

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA
ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI**

**BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Q.Q. Elgondiev, K. A. Baymuratova, SH. Q. Erejepova, R. D. Narbaeva

ANÍQ INTEGRALLAR HÁM OLARDÍN QOLLANÍLÍWLARÍ

Oqíw-metodikalıq qollanba

Nókis-2018

Aniq integrallar hám olardıń qollanılıwları: Oqıw-metodikalıq qollanba.Q.Q.El gondiev,K.A. Baymuratova, Sh. Q. Erejepova, R.D.Narbaeva; O'zbekistan Respublikası joqarı hám orta arnawlı bilimlendiriw ministrliǵı, Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti. - No'kis:, 2018.- 88 b.

Metodikalıq qollanba aniq integrallar hám olardıń qollanılıwları, onı esaplaw usı'lları' ha'm qa'seytleri keltirilgen boli'p, bunda óz betinshe islew ushın mısallar hám orınlaw ushın u'lgiler kórsetilgen. Metodikalıq qollanba búgingi kúnde paydalanılıp turǵan joqarǵı oqıw orınlarınıń fizika, matematika, ámeliy matematika qánigelikleri akademiyalıq licey, kásip-óner kolledji matematika oqıtıwshıları hám oqıwshıları studentlerine arnalǵan.

Pikir bildiriwshiler:

K. Qudaybergenov

fizika-matematika ilimleriniń doktorı

Ó. Qurbanbaev

fizika-matematika ilimleriniń kandidatı

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq Mámleketlik Universiteti oqıw- metodikalıq keńisiniń 2018-jıl 18-yanvar sánesindegi 3-sanlı bayanlaması menen usınıs etilgen.

MAZMUNI'

Kirisiw.....	4
Anıq integral	
1-§. Anıq integraldın anıqlaması hám bar bolıw shártleri.....	5
2-§. Darbu qosındıları.....	9
3-§. Integrallanıwshı funkciyalar klassları.....	13
4-§. Anıq integraldın qasıyetleri.....	16
5-§. Joqarı shegi ózgeriwshi integral.	24
6-§. Anıq integrallardı esaplaw usılları.....	27
7-§. Anıq integraldın geometriyalıq máselelerdi sheshiwde qollanıwları.....	32
8-§. Anıq integraldın fizikalıq qollanıwları.....	53
Menshiksiz integrallar	
1-§. Menshiksiz integrallardıń qasıyetleri hám esaplaw usılları.....	65
2-§. Sheksiz kesindiler boyınsha menshiksiz integrallardıń qasıyetleri.....	68
3-§. Shegaralanbağan funkciyalardıń menshiksiz integralları.....	71
4-§. Menshiksiz integrallarda ózgeriwshilerdi almasırw.....	75
5-§. Teńsizliklerdi integrallaw.....	76
6-§. Teris emes funkciyalardıń menshiksiz integralları.	78
7-§. Menshiksiz integrallardıń absolyut hám shártli jıyınalıqlığı.....	81
8-§. Menshiksiz integrallar jıyınalıqlıǵınıń Abel hám Dirixle belgileri.....	83
A'debiyatlar.....	88

KIRISIW

O'zbekistan Respublikasi Prezidentiniń 2017-jıl 20-aprel kúni qabıl etilgen “Joqarı bilimlendiriw sistemasın bunnan bılay da rawajlandırıw ilajları haqqında” ğı qararı Mámleketimizde joqarı bilimlendiriw sistemasın túp-tiykarınan jetilistiriwdiń anıq hám maqsetli jónelislerin ózinde jámlegen menen áhmiyetli. Usıǵan tiykarlanıp student jaslarımızda kitap qumarlılıqtı kúsheytiw maqsetinde qaraqalpaq tilinde Matematikalıq analiz kafedrası oqıtıwshıları Q.Q.Elgondiev, K. A. Baymuratova, SH. Q. Erejepova ham D. R. Narbaevalar “Anıq integrallar hám olardıń qollanılıwları” metodikalıq qollanbanı jarattı.

Metodikalıq qollanba búgingi kúnde paydalanılıp turǵan joqargı oqıw orınlarınıń fizika, matematika, ámeliy matematika qánigelikleri ushın oqıw programmasınıń anıq integrallar bólimine sáykes islenip shıǵıldı. Oqıw qollanbaǵa anıq integrallar túsiniǵın úyreniw ushın kerekli bolǵan barlıq túsiniqler kiritildi. Sonıń menen birge anıq integraldıń geometriyalıq, fizikalıq hám mexanikalıq qollanılıwlarına baylanıslı máselelerdi úyreniw ussılları tolıq berildi hám tiyisli mısallar menen tolıqtırıldı. Oqıw qollanba fizika-matematika fakultetiniń 1-kurs studentleri, akademik licey, kásip-óner kolledji matematika oqıtıwshıları hám oqıwshıları ushında paydalı dep esaplaymız.

Bul metodikalıq qollanba eki baptan turadı:

- Anıq integrallar hám olardıń qollanılıwları,
- Menshiksiz integrallar.

Metodikalıq qollanbanıń 1-babı 8 paragraftan, 2-babı 8 paragraftan ibarat. Metodikalıq qollanbada teoriyalıq maǵlıwmatlar mısallar menen túsindirilip, qosımsha óz betinshe shuǵıllanıw ushın tapsırmalar berilgen.

ANIQ INTEGRAL

1-§. Anıq integraldın anıqlaması hám bar bolıw shártleri

a) İymek sıızqlı trapeciyanıń maydanı.

Meyli $f(x)$ funkciyası $\Delta=[a,b]$ segmentinde úzliksiz hám teris emes anıqlanğan funkciya bolsın, yaǵnıy $\forall x \in [a,b]$ úshın $f(x) \geq 0$ teńsizligi orınlansın. $x=a, x=b, y=0$ tuwrılarınıń kesindileri hám $y=f(x)$ funkciyasınıń grafigi menen shegaralanğan G figurasın qarastıramız, yaǵnıy $G=\{(x,y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Bunday figura iymek sıızqlı trapeciya dep ataladı. $\Delta=[a,b]$ segmentin $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ teńsizliklerdi qanaatlandırıwshi $x_k, k=\overline{0,n}$ noqatları járdeminde n bólekke bólemiz (maidalaymız) hám bul noqatlardan OY kósherine parallel tuwrılar ótkeremiz. Sonda G figurası $G_k=\{(x,y): x_{k-1} \leq x \leq x_k, 0 \leq y \leq f(x)\}, k=\overline{1,n}$ túrindegi n dara trapetciyalarǵa bólinedi. Endi $\Delta_k=[x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k=\overline{1,n}$ belgilewlerin kiritip, $\forall \xi_k \in \Delta_k, k=\overline{1,n}$ noqatların alamız da

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \text{ qosındısın dúzemiz. Bul qosındınıń mánisi } \Delta=[a,b]$$

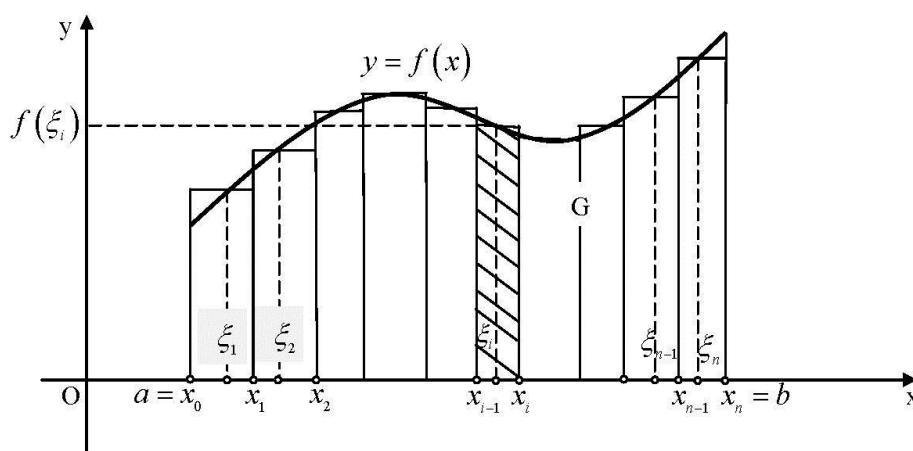
segmentin $x_k, k=\overline{0,n}$ noqatları menen maydalawdan, ξ_k noqatların tańlawdan ǵárezli hám n tuwrı múyeshliklerinen ibarat bolǵan teksheli figuranıń maydanına teń boladı. Eger G figurası jeterli dárejede kishi maydalansa onda teksheli figuranıń maidanınıń iymek sıızqlı trapeciyanıń maydanınan parqı judá kem bolıwı túsinikli.

$\Delta=[a,b]$ segmentiniń maydalaw noqatları sanın sonday arttıramız, nátiyjede $\Delta_k=[x_{k-1}, x_k]$ kesindileri uzınlıqlarınan eń ulkeni nolge umtılsın. Eger usınday jaǵdayda $\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ qosındısınıń Δ segmentin maydalaw usılınan hám

ξ_k noqatların tańlawdan ǵárezli bolmaǵan S shegi bar bolsa, onda bul shekti G figurasınıń maydanı retinde qabıl etiw tábiyiy.

b) ózgeriwshi kúshtiń jumısı. Meyli materiallıq noqat OX kósheri boyınsha F kúshi tásir astında háreketlensin hám kúshtiń tásir etiw baǵıtı háreket baǵıtı menen birdey bolsın. F kúshin materiallıq noqattıń OX kósherindegi x koordinatasına

baylanıslı úzliksiz funkciya dep esaplap bul kúshitiń materiallıq noqattı OX kósherindegi $x = a$ noqatınan $x = b$ noqatına kóshiriwde orınlagan jumısın tabıw máselesin qarastıramız.



1-suwret

$[a, b]$ segmentin $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ shártin qanaatlandiratuǵın $x_k, k = \overline{0, n}$ noqatları járdeminde n bólekke bólemiz hám $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1, n}$ belgilewlerin kiritip, $\forall \xi_k \in \Delta_k, k = \overline{1, n}$ noqatların alamız. Sonda F kúshiniń Δ_k kesindisindegi jumısı $F(\xi_k)\Delta x_k$ a teń.

Onda F kúshiniń $[a, b]$ segmentindegi jumısı shama menen $\sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k$ boladı.

Eger $[a, b]$ segmentiniń x_k noqatları sanın $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ kesindileri uzınlıqlarınan eń ulkeni nolge umtılatuǵınday etip arttırǵanda $\sum_{k=1}^n F(\xi_k)\Delta x_k$ qosındısıniń A shegi bar bolsa, onda usı shektiń mánisin F kúshin materiallıq noqattı $x = a$ noqatınan $x = b$ noqatına kóshiriwdegi jumısı dep atalıwı tábiyiy.

Usı qarastırılǵan mısallarda mäseleniń sheshimi integrallıq qosındı dep atalatuwın $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ túrindegi qosındısıniń shegin tabıw máselesine keltirildi.

Usınday qosındıniń shegin tabıw máselesi texnikanıń, fizikanıń, geometriyanıń, h.t.b. ilim tarawlarınıń kóplegen mäselerinde ushırasadı. Sonıń úshin usınday qosındılarda joqarıdaǵı mısallarda keltirilgendey shekke ótiwdiń nızamli ekenligin tiykarlaw matematikanıń eń ahmiyetli mäselerinen biri bolıp tabıladı.

1. Anıq integral túsinigi. Meyli $f(x)$ funkciyası $\Delta = [a, b]$ segmentinde anıqlanǵan hám usı segmentke tiyisli $x_k, k = \overline{0, n}$ noqatları úshin $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ teńsizligi orınlangan bolsın. Bul noqatlardı

$[a, b]$ segmentin maydalaw dep ataymiz hám olardıń kópligin T háribi menen belgileymiz, yaǵnıy $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$. $\Delta = [a, b]$ segmentin $x_k, k = \overline{0, n}$ noqatları járdeminde maydalawında kelip shıǵatuǵın $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ kesindilerine T maydalawındaı dara segmentler dep ataymız. Meyli $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1, n}$ sáykes $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentleriniń uzınlıqları bolsın. $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ sanı T maydalawınıń diametri yamasa maydalı dep ataladı. Eger $\xi_k \in \Delta_k$ bolsa, onda $\xi_k, k = \overline{1, n}$ noqatları kópligin ξ arqalı belgileymiz hám tańlaw dep ataladı, yaǵnıy $\xi = \{\xi_k, k = \overline{1, n}\}$. $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ qosındısı $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmentiniń berilgen T maydalawındaǵı hám tayınlangan ξ tańlawındaǵı integrallıq qosındısı dep ataladı hám $\sigma_T(\xi, f)$ yamasa $\sigma_T(\xi)$ túrinde belgileydi, yaǵnıy

$$\sigma_T(\xi, f) = \sigma_T(\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1)$$

1-anıqlama. J sanı $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmenti boyınsha anıq integralı dep ataladı hám $\int_a^b f(x) dx$ túrinde belgilenedi, eger $\forall \varepsilon > 0$ sanına sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı bar bolıp, $[a, b]$ segmentiniń diametri $\lambda(T) < \delta$ bolatuǵın $\forall T$ maydalawı hám $\forall \xi$ tańlawı ushın

$$|\sigma_T(\xi, f) - J| = |\sigma_T(\xi) - J| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J \right| < \varepsilon \quad (2)$$

teńsizligi orınlı bolsa.

Bul anıqlamadan shektiń anıqlamasınan kelip shıqqan halda anıq integral $\sigma_T(\xi)$ integrallıq qosındısınıń $\lambda(T) \rightarrow 0$ jaǵdaydaǵı shegi hám bul shektiń $[a, b]$ segmentiniń diametri $\lambda(T) < \delta$ bolatuǵın T maydalawınan hám ξ tańlawınan ğárezli emesligin názerge alǵan halda,

$$J = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

teńligi orınlı bolıwın kóremiz.

2-anıqlama. Eger (3) shegi bar bolsa, onda $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmenti boyınsha integrallanıwshı yamasa $[a, b]$ segmentinde Riman boyınsha integrallanıwshı funkciya dep ataladı. Usı anıqlamadan kelip shıqqan halda $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmenti boyınsha integralı bar dep aytamız.

1-teorema(funktciya integrallanıwshı bolıwı zárúrli shárti) Eger $f(x)$ funktciyası $[a, b]$ segmenti boyınsha integrallanıwshı funktciya bolsa, onda ol $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan funktciya boladı.

Dálilleniwi. Meyli $f(x)$ funktciyası $[a, b]$ segmenti boyınsha integrallanıwshı funktciya bolsın. Onda 1-anıqlamağa sáykes (2)-teńsizligi orınlı. Uşı teńsizlikte $\varepsilon = 1$ dep esaplap, diametri $\lambda(T) < \delta(1)$ bolğan $\forall T$ maydalawı hám $\forall \xi$ tańlawı ushın

$$|J - \sigma_T(\xi, f)| < 1 \Leftrightarrow J - 1 < \sigma_T(\xi, f) < J + 1 \quad (4)$$

teńsizligine iye bolamız.

Endi $\lambda(T) < \delta(1)$ shártin qanaatlandıratuğın T maydalawın tayınlap, $f(x)$ funktciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanbağan dep esaplaymız. Sonda $f(x)$ funktciyası T maydalawındağı Δ_k dara segmentlerinen keminde birinde shegaralanbağan funktciya boladı. Ulıwmalıqtı buzbastan $f(x)$ funktciyası $\Delta_n = [x_{n-1}, b]$ segmentinde shegaralanbağan dep esaplaymız. Endi $\xi_k \in \Delta_k, k = \overline{1, n-1}$ noqatların tayınlaymız hám $L = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ belgilewin kiritsek, (4)-teńsizligi $\forall \xi_n \in \Delta_n$ ushın $J - 1 < f(\xi_n) \Delta x_n - L < J + 1$ túrinde jazıladı. Bul teńsizlikti $\Delta x_n > 0$ bolğanı ushın

$$\frac{J - 1 + L}{\Delta x_n} < f(\xi_n) < \frac{J + 1}{\Delta x_n} \quad (5)$$

túrinde jazıw múmkin. (5)-teńsizligi $\forall \xi_n \in \Delta_n$ ushın orınlı bolıwınan $f(x)$ funktciyasınıń $\Delta_n = [x_{n-1}, b]$ segmentinde shegaralanğan bolıwı kelip shıǵadı. Bul $f(x)$ funktciyasınıń $\Delta_n = [x_{n-1}, b]$ segmentinde shegaralanbağan dep esaplawğa qarama-qarsı. Demek, $f(x)$ tı Δ_n segmentinde shegaralanbağan dep esaplaw qate. Onda onıń qarama-qarsısı durıs, yaǵnıy $f(x)$ funktciyası Δ_n segmentinde shegaralanğan hám sonıń úshın $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan. Teorema dálillendi.

Funktciyanıń kesindide shegaralanğan bolıwı onıń usı kesindi boyınsha integrallanıwshı bolıwı ushın jeterli emes. Mısal ushın

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{eger } x \in Q, \\ 0, & \text{eger } x \in J \end{cases}$$

Dirihle funkciyası $[0,1]$ segmentinde shegaralanğan, biraq integrallanıwshı emes.

Haqiqatında da $[0,1]$ segmentiniń $\forall T$ maydalanıwında $\xi' = \{\xi'_k, k = \overline{1, n}; \xi'_k \in Q\}$

hám $\xi'' = \{\xi''_k, k = \overline{1, n}; \xi''_k \in J\}$ tańlawlarında sáykes $\sigma_T(\xi', D) = 1$ hám

$\sigma_T(\xi'', D) = 0$ bolğanı ushın $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi, D)$ shegi bar bolmaydı.

1-mısal. Anıq integraldıń anıqlaması tiykarında $\int_a^b dx = b - a$ teńligin dálilleń.

Sheshiliwi. $f(x) = 1$ bolğanı ushın $[a, b]$ segmentin $\forall T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$

usılinda maydalap $\forall \xi = \{\xi_k, k = \overline{0, n}\}$ tańlawında $f(\xi_k) = 1$ bolıwın kóremiz.

Onda $\sigma_T(\xi, 1) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a \Rightarrow \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi, 1) = b - a = \int_a^b dx$ boladı.

2-§. Darbu qosındıları.

Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde anıqlanğan hám shegaralanğan funkciya, $[a, b]$ segmenti $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılinda maydalanğan hám bul maydalawda $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentleri payda bolğan, $k -$ dara segmentiniń uzınlıǵı Δx_k ǵa teń edep esaplaymız. Sonda $f(x)$ funkciyası $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentlerinde qabıl etetuǵın manisler koplighi shegaralanğan boladı. Bunnan $f(x)$ funkciyasınıń $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentlerinde anıq tómengi hám anıq joqarǵı shegaraları bar bolıwın kóremiz. $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ hám $M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$ belgilewlerin kiritip,

$$s_T = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S_T = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (1)$$

qosındıların dúzemiz. s_T, S_T qosındılarına, $f(x)$ funkciyası ushın $[a, b]$ segmentiniń berilgen T maydalawındaǵı, sáykes tómengi hám joqarǵı Darbu

qosındıları dep ataladı. Bul qosındılar T maydalawındaǵı ξ tańlawınan ǵárezli emes hám tómendegi qasiyetlerine iye.

1-qasiyet. $[a, b]$ segmentiniń berilgen T maydalawında $\forall \xi$ tańlawında

$$s_T \leq \sigma_T(\xi) \leq S_T \quad (2)$$

teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi. Anıq joqarı hám anıq tómengi shegaralar anıqlamasınan $\xi_k \in \Delta_k$ bolǵanı ushın $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, $k = \overline{1, n}$ teńsizlikler sisteması orınlı. Bunnan $\Delta x_k > 0$ teńsizligi orınlı bolǵanı ushın $m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$, $k = \overline{1, n}$ teńsizlikler sisteması kelip shıǵadı. Keyingi sistemaniń teńsizliklerin aǵzama-aǵza qosıp, $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ teńsizligine iye bolamız. Darbu qosındıları hám integrallıq qosındı anıqlamalarınan keyingi teńsizliginiń (2)-teńsizlikke teń kushli bolıwın kóremiz.

Dálillengen qasiyetten berilgen T maydalawındaǵı $\forall \xi$ tańlawında $s_T \leq S_T$ teńsizligi orınlı bolıwın kóremiz.

2-qasiyet. $[a, b]$ segmentiniń berilgen T maydalawındaǵı múmkin bolǵan ξ tańlawlarında $s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi)$ hám $S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi)$ teńlikleri orınlı.

Dálilleniwi. $s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi)$ teńligin dálilleymiz. Onıń ushın infimumnıń anıqlamasına sıykes 1) $\forall \xi$ tańlawında $s_T \leq \sigma_T(\xi)$ hám 2) ushın $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın sonday ξ_ε tańlawı bar bolıp $s_T + \varepsilon > \sigma_T(\xi_\varepsilon)$ shártleriniń durıs bolıwın kórsetiw jeterli boladı.

1) shárttiń durıslıǵın Darbu qosındılarınıń 1-qasiyetindegi (2) teńsizliginiń shep tárepinen kóremiz.

2) $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ bolǵanı ushın infimumnıń anıqlamasına sıykes $\forall \varepsilon > 0$

sanı ushın sonday $\xi'_k \in \Delta_k$ noqatı bar boladı da $f(\xi'_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $k = \overline{1, n}$

teńsizlikler sisteması orınlı boladı. Bul sistemaǵa tiyisli teńsizliklerdi sıykes Δx_k a kóbeytip nátiyjede payda bolǵan teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qossaq,

$s_T + \varepsilon > \sigma_T(\xi_\varepsilon)$ teńsizlii kelip shıǵadı. Bunda $\xi_\varepsilon = \{\xi'_k, k = \overline{1, n}\}$ tańlaw. Demek, $s_T = \inf_{\xi} \sigma_T(\xi)$ teńligi dálillendi. $S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi)$ teńligi usıǵan uqsas dálillenedi.

Anıqlama. T_2 maydalawı T_1 maydalawınıń dawamı dep ataladı, eger T_1 maydalawınıń hár bir noqatı T_2 maydalawınıń da noqatı bolsa. Basqasha aytqanda T_2 maydalawı T_1 maydalawına teń boladı yamasa T_1 maydalawına keminde bir taza noqat qosıwdan kelip shıǵadı.

3-qasiyet. Eger T_2 maydalawı T_1 maydalawınıń dawamı bolsa, onda

$$s_{T_1} \leq s_{T_2} \leq S_{T_2} \leq S_{T_1},$$

yaǵnıy maydalaw noqatlarınıń sanın arttırǵanda Darbudıń tómengi qosındısı kemeymeydi hám joqarı qosındısı artıp ketpeydi.

Dálilleniwi. Bul qasiyetti dálillewde T_2 maydalawı T_1 maydalawına tek bir taza $x' \in (x_{k-1}, x_k)$ noqatın qosıw natıyjesinde kelip shıqqan jaǵdaydı qarastırıw jeterli boladı. Meyli, x' noqatı Δ_k dara segmentin eki Δ'_k, Δ''_k kesindilerine ajıratadı, olardıń uzınlıǵı sáykes λ_1, λ_2 hám $m'_k = \inf_{x \in \Delta'_k} f(x), m''_k = \inf_{x \in \Delta''_k} f(x)$ bolsın. $m'_k \geq m_k, m''_k \geq m_k$ teńsizlikleri orınlı bolıwın kóriw qıyın emes. Onda $s_{T_2} - s_{T_1} = m'_k \lambda_1 + m''_k \lambda_2 - m_k (\lambda_1 + \lambda_2) = (m'_k - m_k) \lambda_1 + (m''_k - m_k) \lambda_2 \geq 0$, yaǵnıy $s_{T_1} \leq s_{T_2}$ teńsizligi orınlı. $S_{T_2} \leq S_{T_1}$ teńsizligi usıan uqsas dálillenedi, al $s_2 \leq S_2$ teńsizliginiń orınlı bolıwı 1-qasiyette keltirildi.

4-qasiyet. $\forall T'$ hám $\forall T''$ maydalawları ushın $s_{T'} \leq S_{T''}$ teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi. Meyli T maydalawı T' hám T'' maydalawlarınıń dawamı bolsın. 3-qasiyette $T_1 = T', T_2 = T$ bolǵanda $s_{T'} \leq s_T(T) \leq S_T$ teńsizligi orınlı boladı, al $T_1 = T'', T_2 = T$ bolsa $S_T \leq S_{T''}$ teńsizligine iye bolamız. Keyingi eki teńsiliklerdi biriktirsek, $s_{T'} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T''}$ teńsizligi shıǵadı. Bul teńsizlikten $s_{T'} \leq S_{T''}$ teńsizliginiń durıslıǵı ko'rinip tur.

5-qasiyet. Meyli $\{s_T\}$ ha'm $\{S_T\}$ Darbudıń tómengi hám joqarǵı qosındıları kópligi bolsın. Onda $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ kesindisi boyınsha Darbudıń tómengi hám joqarǵı integrallari dep atalatuǵın $I_* = \sup_T s_T$ hám $I^* = \inf_T S_T$ sanları bar boladı hám bul sanlar $s_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T$ teńsizligine boysınadı.

Dálilleniwi. 4-qasiyetten sanlı kóppliklerdiń bir-birinen ajıralıwı haqqındaǵı teoremadan $I_* = \sup_T s_T$ hám $I^* = \inf_T S_T$ sanlarınıń bar bolıwı kelip shıǵadı. Supremum hám infimum $[a, b]$ kesindisiniń barlıq mumkin bolǵan maydalawları boyınsha alınadı hám $\forall T', \forall T''$ maydalawlarında $s_{T'} \leq I_* \leq I^* \leq S_{T''}$ boladı.

1-teorema. $[a, b]$ segmentinde aniqlanǵan $f(x)$ funkciyasi usı segmentte integrallanıwshı bolıwı ushın onıń usı segmentte shegaralanǵan bolıwı hám

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0 \quad (3)$$

yamasa

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \quad (4)$$

teńliginiń orınlı bolıwı zárúr hám jeterli. Bundaǵı $\omega_k(f) = \sup_{x \in \Delta_k} f(x) - \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$

sanı $f(x)$ funkciyasınıń $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ kesindisindegi terbelisi dep ataladı.

Dálilleniwi. Zárúrligi. Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya bolsın. Onda funkciyanıń kesindide integrallanıwshı bolıwınıń zárúrli shártine sáykes $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanǵan hám anıq integraldıń anıqlamasınan sonday J sanı tabılıp, $\forall \varepsilon > 0$ sanına sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sanı bar boladı da $[a, b]$ segmentiniń diametri $\lambda(T) < \delta$ bolatuǵın $\forall T$ maydalanıwı hám $\forall \xi$ tańlawı ushın $|\sigma_T(\xi) - J| < \frac{\varepsilon}{3}$ teńsizligi orınlanadı. Bunnan $J - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(\xi) < J + \frac{\varepsilon}{3}$ bolǵanı ushın

Darbu qosındılarınıń 2-qasiyetinen $J - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf_{\xi} \sigma_T(\xi) = s_T$ hám

$S_T = \sup_{\xi} \sigma_T(\xi) \leq J + \frac{\varepsilon}{3}$ teńsizliklerin jazıw múmkin. Bul teńsizlikler hám Darbu

qosındılarınıń 1-qasiyetinen $J - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_T \leq S_T \leq J + \frac{\varepsilon}{3}$ teńsizligine iye bolamız. Onda

$0 \leq S_T - s_T < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ teńsizligi kelip shıǵadı, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$\lambda(T) < \delta, \forall T, \forall \xi \rightarrow 0 \leq S_T - s_T < \varepsilon$ bolǵanı ushın shektiń anıqlamasınan

$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0$ teńligine iye bolamız.

Jeterliliği. Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan hám $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0$ teńligi orınlı bolsın. Darbu qosındılarınıń 5-qasıyetinen $s_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T$. Onda $0 \leq I^* - I_* \leq S_T - s_T$ hám $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S_T - s_T) = 0$ sheginiń anıqlamasınan $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \lambda(T) < \delta \quad \forall T, \quad \forall \xi \rightarrow 0 \leq S_T - s_T < \varepsilon$ bolğanı ushın $0 \leq I^* - I_* \leq S_T - s_T < \varepsilon$ teńsizligi $[a, b]$ segmentiniń $\lambda(T) < \delta$ bolğan $\forall T$ maydalawında orınlı boladı. Onda I^* hám I_* sanları T maydalawınan ğárezli emesligi, $\varepsilon > 0$ sanınıń erikli ekenliginen $I^* = I_*$ iye bolamız. Endi $I^* = I_* = J$ belgilewin kiritip, $s_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T$ teńsizligi tiykarında $s_T \leq J \leq S_T$ hám Darbu qosındılarınıń 1-qasıyetinde $s_T \leq \sigma_T(\xi) \leq S_T$ bolğanı ushın, $|\sigma_T(\xi) - J| \leq S_T - s_T < \varepsilon$ teńsizligine iye bolamız. Bul $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám onıń integralı J ge teń bolıwın ańlatadı. Teorema dálillendi.

Dálillengen teoremadan eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám onıń integralı J sanına teń bolsa, onda $J = \inf S_T = \sup s_T$ teńligi orınlı bolıwın kóremiz.

Eskertiw. $S_T - s_T = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k$ teńligin esapqa alsaq, onda $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıw ushın orınlı hám jeterli sharttı, $S_T - s_T = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0$, eger $\lambda(T) \rightarrow 0$, túrinde jazıw múmkin.

3-§. Integrallanıwshı funkciyalar klassları

1-teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolsa, onda ol usı segmentte integrallanıwshı funkciya boladı.

Dálilleniwi. Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolsın. Onda Kantor teoremasına sáykes $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde teń ólshewli úzliksiz, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Endi $[a, b]$ segmentiniń maydalanıwı

$\lambda(T) = \max_{k=1, n} \Delta x_k < \delta$ bolğan $\forall T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ maydalawındaǵı

$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, dara segmentleriniń hárbirinde $f(x)$ funkciyası úzliksiz bolğanı ushın Veyershtass teoremasına sáykes $\xi'_k, \xi''_k \in \Delta_k, k = \overline{1, n}$ noqatları bar boladı da $f(\xi'_k) = m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$,

$f(\xi_k'') = M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$, $k = \overline{1, n}$ boladı. Bunda $|\xi' - \xi''| \leq |x_k - x_{k-1}| < \lambda(T) < \delta$.

Teñ ólshewli úzliksizlik anıqlaması tiykarında $\omega_k(f) = M_k - m_k = f(\xi_k'') - f(\xi_k') < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $k = \overline{1, n}$ teńsizligin jazıw múmkin. Bunnan

$$S_T - s_T = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k < \varepsilon \text{ bolıwın kóremiz.}$$

Demek, $f(x)$ funkciyası $S_T - s_T = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0$, eger $\lambda(T) \rightarrow 0$ shártin qanaatlandıradı, al bul $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın zárúrli hám jeterli.

2-teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde anıqlanğan hám monoton funkciya bolsa, onda ol $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya boladı.

Dálilleniwi. Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde kemeyiwshı funkciya bolsın, onda $\forall x \in [a, b]$ ushın $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ teńsizligi orınlanadı. Bul $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan funkciya bolıwın ańlatadı.

Endi $[a, b]$ segmentiniń $\forall T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ maydalawın qarastıramız. Onda

$$m_k = f(x_k) = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), M_k = f(x_{k-1}) = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), k = \overline{1, n}$$

teńlikleri orınlı boladı, sebebi $\forall x \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ ushın $f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k-1})$. Bunnan $f(x_{k-1}) - f(x_k) \geq 0$ hám

$$\Delta x_k \leq \lambda(T) = \max_{k=1, n} \Delta x_k \text{ teńsizlikleri tiykarında } S_T - s_T =$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq \lambda(T) \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) =$$

$= \lambda(T)(f(a) - f(b))$ bolıwın kóremiz. Demek, $S_T - s_T \rightarrow 0$, eger $\lambda(T) \rightarrow 0$ shárti orınlı. Bul bolsa $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın zárúrli hám jeterli. Teorema dálillendi.

3-teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan hám bólek úzliksiz funkciya bolsa, onda bul funkciya $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı.

Dálilleniwi. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde bólek úzliksiz. Onda ol usı segmentiniń shekli sandağı $c_k, k = \overline{1, n}$ noqatlarınan basqa hár bir noqatında úzliksiz. $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = b$ dep esaplaymız hám

$\alpha = \min_{k=0, n+1} (c_k - c_{k-1})$ belgilewin kiritemiz. Onda $c_k, k = \overline{1, n}$ noqatlarınıń $\rho = \frac{\alpha}{2}$ dógerikleri kesilispeydi hám tolıǵı menen $[a, b]$ segmentine tiyisli boladı.

$f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanǵan, yaǵnıy $|f(x)| \leq M$ teńsizligi $\forall x \in [a, b]$ ushın orınlı bolatuǵın $M > 0$ sanı bar. $E_1 = \bigcup_{k=1}^n U_\lambda(c_k)$ belgilewin kiritsek, onda $E = [a, b] \setminus E_1$ kópligi jabıq(tuyıq) kóplik boladı.

Bunda $\lambda = \min(\rho, \frac{\varepsilon}{24nM})$ hám $E \cap E_1 = \emptyset, E \cup E_1 = [a, b]$. Onda $f(x)$ funkciyası E kópliginde Kantor teoremasına sáykes teń ólsheuli úzliksiz, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta' \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$

shárti orınlanǵan. Endi $\delta = \min(\lambda, \delta')$ belgilewin kiritip, $[a, b]$ segmentiniń diametri $\lambda(T) < \delta$ bolatuǵın $\forall T = \{x_k, k = \overline{1, m}\}$ maydalawın qaraştıramız.

Sonda $S_T - s_T = \sum_{k=1}^m \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{\Delta_k \in E} \omega_k(f) \Delta x_k + \sum_{\Delta_k \in E_1} \omega_k(f) \Delta x_k + \sum_3 \omega_k(f) \Delta x_k$

teńligi orınlı boladı. Bul teńliktiń oń tárepindegi birinshi qosındıǵa T maydalawınıń tek E kópligine tiyisli kesindiler, ekinshi qosındıǵa T maydalawınıń tek E_1 kópligine tiyisli kesindiler, úshinshi qosındıǵa T maydalawınıń E hám E_1 kópliklerine kirmegen barlıq kesindiler kiritilgen.

Birinshi qosındıda $\omega_k(f) = \sup_{x', x'' \in \Delta_k \subset E} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ hám kesindiler qosındısı

$b - a$ dan asıp ketpeydi, ekinshi hám úshinshi qosındılarda $\omega_k(f) \leq 2M$ hám kesindiler qosındısı $n \cdot 2\lambda$ dan asıp ketpeydi, sebebi úshinshi qosındıda T maydalawınıń intervalları sanı $2n$ nen artıq bola almaydı. Sonıń úshın,

$$\begin{aligned} S_T - s_T &= \sum_{k=1}^m \omega_k(f) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} + 2M \cdot 2n\lambda + 2M \cdot 2n\lambda \leq \frac{\varepsilon}{2} + 8Mn \cdot \frac{\varepsilon}{24Mn} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Demek, $S_T - s_T = \sum_{k=1}^m \omega_k(f) \Delta x_k < \varepsilon$, eger $\lambda(T) < \delta$ bolsa. Bul shárttiń orınlı bolıwı

$f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın orınlı hám jeterli. Teorema dálillendi.

4-teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b)$ kesindisinde anıqlanan, shegaralanǵan, $\forall \tau \in [a, b)$ ushın $[a, \tau]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya

hám $\lim_{\tau \rightarrow b-0} \int_a^{\tau} f(x)dx$ shekli shegi bar bolsa, onda $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı boladı. Bul teoremanıń dálilin keltirmeymiz.

4-§. Anıq integraldın qasiyetleri

Eskertiw. 1) $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda onıń integralı integral astındaǵı ańlatpanıń argumentin qanday harip penen belgilewden ǵárezli bolmaǵan san boladı, yaǵnıy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz.$$

2) Anıq integrallardıń qasiyetleriń Dálilleniwide integral astındaǵı funkciyası ushın anıq integraldın bar bolıwınıń zárúrli hám jeterli sharti orınlangan dep esaplanadı.

1. Funkciyalar ustinde arifmetikalıq ámellerge baylanıshlı qasiyetler

1-qasiyet. Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda $\forall \alpha, \beta \in R$ sanlarında $f(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı boladı hám

$$\int_a^b (\alpha u(x) + \beta v(x))dx = \alpha \int_a^b u(x)dx + \beta \int_a^b v(x)dx \quad (1)$$

teńligi orınlı.

Dálilleniwi. $[a,b]$ segmentiniń tayınlaǵan T maydalawına hám tayınlaǵan ξ tańlawına dúzilgen $u(x)$, $v(x)$ hám $f(x)$ funkciyalarınıń integrallıq qosındıların sıykes $\sigma_T(u, \xi)$, $\sigma_T(v, \xi)$ hám $\sigma_T(f, \xi)$ arqalı belgilesek, onda

$$\sigma_T(f, \xi) = \alpha \sigma_T(u, \xi) + \beta \sigma_T(v, \xi) \quad (2)$$

teńligi orınlı boladı. Eger T maydalawınıń $\lambda(T)$ maydalılıǵı nolge umtılsa, onda bul teńliginiń oń tárepi shegine iye boladı. Sebebi $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı hám shek sıızıqlılıq qasiyetke iye. Onda (2) teńliginiń shep tárepiniń de shegi bar boladı hám bul shekler bir-birine teń bolıwınan (1) formula orınlı boladı.

Dálillengen qasiyet anıq integraldın sıızıqlılıq qasiyeti dep ataladı. Bul sıızıqlılıq qasiyetine anıq integraldın birteklilik hám additivlik qasiyetleri birikken.

2-qasiyet. Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ funkciyası da $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı.

Dálilleniwi. $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı úshın olar usı segmentte shegaralanǵan, yaǵnıy $\exists M > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |u(x)| \leq M, |v(x)| \leq M$ shártı orınlı. Bunnan

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ funkciyası da $[a, b]$ segmentinde shegaralanǵan hám $\forall x', x'' \in [a, b]$ ushın

$$|f(x') - f(x'')| = |u(x')v(x') - u(x'')v(x') + u(x'')v(x') - u(x'')v(x'')| = \quad (3)$$

$$|(u(x') - u(x''))v(x') + u(x'')(v(x') - v(x''))| \leq M(|u(x') - u(x'')| + |v(x') - v(x'')|)$$

teńsizligi orınlı. Endi bul teńsizlikti $[a, b]$ segmentiniń tayınlanǵan T maydalawında $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentlerinde jazsaq, onda $\forall x', x'' \in \Delta_k, k = \overline{1, n}$ ushın orınlı bolǵan,

$$|f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in \Delta_k} |f(x') - f(x'')| = \omega_k(f),$$

$$|u(x') - u(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in \Delta_k} |u(x') - u(x'')| = \omega_k(u)$$

$$|v(x') - v(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in \Delta_k} |v(x') - v(x'')| = \omega_k(v)$$

teńsizliklerin esapqa alǵan halda (3) teńsizliginen $\omega_k(f) \leq M(\omega_k(u) + \omega_k(v))$,

$k = \overline{1, n}$ teńsizlikleri sistemasına iye bolamız. Bul teńsizlikler sistemasınıń k – teńlemesin Δx_k ğa kóbeyp, payda bolǵan sistemadaǵı teńsizliklerdi aǵzama-

aǵza qossa, $\sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \leq M(\sum_{k=1}^n \omega_k(u) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \omega_k(v) \Delta x_k)$ teńsizligi payda boladı.

Eger T maydalawınıń $\lambda(T)$ maydalılıǵı nolge umtılsa, onda bul teńsizliginiń oń tárepi nolge umtıladı. Onda shektiń teńsizliklerge baylanıslı qasiyetinen bul teńsizliginiń shep tárepiniń $\lambda(T) \rightarrow 0$ daǵı shegi nolge teń. Bul bolsa $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın zárúr hám jeterli.

2. Anıq integraldıń integrallaw kesindisine baylanıslı qasiyetleri.

1-qasiyet. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda ol $\forall \Delta_1 = [a_1, b_1] \subset [a, b] = \Delta$ kesindisinde de integrallanıwshı boladı.

Dálilleniwi. Meyli T' arqalı $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ segmentiniń diametri $\lambda(T')$ bolǵan maydalawı bolsın. $[a, b]$ segmentin T usılında sonday maydalaymız, nátiyjede T' maydalawınıń hár bir noqatı T maydalawına tiyisli hám $\lambda(T) \leq \lambda(T')$ teńsizligi orınlı bolsın. Bunda $\lambda(T)$, T maydalawınıń diametri. Onda

$\lambda(T') \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda(T) \rightarrow 0$ hám $T' \subset T$, $\omega_{k,T'}(f)\Delta x_k \geq 0$, $\omega_{k,T}(f)\Delta x_k \geq 0$ bolanı ushın $\sum_{T_1} \omega_{k,T'}(f)\Delta x_k \leq \sum_T \omega_{k,T}(f)\Delta x_k$ teńsizligi orınlı boladı. Bunda $\omega_{k,T'}(f)$, $f(x)$ funkciyasınıń T' maydalawındaǵı k – dara segmentindegi terbelisi. $\lambda(T') \rightarrow 0$ da $\lambda(T) \rightarrow 0$ hám $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı ushın keyingi teńsizliktiń oń tárepi nolge umtiladı. Sonıń ushın onıń shep tárepiniń $\lambda(T') \rightarrow 0$ daǵı shegi nolge teń. Bul $f(x)$ funkciyası $[a_1, b_1]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın hám jeterli.

2-qasiyet. Eger $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı hám $c \in (a,b)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (4)$$

teńligi orınlı.

Dálilleniwi. (4)-teńliktiń oń tárepindegi integrallardıń bar bolıwı 1-qasiyetten kelip shıadı. Eger $f(x)$ funkciyasınıń $[a,b]$ segmentiniń $T = \{x_k, k = \overline{1,n}\}$ maydalawındaǵı bazıbir $x_i = c, 1 < i < k$ bolǵan jadaydaǵı integrallıq qosındısı $\sigma_{[a,b]}(f, T)$, al usı maydalawındaǵı $[a,c], [c,b]$ segmentlerindegi integrallıq qosındıların sáykes $\sigma_{[a,c]}(f, T), \sigma_{[c,b]}(f, T)$ túrinde belgilesek, onda

$$\sigma_{[a,b]}(f, T) = \sigma_{[a,c]}(f, T) + \sigma_{[c,b]}(f, T)$$

teńligi orınlı. $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı ushın, bundaǵı harbir integrallıq qosındısı $\lambda(T) \rightarrow 0$ shegine iye boladı hám (4)-teńligi orınlı.

Dálillengen qasiyettiń kerisi de durıs boladı, yaǵnıy eger $c \in (a,b)$ hám $f(x)$ funkciyası $[a,c], [c,b]$ segmentlerinde integrallanıwshı bolsa, onda ol $[a,b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya boladı.

3-qasiyet. Eger $f(x)$ funkciyası $x = a$ noqatında anıqlanan bolsa, onda $\int_a^a f(x)dx = 0$ boladı.

Dálilleniwi. $\int_a^b f(x)dx$ integralı $a = b$ jadayında harbir

$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ integrallıq qosındınıń $\Delta x_k = 0, k = \overline{1,n}$ bolǵanı ushın nolge teń, yaǵnıy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_T(f, \xi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot 0 = 0 = \int_a^a f(x)dx$$

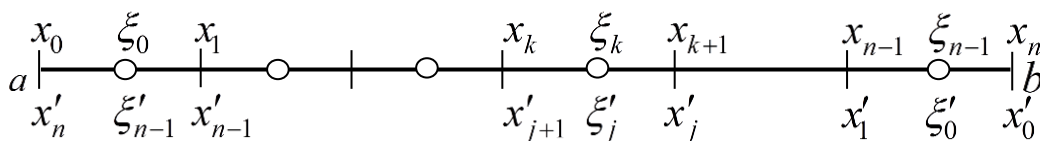
teńligi orınlı.

4-qasiyet. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad a < b$$

teńligi orınlı.

Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ hám $T' = \{x'_k = x_{n-k}, k = \overline{0, n}\}$ usıllarında maydalaymız. Bunda $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $a = x'_n < x'_{n-1} < \dots < x'_0 = b$ shártleri orınlangan. Endi usı maydalawlarǵa sáykes $\xi = \{\xi_k, k = \overline{1, n}\}$, $\xi' = \{\xi'_k, k = \overline{1, n}\}$ tańlawların $\xi_k = \xi'_{n-k+1}, k = \overline{1, n}$ shárti orınlı bolatuǵınday etip alamız. Bul múmkin, sebebi $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı, integraldın mánisi $[a, b]$ segmentin maydalaw usılınan hám tańlaw usılınan ġárezli emes.



2-sūwret

Sonda $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ hám $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda(T') \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\xi'_j) \Delta x'_j$

boladı. Bunda $f(\xi'_1) \Delta x'_1 = -f(\xi_n) \Delta x_n, \dots, f(\xi'_n) \Delta x'_n = -f(\xi_1) \Delta x_1$ teńlikleri

orınlı. Demek, $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda(T') \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\xi'_j) \Delta x'_j = -\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = -\int_a^b f(x)dx$.

5-qasiyet. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda qalegen $[a, b]$ segmentine tiyisli x_1, x_2, x_3 noqatları ushın

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \quad (5)$$

teńligi orınlı boladı.

Dálilleniwi. Eger $x_1 < x_2 < x_3$ bolsa, onda 1 hám 2-qasiyetlerden (5) orınlı.

Meyli $x_3 < x_1 < x_2$ bolsın. Onda 2-qasiyetten $\int_{x_3}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_3}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

4-qasiyetten

$$-\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = -\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \text{ yamasa } \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx.$$

Basqa variantlar usıǵan uqsas dálillenedi.

3. Anıq integraldın teńsiliklerge baylanışlı qasiyetleri.

1-qasiyet. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám $\forall x \in [a, b]$ ushın $f(x) \geq 0$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin $\forall T$ maydalawda hám $\forall \xi$ tańlawında $\sigma_T(f, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$ teńsizligi orınlı. Bul teńsizlikte $\lambda(T) \rightarrow 0$ da shekke

ótip, shektiń teńsizliklerge baylanışlı qasiyetlerinen $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ teńsizligine iye bolamız.

2-qasiyet. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám $\forall x \in [a, b]$ ushın $f(x) \geq g(x)$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi. $u(x) = f(x) - g(x)$ belgilewin kiritsek, $\forall x \in [a, b]$ ushın $u(x) \geq 0$ teńsizligi orınlanadı. Onda 1-qasiyetten $\int_a^b u(x)dx \geq 0$ boladı. Bunnan anıq integraldın sıızıqlılıq qasiyetinen paydalanıp, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ teńsizligine iye bolamız.

3-qasiyet. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı, $\forall x \in [a, b]$ ushın $f(x) \geq 0$ teńsizligi orınlı hám keminde bir $x_0 \in [a, b]$ noqatı tabılıp, usı noqatta $f(x)$ funkciyası úzliksiz hám $f(x_0) > 0$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx > 0$ boladı.

Dálilleniwi. Meyli $x_0 \in (a, b)$ bolsın. Onda úzliksiz funkciyanıń tańbasın saqlaw qasiyetinen sonday $\delta > 0$ sanı bar boladı da $\forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b]$ ushın

$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$ teńsizligi orınlı boladı. Endi $[a, x_0 - \delta]$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $[x_0 + \delta, b]$ kesindilerin qarastırsaq, 1-qasiyetten

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geq 0, \quad \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq 0, \quad \text{hám}$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta = f(x_0)\delta > 0 \quad \text{boladi.} \quad \text{Onda}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq f(x_0)\delta > 0.$$

4. Anıq integraldı bahalaw.

Teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda $|f(x)|$ funkciyasıda $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi.

$u(x) = |f(x)|$ belgilewin kiritip, $\forall x', x'' \in [a, b]$ ushın $|u(x'') - u(x')| = ||f(x'')| - |f(x')|| \leq |f(x'') - f(x')|$ teńsizligi orınlı bolıwın kóremiz. Onda $[a, b]$

segmentiniń $\forall T$ maydalaw usılında $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara kesindilerindegi $u(x)$ hám $f(x)$ funkciyalarınń terbelisleri ushın,

$$\omega_k(u) = \sup_{x', x'' \in \Delta_k} |u(x'') - u(x')| \leq \sup_{x', x'' \in \Delta_k} |f(x'') - f(x')| = \omega_k(f),$$

yagnıy $\omega_k(u) \leq \omega_k(f), k = \overline{1, n}$ teńsizliklerin jazıw múmkin. Bul teńsizlikler sistemasındağı k – teńsizlikti Δx_k qa kóbeytip, nátiyjede kelip shıqqan teńsizliklerdi aǵzama-aǵza qosıp, $\sum_{k=1}^n \omega_k(u) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k$ teńsizligine iye

bolamız. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı ushın bul teńsizliktiń oń tárepi $\lambda(T) \rightarrow 0$ da nolge umtıladı. Onda onıń shep tárepi de $\lambda(T) \rightarrow 0$ da nolge umtıladı. Bul bolsa $u(x) = |f(x)|$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı ushın zárúr hám jeterli.

$$\text{Endi} \quad \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k \quad \text{yamasa} \quad \sigma_T(f, \xi) \leq \sigma_T(|f|, \xi)$$

teńsizliginde $\lambda(T) \rightarrow 0$ da shekke ótsek, $u(x)$ hám $f(x)$ funkciyalarınń $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı ushın $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ teńsizligi durıs boladı. Teorema dálillendi.

$|f(x)|$ funkciyalarınıń $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwınan $f(x)$ funkciyalarınıń $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolıwı kelip shıqpaydı. Mısal retinde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{eger } x \in Q, \\ -1, & \text{eger } x \in J \end{cases}$ funkciyasın alsaq, onda $u(x) = |f(x)| = 1$ boladı hám ol $\forall [a, b]$ kesindisinde integrallanıwshı, al $f(x)$ funkciyalarınıń ózi $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı emes.

Eskertiw. $f(x)$ funkciyası shetki noqatları a hám b ($a < b$ yamasa $b < a$) bolğan kesindide integrallanıwshı bolsa, onda anıq integraldı bahalaw ushın $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$ teńsizliginen paydalanadı.

Mısal. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolsa, onda $\forall \alpha, \beta \in [a, b]$ ushın $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right| \cdot |b - a|$ teńsizligin dálilleń.

Sheshiliwi. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolgani ushın bul funkciya $[a, b]$ segmentinde shegaralanğan. Onda $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ bar boladı hám $\forall x \in [a, b]$ ushın $|f(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ teńsizligi orınli bolıwın

esapqa alsaq, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \int_a^b dx = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot |b - a|$ boladı.

5. Orta mánis haqqında integrallıq teorema.

Teorema. Meyli, $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları ushın tómendegi shártler orınli bolsın:

1. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı,
2. $m, M \in \mathbb{R}$ sanları bar bolıp $\forall x \in [a, b]$ ushın $m \leq f(x) \leq M$ teńsizligi orınli.
3. $g(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde tańbasın saqlaydı, yaǵnıy $\forall x \in [a, b]$ ushın $g(x) \geq 0$ yamasa $\forall x \in [a, b]$ ushın $g(x) \leq 0$.

Onda sonday $\mu \in [m, M]$ sanı bar bolıp,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

teńligi orınli boladı.

Dálilleniwi. Meyli $\forall x \in [a, b]$ ushın $g(x) \geq 0$ bolsın. Onda $m \leq f(x) \leq M$ teńsizliginen $\forall x \in [a, b]$ ushın $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ teńsizligi kelip shıǵadı. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı

bolğanı ushın $f(x)g(x)$ funkciyası da usı kesindide integralanıwshı. Onda integraldın teńsizliklerge baylanıslı qasıyetinen paydalanıp,

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \quad (2)$$

teńsizligine iye bolamız. Eger $\int_a^b g(x)dx = 0$ bolsa, onda keyingi teńsizlikten

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \text{ teńligi kelip shıǵadı. Bul jadayda (1) teńligi } 0 = \mu \cdot 0 \text{ túrine}$$

iye bolıp μ retinde $[m, M]$ kesindisine tiyisli qalegen sandı alǵanda (1) teńligi

orınli boladı. Eger $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ bolsa, onda $\int_a^b g(x)dx > 0$ boladı, sebebi

teoremanıń 3-shártine sáykes $g(x) \geq 0$. (2) teńsizligin $\int_a^b g(x)dx$ sanına bólip,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu \text{ belgilewin kiritsek, (2) teńsizligine teń kúshli bolǵan}$$

$m \leq \mu \leq M$ teńsizligi kelip shıǵadı. Bul kiritilgen belgilewden (1) teńligi orınli bolıwın kóriw qıyın emes. $g(x) \leq 0$ bolgan jadayda da teorema durıs boladı, sebebi $g(x)$ tı $-g(x)$ qa ózgeriwden (1) teńligi ózgermeydi. Teorema dálillendi. Dálillengen teoremanıń saldarı retinde orta mánis haqqında integrallıq teorema dep atalatuǵın tómendegi teorema kelip shıǵadı.

Teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz, $g(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integralanıwshı hám tańbasın saqlaytuǵın funkciya bolsa, onda sonday $\xi \in [a, b]$ noqatı bar boladı da (1) teńligi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (3)$$

túrinde jazıladı.

Dálilleniwi. Kesindide úzliksiz funkciyalar ushın Veyershtass teoremasına sáykes sonday $x_1, x_2 \in [a, b]$ mánisleri bar boladı da $f(x_1) = m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ hám $f(x_2) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ teńlikleri orınli boladı. Onda $\forall x \in [a, b]$ ushın

$m \leq f(x) \leq M$ hám (1) formuladaǵı μ sanı $m \leq \mu \leq M$ bolǵanı sebepli kesindide úzliksiz funkciyanıń aralıq mánisi haqqıdaǵı Koshi teoremasına sáykes $f(\xi) = \mu$ teńligi orınlı bolatuǵın $\xi \in [a, b]$ noqatı bar hám sonıń ushın (1) teńligin úzliksiz funkciyalar jadayında (3) túrinde jazıladı. Teorema dálillendi.

Dálillengen teorema, $\forall x \in [a, b]$ ushın $f(x) \geq 0$ sharti orınlı bolganda $[a, b]$ segmenti ústinde jasalǵan iymek sıızıqlı trapeciyanıń maydanı ultanınıń uzınlıǵı $b - a$ biyikligi $f(\xi)$ ge teń bolgan tuwrımúyeshliktiń maydanına teń degen geometriyalıq maǵananı beredi.

Mısal. $\frac{40\pi - \pi^2}{809} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{10 - 2x}{100 + 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x} dx \leq \frac{40\pi - \pi^2}{400}$ teńsizligin dálilleń.

$$f(x) = \frac{1}{100 + 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x}, \quad g(x) = 10 - 2x \quad \text{belgilewlerin} \quad \text{kiritip,}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{ushın} \quad \text{orınlı} \quad \text{bolǵan} \quad 0 \leq \sin^3 x \cos x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \quad \text{teńsizliginen}$$

$$\text{paydalansaq,} \quad 0 \leq 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x \leq \frac{9}{8} \quad \text{hám} \quad \frac{8}{809} \leq \frac{1}{100 + 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x} \leq \frac{1}{100}$$

teńsizlikleri orınlı boladı. Onda (2) teńsizliginen paydalanıp,

$$\frac{8}{809} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (10 - 2x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{10 - 2x}{100 + 2\sqrt{3}\sin^3 x \cos x} dx \leq \frac{1}{100} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (10 - 2x) dx \quad \text{teńsizligine iye}$$

$$\text{bolamız. Bunda} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (10 - 2x) dx = 5\pi - \frac{\pi^2}{4} \quad \text{bolǵanı ushın berilgen teńsizlik orınlı boladı.}$$

5-§. Joqarı shegi ózgeriwshi integral.

1. Joqarı shegi ózgeriwshi bolǵan integral. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya bolsa, onda $\forall x \in [a, b]$ ushın joqarı shegi ózgeriwshi integral dep atalatuın,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

integralı bar boladı hám ol tómendegi qasiyetlerge iye.

1-teorema(úzliksizlik qasiyeti). Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya bolsa, onda $F(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde

úzliksiz funkciya boladı.

Dálilleniwi. Meyli $\forall x \in [a, b]$ hám $x + \Delta x \in [a, b]$ bolsın. Onda $F(x)$ funkciyasınıń $x \in [a, b]$ noqatındaǵı ósimi,

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (2)$$

túrinde jazıladı. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı funkciya bolǵanı ushın bul funkciyası $[a, b]$ segmentinde shegaralanǵan, yaǵnıy $\exists M > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq M$. Endi integraldı bahalaw qayıdasınan paydalanıp,

$$|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq M \int_x^{x+\Delta x} dt = M \cdot \Delta x,$$

yaǵnıy $|\Delta F| \leq M \cdot \Delta x$ teńsizligine iye bolamız. Bunnan $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta F \rightarrow 0$, yaǵnıy $F(x)$ funkciyası x hoqatında úzliksiz. x noqatı $[a, b]$ kesindisiniń qalegen noqatı bolǵanı ushın $F(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz.

2-teorema (differenciallanıwshılıq qasıyeti). Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı hám $x_0 \in [a, b]$ noqatında úzliksiz funkciya bolsa, onda $F(x)$ funkciyası $x_0 \in [a, b]$ noqatında differenciallanıwshı funkciya boladı hám onıń tuwındısı ushın $F'(x_0) = f(x_0)$ teńligi orınlı.

Dálilleniwi. Meyli $\Delta x \neq 0$ hám $x_0, x_0 + \Delta x \in [a, b]$ bolsın. Onda

$$\Delta F = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \text{ boladı. } F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0) \text{ bolǵanı ushın teorema}$$

dálillengen boladı, eger $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right) = 0$ teńliginiń orınlı bolıwı kórsetilse.

Bul teńligin Dálilleniwi ushın tómendegi turlendiriwler orınlanadı:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x} f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))dt$$

Teńliginen hám integraldı bahalaw qayıdasınan paydalanıp,

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|dt \right| \quad (3)$$

teńsizligine iye bolamız. Teorema shártine sáykes $f(x)$ funkciyası x_0 noqatında úzliksiz, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall t \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ boladı.

Meyli $|\Delta x| < \delta$ bolsın. t shetki noqatları x_0 hám $x_0 + \Delta x$ bolǵan kesindige tiyisli bolǵanlıqtan $|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta$. Sol sebepli keyingi teńsizlik tek $|\Delta x| < \delta$ shártin qanaatlandıratuǵın Δx lar ushın ǵana orınlanadı. Onda (3) teńsizliginen

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \right| < \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon$$

teńsizligi kelip shıǵadı. Solay etip, $\forall \varepsilon > 0$ sanına sonday $\delta = \delta(\varepsilon)$ sanı tabıladı da $0 < |\Delta x| < \delta$ shártin qanaatlandıratuǵın Δx lar ushın $\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon$ teńsizligi

orınlı. Bul $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right) = 0$ teńliginiń orınli bolıwı menen teń kúshli.

Teorema dálillendi.

Dálillengen teorema $x_0 = a$ bolǵan jaǵdayda $F'(x_0) = f(x_0)$ teńligi $F'(a+0) = f(a)$ hám $x_0 = b$ bolǵan jaǵdayda $F'(b-0) = f(b)$ túrinde jazıladı.

Sonıń menen birge dálillengen teoremaǵı joqari shegi ózgeriwshi integraldıń tuwındısı, integral astındaǵı funkciyanıń, argumentiniń mánisi integraldıń joqari shegine teń bolǵandaǵı, mánisine teń bolıwı matematikalıq analizdiń áhmiyetli faktı bolıp esaplanadı.

3-teorema(úzliksiz funkciyanıń baslanısh funkciyası bar bolıwı). Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolsa, onda ol usı segmentte baslanǵısh funkciyasına iye, bul dáslepki funkciya (1) formulası menen berilgen joqari shegi ózgeriwshi integral boladı hám sonıń ushın

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C \quad (4)$$

teńligi orınlı. Bunda C – erikli turaqlı.

Dálilleniwi. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın $F(x)$ funkciyası $\forall x \in [a, b]$ noqatında differensiallanıwshı boladı hám onıń tuwındısı

$f(x)$ funkciyasına teń, yaǵnıy $F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$. Bunnan baslanısh

funkciyanıń anıqlamasına sáykes $F(x)$ funkciyası $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmentindegi baslanısh funkciyası boladı. Onda $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmentindegi baslanısh funkciyalar kópligi retinde (4) formulası orınli. Teorema dálillendi.

Saldar. Dálillengen teoremalardan $[a, b]$ segmentinde úzliksiz $f(x)$ funkciyasınıń harqanday dáslepki funkciyası

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad x \in [a, b] \quad (5)$$

kórinisine iye bolıwı kelip shıǵadı. Bunda C — erikli turaqlı.

6-§. Anıq integrallardı esaplaw usılları

1. Nyuton-Leybnic formulası.

Teorema. Eger $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz hám $G(x)$ onıń usı segmenttegi bazıbir baslanǵısh funkciyası bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad (1)$$

teńligi orınlı.

Dálilleniwi. Úzliksiz funkciyanıń baslanǵısh funkciyası bar bolıwı haqqındaǵı teoremaǵa sáykes $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b]$ segmentindegi baslanǵısh funkciyası

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C \quad (2)$$

túrinde jazıladı. (2) formulada $x = a$ bolǵanda $C = G(a)$ bolǵanı ushın

$\forall x \in [a, b]$ mánislerinde bul formulanı $G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$ túrinde jazıw múmkin.

Onda $x = b$ dara jadayında keyingi teńlikten

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) \text{ teńligine iye bolamız. Teorema}$$

dálillendi. (1)-formulanıń oń tárepini $G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$ túrinde belgilep, onı

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$$

túrinde jazadı hám Nyuton-Leybnic formulası yamasa differenciallıq esaptıń tiykarı formulası dep ataydı.

1-mısal. Nyuton-Leybnic formulası járdeminde $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}, n=1,2,\dots$ isbeliginiń shegin tabıń.

Sheshiliwi. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ túrinde jazıp alsaq, onda teńliktiń oń tárepi $f(x) = x^\alpha$ funkciyasınıń $[0,1]$ segmentin $T = \{x_k = \frac{k}{n}, k = \overline{0,n}\}$ maydalaw hám $\xi = \{\xi_k, k = \overline{1,n}\}$ tańlawında integrallıq qosındı boladı. Bunda $\lambda(T) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, eger $n \rightarrow \infty$. Onda anıq integraldıń anıqlamasınan hám Nyuton-Leybnic formulasınan paydalanıp,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

shegine iye bolamız.

2-mısal. Eger $f(x)$ funkciyası haqıyqıy sanlar kósherinde úzliksiz, al $u(x), v(x)$ funkciyaları haqıyqıy sanlar kósherinde differenciallanıwshı funkciyalar bolsa, onda Nyuton-Leybnic formulasınan paydalanıp $f(x)$ funkciyasınıń tómengi shegi $u(x)$, joqarı shegi $v(x)$ bolan integralınıń tuwındısın tabıń.

Sheshiliwi. Meyli $G(x)$ funkciyası $f(x)$ funkciyasınıń bazıbir baslanış funkciyası bolsın. Onda Nyuton-Leybnic formulasına sáykese,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = G(t) \Big|_{u(x)}^{v(x)} = G(v(x)) - G(u(x)) \quad \text{teńligin jazıw múmkin. Bunnan}$$

quramalı funkciyalardıń tuwındısın tabıw qaiydasınan paydalanıp,

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = (G(v(x)) - G(u(x)))' = G'(v(x))v'(x) - G'(u(x))u'(x) =$$

$$= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x), \quad \text{yaǵnıy}$$

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

formulasına iye bolamız.

2. Anıq integralda ózgeriwshini almastırıw.

Teorema. Eger $f(x)$ funkciyası (c,d) intervalında úzliksiz, al $x = u(t)$ funkciyası (ξ, η) intervalında úzliksiz differenciallanıwshı, $\forall t \in (\xi, \eta)$ ushın

$u(t) = x \in (c, d)$ hám $\alpha \in (\xi, \eta)$, $\beta \in (\xi, \eta)$ mánislerinde sáykes $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$ mánislerin qabıl etse,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

teńligi orınlı boladı. Bul teńligine anıq integral belgisi astında ózgeriwshini almasırw formulası delinedi.

Dálilleniwi. $f(x)$ funkciyası shetki noqatları $a \in (c, d)$ hám $b \in (c, d)$ bolğan segmentinde úzliksiz bolğanı ushın ol usı segmentte integrallanıwshı boladı. Meyli $F(x)$ funkciyası $f(x)$ funkciyasınıń shetki noqatları a hám b bolğan segmentindegi baslanğısh funkciyası bolsın. Onda Nyuton-Leybnic formulasına sáykes,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

teńligi orınlı. Bunda $F'(x) = f(x)$, $x \in (c, d)$ teńligi orınlı hám $F(u(t))$ quramalı funkciyası $f(u(t))u'(t)$ funkciyasınıń baslanğısh funkciyası boladı. Sebebi

$\frac{d}{dt}(F(u(t))) = F'(u(t))u'(t) = f(t)u'(t)$. Onda Nyuton-Leybnic formulasına sáykes,

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = F(u(t))\Big|_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = F(a) - F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema dálillendi.

1-mısal. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ integralın esaplań.

Sheshiliwi. $x = a \sin t$ túrinde ózgeriwshi almasırlısa, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$ hám $x = 0$ bolğanda $t = 0$, al $x = a$ bolğanda $t = \frac{\pi}{2}$ bolğanı

ushın dálillengen teoremağa sáykes, $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2 \pi}{4}$ boladı.

2-mısal. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ integralın esaplań.

Sheshiliwi. Eger ózgeriwshi almastırıwdı $x = \operatorname{tg} t$ túrinde ámelge asırsaq,

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \quad \text{hám} \quad x=0 \quad \text{bolǵanda} \quad t=0, \quad \text{al} \quad x=1$$

bolǵanda $t = \frac{\pi}{4}$ boladı. Sonda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\cos^2 t} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2} \frac{\sin(t+\frac{\pi}{4})}{\cos t}\right) dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\ln 2}{2} + \ln \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \ln \cos t\right) dt = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \end{aligned}$$

boladı. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$ integralın esaplaymız. Usı maqsette $t = \frac{\pi}{4} - z$ túrinde

ózgeriwshi almastırsaq, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = \cos z$ bolǵanı ushın,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos z dz \quad \text{teńligi orınlı boladı. Onda} \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

3. Anıq integraldı bóleklep integrallaw usılı.

Teorema. Eger $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde úzluksız differencialanıwshı funkciyalar bolsa, onda bóleklep integrallaw formulası dep atalatuǵın $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ teńligi orınlı.

Dálilleniwi. Teorema shártinen $u \cdot v, u' \cdot v, u \cdot v'$ funkciyaları eki úzliksiz funkciyalardıń kóbeymesi retinde $[a, b]$ segmentinde úzluksız funkciyalar boladı. Onda kóbeymeni differenciallaw qayıdasındaǵı $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ teńlikti

$[a, b]$ segmenti boyınsha integrallap, $\int_a^b (u \cdot v)' dx = \int_a^b v \cdot u' dx + \int_a^b u \cdot v' dx$ teńligine

iyе bolamız. Nyuton-Leybnic formulasınan $\int_a^b (u \cdot v)' dx = u \cdot v|_a^b$ bolǵanı ushın

keying teńlikti $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ túrinde jazıw múmkin.

Teorema dálillendi.

1-misal. $\int_1^2 \ln x dx$ integralın esaplań.

Sheshiliwi. $\int_1^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - 1.$

2-misal. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n = 1, 2, \dots$ integralın esaplań.

Sheshiliwi.

$n = 0$ bolsa, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; $n = 1$ bolsa, $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$;

$n \geq 2$ bolsa, berilgen integraldı $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$ túrinde jazıp,

bóleklep integrallaw formulasın qollanıw múmkin. Sonda

$u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1)(\sin^{n-2} x) \cos x dx$; $dv = d(-\cos x) \Rightarrow v = -\cos x$

hám

$$J_n = (\sin^{n-1} x)(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) J_2 - (n-1) J_n ,$$

yaǵnıy $J_n = (n-1) J_2 - (n-1) J_n$ boladı. Bunnan $J_n = \frac{n-1}{n} J_2$, $n = 2, 3, \dots$

túrindegi rekkurent formulasına iye bolamız. Bul formulada $n = 2m$, $m \in N$ bolsa, onda

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$n = 2m + 1$ bolsa, onda

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

boladı.

3-misal. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ integralın esaplań.

Sheshiliwi.

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx =$$

$= \pi^2 + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx$. Endi teńliktiń oń tárepindegi integraldı esplaw ushın

bóleklep integrallaw formulasınan jáne bir márte paidalanamız, sonda

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

boladı, yaǵnıy $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

7-§. Anıq integraldın geometriyalıq máselelerdi sheshiwde qollanıwları

1. Tegisliktegi figura hám onıń maydanı. Tegisliktegi noqatlardıń harqanday shegaralanǵan kópligi tegisliktegi figura dep ataladı. Tegisliktegi figuranı shekli sandaǵı óz-ara ishki kesilispeytuǵın tuwrımúyeshlikler birikpesi túrinde ańlatıw múmkin bolsa, onda bul figura kletkalı figura dep ataladı. Tuwrımúyeshlik dep tegisliktiń $E = \{(x, y): a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$ túrindegi noqatları kópligine yamasa bul kóplikten onıń shegarasınıń bazıbir bólegin yamasa shegarası tolıǵı menen alıp taslanǵanda kelip shıǵatuǵın kóplikke aytadı.

E tuwrımúyeshliginiń maydanı dep, E tuwrımúyeshligine onıń shegarasınıń tiyisli bolıwınan yamasa tiyisli bolmawınan biyǵarez, $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ sanına aytadı.

Kletkalı figuranıń maydanı dep onıń quramındaǵı tuwrımúyeshlikler maydanlarınıń qosındısına aytıladı. Kletkalı figuralardıń maydanı onı tuwrımúyeshliklerge maydalaw usılınan ǵárezli bolmaǵan teris emes san bolıwın hám bul maydan additivlik, invariantlıq, monotonlıq qasiyetlerine iye bolıwın kórsetiw múmkin. Additivlik qasiyet, óz-ara kesilispeytuǵın eki kletkalı figuralardıń maydanı olardıń maydanlarınıń qosındısına teń bolıwın; invariantlıq qasiyet, eki teńdey (kongruent) bolǵan kletkalı figuralardıń maydanları da teń bolıwın; monotonlıq qasiyet, eger eki kletkalı G hám U figuraları ushın $G \subset U$ shárti orınlı bolsa, onda G figurasınıń maydanı U figurasınıń maydanınan úlken bola almawın ańlatadı.

Tegisliktegi K figurası kvadratlanıwshı figura dep ataladı, eger $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın $q \subset K \subset Q$ shártin qanaatlandıratuǵın Q hám q kletkalı figuraları tabılıp, $0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon$ teńsizligi orınlı bolsa. Bunda $S(q)$ hám $S(Q)$ sanları sáykes

q hám Q kletkalı figuralarınıń maydanların ańlatadı. Meyli K figurası kvadratlanıwshı figura bolsın. $q \subset K \subset Q$ shártin qanaatlandıratuǵın qálegen q hám Q kletkalı figuraları ushın $S(q) \leq S(K) \leq S(Q)$ teńsizligi orınlı bolatuǵın $S(K)$ sanı K figurasınıń maydanı dep ataladı.

Teorema(maydanniń bar bolıwı). Hár bir kvadratlanıwshı K figurası ushın birden-bir $S(K)$ sanı bar boladı hám $S(K) = \sup S(q) = \inf S(Q)$ teńligi orınlı.

Dálilleniwi. $q \subset K \subset Q$ shártin qanaatlandıratuǵın qálegen q hám Q kletkalı figuraları ushın $S(q) \leq S(Q)$ teńsizligi orınlı. Onda sanlı kópliklerdiń bir-birinen ajıralıwı haqqındaǵı teoremaǵa sáykes K figurasınıń ishinde jáylasıwı múmkin bolǵan kletkalı q figuralar maydanlarınıń kópliginde $\sup S(q)$ hám K figurasınıń sırtında jáylasıwı múmkin bolǵan kletkalı Q figuralar maydanlarınıń kópliginde $\inf S(Q)$ bar boladı da $S(q) \leq \sup S(q) \leq \inf S(Q) \leq S(Q)$ teńsizligi orınlı boladı. Bunnan $S(q) \leq \inf S(Q) \leq S(Q)$. Demek, $S(K) = \inf S(Q)$ dep alsaq, $S(q) \leq S(K) \leq S(Q)$ shárti orınlı bolatuǵın $S(K)$ sanı bar bolıwı dálillengen boladı. Endi bul sannıń birden-birligin dálillew ushın $S(q) \leq S(K) \leq S(Q)$ shárti orınlı bolatuǵın ekinshi $S'(K)$ sanı da bar dep uyǵaramız. Onda $S(q) \leq S'(K) \leq S(Q)$ teńsizligi orınlı bolǵanı ushın, $|S(K) - S'(K)| \leq S(Q) - S(q)$ teńsizligine iye bolamız. Bul teńsizlik $q \subset K \subset Q$ shárti orınlı bolatuǵın qálegen kletkalı figuralar ushın orınlı. Onda K kvadratlanıwshı figura bolǵanı ushın $S(Q) - S(q)$ ayırmasınıń, kletkalı q hám Q figuraların $0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon$ shártinde tańlaw arqalı, jeterli kishi bolıwın táminlew múmkin. Sonda $|S(K) - S'(K)| \leq S(Q) - S(q)$ teńsizliginen $S(K) = S'(K)$ teńligi kelip shıǵadı. Demek, kvadratlanıwshı K figurası $S(K)$ maydanına iye hám $S(q) \leq \sup S(q) \leq \inf S(Q) \leq S(Q)$ teńsizliginen $|\inf S(Q) - \sup S(q)| \leq S(Q) - S(q)$ bolǵanı ushın $S(K) = \sup S(q) = \inf S(Q)$ teńligi orınlı boladı. Teorema dálillendi.

Teorema(maydanniń bar bolıwınıń zárúr hám jeterli shárti). Tegisliktegi K figurası kvadratlanıwshı figura bolıwı ushın $\forall \varepsilon > 0$ sanına

$$q' \subset K \subset Q' \quad (1)$$

shati orınlı bolǵan kvadratlanıwshı q' hám Q' figuraları tabılıp,

$$0 \leq S(Q') - S(q') < \varepsilon \quad (2)$$

teńsizliginiń orınlı bolıwı zárúr hám jeterli boladı. Bunda $S(q')$ hám $S(Q')$ sáykes q' hám Q' figuraları maydanın ańlatadı.

Dálilleniwi. Zárúrligi. Meyli K figurası kvadratlanıwshı bolsın. Onda (1), (2) shártleri orınlı boladı, eger kvadratlanıwshı figuranıń anıqlamasına sáykes q' hám Q' figuraları $q' = q$ hám $Q' = Q$ turında tańlansa. Bunda q, Q kletkalı figuralar.

Jeterliligi. Meyli (1), (2) shártleri orınlangan bolsın. $\varepsilon > 0$ sanın tayınlasaq, onda bul sanǵa q'' hám Q'' kvadratlanıwshı figuraları tabıladı da

$$q'' \subset K \subset Q''; 0 \leq S(Q'') - S(q'') < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

shárti orınlı boladı. Endi q'' hám Q'' kvadratlanıwshı figuralar bolǵanı ushın q''' hám Q''' kletkalı figuraları tabıladı da

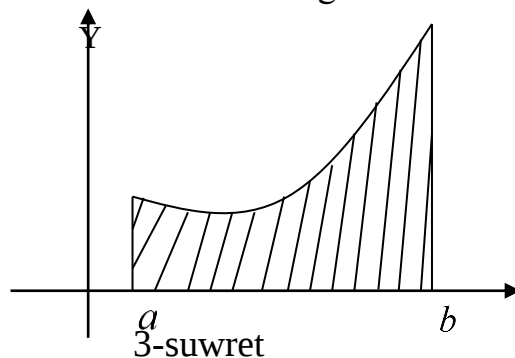
$$q''' \subset q''; Q'' \subset Q'''; 0 \leq S(q'') - S(q''') < \frac{\varepsilon}{4}; 0 \leq S(Q'') - S(Q''') < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4)$$

boladı. Onda (4) shártten $q''' \subset K \subset Q'''$ hám (3), (4) shártlerden $0 \leq S(Q''') - S(q''') < \varepsilon$ teńsizligi kelip shıǵadı. Bul tegisliktegi K figurasınıń kvadratlanıwshı bolıwın hám $S(K) = \sup S(q''') = \inf S(Q''')$ teńligi orınlı bolıwın ańlatadı. Teorema dálillendi.

Kletkalı figuralar jaǵdayındaǵı sıyaqlı kvadratlanıwshı figuralardıń maydanları ushın additivlik, invariantlıq hám monotonlıq qasiyetler orınlı bolıwın kórsetiw múmkin.

2. Iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı. Anıq integral túsinigine alıp keletuǵın tiykarǵı máselelerden biri iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın tabıw máselesi bolıwın kórdik. Meyli $y = f(x)$ $[a, b]$ segmentinde anıqlanǵan úzliksiz funkciya bolsın. OXY tegisliginiń $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ shártin qanaatlandıratuǵın noqatları kópligi iymek sızıqlı trapeciya dep ataladı.

Teorema. G iymek sızıqlı trapeciyası kvadratlanıwshı figura hám onıń maydanı $S(G) = \int_a^b f(x) dx$ formulası menen ańlatıladı.



Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap, $f(x)$ funkciyasınıń $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara segmentlerindeki eń úlken hám eń kishi mánislerin sáykes $M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$ hám $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ túrinde belgileymiz.

Ultanları $\Delta x_k, k = \overline{1, n}$, biyiklikleri sáykes M_k hám $m_k, k = \overline{1, n}$ bolǵan tuwrımıyeshlikleriniń birikpesinen ibarat

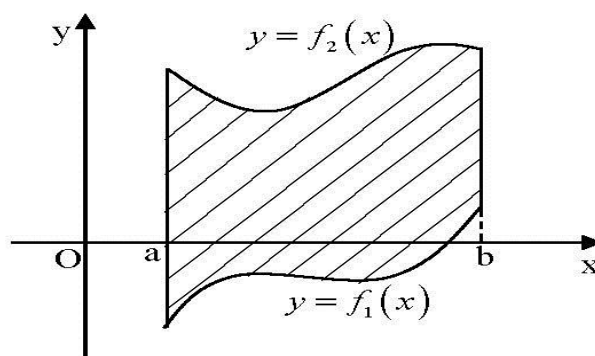
$$Q = \bigcup_{k=1}^n \{(x, y): x_{k-1} \leq x \leq x_k, 0 \leq y \leq M_k\},$$

$$q = \bigcup_{k=1}^n \{(x, y): x_{k-1} \leq x \leq x_k, 0 \leq y \leq m_k\}$$

kletkalı figuraların qarasırsaq, $q \subset G \subset Q$ sharti orınlı hám Q, q figuraları sáykes $S(Q) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S_T, S(q) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s_T$ maydanlarına iye bolıwın

kóremiz. Bunda S_T hám s_T arqalı $[a, b]$ segmentin T maydalawdaǵı $f(x)$ funkciyası ushın Darbudıń sáykes joqarǵı hám tómengi qosındıları belgilengen. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolıwı bul funkciya ushın segmentte integrallanıwshı bolıwdıń zárúr hám jeterli shárti haqqındaǵı teoremanıń shártleri orınlanǵanın ańlatadı. Usı teoremaǵa sáykes $\forall \varepsilon > 0$ sanına $[a, b]$ segmentiniń sonday T maydalawı bar boladı da $0 \leq S_T - s_T < \varepsilon$ teńsizligi orınlanadı, yaǵnıy $q \subset G \subset Q$ sharti orınlı bolatuǵın kletkalı Q, q figuraları bar bolıp $0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon$ teńsizligi orınlı boladı. Bul G kvadratlanıwshı figura hám onıń maydanı ushın figuranıń kvadratlanıwshı bolıwınıń zárúr hám jeterli shárti haqqındaǵı teoremaǵa sáykes $S(G) = \inf S(Q) = \sup S(q)$ teńligi orınlı. Onda $S(G) = \inf S_T = \sup s_T = \int_a^b f(x) dx$. Teorema dálillendi.

Dálillengen teoremada alınǵan G iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı onıń anıq integraldı integrallıq qosındınıń shegi retinde anıqlawda tabılǵan iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı menen birdey ekenligin atap ótemiz. Endi $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ túrindegi noqatlar kópligi retinde berilgen iymek sızıqlı trapeciyanı qarasıramız. Bunda $f_1(x), f_2(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde úzliksiz hám $\forall x \in [a, b]$ ushın $f_1(x) \leq f_2(x)$. Bunday jaǵdayda



4-suwret

eger $f_1(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ bolsa, onda berilgen iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı $G_2 = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_2(x)\}$ iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanınan $G_1 = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_1(x)\}$ iymek sızıqlı trapeciyasınıń maydanın alǵandaǵı nátiyjege teń boladı (4-súwret), yaǵnıy

$$S(G) = S(G_2) - S(G_1) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

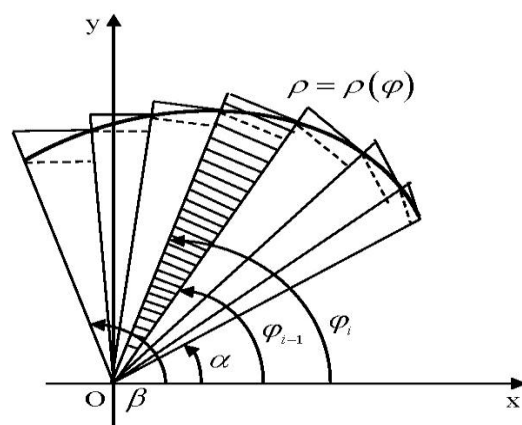
Bul formula $f_1(x) \leq f_2(x) < 0$ bolǵan jaǵdayda da orınli boladı. Haqıyqatında da, $m = \inf_{x \in [a, b]} f_1(x)$ belgilewin kiritip, G iymek sızıqlı trapeciyasın OY kósheriniń oń baǵıtında $|m|$ aralıqqa parallel kóshiriw nátiyjesinde, $G' = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) + |m| \leq y \leq f_2(x) + |m|\}$ túrindeǵı G iymek sızıqlı trapeciyasın teńdey bolǵan iymek sızıqlı trapeciyasına iye bolamız. Teńdey figuralardıń maydanları birdey, yaǵnıy $S(G') = S(G)$ teńligi orınli.

Eger tegisliktegi figura $x = x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq T$ túrinde parametrli teńlemesi járdeminde berilgen tuyıq, boleq sıpaq L iymek sızıǵı menen shegaralanǵan hám bul iymek sızıǵı menen shegaralanǵan maydan L iymegi boyınsha saat tiliniń qarama-qarsı baǵıtında júrgende hámme waqıt sep tárepte bolatuǵın bolsa, onda onıń maydanı $S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt$ yamasa

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \quad \text{formulasına sáykes esaplanadı.}$$

3. Iymek sızıqlı sektordıń maydanı.

Polyar koordinatalar sistemasında $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ teńlemesi menen berilgen L iymek sızıǵın qarastıramız. Bunda $\rho = \rho(\varphi)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz. L iymek sızıǵı hám polyar kósheri menen sáykes α, β múyesh jasaytugın l_1, l_2 nurları menen shegaralanǵan tegisliktegi G figurasına iymek sızıqlı sektor dep ataydı. (5-súwret)



5-súwret

Teorema. G iymek sızıqlı sektori kvadratlanıwshı figura hám onıń maydanı

$$S(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

formulası járdeminde tabıladı.

Dálilleniwi. $[\alpha, \beta]$ segmentin $T = \{\varphi_k, k = 0, n\}$ usılında maydalap, $\Delta_k = [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$, $k = \overline{1, n}$ dara segmentlerine iye bolamız hám $m_k = \inf_{\varphi \in \Delta_k} \rho(\varphi)$, $M_k = \sup_{\varphi \in \Delta_k} \rho(\varphi)$ belgilewlerin kiritemiz. q hám Q arqalı radiusları sáykes m_k , M_k , $k = \overline{1, n}$ hám $\varphi = \varphi_{k-1}$, $\varphi = \varphi_k$, $k = \overline{1, n}$ nurları menen shegaralangan dóńgelek sektorlardıń birikpesin belgileymiz. Sonda q , Q figuraları kvadratlanıwshı hám olardıń maydanları sáykes

$$S(q) = \sum_{k=1}^n m_k^2 \Delta \varphi_k, \quad S(Q) = \sum_{k=1}^n M_k^2 \Delta \varphi_k$$

formulaları járdeminde anıqlanadı, sonıń menen birge $q \subset G \subset Q$ shárti orınlı boladı. Bunnan $S(q)$ hám $S(Q)$ maydanlarınıń mánisleri $\frac{1}{2} \rho^2(\varphi)$ funkciyası ushın $[\alpha, \beta]$ segmenti boyınsha $T = \{\varphi_k, k = 0, n\}$ maydalaw usılında dúzilgen sáykes S_T hám S_T Darbu qosındılarına teń bolıwın kórip, anıq integraldıń bar bolıwınıń zárúr hám jeterli shárti haqqındaǵı teoremanıń saldarı tiykarında $\sup S(q) = \inf S(Q) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ teńligine iye bolamız. Demek, G iymek sızıqlı sektori kvadratlanıwshı figura hám onıń maydanı ushın $S(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ formulası orınli. Teorema dálillendi.

1-mısal. $y = x^2 + 2$, $x = 3$ sızıqları hám koordinatalar kósheri menen shegaralangan figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. $S = \int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_0^3 = 15$

2-mısal. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ parametrlik teńlemeleri menen berilgen ellipstıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Ellipstıń koordinata kósherlerine baylanıslı simmetriyalı figura bolıwın esapqa alıp, onıń I-sherektegi bóleginiń maydanı tabıladı, yaǵnıy

$$S' = \int_0^a y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t d(a \cos t) dt = -ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{ab\pi}{4}.$$

Onda ellipstıń maydanı $S = 4S' = ab\pi$ boladı. Bunnan $a = b = R$ dara jaǵdayında $S = \pi R^2$ dóńgelektiń maydanına iye bolamız.

3-mısal. $x = -\frac{1}{2}$, $y = x^2$, $y = x$, $x = 1$ sıızıqları menen shegaralanğan figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi.
$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{3}.$$

4-mısal. Polyar koordinatar sistemasında $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ teńlemesi menen berilgen iymek sıızıǵı menen shegaralanğan figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Bunday teńleme menen berilgen iymek sıızıǵı Bernulli lemniskatası dep ataladı hám ol koordinatar kósherlerine simmetriyalı bolğan eki japıraqtan ibarat maydandı shegaralaydı. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

kesindisine lemniskatanıń oń tárep japıraǵı sáykes keledi. Sonıń ushın onıń bul japıraǵınıń maydanı

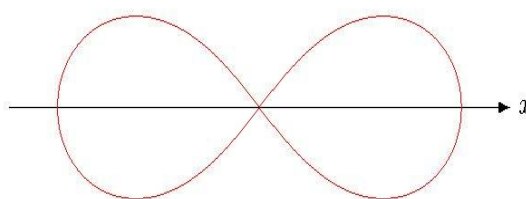
$$S' = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \quad \text{boladı. Onda}$$

$S = 2S' = a^2$ boladı. Demek Bernulli lemniskatası menen shegaralanğan figuranıń maydanı tárepi a bolğan kvadrattıń maydanı menen birdey.

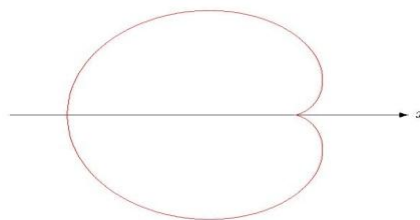
5-mısal. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

kardioida dep atalatuǵın iymek sıızıǵı menen shegaralanğan figuranıń maydanın tabıń.

Sheshiliwi.
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \pi$$



6-súwret



7-súwret

5. Deneniń kólemin esaplaw. 1. Keńisliktegi noqatlardıń hárqanday shegaralanğan kópligine dene dep ataladı. Kletkalı dene dep shekli sandaǵı óz-ara ishki kesilispeytuǵın parallelepipedler birikpesi turinde ańlatılıwi múmkin bolğan denege, al keńisliktegi $P = \{(x, y, z): a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$

shártin qanaatlandıratuǵın noqatlar kópligine yamasa bul kóplikten onıń shegarasın tolıǵı menen yamasa shegarasınıń bazıbir bólegin alıp taslaǵanda kelip shıǵatuǵın noqatlar kópligine parallelepiped dep ataydı. Hárbir parallelepipedke onıń kólemi der atalatuǵın $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ sanı sáykes qoyıladı. Kletkalı deneniń kólemi dep onıń quramındaǵı parallelepipedlerdiń kólemleriniń qosındısına aytamız. D denesine kublanıwshı dene delinedi, eger $\forall \varepsilon > 0$ sanına q hám Q

kletkalı deneleri bar bolıp, $q \subset D \subset Q$ shárti hám $0 \leq V(Q) - V(q) < \varepsilon$ teńsizligi orınli bolsa. Bunda $V(q)$ hám $V(Q)$ sáykes q hám Q deneleriniń kólemín ańlatadı. Maydan túsiniǵı jaǵdayındaǵıday denelerdiń kólemi ushın da tómendegi tastıyqlawlar orınli. Eger D denesi kublanıwshı dene bolsa, onda onıń kólemi dep atalatuǵın birden-bir $V(D)$ sanı bar boladı hám $V(q) \leq V(D) \leq V(Q)$ teńsizligi qálegen $q \subset D \subset Q$ shártin qanaatlandıratuǵın Q hám Q kletkalı deneleri ushın orınlanadı. Sonıń menen birge $V(D) = \sup V(q) = \inf V(Q)$ teńligi orınli.

2.Cilindr hám onıń kólemi. OXY tegisligindeǵı G figurasınıń shegarası L konturı bolsın. G figurasın OY yarım kósheriniń oń baǵıtında berilgen $h > 0$ sanına teń bolǵan aralıqqa qozǵaǵanda kelip shıǵatuǵın noqatlar kópligine cilindr yamasa cilindrlik dene dep ataymız hám W arqalı belgileymiz. G hám G_1 figuraları cilindrdiń ultanları, al olar arasındaǵı qashıqlıq cilindrlik deneniń biyikligi dep ataladı.

Teorema. Eger cilindrdiń ultanındaǵı G figurası kvadratlanıwshı figura bolsa, onda W cilindrlik denesi kublanıwshı dene hám onıń kólemi $V(W) = S(G) \cdot h$ formulasına sáykes tabıladı. Bunda $S(G)$ sanı W cilindrlik denesi ultanınıń maydanı, h sanı biyikligin ańlatadı. Dara jaǵdayda G radiusı r bolǵan dóńgelek bolsa, onda $S(G) = \pi r^2$ hám $V(W) = \pi r^2 h$ boladı.

Dálilleniwi. Teorema shártinde G kvadratlanıwshı figura. Onda kvadratlanıwshı figuralar anıqlamasına sáykes $\forall \varepsilon > 0$ sanına sonday kletkalı q_1

hám Q_1 figuraları bar bolıp, $q_1 \subset G \subset Q_1$ shárti hám $0 \leq S(Q_1) - S(q_1) < \frac{\varepsilon}{h}$

teńsizligi orınli boladı. Meyli W_1 hám W_2 ultanları sáykes q_1 hám Q_1 figuraları, biyikli h qa teń bolǵan cilindrlik deneler bolsın. Onda W_1 , W_2 kletkalı deneler

hám olardıń kólemleri sáykes $V(W_1) = S(q_1)h$,

$V(W_2) = S(Q_1)h$ boladı. Endi $W_1 \subset W \subset W_2$

shárti orınli bolıwın kórip,

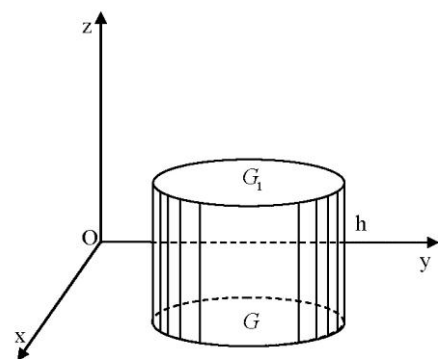
$0 \leq S(Q_1) - S(q_1) < \frac{\varepsilon}{h}$ teńsizligin h qa

kóbeytsek, $0 \leq V(W_2) - V(W_1) < \varepsilon$ teńsizligine

iye bolamız. Bul W cilindrlik denesi

kublanıwshı hám onıń kólemi $V(W) = S(G)h$

bolıwın ańlatadı. Teorema dálillendi.



8-súwret

Dálillengen teoremadan hám kólemniń additivlik qásiyetinen W cilindrlik denesi $W_i, i = \overline{1, n}$ cilindrlik deneleriniń birikpesi bolǵan jaǵdayda da kublanıwshı hám onıń kólemi $W_i, i = \overline{1, n}$ deneleriniń kólemleriniń qosındısına teń bolıwı kelip shıǵadı.

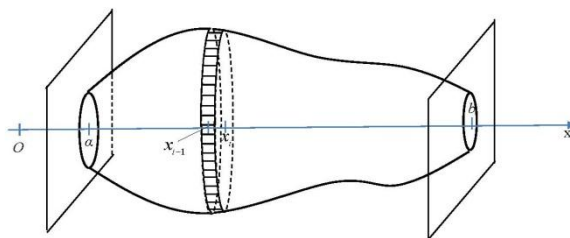
3. Kese-kesiminiń maydanı berilgen denelerdiń kólemi. Meyli Ω denesi bazıbir kósherge (bizler ushın OX kósheri) perpendikulyar bolǵan eki $x = a$ hám $x = b$ tegislikleri arasında jaylasqan bolsın. Ulıwmalılıqtı buzbastan $a < b$ dep esaplaymız. Bul deneni OX kósherine perpendikulyar hám $x \in [a, b]$ noqatınan ótiwshı tegislik penen keskende payda bolǵan figuranı G_x arqalı belgileymiz. Meyli G_x kvadratlanıwshı figura hám onıń maydanı $S(x)$ qa teń bolsın. Hárbir $x \in [a, b]$ noqatına usı noqat arqalı OX kósherine perpendikulyar bolıp ótken G_x kesiminiń maydanın sáykes qoyıp $[a, b]$ segmentinde uzliksiz bolǵan $S(x)$ funkciyasına iye bolamız. Bul funkciyanı kese-kesimniń maydanı dep ataymız. Sonıń menen birge Ω denesiniń qálegen eki perpendikulyar kesimleri jubınıń OX kósherine perpendikulyar bolǵan tegisliktegi proekciyaları biriniń ishine biri jaylasqan figuralar boladı dep esaplaymız.

Teorema. Joqarıda keltirilgen shartlerinde Ω denesi kublanıwshı dene hám onıń kólemi

$$V(\Omega) = \int_a^b S(x) dx$$

formulası járdeminde anıqlanadı.

Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin bazıbir $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap, eger $x = x_k, k = \overline{1, n}$



9-súwret

noqatlarınan OX kósherine perpendikulyar tegislikler ótkersek, onda Ω denesi n boleкке bólinedi hám hárbir bólek disk dep ataladı. $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$ hám

$M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), k = \overline{1, n}$ belgilewlerin kiritemiz. Bunda $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$

dara segmentler. $k = \overline{1, n}$ $S(x)$ funkciyası $\Delta_k, k = \overline{1, n}$ segmentlerinde úzliksiz bolǵanı ushın $\xi'_k, \xi''_k \in \Delta_k$, noqatları bar bolıp, $S(\xi'_k) = m_k, S(\xi''_k) = M_k, k = \overline{1, n}$ teńlikleri orınlı boladı. Endi k – disktiń hárbir perpendikulyar kesimin $x = x_k$ tegisligine proekciyalasaq, onda olardıń hárbiri maydanı $S(\xi'_k) = m_k$ bolǵan kesimniń sırtında, biraq maydanı $S(\xi''_k) = M_k$ bolǵan kesimniń ishinde jaylasadı. Eger maydanları $S(\xi'_k) = m_k$ hám $S(\xi''_k) = M_k, k = \overline{1, n}$ bolǵan

perpendikulyar kesimlerde jasawshısı OX kósherine parallel, biyikligi Δx_k ğa teń cilindrler jasasaq, onda olardan úlkeni k – diskke sırtlay hám eń kishisi k – diskke ishley sızılğan cilindrler bolıp, sáykes $M_k \Delta x_k$ hám $m_k \Delta x_k$ kólemlerine iye boladı. Usınday qurıwları hár bir dara kesindide orınlasaq, Ω denesine sırtlay hám ishley sızılğan n cilindrlerden ibarat Q hám q denelerge iye bolamız, yaǵnıy $q \subset \Omega \subset Q$ shárti orınlı. Bul denelerdiń kólemleri sáykes

$$V(Q) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad \text{hám} \quad V(q) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{boladı hám olar } [a, b] \text{ segmentin}$$

maydalaw usılındaǵı $S(x)$ funkciyası ushın dúzilgen Darbudiń sáykes S_T hám S_T qosındılarına teń. Onda $S(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın,

$$\sup V(q) = \inf V(Q) = \int_a^b S(x) dx \quad \text{boladı. Onda } \Omega \text{ denesi}$$

$$\text{kublanıwshı hám onıń kólemi } V(\Omega) = \int_a^b S(x) dx \text{ formulası járdeminde tabıladı.}$$

Teorema dálillendi.

4. Aylanba deneler kólemi.

Teorema. $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ iymek siziqlı trapeciyası OX kósheri dógereginde aylanıwınan payda bolǵan Ω denesi kublanıwshı hám onıń

$$\text{kólemi } V(G) = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{formulası menen ańlatıladı. Bunda } f(x)$$

funkciası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz.

Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$ dara kesindilerde $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$,

$k = \overline{1, n}$ belgilewlerin kiritemiz. G iymek siziqlı trapeciyası ishine hám sırtına ultanları Δx_k , biyiklikleri sáykes m_k hám M_k , $k = \overline{1, n}$ bolǵan n tuwrımúyeshliklerin jasaymız. Bul tuwrımúyeshlikler G iymek siziqlı trapeciyası menen birgelikte OX kósheri dógereginde aylanıp biyikligi Δx_k , ultanlarınń radiusları m_k hám M_k bolǵan n cilindrlik deneler birikpesinen ibarat sáykes q hám Q kublanıwshı denelerin payda etedi. Sonıń menen birge $q \subset \Omega \subset Q$ shárti orınlı boladı hám kólemniń additivlik qasiyetinen paydalanıp,

$$V(q) = \pi \sum m_k^2 \Delta x_k \quad \text{hám} \quad V(Q) = \pi \sum M_k^2 \Delta x_k \quad \text{kólemlerine iye bolamız. Bul}$$

kólemler $\pi f^2(x)$ funkciyası ushın $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında

maydalawdağı Darbu qosındılarına teń ham $\pi f^2(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın, $\sup V(q) = \inf V(Q) = \int_a^b S(x) dx$ boladı. Onda

Ω aylanba denesi kublanıwshı hám onıń kólemi $V(\Omega) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ formulası járdeminde tabıladı. Teorema dálillendi.

Teorema. $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ iymek sızıqlı trapeciyası OY kósheri dógereginde aylanıwınan payda bolǵan Ω denesi kublanıwshı hám onıń kólemi $V(G) = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ formulası menen ańlatıladı. Bunda $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz.

Dálilleniwi. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap, hár bir $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$ dara kesindisinde ultanınıń uzınlıǵı $\Delta x_k, k = \overline{1, n}$ biyiklikleri sáykes $m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), k = \overline{1, n}$ bolǵan eki tuwrımúyeshliklerin qarastıramız. Bul tuwrımúyeshliklerdiń birikpesi G iymek sızıqlı trapeciyasına ishki hám sırtqı sızılǵan teksheli figuralardı payda etedi. Usı teksheli figuralar OY kósheri dógereginde aylanǵanda saqıyna tárizli cilindrler ibarat bolǵan eki kublanıwshı q' hám Q' deneleri kelip shıǵadı. Olardıń kólemleri

sáykes
$$V(q') = \sum_{k=1}^n \pi m_k (x_k^2 - x_{k-1}^2) = 2\pi \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \Delta x_k \quad \text{hám}$$

$$V(Q') = 2\pi \sum_{k=1}^n M_k \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \Delta x_k$$
 formulaları menen ańlatıladı.

Endi $y = 2\pi xf(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde integrallanıwshı bolǵanı ushın $\forall \varepsilon > 0$ sanına $\delta > 0$ sanı bar boladı da T maydalawınıń $\lambda(T)$ maydalıǵı ushın $\lambda(T) < \delta$ teńsizligi orınlı bolǵanda $0 \leq S_T - s_T < \frac{\varepsilon}{2}$ teńsizligi orınlı boladı.

Bunda $s_T = \sum_{k=1}^n 2\pi m_k x_{k-1} \Delta x_k, S_T = \sum_{k=1}^n 2\pi M_k x_k \Delta x_k$ Darbu qosındıları. q' denesi kólemi esaplanıp otıǵan Ω' denesiniń ishinde, al Q' denesi bolsa Ω' denesiniń sırtında hám q', Q' deneleriniń kólemlerin,

$$V(q') = \sum_{k=1}^n 2\pi m_k x_k \Delta x_k + \sum_{k=1}^n 2\pi m_k \Delta x_k^2, V(Q') = \sum_{k=1}^n 2\pi M_k x_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n 2\pi M_{k-1} \Delta x_k^2$$

túrinde ańlatıw mumkin. Onda $0 \leq V(Q') - V(q') = S_T - s_T - \sum_{k=1}^n \pi(M_k + m_k) \Delta x_k^2$ teńligi orınlı hám $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ belgilewin kiritsek, $\lambda(T) < \delta$ bolǵanda

$\left| \sum_{k=1}^n \pi(M_k + m_k) \Delta x_k^2 \right| < 2\pi M \delta(b-a)$ teńsizligi orınlı boladı. Endi δ nı

$\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi M(b-a)}$ túrinde tańlasaq, $\lambda(T) < \delta$ bolǵanda $0 \leq V(Q') - V(q') < \varepsilon$

teńsizligine iye bolamız. Bul G iymek sıızıqlı trapeciyası OY kóseri dógeregihde aylanǵanda payda bolatuǵın Ω' denesi kublanıwshı bolıwı ushın sárúr hám jeterli.

Onda $V(q')$ hám $V(Q')$ qosındılarınıń $\lambda(T) \rightarrow 0$ daǵı shekleri $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$

integralına teń bolǵanı ushın Ω' denesiniń kólemin $V(\Omega') = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

formulası járdeminde esaplaw múmkin boladı.

1-mısal. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoydınıń kólemin tabıń.

Sheshiliwi. Ellipsoydtı OYZ tegisligine parallel bolǵan $X = X_0$ tegisligi menen kesemiz. Sonda kesimde $\frac{y^2}{(b\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c\lambda)^2} = 1$, $x = x_0$, $\lambda = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$ ellipsı boladı. Bul ellipstıń maydanın tabıw ushın onıń I-aktanttaǵı

$z = c\lambda \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b\lambda)^2}}$, $x = x_0$ bóleginiń maydanın 4 ke kóbeytiw jeterli. Sonda,

$$S(x_0) = 4c\lambda \int_0^{b\lambda} \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b\lambda)^2}} dy = \left| y = b\lambda \sin t, y = 0 \Rightarrow t = 0 \right. \\ \left. dy = b\lambda \cos t dt, \in y = b\lambda \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \right| =$$

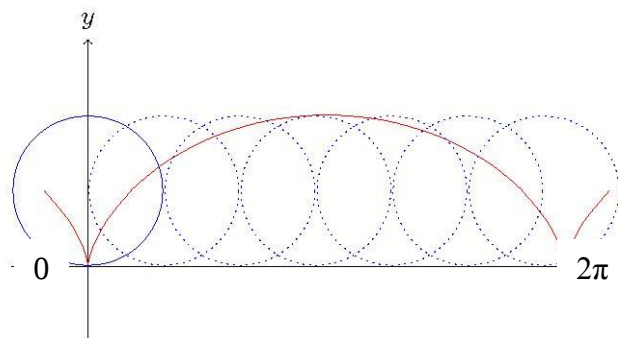
$$= 4cb\lambda^2 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = cb\pi \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right), \text{ yaǵnıy } S(x_0) = cb\pi \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right).$$

Onda ellipsoydtıń kólemi $V = 2 \int_0^a S(x) dx = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc$. Bunnan,

$a = b = c = r$ dara jaǵdayında shardıń $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ kólemi kelip shıǵadı.

2-mısal. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ parametrli teńlemesi menen berilgen iymek sıızıǵı cikloyda dep ataladı. Cikloydanıń bir arkası OX kósheri dógereginde aylanıwında payda bolǵan deneniń kólemin tabıń.

Sheshiliwi. Cikloydanıń bir arkasına t parametriniń $[0, 2\pi]$ segmentindegi mánisleri sáykes keledi. Onda $dx = a(1 - \cos t)dt$ bolǵanı ushın,



10-súwret

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a y^2 dx = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3 \frac{1 + \cos 2t}{2} - (1 - \sin^2 t) \cos t) dt = \\ &= \pi a^3 (t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

5. Anıq integral járdeminde iymekliktiń uzınlıǵın esaplaw. Meyli úsh ólshewli keńislikte $OXYZ$ tuwrımúyeshli dekart koordinatalar sisteması tańlangan hám $[\alpha, \beta]$ segmentinde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ úzliksiz funkciyaları anıqlangán bolsın. Bunday jaǵdayda $[\alpha, \beta]$ segmentiniń úsh ólshewli keńislikke úzliksiz sáwlelendiriliwi berilgen delinedi. $t \in [\alpha, \beta]$ mánisine sáykes keliwshi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sanlar úshligin keńisliktegi $M(t)$ noqatınıń koordinatası retinde yamasa $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ vektorınıń koordinatası retinde qarastırıw múmkin, yaǵnıy $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Eger t waqıt retinde qabıl etilse, onda

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta] \quad (1)$$

teńlemeleri $M(t)$ noqatınıń qozǵalıǵı nızamın anıqlaydı. Bul jaǵdayda t nıń $[\alpha, \beta]$ segmentindegi múmkin bolǵan mánislerine saykes keliwshi keńisliktegi noqatlar kópigin (1) nızamına sáykes qozǵalıwshı $M(t)$ noqatınıń izi retinde qarastırıwǵa boladı. Meyli E usınday noqatlar kópigi bolsın. Eger $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$ mánislerine keńisliktiń hárqıylı $M(t_1), M(t_2)$ noqatları sáykes kelse hám $\alpha \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ teńsizligi orınlı bolsa, onda “ $M(t_2) \in E$ noqatı $M(t_1) \in E$ noqatınan keyin” yamasa “ $M(t_1) \in E$ noqatı $M(t_2) \in E$ noqatınan aldın” dep aytamız. Usınday ornatılǵan noqatlardıń jaylasıwı E kópiginde de tártip ornatadı. Bunday tártiplesken E kópiligine ápiwayı iymek dep ataladı. ápiwayı iymekti L háribi menen belgileymiz hám onıń teńlemesin

$$L = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\} \quad (2)$$

koordinatalıq túrinde yamasa

$$L = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]\} \quad (3)$$

vektorlıq túrinde jazadı. Bunda $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. (2) hám (3) teńlemelerde t nı L iymeginiń parametri dep ataydı. Parametrdiń $t = \alpha$ hám $t = \beta$ mánislerine sáykes keliwshi keńisliktiń $M(\alpha)$ hám $M(\beta)$ noqatları sáykes L iymeginiń bası hám sońı dep ataladı.

Dara jaǵdayda, eger L iymegi OXY tegisligine tiyisli iymek bolsa, onda onıń teńlemesi $L = \{x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ koordinatalıq kórinisinde yamasa $L = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ vektorlıq túrinde jazadı. Bunda $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz bolǵan $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigin OXY tegisligindegi $L = \{x = t, y = f(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ iymegi retinde qarastırıw múmkin.

Ápiwayı iymektiń anıqlamasına sáykes (1) sáwlelendiriwi biektiv sáwlelendiriw boladı, yaǵnıy t parametriniń hárbir $t \in [\alpha, \beta]$ mánisine birden-bir $M(t) \in L$ noqatı sáykes keledi hám kerisinshe hárbir $M \in L$ noqatına birden-bir $t \in [\alpha, \beta]$ mánisi sáykes qoyılǵan. Eger t parametriniń $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ mánisleri bar bolıp, $M(t_1) = M(t_2)$ teńligi orınlı bolsa, onda (1)-sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli bolmaydı. Bunday jaǵdayda L iymegin parametrlew ushın $[\alpha, \beta]$ segmentin $T = \{t_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, n}$ dara kesindilerine sonday maydalaymız, natıyjede harbir $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, n}$ úzliksiz sáwlelendiriwi biektiv sáwlelendiriw bolıp olardıń harbiri sáykes

$$L_k = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_{k-1} \leq t \leq t_k\}, k = \overline{1, n}$$

ápiwayı iymegin anıqlasın. Sonda L iymegi L_{k-1} iymeginiń sońı $L_k, k = \overline{1, n}$, iymeginiń bası bolatuǵın, ápiwayı iymekliklerge bólingen boladı hám harbir L_k bólegi L iymeginiń ápiwayı doǵası dep ataladı. Usı jaǵdayda da L iymegi (2) teńlemesi járdeminde parametrlengen dep aytadı. Bir L iymegi bir neshe usılda parametrleniwi múmkin. Ádette L iymeginiń berilgen (2) parametrleniwindegi t parametrin ekinshi bir parametriniń úzliksiz hám qatań ósiwshi funkciyası túrinde ańlatıwdan kelip shıǵatugın parametrlawleri qarastırıladı. Demek, eger L iymegi (3) túrindegi t parametrine baylanıslı teńlemesi menen birge ekinshi bir S

parametrine baylanışlı $L = \{\vec{r}_1 = \vec{r}_1(s), \alpha_1 \leq s \leq \beta_1\}$ túrinde de berilgen bolsa, onda $s = s(t)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz, qatań ósiwshi hám $s(\alpha) = \alpha_1, s(\beta) = \beta_1, \vec{r}_1(s(t)) = \vec{r}(t), \forall t \in [\alpha, \beta]$ shártlerine boysınıwı tiyis. Sonda $[\alpha_1, \beta_1]$ segmentinde $S = s(t)$ funkciyasına keri bolğan $t = t(s)$ funkciyası hám $\forall s \in [\alpha_1, \beta_1]$ ushın $\vec{r}_1(s) = \vec{r}(s(t))$ teńligi orınlanadı.

Eger (3) teńlemesindegi t parametri ornına L iymeginiń óziniń $S = s(t)$ doǵasınıń uzınlıǵı alınsa, onda onıń teńlemesi $L = \{\vec{r} = \vec{r}(s), 0 \leq s \leq l(L)\}$ túrinde jazıladı hám L iymeginiń tabiyi teńlemesi dep, al S parametri bolsa tabiyi parametr dep ataladı.

Meyli L iymegi (3) teńlemesi menen berilgen hám t parametriniń $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], t_1 \neq t_2$ mánislerinde $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ teńligi orınli bolsın. Onda $x = x(t_1) = x(t_2), y = y(t_1) = y(t_2), z = z(t_1) = z(t_2)$ teńlikleri orınlı bolğanı ushın $M_1(x_1, y_1, z_1)$ noqatı L iymeginiń óz-ózi menen kesilisiw noqatı boladı. Eger $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ teńligi $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$ bolǵanda orınlansa, onda L iymegi tuyıq iymek dep, al óz-ózi menen kesilisiw noqatına iye bolmağan tuyıq iymegi ápiwayı kontur dep ataladı.

Eger (3) teńlemesindegi $\vec{r}(t)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde differenciallanıwshı funkciya bolsa, onda L iymegine differenciallanıwshı iymek dep ataydı. Eger $\vec{r}'(t_0) \neq 0$ bolsa, onda $M_0 \in L$ noqatı L iymeginiń ayrıqsha bolmağan noqatı dep, al $\vec{r}'(t_0) = 0$ bolsa, onda $M_0 \in L$ noqatı L iymeginiń ayrıqsha noqatı dep ataladı. $\vec{r}'(t)$ tuwındısı $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz bolsa, onda (3) teńlemesi menen berilgen L iymegine úzliksiz differenciallanıwshı iymek delinedi. Ayrıqsha noqatına iye emes úzliksiz differenciyanıwshı iymegi sıypaq iymek dep ataladı. Eger iymek sıızıq shekli sandaǵı sıypaq iymeklerden quralǵan bolsa, onda oǵan bolekkı sıypaq iymek sıızıq delinedi. Endi (3) teńlemesindegi $\vec{r}(t)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde differenciallanıwshı funkciya bolsın. $[\alpha, \beta]$ segmentin bazıbir $T = \{t_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalasaq, onda t_k maydalaw noqatlarına L iymeginiń $M_k = M(t_k)$ noqatları sáykes keledi. Bunda $\overrightarrow{OM_k} = \vec{r}(t_k), k = \overline{0, n}$. Onda $M_0, M_1, \dots, M_n$ noqatların $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, kesındileri menen tutastırıp L iymegine ishki sıızılǵan sıızıq sıızıq dep atalatuǵın hám P_n arqalı belgilenetuǵın sıızıq sıızıqqa iye

bolamız. P_n sınıq sızıǵınıń k — bólegi bolǵan $M_{k-1}M_k$ kesindisiniń uzınıǵı $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$ ge teń bolıwın kóriw qıyın emes. Onda P_n sınıq sızıǵınıń uzınıǵı

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \text{ qosındısına teń boladı hám onıń mánisi } [\alpha, \beta] \text{ segmentin}$$

maydalaw usılınan ǵárezli boladı, yaǵnıy hárqıylı maydalaw usılına hárqıylı σ_n qosındısı sáykes keledi. Eger P_n sınıq sızıǵınıń uzınıqları kópligi anıq joqarǵı shegarasına iye bolsa, onda usı anıq joqarǵı shegara L iymeginiń uzınıǵı dep qabıl etiledi. Uzınıǵı bar bolǵan iymek sızıq tuwrılanıwshı iymek dep ataladı.

Teorema. Eger (3) teńlemesi menen berilgen L iymegi uzliksiz differensiallanıwshı bolsa, onda ol tuwrılanıwshı iymek boladı hám onıń $l(L)$ uzınıǵı $l(L) \leq (\beta - \alpha) \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\vec{r}'(t)|$ teńsizligin qanaatlandıradı.

Dálilleniwi. $[\alpha, \beta]$ segmentin bazıbir $T = \{t_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalasaq hárbir $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{0, n}$ dara kesindisinde $\vec{r}(t)$ funkciyası úzliksiz hám (t_{k-1}, t_k) , $k = \overline{0, n}$ intervallarında differenciallanıwshı bolǵanı ushın Lagranj teoremasına sáykes $|\vec{r}'(t_k) - \vec{r}'(t_{k-1})| = |\vec{r}'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1})$, $\xi_k \in (t_k, t_{k-1})$ teńsizligi orınlı. $\vec{r}(t)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın $[\alpha, \beta]$ segmentinde shegaralanǵan, yaǵnıy $\exists K > 0: \forall t \in [\alpha, \beta] \rightarrow |\vec{r}'(t)| \leq K$. Veyershtrass teoremasına sáykes $K = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\vec{r}'(t)|$ bolıwı múmkin. Onda L iymegine ishki sızılǵan P_n sınıq

sızıǵınıń uzınıǵı $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$ ushın

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n |\vec{r}'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}) \leq K \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = K(\beta - \alpha)$$

bahası orınlı. Bunnan $l(L) = \sup \sigma_n \leq (\beta - \alpha) \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\vec{r}'(t)|$. Teorema dálillendi.

Teorema(Ózgeriwshi doǵa tuwındısı). Eger $L = \{\vec{r} = \vec{r}(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ iymegi úzliksiz differenciallanıwshı hám $s(t)$ onıń ózgeriwshi duga uzınıǵı bolsa, onda $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$ teńligi $\forall t \in [\alpha, \beta]$ ushın orınlı boladı.

Dálilleniwi. $\forall t \in [\alpha, \beta]$ noqatın alıp Δt ósimin sonday beremiz nátiyjede $t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$ bolsın. t hám $t + \Delta t$ noqatlarına L iymeginiń M' hám M'' noqatları sáykes keledi. $d(\cup M'M'')$ hám $|M'M''|$ arqalı sáykes $M'M''$ duga

hám $M'M''$ xorda uzınlıqları belgilense, onda ΔS , $\Delta \vec{r}$ ósimleri $d(\cup M'M'') = |\Delta S|$, $|M'M''| = |\Delta \vec{r}|$ bolǵanı ushın $|\Delta \vec{r}| \leq |\Delta S|$ teńsizligi orınlı boladı. Onda aldın dálillengen teoremadan $|\Delta S| \leq \sup_{t \in E} |\vec{r}'(t)| |\Delta t|$ teńsizligi orınlanadı. Bunda E shetki noqatları t hám $t + \Delta t$ bolǵan kesindi. Bul teńsizliklerden $|\Delta \vec{r}| \leq \Delta s \leq \sup_{t \in E} |\vec{r}'(t)| |\Delta t|$ qos teńsizligi, al bunnan $s(t)$ ósiwshi bolǵanı ushın $\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sup_{t \in E} |\vec{r}'(t)|$ boladı. $r(t)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın $|\vec{r}'(t)|$ funkciyası da bul segmentte úzliksiz. Onda Veyershtass teoremasınan $\exists \xi \in E$: $|\vec{r}'(\xi)| = \sup_{t \in E} |\vec{r}'(t)|$ hám $|\vec{r}'(t)|$ funkciyası t noqatında úzliksiz bolǵanı ushın $|\vec{r}'(\xi)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{r}'(t)|$. Endi $\left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sup_{t \in E} |\vec{r}'(t)|$ teńsizliginde $\Delta t \rightarrow 0$ shekke ótip $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$ teńligine iye bolamız. Teorema dálillendi.

Dálillengen teoremaǵa sáykes úzliksiz differenciallanıwshı L iymegi tuwrılanıwshı hám onıń $s = s(t)$ uzınlıǵı ózgeriwshi doǵasınıń tuwındısı $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$ boladı. Bunnan L iymeginiń $l(L)$ uzınlıǵın Nyuton-Leybnic formulası járdeminde,

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} s'(t) dt = s(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = s(\beta) - s(\alpha) \quad (1)$$

tabıw formulasına iye bolamız. Bunda $s(\alpha) = 0$ hám $s(\beta) = l(L)$.

Eger L iymegi $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz differenciallanıwshı $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ fukciyaları járdeminde $L = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ parametrli teńlemesi menen berilgen bolsa, onda $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ bolǵanı ushın (1) formula

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (2)$$

túrinde jazıladı.

Eger L iymegi tegisliktegi iymek bolıp $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz differenciallanıwshı $x(t)$, $y(t)$ funkciyaları járdeminde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ parametrli teńlemesi menen berilgen bolsa, onda (2) formulasın

$$l(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (3)$$

túrinde jazamız.

Eger L tegisliktegi iymek sızıq bolıp $[a, b]$ segmentinde úzliksiz differenciallanıwshı $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigi retinde berilgen bolsa, onda onıń uzınlıǵın tabıw ushın $x = t$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$ parametrlewin júzege asırıp, $dt = dx$, $f(x) = f(t)$ bolǵanı ushın (3)-formuladan

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (4)$$

formulasına iye bolamız.

Eger L tegisliktegi iymek sızıq bolıp, polyar koordinatalar sistemasında $\rho = \rho(\varphi)$ teńlemesi menen berilgen hám $\rho(\varphi)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz $\rho'(\varphi)$ tuwındısına iye bolsa, onda L iymeginiń $l(L)$ uzınlıǵın tabıw ushın φ di parametr dep esaplap, $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ túrindegi parametrlewde (3) formuladan

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi \quad (5)$$

bolıwın kóremiz. Eger L tegisliktegi iymek sızıq bolıp, polyar koordinatalar sistemasında teńlemesi $\varphi = \varphi(\rho)$, $a \leq \rho \leq b$ túrinde bolsa, onda (3) formuladan paydalanıp L iymeginiń uzınlıǵı

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + \rho^2 (\varphi'(\rho))^2} d\rho$$

formulası menen anıqlanıwı múmkinligin kóremiz.

1-mısal. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidanıń birinshi sherekte jatıwshı doǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $x' = -3a \cos^2 t \sin t$, $y' = 3a \sin^2 t \cos t$ hám birinshi sherekte $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ bolǵanı ushın, qıyın emes. (3) formulaǵa sáykes,

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3a}{2}.$$

2-mısal. $y = ax^2$, $0 \leq x \leq 1$ parabola doǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. $y' = 2ax$ bolǵanı ushın, (4) formuladan paydalansaq,

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2ax)^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4a^2} + \ln \left| 2a + \sqrt{1 + 4a^2} \right|.$$

3-mısal. $\rho = ae^{b\varphi}$ logarifmlik spiralınıń (φ_1, ρ_1) hám (φ_2, ρ_2) noqatları arasındadı doǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi. (5) formulağa sáykes,
$$l(L) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi =$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + (ab)^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = a\sqrt{1+b^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{b\varphi} d\varphi = \frac{a\sqrt{1+b^2}}{b} e^{b\varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (\rho_2 - \rho_1)$$

boladı.

4-mısal. $\varphi = \int_0^{\rho} \frac{\text{sh } x}{x} dx, 0 \leq \rho \leq R$ túrinde berilgen iymektiń dóǵasınıń uzınlıǵın tabıń.

Sheshiliwi.
$$l(L) = \int_0^R \sqrt{1 + \rho^2 (\varphi'(\rho))^2} d\rho = \int_0^R \text{ch } \rho d\rho = \text{sh } R.$$

6. Aylanba betliktiń maydanı. Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde teris emes anıqlanǵan úzliksiz funksiya bolsın. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap, $x_k \in T$ maydalaw noqatlarına sáykes keliwshi funksiya grafiginiń noqatların $M_k(x_k, f(x_k)), k = \overline{0, n}$ belgilep, tóbeleri usı M_k noqatları bolǵan L_T sınıq sızıǵın qaraştıramız. Bul sınıq sızıǵınıń $M_{k-1}M_k, k = \overline{1, n}$ boleginiń uzınlıǵı sáykes $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}, k = \overline{1, n}$ bolıp, bul bólekler OX kósheriniń dóğereginde aylanıwında, jasawshıları $M_{k-1}M_k, k = \overline{1, n}$ kesindileri bolǵan jaǵdayda, kesik konustıń betin, eger $f(x_{k-1}) \neq f(x_k)$ bolsa hám cilindrdiń betin, eger $f(x_{k-1}) = f(x_k)$ bolsa, payda etedi. Bul kelip shıqqan betliklerdiń maydanları sáykes $p_k = \pi(f(x_k) + f(x_{k-1}))l_k, k = \overline{0, n}$ formulası járdeminde tabıladı. Bunnan L_T sınıq sızıǵı OX kósheriniń dóğereginde aylanıwında payda bolǵan betliktiń maydanı,

$$P(L_T) = \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k))l_k. \quad (A)$$

Eger $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} P(L_T) = P(L)$ shegi bar bolsa, onda $P(L)$ sanı $y = f(x), x \in [a, b]$ funkciyası grafigi OX kósheri dóğereginde aylanǵanda kelip shıǵatuǵın aylanba bettiń maydanı dep ataladı. Bunda $\lambda(T), T$ maydalawınıń diametri.

Teorema. Eger $y = f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz differenciyanıwshı funksiya bolsa, onda $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} P(L_T) = P(L)$ shegi bar hám bul funksiyanıń grafigi OX kósheriniń dóğereginde aylanıwında payda bolǵan aylanba betliktiń maydanı

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (B)$$

formulası menen ańlatıladı.

Dálillenıwı. Teoremanıń shártleri orınlı bolǵanda Lagranj teoremasına sáykes, $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ teńligin jazamız. Bunda $\xi_k \in \Delta_k$ hám $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{0, n}$ segmentleri $[a, b]$ segmentin T maydalaw usılındaǵı dara segmentler, al $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dara segmentlerdiń sáykes uzınlıqları. Onda

$P(L_T) = \pi \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) l_k = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ boladı. Bundaǵı $\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ sanı $f(x_{k-1})$ hám $f(x_k)$ sanlarınıń orta arifmetigi bolǵanı ushın, úzliksiz funkciyalardıń orta mánisi haqqındaǵı Koshi teoremasına sáykes $\eta_k \in \Delta_k$ noqatları bar hám $f(\eta_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$, $k = \overline{0, n}$ teńlikleri orınlı. Usı teńlikler

tiykarında $P(L_T) = 2\pi \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ qosındısına iye bolamız. Bul

integrallıq qosındı emes. Biraq $[a, b]$ segmentin T maydalaw usılındaǵı ξ tańlawın $\xi = \{\xi_k, k = \overline{1, n}\}$ turinde alsaq, onda $\xi_k, \eta_k \in \Delta_k$ bolǵanı ushın, $f_1(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funkciyasınıń $\sigma_T(\xi, f)$ integrallıq qosındısı hám $P(L_T)$ qosındısı bir-birine jaqın boladı. Sebebi $f(x)$ hám $f'(x)$ funkciyaları $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın $f_1(x)$ funkciyası da bul segmentte úzliksiz hám L_T sınıq sızıǵınıń eń úlken boleginiń uzınlıǵı nolge umtılsa onıń menen birge $\lambda(T)$ da nolge umtıladı. Onda, $\lambda(T) \rightarrow 0$ da shekke ótsek, anıq integraldıń anıqlamasınan,

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_T(\xi, f_1) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

boladı. Endi $\lambda(T) \rightarrow 0$ da $\sigma_T(\xi, f) - S(L_T)$ ayırmasıda nolge umtıluwın kórsetemiz. $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın bul funkciya $[a, b]$ segmentinde shegaralanǵán, yaǵnıy $\exists C > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} \leq C$. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın bul funkciya Kantor teoremasına sáykes $[a, b]$ segmentinde teń ólshewli úzliksiz, yaǵnıy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow$

$|f_1(x') - f_1(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi C(b-a)}$. Onda

$$\begin{aligned} |\sigma_T(\xi, f) - P(L_T)| &= 2\pi \left| \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\eta_k)) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{k=1}^n |f(\xi_k) - f(\eta_k)| \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k < 2\pi C \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2\pi C(b-a)} \Delta x_k = \varepsilon, \end{aligned}$$

bunnan $\varepsilon > 0$ sanı qálegen san bolǵanı ushın, $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} (\sigma_T(\xi, f) - P(L_T)) = 0$ boladı.

Demek, L_T sınıq sızığı aylanıwınan payda bolǵan betliktiń maydanı bar hám

$$\lim_{\lambda(t) \rightarrow 0} P(L_T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad \text{Bul } y = f(x) \text{ funkciyasınıń grafigi } OX$$

kósheriniń dógeresinde aylanıwında payda bolǵan aylanba betliktiń maydanı bar hám ol (B) formulasına sáykes tabıladı. Teorema dálillendi.

Eger L iymegi $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz differenciyanıwshı $u(t), v(t)$ funkciyaları járdeminde $x = u(t), y = v(t), t \in [\alpha, \beta]$ parametrli teńlemesi menen berilgen bolsa, onda L iymegi OX kósheriniń dógeresinde aylanıwında payda bolǵan aylanba betliktiń maydanı,

$$P(L) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} v(t) \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} dt \quad (S)$$

formulasına sáykes anıqlanadı.

Eger L iymegi polyarlıq koordinatalar sistemasında $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ teńlemesi járdeminde berilgen bolsa, onda $\rho(\varphi)$ funkciyası $[\alpha, \beta]$ segmentinde úzliksiz differenciyanıwshı bolǵan jaǵdayda L iymeginiń polyarlıq kósher dógeresinde aylanıwınan payda bolǵan betliktiń maydanı,

$$P(L) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \quad (D)$$

formulasına sáykes esaplanadı.

1-mısal. Shar belbewiniń betiniń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Orayı koordinata basında bolǵan, radiusı r ge teń sheńberiniń $y = \sqrt{r^2 - x^2}, a \leq x \leq b$ doǵası OX kósheriniń dógeresinde aylanıwında payda bolǵan aylanba betlikke shar belbewı dep ataydı. Bul aylanba betliginiń maydanı

$$(B) \text{ formulasına sáykes, } P = 2\pi \int_a^b \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_a^b dx = 2\pi r(b - a).$$

Bunnan $a = -r, b = r$ bolǵan dara jaǵdayında $P = 4\pi r^2$ sfera betiniń maydanı kelip shıǵadı.

2-mısal. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ cikloydasınıń bir arkası OX kósheriniń dógeresinde aylanıwında payda bolǵan aylanba betliktiń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. (S) formulasına sáykes,

$$P(L) = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

3-mısal. $r = 5(1 + \sin q)$, $0 \leq q \leq \frac{\pi}{2}$ teńlemesi menen berilgen iymek sıızıǵı polyarlıq kosher dógeresinde aylanıwında payda bolǵan betliktiń betiniń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. (D) formulasına sáykes,

$$P = 10\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta) \sin \theta \sqrt{25(1 + \sin \theta)^2 + 25 \cos^2 \theta} d\theta = 5\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 + \sin \theta)^3} \sin \theta d\theta =$$

$$= 10\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{54\sqrt{2} + 76}{3}.$$

8-§. Anıq integraldıń fizikalıq qollanıwları

1.Ózgeriwshi kúshitiń jumısı. Ózgeriwshi $F(t)$ kúshiniń $[a, b]$ segmentinde islegen jumısı $A = \int_a^b F(t) dt$ formulası járdeminde tabıladı (1-§ tı qarań).

1-mısal. Sırtqı kúshlerdiń, massası m bolǵan deneni jerdiń betinen kosmostıń jer orayınan R ge teń qashıqlıqtaǵı noqatına shıǵarıw ushın, orınlawı zárúr bolǵan minimal jumısın esaplań.

Sheshiliwi. Máseleni sheshiw jolın apiwayılastırıw maqsetinde denegе jerden basqa kosmos obektleri tásir etpeydi dep esaplaymız. Sonda massası m bolǵan denegе jer tárepinen dene menen jer orayı arasındaǵı r qashıqlıǵınan ğárezli bolǵan pútkil álemlik tartılıw kúshi $F_T = \frac{\gamma M m}{r^2}$ tásir etedi. Bunda γ — gravitaciyalıq turaqlı, M jerdiń massası. Sonıń menen birge deneni jerdiń betinen kóteriw ushın oǵan F_T kúshine qarama-qarsı baǵıtlanǵan sıtqı F_S kúshi menen tásir etiliwi hám $F_S \geq F_T$ shárti orınlı bolıwı tiyis. Sonda minimal jumıs $F_S = F_T$ sheklik jaǵdayında islenedi. Onda jerdiń radiusın R_j , jer betinen dene ótkeriliwi tiyisli bolǵan kosmos noqatına shekemgi qashıqlıqtı R arqalı belgilep, izlenip atırǵan minimal jumıstıń $A = \int_{R_j}^R F_S(r) dr = \int_{R_j}^R F_T(r) dr = \gamma M m \int_{R_j}^R \frac{1}{r^2} dr = \gamma M m (\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R})$,

yaǵnıy $A = \gamma M m (\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R})$ bolıwın kóremiz. Bunnan berilgen deneni jerdiń

betinen sheksiz uzaqlastırılǵan kosmos noqatına jiberiw ushın

$$A_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} A = \gamma M m \lim_{R \rightarrow \infty} (\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R}) = \frac{\gamma M m}{R_j} \quad \text{jumısın islew talap etiliwin kóremiz.}$$

2. Materiallıq noqattıń qozǵalıǵına baylanısh máseleler.

2-mısal. Materiallıq noqattıń OX kósheri boyınsha tuwrı sızıqlı qozǵalıǵı teńlemesi $S = S(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ túrinde berilgen bolsa, onda materiallıq noqattıń háreketin kúzetiw waqıtınıń baslanǵısh t_0 momentinen waqıtınıń t_1 momentine shekemgi waqıt intervalında ótken jolı $\Delta S = S(t_1) - S(t_0)$ formulası menen anıqlanadı. Eger materiallıq noqattıń tezliginiń waqıttan ġárezli bolıw nızamı $v = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ málim bolsa, onıń waqıtınıń baslanǵısh t_0 momentinen $\forall t \leq t_1$ momentine shekemgi waqıt intervalında basıp ótken jolın tabıń.

Sheshiliwi. Tuwrı sızıqlı qozǵalıstaǵı materiallıq noqattıń tezligi $v = \varphi(t) = \frac{dS(t)}{dt}$, $t \in [t_0, t_1]$ bolǵanı ushın, materiallıq noqattıń basıp ótken jolı $\Delta S = S(t) - S(t_0)$ ge teń boladı, eger háreket baǵıtı turaqlı bolsa. Ulıwma jaǵdayda materiallıq noqattıń OX kósheri boyınsha teń ólshewli bolmaǵan qozǵalıstıńda háreket baǵıtı turaqlı bolmasa, onda ótilgen joldı, $S = \int_{t_0}^t |\varphi(t)| dt$ formulası járdeminde esaplaydı.

3-mısal(tuwrı sızıqlı emes qozǵalıǵı). Sırǵanamastan OX kósheri boyınsha domalap baratuǵın radiusı r ge teń dóńgelekte M noqatı belgilengen. Dóńgelektiń bir tolıq aylanıwında M noqatı ótken jolın tabıń.

Sheshiliwi. Meyli waqıtınıń $t = 0$ baslanǵısh momentinde M noqatı tómengi awhalında OXY koordinatalar sisteması basında bolsın. M noqatınıń koordinataları menen α burılıw múyeshi arasındadıǵı ġárezlilik,

$$y = r(1 - \cos \alpha), \quad x = r(\alpha - \sin \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

túrinde jazıladı. Bul formulalar menen anıqlanatuǵın iymek sızıq cikloyda arkası bolıwı málim. Al bizler izlep otırǵan jol usı arkanıń uzılıǵına teń, yaǵnıy

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2} d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{2r(1 - \cos \alpha)} d\alpha = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = 8r.$$

3. Materiallıq sızıqlar hám plastinkalardıń inerciyalıq hám statikalıq momentleri. 1. Materiallıq noqattıń radiusı r ge teń sheńber boyınsha teń ólshewli qozǵalıstıńda ω múyeshlik tezligi menen V sızıqlı tezligi $v = r\omega$

teńligi arqalı baylanısadı. Tegislikte massası m bolǵan A materiallıq noqatı berilgen bolsın. Bul noqat bazıbir l kósheriniń dógeresinde orayı $O \in l$ noqatıda bolǵan, radiusı r ge teń sheńber boyınsha aylanǵanda onıń kinetikalıq energiyası

$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2}$ túrinde ańlatıladı. Eger A materiallıq noqatınıń bunday aylanba

qozǵalısnı xarakterleytuǵın $I = mr^2$ shamasın kiritsek, onda kinetikalıq energiya

$E = \frac{I\omega^2}{2}$ túrindegi ápiwayı kórinisine iye boladı. Usı kiritilgen $I = mr^2$ shamasına

A materiallıq noqatınıń l kósherine (O noqatına) baylanıslı inerciyalıq momenti dep ataladı. A materiallıq noqatınıń l kósherine baylanıslı statikalıq momenti dep A noqatı menen l kósherine shekemgi qashıqlıqtıń d shaması menen A noqatına jaylastırılǵan massanıń kóbeymesine ayıladı hám M_l arqalı belgilenedi, yaǵnıy $M_l = md$. Eger tegislikte OXY dekart koordinatalar sisteması belgilengen hám $A(x, y)$ noqatına m massası jaylastırılǵan bolsa, onda $A(x, y)$ materiallıq noqatınıń koordinata kósherlerine hám koordinata basına baylanıslı inerciyalıq momentleri sáykes túrde $I_{OX} = my^2$, $I_{OY} = mx^2$ hám $I_O = m(x^2 + y^2)$, al koordinata kósherlerine baylanıslı statikalıq momenleri sáykes túrde $M_{OX} = my$, $M_{OY} = mx$ formulaları járdeminde tabıladı.

2. Eger massaları sáykes $m_k, k = \overline{1, n}$ bolǵan n materiallıq noqatlar sistemasın radiusları sáykes $r_k, k = \overline{1, n}$ bolǵan sheńberler boyınsha belgilengen l kosheri dógeresinde turaqlı ω múyeshlik tezliginde aylandırılsa, onda bunday qozǵalıstaǵı noqatlar sistemasınıń qosındı kinetikalıq energiyası

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} \quad (1)$$

túrinde jazıladı. Eger noqatlar sistemasınıń bunday aylanba qozǵalısnı

xarakterlewshi $I = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ shaması kiritilse, onda qosındı kinetikalıq energiyanı

ápiwayı $E = \frac{I\omega^2}{2}$ túrinde jazıw múmkin. Usı kiritilgen I shamasına n

materiallıq noqatlar sistemasınıń berilgen l kósherine baylanıslı inerciyalıq momenti dep ataydı. Demek, massaları sáykes $m_k, k = \overline{1, n}$ bolǵan $A_k, k = \overline{1, n}$ materiallıq noqatlar sistemasınıń belgilengen l kósherine baylanıslı inerciyalıq momenti bul sistemaǵa kiritilgen hárbir noqattıń usı l kósherine baylanıslı inerciyalıq momentleriniń qosıdısına teń boladı.

Massaları sáykes $m_k, k = \overline{1, n}$ bolğan $A_k, k = \overline{1, n}$ materiallıq noqatlar sistemasınıń belgilengen l kósherine baylanıslı statikalıq momenti dep usı noqatlardıń hár birinen l kósherine baylanıslı statikalıq momentleri qosındısına aytamız. Bunday $A_k, k = \overline{1, n}$ materiallıq noqatları sisteması berilgen jaǵdayda $m_k, k = \overline{1, n}$ massaları awırılıq orayı dep atalatuǵın $C(x_C, y_C)$ noqatına jámlenedi. Usı $C(x_C, y_C)$ awırılıq orayınıń l kósherine baylanıslı statikalıq momenti $A_k, k = \overline{1, n}$ materiallıq noqatlar sistemasınıń l kósherine baylanıslı statikalıq momentine teń boladı.

Eger tegislikte OXY dekart koordinatalar sisteması belgilengen bolsa, onda joqarıda keltirilgen anıqlamalarǵa sáykes massaları sáykes $m_k, k = \overline{1, n}$ bolğan $A_k(x_k, y_k), k = \overline{1, n}$ materiallıq noqatlar sistemasınıń koordinata kósherlerine hám koordinata basına baylanıslı inerciyalıq momentleri sáykes túrde

$$I_{OX} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_{OY} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2 \quad \text{hám} \quad I_O = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

formulaları járdeminde, al statikalıq momentleri bolsa,

$$M_{OX} = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad M_{OY} = \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

formulaları járdeminde tabıladı. Materiallıq noqattıń statikalıq momenti hám materiallıq noqatlar sistemasınıń awırılıq orayınıń anıqlamalarına sáykes

$$M_{OX} = \sum_{k=1}^n m_k y_k = m y_C = M_{XC}, \quad M_{OY} = \sum_{k=1}^n m_k x_k = m x_C = M_{YC}, \quad m = \sum_{k=1}^n m_k$$

teńlikleri orınlı. Bunda M_{XC}, M_{YC} awırılıq orayınıń sáykes OX, OY kósherlerine baylanıslı statikalıq momentleri. Bunnan $C(x_C, y_C)$ awırılıq orayınıń koordinataları ushın

$$x_C = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_C = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

formulalarına iye bolamız.

3. Meyli L materiallıq iymegi $y = f(x), a \leq x \leq b$ teńlemesi menen berilgen bolsın. Bunda $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz differenciallanıwshı funkciya. Eger L iymegine bólistirilgen massanıń sızıqlı tıǵızlıǵı birge teń dep esaplasaq, onda L materiallıq iymeginiń massası usı iymektiń $S(L)$ uzınlıǵına teń boladı. Endi $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ maydalaymız, $\lambda(T)$ bul maydalawdıń maydalıǵı bolsın. Sonda $[a, b]$ segmentiniń bul maydalanıwına L iymeginiń $T_L = \{L_k, k = \overline{1, n}\}$ maydalanıwı sáykes keledi.

Bunda $L_k = \{y = f(x), x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, hám $S(L_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, $k = \overline{0, n}$.

Bunnan $T = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ maydawınıń $\lambda(T)$ maydalığı jeterli kishi bolǵanda $S(L_k) = m_k \approx \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$, $k = \overline{0, n}$ boladı.

Eger $\lambda(T) \rightarrow 0$ da $S(L_k) \rightarrow 0$ sa, onda L iymeginiń hár bir L_k bólegin $A_k(x_k, f(x_k))$ túrindegi materiallıq noqat dep qabıl etiw múmkin. Sonlıqtan L_k iymeginiń OX hám OY kósherlerine hám koordinata basına baylanıslı inerciyalıq momentlerin sáykes

$I_{OX}^k \approx m_k (f(x_k))^2 = (f(x_k))^2 \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$, $I_{OY}^k = m_k x_k = x_k^2 \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$, $I_O = m_k (x_k^2 + (f(x_k))^2)$ túrlerinde hám OX hám OY kósherlerine baylanıslı statikalıq momentlerin sáykes

$M_{OX}^k \approx f(x_k) m_k = f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$, $M_{OY}^k \approx x_k m_k = x_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$ túrlerinde ańlatıw múmkin. Sonda L iymeginiń koordinata kósherlerine hám koordinata basına baylanıslı inerciyalıq momentleri,

$$I_{OX} \approx \sum_{k=1}^n I_X^k \approx \sum_{k=1}^n (f(x_k))^2 \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k, I_{OY} \approx \sum_{k=1}^n I_Y^k \approx \sum_{k=1}^n x_k^2 \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k,$$

$$I_O \approx \sum_{k=1}^n (x_k^2 + (f(x_k))^2) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$$

al koordinata kósherlerine baylanıslı statikalıq momentleri bolsa,

$$M_{OX} \approx \sum_{k=1}^n I_X^k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k, M_{OY} \approx \sum_{k=1}^n I_Y^k \approx \sum_{k=1}^n x_k \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \Delta x_k$$

boladı. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentide úzliksiz differenciallanıwshı bolǵanı ushın

$f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, $x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, $(f(x))^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, $x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funkciyaları usı segmentte úzliksiz hám sonıń ushın integrallanıwshı boladı.

Onda joqarıdaǵı juwıq teńliklerinde $\lambda(T) \rightarrow 0$ da shekke otip, materiallıq iymektiń OX, OY kósherlerine hám koordinata basına baylanıslı inerciyalıq momentleri,

$$I_{OX} = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, I_{OY} = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, I_O = \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

formulalarına hám OX, OY kósherlerine baylanıslı statikalıq momentleri

$$M_{OX} = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, M_{OY} = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

formulalarına sáykes ańıqlanıwı múmkinligin kóremiz. Endi L materiallıq iymeginiń $C(x_C, y_C)$ massalar orayınıń koordinataların tabıw ushın

$$M_{OX} = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = my_C = M_{XC}, \quad M_{OY} = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = mx_C = M_{YC}$$

teńliklerinen paydalanıp, $m = S(L)$ bolǵanı ushın,

$$x_C = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \quad y_C = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$$

formulalarına iye bolamız. Bul formulalardan ekinshisin 2π ge kóbeytip,

$$2\pi y_C \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

túrinde jazsaq, $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = S(L)$ teńligi $L = \{y = f(x), a \leq x \leq b\}$ iymeginiń

uzınlıǵı, al $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = P(L)$ formulası bolsa usı L iymegi OX

kosheri dógeresinde aylanǵanda payda bolǵan betliktiń betiniń $P(L)$ maydanın tabıw formulası ekenligin esapqa alsaq, $2\pi y_C S(L) = P(L)$ teńligine iye bolamız. Bul teńlik L iymegi ózi menen kesilispeytuǵın, biraq bir tegislikte jatıwshı kosher dógeresinde aylanǵanda payda bolǵan betliktiń betiniń maydanı bul aylanıwdaǵı L iymeginiń massalar orayı sızgan sheńberdiń uzınlıǵın hám L iymeginiń óziniń $S(L)$ uzınlıǵınıń kóbeymesine teń degen maǵana beredi. Usi natıyje mexanikada Guldenniń birinshi teoreması dep ataladı.

1-mısal. Uzınlıǵı d ǵa teń bolǵan birtekli sterjenniń ortasına baylanıslı inerciya momentin, statikalıq momentin hám massalar orayınıń koordinataların tabıń.

Sheshiliwi. Sterjenniń ortasına baylanıslı inerciya momenti degende onıń qaq ortası arqalı ótetuǵın hám sterjenge perpendikulyar bolǵan qálegen kósherge baylanıslı inerciya momenti túsiniledi. Bizler sterjendi qaq ortası koordinata basında bolatuǵınday etip OX kósheriniń $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$ kesindisine jaylastıramız.

Sonda sterjenniń ortasına baylanıslı inerciya momentin esaplaw ushın onıń OY kósherine baylanıslı inerciya momentin esaplaw jeterli boladı, yaǵnıy

$$I_{OY} = \rho \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \left| f(x) = 0, \forall x \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \right| = \rho \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 dx = \frac{\rho d^3}{12}.$$

Endi $\rho = \frac{m}{d}$ bolǵanı ushın $I_{OY} = \frac{md^2}{12}$ boladı.

Bunda m sterjenniń massası. $f(x)=0, \forall x \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ bolǵanı ushın

$$I_{OX} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 0 dx = 0, \quad I_O = I_{OX} + I_{OY} = I_{OY}. \text{ Statikalıq momentleri:}$$

$$M_{OX} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = 0, \quad M_{OY} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x \sqrt{1+(f'(x))^2} dx =$$

$$= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = 0. \text{ Awrılıq orayı } x_C = y_C = 0 \text{ boladı.}$$

4. Meyli $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ iymek sıızılıq trapeciyası berilgen bolsın. Bunda $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz funkciya. G trapeciyasına m massa ρ ǵa teń tıǵızlıqta bolıstırıldı. Kelip shıqqan materiallıq trapeciyasınıń OY kósherine baylanıslı inerciyalıq momentin esaplaw máselesin qarastıramız. $[a, b]$ segmentin $T = \{x_k = a + \frac{b-a}{n}k, k = \overline{0, n}\}$ usılında maydalap,

$\xi = \{\xi_k, k = \overline{1, n}\}$, $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$, tańlawın júzege asıramız. Sonda $[a, b]$ segmentiniń T usılında maydalanıw usılına materiallıq trapeciyanıń

$G_k = \{(x, y) : x_{k-1} \leq x \leq x_k, 0 \leq y \leq f(x)\}, k = \overline{1, n}$ maydalanıwı sáykes keledi. T maydalawınıń $\lambda(T)$ maydalıǵı jeterli kishi bolsa, $G_k, k = \overline{1, n}$

trapeciyaları ultanı Δx_k biyikligi $f(x_k), k = \overline{1, n}$ teń bolǵan jıńshke tuwrımúyeshliklerden parqı júdá kem boladı. Usınday k – materiallıq

tuwrımúyeshliklerdiń massası $\rho f(\xi_k) \Delta x_k, k = \overline{1, n}$ ǵa teń hám OY kósheri dógeregindegi aylanba qozǵalıсындаǵı bul tuwrımúyeshliklerdiń noqatlarınıń sıızılıq

tezligi shama menen $v_k = \omega \xi_k, k = \overline{1, n}$ ǵa teń. Onda G materiallıq

trapeciyasınıń kinetikalıq energiyasın $E \approx \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\rho \omega^2}{2} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \xi_k^2 \Delta x_k$ túrinde

jazıw múmkin. Bul teńlikte $\lambda(T) \rightarrow 0$ da shekke ótsek, joqarıda $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz bolǵanı ushın $x^2 f(x)$ funkciyasıda $[a, b]$

segmentinde úzliksiz hám $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho \omega^2}{2} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \xi_k^2 \Delta x_k = \frac{\rho \omega^2}{2} \int_a^b x^2 f(x) dx$ teńligi

orinli boladı. Endi $I_{OY} = \rho \int_a^b x^2 f(x) dx$ belgilewin kiritip, kinetikalıq energiyani

ıqsham $E = \frac{\omega^2}{2} I_{OY}$ túrinde jazamız. Bunda I_{OY} materiallıq trapeciyanıń OY kósherine baylanisli inerciyalıq momenti dep ataladı, al ρ materiallıq trapeciyanıń tıǵızlıǵı, yaǵnıy birlik maydanǵa tuwrı keletuǵın massa bolıp,

$$\rho = \frac{m}{S(G)} = \frac{m}{\int_a^b f(x) dx}$$

formulası menen anıqlanǵan. Demek, iymek sıızıqlı materiallıq trapeciyanıń OY kósherine baylanisli inerciyalıq momenti ushın

$$I_{OY} = m \frac{\int_a^b x^2 f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

formulasına iye bolamız.

Materiallıq trapeciyanıń statikalıq momenlerin esaplawdı $\rho = 1$ bolǵan jaǵday ushın qarastıramız. Bunday jaǵdayda $G_k, k = \overline{1, n}$ materiallıq trapeciyalardıń $S(G_k)$ maydanları hám sáykes m_k massaları ushın $S(G_k) = m_k \approx f(\xi_k) \Delta x_k$ teńligi orinli boladı hám olardıń massalar orayınıń koordinataları retinde $x_C \approx \xi_k, y_C \approx \frac{1}{2} f(\xi_k), k = \overline{1, n}$ noqatların aladı. Sonda G_k , materiallıq trapeciyalarınń OX hám OY kósherlerine baylanisli statikalıq momentleri sáykes

$$M_{OX}^k \approx \frac{(f(\xi_k))^2}{2} \Delta x_k, \quad M_{OY}^k \approx \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

túrinde jazıladı. Onda G materiallıq trapeciyasınıń statikalıq momentleri ushın

$$M_{OX} \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f^2(\xi_k) \Delta x_k, \quad M_{OY} \approx \sum_{k=1}^n \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

ańlatpalarına iye bolamız. $f(x)$ funkciyası $[a, b]$ segmentinde úzliksiz hám keyingi teńliklerdiń oń tárepi $f^2(x)$ hám $xf(x)$ funkciyalarınń $[a, b]$ segmentin T maydalaw usılındaǵı integrallıq qosındıları bolıwın kórip, $\lambda(T) \rightarrow 0$ shekke ótsek, G materiallıq trapeciyasınıń koordinata kósherlerine baylanisli statikalıq momentleri

$$M_{OX} = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \quad M_{OY} = \int_a^b x f(x) dx$$

formulaları járdeminde anıqlanadı degen juwmaqqa kelemiz. G materiallıq trapeciyasınıń $C(x_C, y_C)$ awırılıq orayınıń koordinataları $m = S(G)$ bolǵanı ushın

$$x_C = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad y_C = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

formulalarına sáykes tabıladı. Bul formulalardan ekinshisin 2π ge kóbeytip,

$$2\pi y_C \int_a^b f(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

teńligine iye bolamız. Bunda $\int_a^b f(x) dx = S(G)$ iymek sızıqlı trapeciyanıń

maydanı, $\pi \int_a^b f^2(x) dx = V(G)$ bolǵanı ushın, $V(G) = 2\pi y_C S(G)$ teńligine iye

bolamız, yaǵnıy G iymek sızıqlı trapeciyasınıń OX kósheri dógeresinde aylanıwınan payda bolǵan deneniń kólemi onıń maydanı menen bul aylanıwda massalar orayı sızǵan sheńberdiń uzınlıǵınıń kóbeymesine teń boladı. Usı nátiyje Guldenniń ekinshi teoreması dep ataladı.

1-mısal. Massası m ǵa teń bolǵan $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 1 + x^2\}$ iymek sızıqlı trapeciyası formasındaǵı plastinkanıń OY kósherlerine baylanıslı inerciya momentin, koordinata kósherlerine baylanıslı statikalıq momentlerin hám massalar orayınıń koordinataların tabıń.

Sheshiliwi. OY kósherlerine baylanıslı inerciya momenti:

$$I_{OY} = m \frac{\int_a^b x^2 (1 + x^2) dx}{\int_a^b (1 + x^2) dx} = m \frac{\frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{x^5}{5} \Big|_0^a}{x \Big|_0^a + \frac{x^3}{3} \Big|_0^a} = \frac{ma^2(5 + 3a^2)}{5(3 + a^2)},$$

koordinata kósherlerine baylanıslı statikalıq momentleri:

$$M_{OX} = \frac{1}{2} \int_0^a f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a (1 + x^2)^2 dx = \frac{a(15 + 10a^2 + 3a^4)}{30},$$

$$M_{OY} = \int_0^a x f(x) dx = \int_0^a x(1 + x^2) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^a + \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{a^2(2 + a^2)}{4},$$

massalar orayınıń koordinataları;

$$x_C = \frac{M_{OY}}{m} = \frac{3a(2+a^2)}{4(3-a^2)}, \quad y_C = \frac{M_{OX}}{m} = \frac{(15+10a^2+3a^4)}{10(3-a^2)}$$

2-misal. $(x-d)^2 + y^2 = r^2, 0 < r < d$ sheńberi OY kósheri dógerinde aylanğanda kelip shıqqan betliktiń maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Bunday betliklerdi matematikada tor dep ataydı. Berilgen sheńberdiń massalar orayı $(d,0)$ noqatı boladı. Usı noqat OY kósheri dógerinde aylanğanda kelip shıǵatuǵın sheńber uzınlıǵı $S(L) = 2\pi d$ ǵa teń, al berilgen sheńberdiń uzınlıǵı $2\pi r$. Guldenniń birinshi teoreması tiykarında tordıń betiniń maydanı $P(L) = 2\pi y_C S(L) = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 dr$ boladı.

Shınıǵıwlar

Berilgen sıızqlar menen shegaralanǵan figuralardıń maydanın esaplań:

1. $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$. ($J.13,5$); 2. $y = -6x, x = 4, y = 0$. ($J.48$)

3. $y = x^2 = 3y, y = 2 - x^2$. ($J.2\frac{2}{3}$); 4. $y = x^2, x = y^2$. ($J.\frac{1}{3}$) 5.

$y = x^2 - 8x + 18, y = -2x + 18$. ($J.36$); 6. $y = -x^2 + 10x - 16, y = x + 2$. ($J.4,5$). 7.

$y = x, y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 3$, ($J.\frac{7}{6}$).

8. Polyar kósheri hám $\rho = a\varphi, a > 0$ Arhimed spiralınıń birinshi oramı menen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń. ($J.\frac{4}{3}\pi^3 a^2$).

9. $\rho = a \cos 3\varphi$ úsh japıraqlı pozanıń maydanın tabıń. ($J.\frac{\pi a^2}{4}$).

10. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ astroydası menen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń.

Doǵa uzılıǵın esapań. 1. $y = x^{\frac{3}{2}}$ yarım kubikalıq parabolasınıń $0 \leq x \leq 5$ segmentine sáykes keliwshi doǵasınıń uzınlıǵın tabıń. ($J.\frac{335}{27}$).

2. $\rho = a\varphi, a > 0$ Arhimed spiralınıń birinshi oramınıń uzınlıǵın tabıń. ($J.a(\pi + \frac{2\pi+1}{2}\sqrt{4\pi^2+1})$).

3. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq \ln \pi$ parametrli teńlemesi menen berilgen iymek sıızıǵınıń uzınlıǵın tabıń. ($J.\sqrt{2}(\pi - 1)$).

4. $y = \ln \cos x + 3$ funkciyası frafiginiń $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ segmentine sáykes keliwshi doǵası uzınlıǵın tabıń. ($J.\ln(\sqrt{2} + 1)$).

5. $\varphi = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ iymeginiń $1 \leq \rho \leq 3$ segmentine sáykes keliwshi dóğası uzınlıgın tabıń. $(J. 2 + \frac{1}{2} \ln 3)$.

Aylanba betliktiń maydanı: 1. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ parametrli teńlemesi menen berilgen astroydanıń $y = x$ tuwrısı dóğereginde aylanıwında payda bolğan betliktiń betiniń maydanın tabıń. $(J. \frac{3\pi a^2}{5} (4\sqrt{2} - 1))$.

2. $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ dóńgelegi OY kósheri dóğereginde aylanıwında payda bolğan tordıń betiniń maydanın tabıń. $(J. 8\pi^2)$.

3. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}, 0 \leq x \leq a$ iymeginiń OX kósheri dóğereginde aylanıwında payda bolğan betliktiń betiniń maydanın tabıń. $(J. \frac{4\pi a^2}{243} (21\sqrt{3} + 2 \ln \frac{3+\sqrt{13}}{2}))$.

4. $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq a$ parabolası OX kósheri dóğereginde aylanıwında payda bolğan betliktiń betiniń maydanın tabıń. $(J. \frac{2\pi}{3} ((p+2a)\sqrt{p^2+2pa-p^2}))$.

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroydası OX kósheri dóğereginde aylanıwında payda bolğan betliktiń betiniń maydanın tabıń. $(J. \frac{12}{5} \pi a^2)$.

6. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, |x| \leq b$ iymegi OX hám OY kósherleri dóğereginde aylanıwında payda bolğan betliklerdiń betiniń maydanın tabıń. $(J. \pi a (2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}); 2\pi a (a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a}))$.

Deneniń kólemin tabıń. 1. $y = b(\frac{x}{a})^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq a$ teńlemesi menen berilgen iymek sıızığı neyloyd dep ataladı. Neyloyd OX kósheri dóğereginde aylanğanda payda bolğan betlk penen shegaralangán deneniń kólemin tabıń. $(J. \frac{3}{7} \pi ab^2)$.

2. $y = 2x - x^2, y = 0$ sıızıqları menen shegaralangán figura OY kósheri dóğereginde aylanğanda payda bolğan deneniń kólemin tabıń. $(J. 2\pi^2)$.

3. Biyikligi h , ultanınıń maydanı S bolğan piramidanıń kólemin tabıń. $(J. \frac{1}{3} S \cdot h)$

4. Tórende berilgen sıızıqlar menen shegaralangán figuralar OX hám OY kósherleri dóğereginde aylanıwınan payda bolğan denelerdiń kólemlerin tabıń.

1. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0$. $(J. \frac{\pi(e^2-1)}{2}, 2\pi)$; 2. $y = x^3, y = 1, x = 0$. $(J. \frac{6\pi}{7}, \frac{3\pi}{5})$;

3. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$. ($J. \frac{\pi(\pi+2)}{4}$, $\pi \ln 2$). 4. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y=0$. ($J. \frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$)

5. $y = \ln x$, $y=0$, $x=e$ sızıqları menen shegaralangan figuraniñ $y=-1$, $x=1$, $x=-1$, $y=1$ tuwrılarınıñ hárbiriniñ dógeresinde aylanıwında payda bolğan denelerdiñ kólemlerin tabıñ. ($J. \pi e$, $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$, $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$, $\pi(4-e)$).

6. $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ dóngelegi OY kósheri dógeresinde aylanıwında payda bolğan tordıñ kólemin tabıñ. ($J. \pi$).

Anıq integraldıñ fizikalıq qollanıwları: 1. Birlik massalar jaylastırılğan ush materiallıq noqatlar sistemasınıñ awırlıq orayı usı noqatlar tóbeleri bolğan ushmúyeshliktiñ medianalarınıñ kesilisiw noqatında bolıwın dálilleñ.

2. Konustıñ qaptal betiniñ maydanın tabıñ. ($J. \pi Rl$)

3. $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ dóngeleginiñ awırlıq orayınıñ koordinatasın tabıñ. ($J. (0, \frac{4r}{3\pi})$).

4. $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$ tómengi yarım tegislikte jaylasqan yarım sheńberiniñ awırlıq orayınıñ koordinataların tabıñ. ($J. (0, -\frac{2r}{\pi})$).

5. Massası m bolğan hám $y=2x$, $x=3$, $y=0$ tuwrıları menen shegaralangan úshmúyeshliginiñ OY kósherine baylanisli inerciyalıq momentin esaplañ.

6. Massası m bolğan $x^2 + y^2 = r^2$ sheńberiniñ OY kósherine baylanisli inerciyalıq momentin esaplañ.

7. Massası m bolğan $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ tuwrımúyeshli plastinaniñ OY kósheriniñ dógeresinde ω múyeshlik tezliginde aylanğandağı kinetikalıq energiyasın esaplañ.

8. Yarım kósherleri a hám b bolğan birtekli elliptikalıq plastinkanıñ simmetriya kósherlerine baylanisli inerciyalıq momentlerin esaplañ. ($J. \frac{\pi ab^3}{4}$, $\frac{\pi a^3 b}{4}$).

9. Biyikligi h , ultanınıñ radiusı r bolğan birtekli konustıñ ultan tegisligine baylanisli statikalıq momentin hám inerciyalıq momentin tabıñ. ($J. \frac{\pi r^2 h^2}{12}$, $\frac{\pi r^2 h^3}{30}$).

10. Koordinata basına jaylastırılğan e_1 elektr zaryadı ózi menen bidey tańbali e_2 elektr zaryadın iterip $x=a$ noqatınan $x=b$ noqatına ótkeredi. e_2 zaryadın $x=a$ noqatınan $x=b$ noqatına ótkeriwde F kúshiniñ islegen jumisin tabıñ. ($J. k e_1 e_2 (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$).

11. Eger prujinanı x metrge sozatuğın kúsh $F = kx$ hám prujinanı 0,01 metrge sozıw ushın 10N kúsh kerek ekenligi málim. Bunda k prujnaniñ qattılığına baylanisli proporcionallıq koefficient. Prujinanı 0,05 metrge sozıw ushın isleniwi kerek bolğan jumıstı esaplañ. ($J. 0,125 \text{ kgm}$).

MENSHIKSIZ INTEGRALLAR

§1. Menshiksiz inyeqrallardıń qásiyetleri hám esaplaw usılları

Eskertiw. $\int_a^b f(x)dx$ túrindegi menshiksiz integrallar qarastırıladı. $f(x)$ funkciya $[a;b)$ kesindisinde úzliksiz. Bunda a shekli noqat, b shekli noqat yamasa $+\infty$ hám $\forall \xi \in [a;b)$ ushın $f(x)$ funkciyasınıń $[a;\xi]$ segmentinde anıq integralı anıqlanğan bolsın.

Anıq integral túsinigin integrallıq qosındılar shegi retinde anıqlağanda integrallaw kesindisi shekli hám bul kesindide integral astındağı funkciya shegaralanğan funkciya bolıwı zárúr edi. Usı eki shártlerden keminde birewi orınlanbasa, onda anıq integraldıń integrallıq qosındılar shegi retindegi anıqlaması mağanáğa iye bolmaydı.

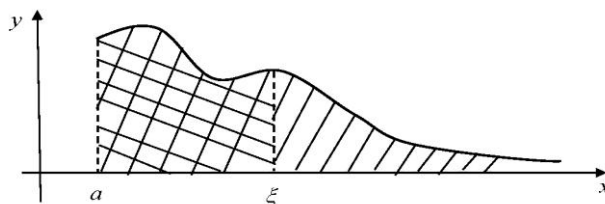
Usıǵan baylanıslı anıq integral túsinigin ulıwmalastırıw máselesi kelip shıǵadı. Solardan biri bolğan menshiksiz integrallar túsinigin qarastıramız.

1. Integrallaw shekleri sheksizlik bolğan menshiksiz integrallar.

1-**anıqlama.** Meyli $f(x)$ funkstiya $a \leq x < +\infty$ kesindide úzliksiz bolsın.

Onda bul funkstiya $a \leq \xi$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın ξ ushın hár bir $[a, \xi]$ segmentinde úzliksiz funkciya boladı hám bunnan

$$\int_a^{\xi} f(x)dx$$



11-suwret

integralınıń bar bolıwı kelip shıǵadı. Bul integral óziniń joqarǵı shegi bolğan ξ ge baylanıslı hám $a \leq \xi < +\infty$ kesindide anıqlanğan funkciya boladı. Eger $\int_a^{\xi} f(x)dx$

integralınıń $\xi \rightarrow +\infty$ shekli shegi bar bolsa, onda bul shekti $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ túrinde belgileydi hám $f(x)$ funkciyasınıń (a dan $+\infty$ ke shekemgi) sheksiz kesindi boyınsha menshiksiz integralı dep delinedi. Bul jaǵdayda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı dep ataladı.

Eger $\xi \rightarrow +\infty$ da $\int_a^{\xi} f(x)dx$ integralınıń shegi bar bolmasa yamasa bul integraldıń shegi sheksizlik bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ simvolı hesh bir sanlı mánis penen baylanıstırılmaıdı. Usı jaǵdayda da $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralına menshiksiz integral delinedi, biraq bul jaǵdayda menshiksiz integraldı tarqalıwshı dep aytamız. Solay etip

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx .$$

Usıǵan uqsas $-\infty < x \leq b$ sheksiz kesindide uzliksiz $f(x)$ funkciyasınıń $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ menshiksiz integralı $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \int_{\eta}^b f(x)dx$ turinde anıqlanadı hám teńliktiń oń tárepindegi shek bar hám shekli bolsa, onda $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı, al eger bul shek bar bolmasa yamasa sheksizlik bolsa, onda $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı delinedi.

Barlıq haqıqıy sanlar kósherinde úzliksiz $f(x)$ funkciya úshın $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ teńligi menen anıqlanadı. Bunda a qálegen háqıqıy san. $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hám $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralları jıynaqlı bolsa, onda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı delinedi, eger $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hám $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integrallarınıń keminde birewi tarqalıwshı bolsa, onda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı dep ataladı.

Bul keltirilgen jıynaqlı menshiksiz integrallardıń anıqlamalarınan menshiksiz integrallar integrallıq qosındılardıń shegi emes, al joqarı yamasa tómengi shegi ózgeriwshı bolǵan anıq integrallardıń bul shekler sheksizlikke úmtılǵandaǵı shegi ekenligin atap ótemiz.

Geometriyalıq kózqarastan $\int_a^{\xi} f(x)dx$ integralınıń sanlı mánisi $x = a$, $x = \xi$

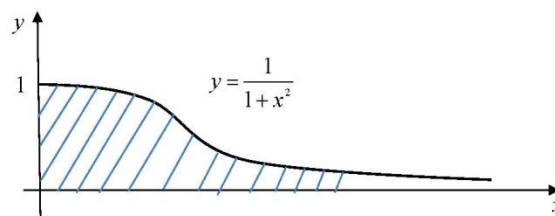
tuwrıları menen oń hám shep tárepten shegaralanǵan, tómennen OX kósheriniń $[a, \xi]$ kesindisi menen hám joqarıdan $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigi menen shegaralanǵan iymek sıızıqlı trapeciyanıń maydanına teń bolıwı málim. Bunda $y = f(x)$ funkciya $[a, +\infty)$ yarım tuwrıda úzliksiz hám teris emes. Eger $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolsa, onda onıń mánisin tómennen OX

kósheri, shep tárepten $x = a$ tuwrısı hám joqarıdaǵı $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigi menen shegaralanǵan 11-súwrettegi shtrixlangan figuranıń maydanı retinde qabıl etedi. Usıǵan uqsas geometriyalıq maǵanarı

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \text{ hám } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

integralları úshın da keltiriw múmkin.

1-mısal. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ menshiksiz integralın jıynaqlılıqqa izertleń.



12-súwret

Sheshiliwi: $\forall \xi > 0$ úshın

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{\xi} = \arctg \xi$ hám $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \arctg \xi = \frac{\pi}{2}$ bolǵanı ushın berilgen integral jıynaqlı hám onıń mánisi $\frac{\pi}{2}$ ge teń, yaǵnıy $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. Geometriyalıq kózqarastan shtrixlangan figuranıń maydanı $\frac{\pi}{2}$ ge teń.

2-mısal. $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ menshiksiz integralın jıynaqlılıqqa izertleń.

Sheshiliwi: $\forall \xi > 0$ ushın $\int_0^{\xi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\xi} = \sin \xi$ hám $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sin \xi$ shegi bar bolmaǵanlıǵı ushın berilgen menshiksiz integral tarqalıwshı.

3-mısal. $\int_{-\infty}^1 2^x dx$ integralın jıynaqlılıqqa izertleń.

Sheshiliwi: $\forall \eta < 1$ úshın $[\eta, 1]$ segmentinde $\int_{\eta}^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{\eta}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{2^{\eta}}{\ln 2}$. Bunnan

$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{2^{\eta}}{\ln 2} \right) = \frac{2}{\ln 2}$ bolǵanı ushın berilgen integral jıynaqlı hám $\int_{-\infty}^1 2^x dx = \frac{2}{\ln 2}$.

4-mısal. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ integralnı jıynaqlılıqqa izertleń. Bunda α -bazıbir hámıqıy san.

Sheshiliwi: $\forall \xi \in [1; +\infty]$ ushın $\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (\xi^{1-\alpha}), & \text{eger } \alpha \neq 1 \\ \ln \xi, & \text{eger } \alpha = 1 \end{cases}$

bolǵanlıqtan $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{eger } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{eger } \alpha \leq 1 \end{cases}$. Demek, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ menshiksiz integralı

$\alpha > 1$ mánislerinde jıynaqlı hám $\alpha \leq 1$ mánislerinde tarqalıwshı boladı.

5-mısal. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}$ integralnıń jıynaqlı bolıwın kórsetiń hám onıń mánisin tabıń.

Sheshiliwi: $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$ hám $\xi < \eta$ ushın

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_{\xi}^{\eta} \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{\xi}^{\eta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} - \arctg \frac{2\xi+1}{\sqrt{3}} \right)$$

boladı. Endi $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \arctg \frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \arctg \frac{2\xi+1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2}$ bolǵanı ushın

$\lim_{\substack{\eta \rightarrow +\infty \\ \xi \rightarrow -\infty}} \int_{\xi}^{\eta} \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, yaǵnıy berilgen integral jıynaqlı hám $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Eskertiw. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ menshiksiz integralnıń jıynaqlılıǵı $\int_c^{+\infty} f(x) dx$

menshiksiz integralnıń jıynaqlılıǵı menen teń kúshli boladı. Bunda $c \in (a; +\infty)$ qálegen san. Sebebi $a < c < \xi < +\infty$ teńsizligin qanaatlandıratuǵın ξ ushın

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\xi} f(x) dx$$

teńligi orınlı.

§2. Sheksiz kesindiler boyınsha menshiksiz integrallardıń qásiyetleri

1. Eger $f(x)$ hám $g(x)$ funksiýalarınıń $[a; +\infty)$ kesindisi boyınsha menshiksiz integralları jıynaqlı bolsa, onda $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sanlarında

$\lambda f(x) + \mu g(x)$ funksiyasının $[a; +\infty)$ kesindi boyınsha menshiksiz integralı da jıynaqlı hám

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

teńligi orınlı.

Dálillew: $\forall \xi \in [a; +\infty)$ ushın anıq integraldın sızıqlılıq qásiyeti tiykarında

$$\int_a^{\xi} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{\xi} f(x) dx + \mu \int_a^{\xi} g(x) dx$$

boladı. Bul teńliktiń óń tárepi $\xi \rightarrow +\infty$ shekli shekke iye, sebebi $f(x)$ hám $g(x)$ funksiyalarının $[a; +\infty)$ kesindisi boyınsha menshiksiz integralları jıynaqlı. Onda bul teńliktiń shep tárepiniń de $\xi \rightarrow +\infty$ shekli shegi bar hám (1) teńligi orınlı.

Dálillengen qásiyet $(-\infty; a]$ hám $(-\infty; +\infty)$ kesindileri boyınsha alıńan $f(x)$ hám $g(x)$ funksiyalarının menshiksiz integralları jıynaqlı bolǵan jaǵdaylar ushında orınlı.

2. Eger $F(x)$ funksiyası $[a; +\infty)$ kesindisinde úzliksez $f(x)$ tıń $[a, \xi]$ kesindisindegi baslanǵısh funksiyası bolsa, onda $a \leq \xi < +\infty$ shártin qanaatlandıratuǵın $\forall \xi$ ushın

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{\xi} = F(\xi) - F(a)$$

Nyuton-Leybnic formulası orınlı. Demek, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolıwı ushın $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi)$ shekli sheginiń bar bolıwı zárur hám jeterli boladı.

Eger $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi)$ shekli shegi bar bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) - F(a)$$

boladı. $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = F(+\infty)$ belgilewin kiritip

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}$$

teńligine iye bolamız. Usı teńlik ulıwmalasqan Nyuton-Leybnic formulası dep ataladı. Usıǵan uqsas sáykes shártler orınlı bolǵanda

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

türindegi ulıwmalasqan Nyuton-Leybnic formulaların alıw mümkin.

1-mısal. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$ integralın esaplań.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \arctg x d(\arctg x) = \frac{1}{2} \arctg^2 x \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} (\arctg^2(+\infty) - \arctg^2 0) = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Bóleklep integrallaw. Meyli $u(x), v(x)$ funkciyaları $[a; +\infty)$ kesindisinde anıqlanğan, $[a; \xi]$ segmentte úzliksiz tuwındılarına iye. Bunda $\xi \in (a; +\infty)$. Eger

$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (u(\xi)v(\xi)) = u(+\infty)v(+\infty)$ shekli shegi bar, $\int_a^{+\infty} vu'dx$ menshiksiz integralı

jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} uv'dx$ menshiksiz integralı da jıynaqlı hám

$$\int_a^{+\infty} uv'dx = uv \Big|_0^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vu'dx$$

bóleklep integrallaw formulası orınlı.

Haqıyqatında da $u'(x), v'(x)$ funkciyaları $[a; \xi]$ segmentte úzliksiz bolğanı ushın $\forall \xi \in (a; +\infty)$ mánisinde

$$\int_a^{\xi} uv'dx = uv \Big|_0^{\xi} - \int_a^{\xi} vu'dx$$

anıq integral ushın bóleklep integrallaw formulası orınlı. Onda

$$\int_a^{\xi} uv'dx = u(\xi)v(\xi) - u(a)v(a) - \int_a^{\xi} vu'dx$$

hám bul teńliktiń oń tárepi $\xi \rightarrow +\infty$ shekli shekke iye. Bul shek $uv \Big|_0^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vu'dx$ qa

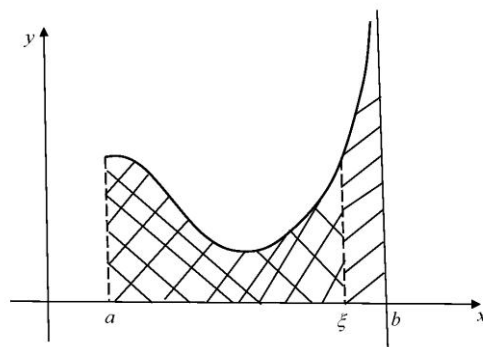
teń bolğanı ushın, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_a^{\xi} uv'dx$ shekli shegi bar, yaǵnıy $\int_a^{+\infty} uv'dx$ menshiksiz integral jıynaqlı hám bóleklep integrallaw formulası orınlı.

Mısal. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ menshiksiz integraldı esaplań.

Sheshiliwi: $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$

§3. Shegaralanbağan funkciyaların menshiksiz integralları

Meyli $f(x)$ funkciya $[a;b]$ yarım segmentte úzliksiz, biraq $x=b$ noqattıń dógerinde shegaralanbağan bolsın. Onda $f(x)$ funkciya $[a;b]$ te úzliksiz bolğanı ushın hár bir $[a;\xi] \subset [a;b]$ te integrallanıwshı hám



13-suwret

$\int_a^\xi f(x)dx$ integral óziniń joqarǵı sheginiń $a \leq \xi < b$ kesindisinde anıqlanğan funkciyası boladı.

Eger $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x)dx$ shekli shegi bar bolsa, onda bul shekti $\int_a^b f(x)dx$ túrinde belgileybiz hám shegaralanbağan funkciyanıń $[a;b]$ ti boyınsha menshiksiz integralı dep ataymız, yaǵnıy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x)dx.$$

Bul teńliktiń óń tárepindegi shek bar bolsa hám shekli bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı delinedi, al eger teńliktiń óń tárepindegi

shek bar bolmasa yamasa sheksizlik bolsa onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı dep ataladı. Usıǵan uqsas $(a,b]$ yarım intervalda úzliksiz, biraq $x=a$ noqat dógerinde shegaralanbağan $f(x)$ funkciya ushın $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integral túsinigi kiritiledi hám ol

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow a+0} \int_\eta^b f(x)dx$$

teńligi menen anıqlanadı. Eger bul teliktiń óń tárepindegi shek bar hám shekli bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı, al eger teńliktiń óń

tárepindegi shek bar bolmasa yamasa sheksizlik bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı dep ataladı. (a,b) intervalda úzliksiz hám $x=a$, $x=b$ noqatlarınń dógerinde shegaralanbağan $f(x)$ funkciyanıń menshiksiz integralı

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

teńligi menen anıqlanadı. Bunda $c \in (a, b)$ qálegen noqat. Eger bul teńliktiń oń tárepindegi $\int_a^c f(x)dx$ hám $\int_c^b f(x)dx$ menshiksiz integralları jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı, al eger $\int_a^c f(x)dx$ hám $\int_c^b f(x)dx$ menshiksiz integrallardan keminde biri tarqalıwshı bolsa, $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı dep ataladı.

Meyli $f(x)$ funkciya $[a, b]$ segmentiniń $X = C$ noqatınan basqa noqatlarında uzliksiz al $x = c$ noqatınıń dógeresinde shegaralanbağan bolsın. Bul jaǵdayda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ teńligi menen anıqlanadı hám bul teńliktiń oń tárepindegi hárbir menshiksiz integral jıynaqlı bolsa, onda shep tárepindegi $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı boladı. Al, eger teńliktiń oń tárepindegi menshiksiz integrallardan keminde birewi tarqalıwshı bolsa, onda onıń shep tárepindegi menshiksiz integral da tarqalıwshı boladı.

$f(x)$ funkciya shekli $(a; b)$ intervalınıń shekli sandaǵı $x_k, (k = \overline{1, m})$ noqatlarınan basqa noqatlarda anıqlanǵan jaǵdayda, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ shárti orınlı dep esaplap $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralın $(x_{k-1}; x_k), k = 1, 2, \dots, m$ intervalları boyınsha $f(x)$ funkciyanıń menshiksiz integrallarınıń qosındısı retinde anıqlaymız. Eger $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, k = 1, 2, \dots, m$ menshiksiz integrallarınıń hárberi jıynaqlı bolsa, onda berilgen menshiksiz integral jıynaqlı boladı. Al, eger $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, k = 1, 2, \dots, m$ menshiksiz integrallarınıń keminde birewi tarqalıwshı bolsa, onda berilgen menshiksiz integral tarqalıwshı boladı.

Keltirilgen anıqlamalardan shegaralanbaian funkciyalardıń shekli $[a; b]$ kesindisi boyınsha menshiksiz integralı integrallıq qosındınıń shegi emes, al

joqarǵı yamasa tómengi shegi ózgeriwshi bolǵan anıq integrallardıń shegi bolıwın atap ótemiz.

Eger $f(x)$ funkciya $[a, b)$ te úzliksiz teris emes anıqlanǵan hám $x = b$ noqattıń dógerinde shegeralanbaǵan funkciya bolsa, onda $\int_a^b f(x) dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolǵan jaǵdayda bul integraldıń mánisin tómennen Ox kósheriniń $[a, b)$ yarım segmenti menen, shep hám oń tárepten $x = a$, $x = b$ tuwrıları, joqarıdan $y = f(x)$ funkciyasınıń grafigi menen shegaralanǵan 12-súwrettegi kórsetilgen figuranıń maydanı dep qabıl etiw múmkin.

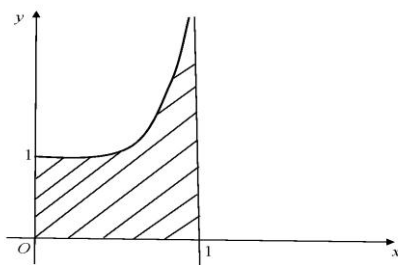
1-mısal $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funkciyasın $[0; 1)$ segmentinde qarasıtıramız. $0 \leq \xi < 1$

shártin qanaatlandıratuǵın hár bir ξ ushın $[0, \xi]$ segmetinde

$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2(1 - \sqrt{1-\xi})$ anıq integralın esaplap, $\lim_{\xi \rightarrow 1-0} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$ mánisine iye

bolamız, yaǵnıy $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$. Demek 14-súwretdegi shtrixlanǵan figuranıń

maydanı 2ge teń dep qabıl etiw mumkin. Shegaralanbaǵan funkciyalardıń basqa tipleri ushında usıǵan uqsas geometriyalıq maǵana beriwge boladı.



14-súwret

2-mısal. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ menshiksiz integralın jıynaqlılıqqa izertleń.

Sheshiliwi: $\forall \xi \in (0; 1]$ ushın

$$\int_\xi^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\xi^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - \xi^{1-\alpha}), & \text{eger } \alpha \neq 1 \\ \ln x \Big|_\xi^1 = -\ln \xi, & \text{eger } \alpha = 1 \end{cases}$$

bolıp, bunnan

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{eger } \alpha < 1 \\ \infty, & \text{eger } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

boladı. Demek $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ menshiksiz integral $\alpha < 1$ bolǵanda jıynaqlı hám $\alpha \geq 1$ mánisleri ushın tarqalıwshı boladı.

Anıq integrallarǵa tiyisli bir neshe qásiyetlerdi shegaralanbaǵan funkciyalardıń menshiksiz integralı jaǵdayına ulıwmalastırıw mumkin.

Dara jaǵdayda bunday menshiksiz integrallar ushın Nyuton-Leybnic formulası tómendegishe ulıwmalasadı.

Meyli $f(x)$ funkciyası $[a, b)$ yarım segmentte úzliksiz hám $(b - \delta, b) \subset [a, b)$, $\delta > 0$ intervalda shegaralanbaǵan bolsın. $F(x)$ arqalı $f(x)$ funkciyasınıń $[a, b)$ yarım segmentindegi baslanǵısh funkciyasın belgilep, $\forall \xi \in [a, b)$ ushın Nyuton-Leybnic formulasına sáykes

$$\int_a^\xi f(x)dx = F(\xi) - F(a) = F(x)\Big|_a^\xi \quad \text{teńligin jazıw mumkin.}$$

Bunnan $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı bar bolıwı ushın $\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi)$ sheginiń bar bolıwı zárúrli hám jeterli.

Eger usı shek bar bolsa, onda onı $F(b-0)$ túrinde belgilep

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a) \quad \text{formulasına iye bolamız.}$$

Usı formulanı anıq integral ushın Nyuton-Leybnic formulasınıń qarastırılıp atırǵan tiptegi menshiksiz integrallarǵa ulıwmalasqanı boladı.

Usıǵan uqsas $(a; b]$ da úzliksiz, biraq $(a; a + \delta) \subset (a; b]$ intervalda shegaralanbaǵan $f(x)$ funkciyası ushın $(a; b]$ daǵı bazıbir dáslepki funkciyasın $F(x)$ arqalı belgilep, $\lim_{\eta \rightarrow a+0} F(\eta)$ bunda $a < \eta \leq b$ shekli shegi bar bolǵan jaǵdayda Nyuton-Leybnic formulasın

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$$

túrinde jazamız. Bunda $F(a+0) = \lim_{\eta \rightarrow a+0} F(\eta)$.

Endi $f(x)$ funkciya $[a; b]$ tiń shekli sandaǵı $x_1, x_2, \dots, x_m$ noqatlarınan basqa hárbir noqatında úzliksiz bolıp, $x_i, i=1, 2, \dots, m$ noqatlardıń jaqınında shegaralanbaǵan bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı ushın

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_m}^b f(x)dx$$

teńligi orınlı boladı.

Eger $[a; b]$ de úzliksiz hám $f(x)$ ushın $[a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_m; b]$ kesindilerinde dáslepki funkciyası $F(x)$ bar bolsa, onda Nyuton-Leybnic formulasınan paydalanıp aqırǵı teńlikti

$\int_a^b f(x)dx = [F(x_1 - 0) - F(a)] + [F(x_2 - 0) - F(x_1 + 0)] + \dots + [F(x_m - 0) - F(b)]$ túrinde jazıwǵa boladı. Onda $F(x)$ funkciya $[a; b]$ te úzliksiz ekenliginen hám

$$F(x_i + 0) - F(x_i - 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

teńligin esapqa alıp

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

túrindegi Nyuton-Leybnic formulasına iye bolamız.

§4. Menshiksiz integrallarda ózgeriwshilerdi almasırw

Eger $f(x)$ funkciya $[a; b]$ te úzliksiz, al $x = \varphi(t)$ funkciya $[\alpha; \beta)$ te úzliksiz differencialanıwshı, qatań monoton hám $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta - 0} \varphi(t) = b$ shártleri orınlı bolıp, $\int_a^b f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ integralarınıń keminde birewi jıynaqlı bolǵanda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (*)$$

teńligi orınlı boladı. Usı teńlik menshiksiz integrallarda ózgeriwshilerdi almasırw formulası dep ataladı.

Haqıyqatında da meyli $\tau \in [\alpha, \beta)$, $\varphi(t) = \xi$ bolsın. Onda $\lim_{\tau \rightarrow \beta - 0} \varphi(\tau) = b$ boladı. Endi anıq integralda ózgeriwshilerdi almasırw formulasınan paydalanıp, $\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\tau} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ teńligin jazamız. $\varphi(t)$ funkciyası qatań monoton hám $[\alpha; \beta)$ te úzliksiz ekenliginen, onıń keri funkciyası $[a; b)$ te qatań monoton hám úzliksiz ekenligi kelip shıǵadı. Onda $\lim_{\tau \rightarrow \beta - 0} \int_{\alpha}^{\tau} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ shektiń shekli ekenliginen $\lim_{\xi \rightarrow b - 0} \int_a^{\xi} f(x)dx$ shegi shekli hám (*) teńligi orınlı ekenligi kelip shıǵadı.

Eskertiw. $\varphi(t)$ funkciyası (β, α) , $\beta < \alpha$ kesindide qatań kemeyiwshı, úzliksiz differencialanıwshı hám $a = \lim_{t \rightarrow \alpha - 0} \varphi(t)$, $b = \lim_{t \rightarrow \beta + 0} \varphi(t)$ bolǵan jaǵdayda ǵana orınlı boladı.

Bul jaǵdayda anıq integral qásiyetine sáykes $\alpha > \beta$ bolǵanda

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = - \int_{\beta}^{\alpha} g(t) dt \quad \text{teńliginen paydalanadı.}$$

1-mısal. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ integralın esaplań.

Sheshiliwi: $x = t \operatorname{tg} t$, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ formulaǵa sáykes ózgeriwshilerdi almastırsaq,

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \quad \text{boladı hám } x=0 \Rightarrow t=0; x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{bolǵanı ushın}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{\sqrt{(t \operatorname{tg}^2 t + 1)^3}} = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

2-mısal. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ integralın esaplań.

Sheshiliwi: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} =$

$$= \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = t; \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \\ dt = d\left(x - \frac{1}{x}\right); \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow -\infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3-mısal. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ integralın esaplań.

Sheshiliwi: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = - \int_{+\infty}^0 \frac{dt}{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^4}\right)} =$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}. \quad \text{Endi } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{teńligin esapqa alıp}$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \pi \sqrt{2}.$$

§5. Teńsizliklerdi integrallaw

Menshiksiz integrallarǵa baylanıslı kóplegen máselelerde qarastırılıp atırǵan integrallardıń mánislerin tabıw integrallardı esaplawǵa baylanıslı qıyınshılıqlarǵa

alıp keliwi múmkin. Bunday jaǵdaylarda menshiksiz integrallardıń jıynaqlı bolıwın kórsetiw menen shegaralanadı, al integraldıń mánisin tabıw talap etilmeydi.

Usıǵan baylanıslı menshiksiz integrallardıń jıynaqlılıq belgileri úyreniledi.

1-teorema. (menshiksiz integrallardıń jıynaqlı bolwının zárúrli shárti) Eger

$\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolsa, onda $\forall \xi \in [a; b)$ ushın $\int_a^\xi f(x)dx$

shegaralangán boladı. Yaǵnıy $M > 0$ sanı tabılıp $\forall \xi \in [a; b)$ ushın

$$\left| \int_a^\xi f(x)dx \right| < M$$

teńsizligi orınlı boladı.

Bul teoremadaǵı tastıyıqlawdıń durıshılıǵı $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı

jıynaqlı bolǵanı ushın $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x)dx$ shekli sheginiń bar bolıwınan kelip shıǵadı.

2-teorema. (Koshi belgisi) $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolıwı

ushın qálegen $\varepsilon > 0$ sanına sonday $\delta_\varepsilon \in (a; b)$ sanı bar bolıp, $\forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon; b)$ mánislerinde

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

teńsizliginiń orınlı bolıwı zárúr hám jeterli.

Dálilleniwi: (Zárúrligi) Meyli $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı

bolsın. Onda $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx$ funkciyasınıń $\xi \rightarrow b-0$ da shekli shegi bar boladı.

Onda funkciyanıń shegi bar bolıwınıń Koshi belgisine sáykes $\forall \varepsilon > 0$ sanına sonday $\delta_\varepsilon \in (a, b)$ sanı bar boladı da $\forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ ushın

$$|F(\xi'') - F(\xi')| = \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlanadı.

Jeterliligi: $\forall \varepsilon > 0$ sanı ushın $\delta_\varepsilon \in (a, b)$ sanı bar bolıp $\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon$

teńsizligi $\forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b)$ mánislerinde orınlı bolsın. Bul teńsizlik

$|F(\xi'') - F(\xi')| < \varepsilon$ teńsizligine teń kushli, yaǵnıy $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx$ funkciyası ushın $\xi \rightarrow b-0$ da shekli shegi bar bolıwı haqqıdaǵı Koshi belgisi orınlanǵan. Onda $\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^\xi f(x)dx$ shekli shegi bar. Bul $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integraldıń jıynaqlı bolıwın kórsetedi.

Eskertiw: $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı tarqalıwshı boladı, eger menshiksiz integrallar ushın Koshi belgisi orınlanbaǵan bolsa, yaǵnıy sonday $\varepsilon_0 > 0$ sanı tabılıp, $\forall \delta_\varepsilon \in (a, b)$ sanına $\xi'_\delta, \xi''_\delta \in (\delta, b)$ sanları bar bolıp $\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0$ teńsizligi orınlı bolsa.

Mısal. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ integralın jıynaqlılıqqa tekseriń. Bunda $\alpha \leq 1$

Sheshiliwi: $\forall \delta > 1$ sanına sonday $n \in N$ sanı bar boladı da $n \cdot \pi > \alpha$ teńsizligi orınlanadı. Onda $\xi'_\delta = n\pi$ da $\xi''_\delta = 2\pi n$ mánislerin alsaq,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| &= \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \geq \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4n\pi} \int_{n\pi}^{2n\pi} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4n\pi} \cdot \cancel{n\pi} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

yaǵnıy $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ bolǵanda, $\forall \delta > 1$ sanı ushın $n \in N$ sanı bar bolıp $\xi'_\delta = n\pi$, $\xi''_\delta = 2n\pi \in (\delta; +\infty)$ mánislerinde

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{4}$$

teńsizligi orınlı bolǵanı ushın berilgen integral tarqalıwshı boladı.

§6. Teris emes funkciyalardıń menshiksiz integralları.

Teorema 1. Eger $\forall x \in [a; b)$ ushın $f(x) \geq 0$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolıwı ushın $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx$, $a \leq \xi < b$ funkciyasınıń joqarıdan shegaralanǵan bolıwı zárúr hám jeterli.

Dálilleniwi. Zárúrligi. Meyli $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolsın.

Onda $\forall \xi_1, \xi_2 \in [a; b)$ ushın $\xi_1 < \xi_2$ teńsizliginen

$$F(\xi_2) - F(\xi_1) = \int_a^{\xi_2} f(x)dx - \int_a^{\xi_1} f(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx \geq 0$$

teńsizligi kelip shıǵadı. Demek, $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx$ ósiwshi funksiya. Onda

monoton funksiylardıń shegi haqqındaǵı teoremaǵa sáykes

$\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} f(x)dx = \sup_{a \leq \xi < b} F(\xi) = C$ shekli shegi bar boladı hám supremumnıń

anıqlamasına sáykes $\forall \xi \in [a, b)$ ushın

$$\int_a^{\xi} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx = C$$

teńsizligi orınlı, yaǵnıy $\int_a^{\xi} f(x)dx = F(\xi)$ funksiya shegaralanǵan.

Jeterliligi: Meyli $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx$ funksiya joqarıdan shegaralanǵan bolsın,

yaǵnıy $\exists C : \forall \xi \in [a, b] \rightarrow \int_a^{\xi} f(x)dx \leq C$ teńligi orınlı bolsın. $F(\xi)$ ósiwshi hám

joqarıdan shegaralanǵan funksiya bolǵanı ushın

$\lim_{\xi \rightarrow b-0} F(\xi) = F(b-0) = \sup_{a \leq \xi \leq b} F(\xi)$ shekli shegi bar boladı. Bunnan menshiksiz

integralnıń jıynaqlı bolıwı anıqlaması tiykarında $\int_a^b f(x)dx$ integralı jıynaqlı dep juwmaq shıǵaramız.

2-teorema. (Salıstırıw belgisi). Eger $\forall x \in [a; b)$ ushın $0 \leq f(x) \leq g(x)$

teńsizligi orınlı bolsa, onda $J_1 = \int_a^b g(x)dx$ menshiksiz integralnıń jıynaqlı

bolıwınan $J_2 = \int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralnıń jıynaqlı bolıwı kelip shıǵadı, al

J_2 integraldın tarqalıwshı bolıwınan J_1 integralnıń da tarqalıwshı bolıwı kelip shıǵadı.

Dálillew: Meyli J_1 integralı jıynaqlı bolsın. Onda anıq integraldın teńsizliklerge baylanıslı qásiyeti tiykarında $f(x) \leq g(x)$ teńsizliginen

$$\int_a^{\xi} f(x)dx \leq \int_a^{\xi} g(x)dx$$

teńsizligi $\forall \xi \in [a; b)$ ushın orınlı boladı hám 1-teoremaǵa sáykes

$$\lim_{\xi \rightarrow b-0} \int_a^{\xi} g(x) dx = J_1 = \sup_{a \leq \xi < b} \int_a^{\xi} g(x) dx$$

shekli shegi bar. Bunnan $\forall x \in [a; b)$ ushın $\int_a^{\xi} f(x) dx \leq J_1$ teńsizligi orınlı. Onda 1-teoremaǵa sáykes J_2 -integralı jıynaqlı degen juwmaq shıǵadı.

Meyli $J_2 = \int_a^b f(x) dx$ menshiksiz integral tarqalıwshı bolsın. Onda $J_1 = \int_a^b g(x) dx$ jıynaqlı bola almaydı. Sebebi, eger J_1 integral jıynaqlı bolǵanda teoremaniń birinshi bólimine sáykes J_2 integral da jıynaqlı bolar edi.

Saldar. Eger $\forall x \in [a, b)$ ushın $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ teńsizlikleri orınlı hám $x \rightarrow b-0$ da $f(x) \square g(x)$ bolsa, onda J_1 hám J_2 menshiksiz integralları yamasa bir waqıtta jıynaqlı, yamasa bir waqıtta tarqalıwshı boladı. Haqıyqatında da berilgen shártlerde $\lim_{\xi \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ boladı. Onda shektiń anıqlamasına sáykes

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon} \in [a, b) : \forall x \in [\delta_{\varepsilon}, b) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlı. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dep tayınlap bul teńsizlikti $\forall x \in [\delta_{1/2}, b)$ ushın

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$$

turinde jazıp alamız. $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $[a, b)$ yarım segmentinde ayırıqsha noqatlarına iye emes. Onda J_1, J_2 integralları jıynaqlı bolıwı ushın $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalarınıń $[c, b) \subset [a, b)$ yarım segmenti boyınsha integrallarınıń jıynaqlı bolıwı zárur hám jeterli boladı. Demek, eger J_1 integral jıynaqlı bolsa, onda salıstırıw belgisinen hám sońǵı teńsizliktiń oń tárepini esapqa alǵan halda J_2 integralı jıynaqlı, al eger J_2 integralı jıynaqlı bolsa sońǵı teńsizliktiń shep tárepini hám salıstırıw belgisinen J_1 integralı da jıynaqlı degen juwmaq shıǵadı.

Eger J_1 integral jıynaqlı bolmasa, onda salıstırıw belgisinen hám sońǵı teńsizliktiń shep tárepini esapqa alǵan halda J_2 integralı tarqalıwshı, al eger J_2 integralı jıynaqlı bolmasa sońǵı teńsizliktiń oń tárepini hám salıstırıw belgisinen J_1 integralı da tarqalıwshı dep juwmaq shıǵaradı.

Dara jaǵdayda $x \rightarrow +\infty$ da $f(x) \sim \frac{A}{x^\alpha}$, $A \neq 0$ bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integralı $\alpha > 1$ mánislerinde jıynaqlı, al $\alpha \leq 1$ mánislerinde tarqalıwshı boladı. Bunda $f(x)$ funkciyası $[a, \xi]$ segmentinde $\forall \xi \geq a$ ushın anıq integral maǵanasında integrallanıwshı.

1-mısal. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{\sqrt[7]{1+x^8}} dx$ integralnı jıynaqlılıqqa tekseriń.

Sheshiliwi: $0 \leq \frac{\sin^4 x}{\sqrt[7]{1+x^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[7]{x^8}}$ teńsizligi $\forall x \geq 1$ mánislerinde orınlı hám $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{8/7}}$ integralnıń jıynaqlı bolıwınan salıstırıw belgisi tiykarında berilgen integral jıynaqlı.

§7. Menshiksiz integrallardıń absolyut hám shártli jıynaqlılıǵı.

1-anıqlama. $J = \int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integralı absolyut jıynaqlı dep ataladı, eger $G = \int_a^b |f(x)|dx$ integralı jıynaqlı bolsa.

Teorema. Hár qanday absolyut jıynaqlı integral jıynaqlı boladı hám

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

teńsizligi orınlı.

Dálilleniwi: G integralı jıynaqlı bolǵanı ushın Koshi belgisine sáykes teńsizligi orınlı boladı. Menshiksiz integraldıń anıqlamasına sáykes $f(x)$ funkciyası shetki noqatları ξ', ξ'' bolǵan kesindide integrallanıwshı, sonıń ushın bul funkciya usı kesindide absolyut integrallanıwshı boladı, yaǵnıy $|f(x)|$ funkciyası da anıq integral maǵanasında integrallanıwshı. Endi anıq integraldı bahalaw qaǵıydasına sáykes

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$$

teńsizligi orınlı bolǵanı ushın $\int_a^\xi f(x)dx$ funkciyası Koshi belgisi shártlerin qanaatlandıratuǵınlıǵın kóremiz. Bul J integralı jıynaqlı bolıwı ushın zárur hám jeterli. Endi anıq integraldı bahalaw qaǵıydasın paydalanıp,

$$\left| \int_a^\xi f(x)dx \right| \leq \int_a^\xi |f(x)|dx$$

teńsizligin jazıw mumkin. Bul teńsizlik $\forall \xi \in [a, b)$ ushın orınlı bolıwı málim. J hám G integralları jıynaqlı ekenligin esapqa alıp keyingi teńsizlikte $\xi \rightarrow b - 0$ shekke ótsek,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

teńsizligine iye bolamız.

2-anıqlama. J integralı jıynaqlı, bıraq G integral tarqalıwshı bolsa, onda J integralı shártli jıynaqlı dep ataladı.

Mısal. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ integralın jıynaqlılıqqa hám absolyut jıynaqlılıqqa tekseriń.

1). Eger $\alpha > 1$ bolsa, onda $\forall x \geq 1$ mánislerinde $0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$

teńsizliginen hám $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ menshiksiz integralınıń jıynaqlı bolıwınan, salıstırıw belgisine sáykes $G = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$ integralınıń jıynaqlı bolıwın kóremiz, yaǵnıy berilgen integral absolyut jıynaqlı.

2). Eger $\alpha \in (0; 1]$ bolsa, onda

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx = \left| u = \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow du = -\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} dx \right| = \frac{\sin x}{x^\alpha} \Big|_1^{+\infty} + \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}} dx,$$

bunda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 0$; $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}} \right| \leq \frac{1}{x^{1+\alpha}}$ $1 + \alpha > 1$ hám $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$ menshiksiz

integralınıń jıynaqlı bolǵanı ushın $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}} dx$ integralınıń absolyut jıynaqlı bolıwınan bul integraldıń ozi de jıynaqlı ekenligin kóremiz.

Endi $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$ integralın tekseremiz. $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \geq 0$

teńsizliginen hám $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ integralınıń tarqalıwshı ekenliginen $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$ integralı

tarqalıwshı boladı. Demek, $\alpha \in (0, 1]$ mánislerinde $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ integral shártli jıynaqlı.

3). Eger $\alpha \leq 0$ bolsa, $\forall \delta > 0$ sanına $n \in N$ sanın sonday tańlaymız, nátiyjede $2n\pi > \delta$ teńsizligi orınlı bolsın. Onda $\xi'_\delta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \xi''_\delta = 2n\pi + \frac{5\pi}{3}$ bolǵanda $\forall x \in [\xi'_\delta, \xi''_\delta]$ ushın $\cos x \geq \frac{1}{2}$ hám $\forall x \geq 1$ mánislerinde $\frac{1}{x^\alpha} \geq 1$ teńsizliklerin esapqa alıp,

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{3}+2n\pi}^{\frac{5\pi}{3}+2n\pi} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}+2n\pi}^{\frac{5\pi}{3}+2n\pi} dx = \frac{2\pi}{3}$$

teńsizliginiń orınlı bolıwın kóremiz.

Bul teńsizliktiń orınlı bolıwı $\int_1^\xi \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ funkciyası ushın menshiksiz integrallardı jıynaqlılıǵına arnalǵan Koshi belgisi orınlı emes ekenligin kórsetedi.

Juwmaq: Berilgen qatar $\alpha > 1$ bolsa jıynaqlı; $\alpha \in (0;1]$ mánislerinde shártli jıynaqlı; $\alpha \leq 0$ mánislerinde tarqalıwshı boladı.

Menshiksiz integrallardı jıynaqlılıqqa izertlewde tómendegi tastıyıqlawdı biliw paydalı boladı.

Teorema. Eger $g(x)$ funkciya $[a;b)$ te absolyut integrallanıwshı bolsa,

onda $J_1 = \int_a^b f(x) dx$ hám $J_2 = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$ menshiksiz integralları yamasa

birge jıynaqlı, yamasa birge tarqalıwshı, yamasa birge shártli jıynaqlı boladı. Yaǵnıy absolyut integrallanıwshı funkciyaǵa integral astında ekinshi bir funkciyanı qosıw yamasa alıw integraldıń jıynaqlılıǵına, absolyut hám shártli jıynaqlılıǵına tásirin tiygizbeydi.

§8. Menshiksiz integrallar jıynaqlılıǵınıń Abel hám Dirixle belgileri

Teorema: (Dirixle belgisi). Meyli $[a; +\infty)$ kesindisinde $f(x)$ úzliksiz, al $g(x)$ úzliksiz differencialanıwshı funkciya bolıp,

1) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ funkciyası $[a; +\infty)$ de shegaralanǵan, yaǵnıy

$\exists M > 0 : \forall x \in [a; +\infty) \rightarrow |F(x)| \leq M$.

2) $g'(x)$ funkciyası $[a; +\infty)$ kesindisinde belgisin saqlaydı, yaǵnıy $\forall x \in [a; +\infty)$ ushın $g'(x) \leq 0$ yamasa $g'(x) \geq 0$ teńsizliklerinen tek birewi orınlı.

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Onda $J = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı boladı.

Dálillew: $\forall \xi' > a$ hám $\xi'' > a$ mánislerin alıp, bóleklep integrallaw formulasınan paydalansaq,

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = g(x) \quad dv = f(x) dx \\ du = g'(x) \quad v = F(x) \end{array} \right| = F(x) g(x) \Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x) g'(x) dx$$

teńligi kelip shıǵadı.

Onda 1) shártti esapqa alǵanda

$$\left| F(x) g(x) \Big|_{\xi'}^{\xi''} \right| \leq M \cdot (|g(\xi')| + |g(\xi'')|), \quad \left| \int_{\xi'}^{\xi''} F(x) g'(x) dx \right| \leq M \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx \right|$$

teńsizlikleri orınlı boladı. Endi 2) shártten, eger $g'(x) \leq 0$ bolsa,

$$\int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx = - \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) dx = g(\xi') - g(\xi''),$$

eger $g'(x) \geq 0$ bolsa,

$$\int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx = \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x) dx = g(\xi'') - g(\xi').$$

Demek, bul eki jaǵday ushın da

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)| dx \right| = |g(\xi'') - g(\xi')| \leq |g(\xi')| + |g(\xi'')|$$

teńsizligi orınlı. Onda

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx \right| \leq 2M (|g(\xi')| + |g(\xi'')|),$$

3-shárttegi shektiń anıqlamasınan $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > a : \forall x \in [\delta_\varepsilon; +\infty) \rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Demek, $\xi', \xi'' \in [\delta_\varepsilon; +\infty)$ mánisleri ushın

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) g(x) dx \right| < 2M \left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} \right) = \varepsilon,$$

yaǵnıy $\int_a^\xi f(x) g(x) dx$ funkciya ushın Koshi belgisindegi shártler orınlı. Bul

$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı bolıwı ushın zárúr hám jeterli.

Dálillengen teoremanıń saldarı tómendegi Abel belgisin beredi.

Saldar: Eger $f(x)$ funkciyası $[a, +\infty)$ kesindisinde úzliksiz, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

menshiksiz integral jıynaqlı, al $g(x)$ funkciyası $[a; +\infty)$ kesindisinde shegaralanğan bolıp, $g'(x)$ tuwındısı $x \rightarrow +\infty$ monoton funkciya bolsa, onda

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı boladı.

Haqıyqatında da monoton funkciyalardıń shegi haqqındaǵı teoremaǵa sáykes $g(x)$ qa qoyılğan shártler orınlı bolǵanda $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g(+\infty)$ shekli shegi bar boladı. Onda $g_1(x) = g(x) - g(+\infty)$ belgilewin kiritsek, $g_1(x)$ funkciyası $[a; +\infty)$ kesindisinde monoton nolge umtıladı. Onda Dirixle belgisine sáykes

$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$ menshiksiz integralı jıynaqlı. Bunnan

$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(+\infty) + f(x) \cdot g_1(x)$ teńligi $\forall x \in [a; +\infty)$ orınlı bolǵanı ushın

$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ integralı da jıynaqlı degen juwmaqqa kelemiz.

Shınıǵıwlar

1. Shegaraları sheksiz menshiksiz integrallardı ji'ynaqlılıqqa tekserin

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

16. $\int_0^{+\infty} (x - \sin x)dx$

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x+1}$

17. $\int_1^{+\infty} x^2 e^x dx$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

18. $\int_1^{+\infty} x e^{x^2} dx$

4. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$

19. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

5. $\int_{-\infty}^0 \frac{(x+1)dx}{x^2 + 1}$

20. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

6. $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx$

21. $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$8. \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx$$

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}$$

$$10. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 3}$$

$$12. \int_{-\infty}^0 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. \int_{-\infty}^0 (e^{3x} + 2x) dx$$

$$14. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$15. \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$22. \int_0^{+\infty} x^2 e^{x^2} dx$$

$$23. \int_3^{+\infty} x^3 \sin 3x dx$$

$$24. \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$25. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4}$$

$$26. \int_0^{+\infty} 3xe^{3x} dx$$

$$27. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$28. \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx$$

$$29. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$$

$$30. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x+9}$$

2. Shegaralanbag'an funktsiyalardan ali'ng'an menshiksiz integrallardi' yesaplan'

$$1 \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$$

$$2 \int_1^{10} \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$$

$$3 \int_0^1 \ln x dx$$

$$4 \int_0^e \frac{\ln x dx}{x}$$

$$5 \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$16 \int_0^1 x \ln x dx$$

$$17 \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{x} dx$$

$$18 \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$19 \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$20 \int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$$

$$6 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$$

$$7 \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$$

$$8 \int_2^8 \frac{x^3 dx}{x^2 - 4}$$

$$9 \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$10 \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$11 \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sin(2 - x)}$$

$$12 \int_{-\frac{5}{3}}^0 \frac{x dx}{3x + 5}$$

$$13 \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$14 \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 - 1}$$

$$15 \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2 + x}}$$

$$21 \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$22 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx + ctgx) dx$$

$$23 \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x^2 - 1}$$

$$24 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$25 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x dx}{2x^2 - 4}$$

$$26 \int_{-3}^9 \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

$$27 \int_0^6 \frac{dx}{x^2 + 3x}$$

$$28 \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{x^2 - 5} dx$$

$$29 \int_1^4 \frac{dx \ln^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$30 \int_3^9 \frac{\ln(x - 3) dx}{3x - 9}$$

Paydalanilgan ádebiyatlar dizimi

- 1 Azlarov T.A., Mansurov X.T. Matematik analiz
1,2 qism“O’qituvchi” 1994, 1995
- 2 Xudaybergenov G, Vorisov A, Mansurov X Matematik analiz 1,2 qism Karshi 2004 y.
- 3 İlin V.A., Sadovnichiy V.A., Sendov B.X. Matematicheskiy analiz 1,2 t. M., “Nauka”
1979
- 4 Sa`dullaev A,Xudaybergenov G, Mansurov X.T. Varisov A.K. Matematik analiz kursidan misol va
masalalar tuplami Toshkent “O’qituvchi”
1-2 q. 1993, 1995
- 5 Demidovich B.P Sbornik zadach i uprajnenii po matemat.
Analizu Moskva 1990
- 6 Zorich V.A. Matematicheskiy analiz 1,2 t. M. “Nauka”
1981