцев и др. - 13-е изд. – М.:Просвещение, 2004. – 255с.
3. Погорелов А. В. Геометрия 10-11 кл. / Погорелов А. В. - М:Просвещение 2005. – 324.
4. А.Д.Александров Геометрия / А.Д.Александров, А.Л. Вернер, В.И.Рыжик – М:Просвещение, 1999. – 271с.
10. Гельфанд И. М. Метод координат / Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А., - МЦНМО, 2009. - 189с. 64
11. Мельникова Н. Б. Геометрия: векторы и координаты в пространстве / Мельникова Н. Б., Литвиненко В. Н., Безрукова Г. К. - М:Просвещение, 2007. – 120с.
12. Вольфсон Б. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи / Вольфсон Б. И., Резницкий Л. И. - Легион, 2011 г. – 129с.
13. Малкова А. Г. Подготовка к ЕГЭ по математике [Электронный ресурс] / Малкова А. Г. / Study.ru.
14. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / И.Ф.Шарыгин. - М.: Дрофа, 2006. – 479 с.
15. Яценко И.В. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / И.В.Яценко – М.: Айрис-прес, 2003. – 432 с.
16. Смоляков А. Н. ЕГЭ по математике: задания группы С / Смоляков А. Н., Сидельников В. И. - Москва , 2013. – 205 с.
17. Семенова А.В. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под редакцией А.В. Семенова, И.В. Яценко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с.
18. Титаренко А.М. Новейший полный справочник школьника 5-11 классы. Математика. / А.М.Титаренко, А.М. Роганин. - «Эксмо», 2008. – 304 с.
19. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник для Вузов. Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника / Беклемишев Д. В. - М.: Физматлит, 2009. - 309 с.
20. Л.С.Атанасян Геометрия. Ч. 1. М., Просвещение, 1973
21. Атанасян Л. С, Атанасян В. А. Сборник задач по геометрии, ч. I. М., Просвещение, 1973.
22. Базылев В. Т., Дуничев К. И., И в а н и ц к а я В. П. Геометрия, ч. I. М., Просвещение, 1974.

23. Dadajonov N., Jo'rayeva M., Geometriya 1 qism, Toshkent "o'qituvchi"
1996