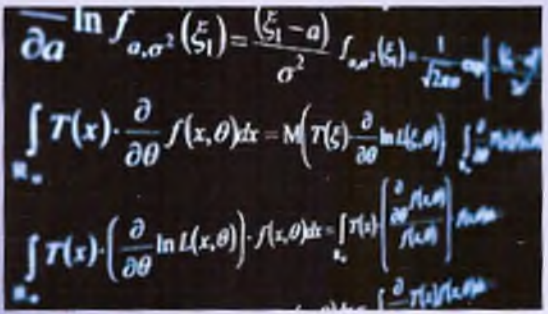
ТАНИРБЕРГЕНОВ М.Б.

ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫНА КИРИСИЎ

ОҚЫЎ – МЕТОДИКАЛЫҚ ҚОЛЛАНБА



НӨКИС – 2016

ӨЗБЕКИСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА
АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

ТАНИРБЕРГЕНОВ М.Б.

ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫНА КИРИСИЎ

ОҚЫЎ - МЕТОДИКАЛЫҚ ҚОЛЛАНБА

НӨКИС - 2016

Танирбергенов М.Б. «Қатарлар теориясына кирисиў» оқыў методикалық қолланба – Нөкис, 2016–ж., 196 б.

Бул оқыў-методикалық қолланбада келтирилген теориялық мағлыўматларды физика–математика ҳәм техника тәлим бағдарларында өтилетуғын «Математикалық анализ» ҳәм «Жоқары математика» қәнигелик пәнлери бойынша лекция, әмелий ҳәм семинар (лаборатория) сабақларын алып барыў мүмкин. Соның менен бирге студентлердиң өз бетинше жумыслары ушын жеке ислеў ушын тапсырмалар ҳәм оларға методикалық көрсетпелер берилген.

Қолланба «физика–математика», «техника» бакалавр тәлим бағдарларының 1–2 курс студентлери ҳәм арнаўлы қәнигеликтеги магистрантлар ушын арналған.

Пикир билдириўшилер:
физика-математика илимлериниң докторы, доцент Кудайбергенов К.
физика-математика илимлериниң кандидаты, доцент Сапаров З.

Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университетиниң оқыў методикалық кеңесинде тастыйықланған, 2015–жыл, 30–июнь №6 санлы баянлама

МАЗМУНЫ

Кирисиў

Жоқары математиканың, соның ишинде математикалық анализдиң тийкарғы ўазыйпасы–студентлерди математикалық түсиниклер дизбеги менен таныстырыўдан ибарат емес, ал оларды логикалық пикирлеўге, ойлаўға үйретиўден ибарат.

Математикалық анализде көпшилик жағдайларда берилген функцияны дифференциаллаў ямаса интеграллаў ушын оны өзгериўшинин пүтин дәрежелери бойынша жайылған қатар көринисинде аңлатып жазыўға туўры келеди. Бундай қатарлар дәрежели, Тейлор, Фурье ҳәм т.б. қатарлары деп аталады.

Математикалық анализ курсының «Функционаллық избе-излик ҳәм қатарлар» бөлими студентлер тәрепинен өзлестириўи ҳәр дайым аңсат болмаған.

XIX әсирде пүткил анализ курсының тийкарлары жетекши математиклер тәрепинен қайта көрилип, қатаң заманагөй талапларға сәйкес мазмунға келтирилди. Усындай қайтадан қарап шығыў урыныўлары қатарлар теориясында шетлеп өтпеди.

Ҳәзирги ўақытта лимит түсинигине тийкарланған қатардың қосындысы, жыйнақлылығы ямаса таралыўшылығы анықламалары Больцано (1817-ж.) ҳәм Коши (1812-ж.) мийнетлери жәрия етилгеннен соң кең жәмийетшилик тәрепинен қолланыла баслаған.

Коши өз изертлеўлеринде ҳақыйқый ҳәм комплекс өзгериўшили дәрежели қатарлардын жыйнақлылық областы, оны жыйнақлылық радиусы арқалы табыў формулаларын келтирип шығарған. Коши дәрежели қатарларды әпиўайы көпағзалылар сыяқлы ислетип, ағзама-ағза дифференциаллаў ҳәм интеграллаў әмеллерин тиккелей қолланған. Бирақ, ол өз мийнетлеринде бундай әмеллердин орынлы екенлигин теориялық жақтан тийкарлап бермеген.

Кейиншелик Коши улыўма көринистеги функционаллық қатарлардын берилген көпликте жыйнақлылық характерин есапқа алмағанлықтан, ол қатар қосындысының үзликсизлигин көрсетиўде, ағзама-ағза дифференциаллаў ҳәм интеграллаўда үлкен теориялық тосыққа дус келеди.

Абел (1826-ж.) өзгериўшинин ҳәр бир тайынланған мәнисинде функционаллық қатардың точкада жыйнақлылығын қатаң дәлиллеп көрсетеди. Абелдиң изертлеўлеринде ҳәзирги ўақытта қатардың «тең өлшеўли жыйнақлылығы» деп аталыўшы қәсийети келтириледи.

Соң жетекши математиклер шекли функционаллық қосындылар ушын орынлы болған көпшилик қәсийетлердиң шексиз қатарлар ушын орынлы бола бермейтуғынын көрсетеди, яғный қатарларда ағзама-ағза лимитке өтиў, ағзама-ағза дифференциаллаў ҳәм интеграллаў әмеллерин қолланыў қатардың жыйнақлылық характерине байланыслы екенлиги анықланды.

Демек, қатарлар теориясында тең өлшеўли жыйнақлылық түсиниги ең тийкарғы қәсийети болып табылады. Соның ушын қатардың берилген көпликте «тең өлшеўли жыйнақлылығы» қәсийетиниң орынланыў белгилерин үйрениў, әмелий қолланып билиў көнликпесин қәлиплестириў ең әҳмийетли ўазыйпа деп билемиз.

Айрым жағдайларда студентлер қатарды тең өлшеўли жыйнақлыққа тексериў барысында Коши, Вейерштрасс, Дирихле ямаса Абел белгилерин дурыс пайдаланбайды, ямаса қәте қолланады. Сонлықтан бул түсиниклерди беккемлеў мақсетинде ҳәр бир параграфта өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар, айрым мысаллар шешип көрсетилген.

Бул оқыў–методикалық қолланбада келтирилген теориялық мағлуматларды физика–математика ҳәм техника тәлим бағдарларында оқытылатуғын «Математикалық анализ» ҳәм «Жоқары математика» пәнлеринен лекция, әмелий, семинар (лаборатория) сабақларын алып барыў мүмкин деп ойлайман.

1–§. Санлы қатар түсиниги. Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери

Мейли

$$\{a_n\}: \quad a_1, a_2,\ a_3,\ ......,\ a_n, ... \tag{1.1}$$

ҳақыйқый санлар избе-излиги берилген болсын.

1–анықлама. Төмендеги аңлатпа

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

санлы қатар (қатар) деп аталады ҳәм ол қысқаша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ символикалық көринисте белгиленеди, яғный:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1.2}$$

$\{a_n\}$ избе-изликтиң $a_1, a_2, ...$ элементлери қатардың ағзалары, ал a_n қатардың улыўма ағзасы (n–ши ағзасы) деп айтылады. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың дәслепки n ағзасының қосындысы оның n–ши дара қосындысы деп айтылады ҳәм ол S_n деп белгиленеди, яғный

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\ .$$

Демек, (1.2) қатар берилген ҳалда ҳәр дайым бул қатардың дара қосындыларынан дүзилген мына

$$\{S_n\}: S_1,\ S_2, ...,\ S_n, ...$$

санлар избе-излигин пайда етиў мүмкин.

2–анықлама. Егер $n \to \infty$ да (1.2) қатардың дара қосындылары $\{S_n\}$ избе-излиги шекли S лимитке ийе болса, яғный

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \tag{1.3}$$

болса, онда бул қатар жыйнақлы деп аталады. Бул лимиттиң мәниси S (1.2) қатардың қосындысы деп айтылады ҳәм төмендегише жазылады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \tag{1.4}$$

3–анықлама. Егер $n \to \infty$ да (1.2) қатардың $\{S_n\}$ дара қосындылар избе-излигиниң лимити анықланбаған, ямаса шексиз болса, онда (1.2) қатар таралыўшы деп аталады.

1–мысал. Геометриялық қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad |q| < 1 \tag{1.5}$$

жыйнақлы екенлигин дәлиллең ҳәм оның қосындысы S табың.

Шешими. Қатардың дара қосындысы ушын геометриялық прогрессияның дәслепки n–ағзасының қосындысын есаплаў формуласы орынлы болады:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Егер $|q| < 1$ болса, онда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

болады. Демек, бул жағдайда геометриялық қатар жыйнақлы ҳәм оның қосындысы $S = \frac{1}{1-q}$ ға тең. Егер $q > 1$ болса, онда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ болып қатар таралыўшы болады. Егер $q = 1$ болса, онда $S_n = n \to \infty$ болып таралыўшы, $q \le -1$ болғанда $\{S_n\}$ избе-излигиниң лимити анықланбаған. Демек, бул жағдайда ҳәм қатар таралыўшы болады.

Нәтийжеде, геометриялық қатар $|q| < 1$ болғанда жыйнақлы, ал $|q| \ge 1$ болғанда таралыўшы болады.

2–мысал. Егер $\forall n \in N$ ушын төмендеги теңлик

$$a_n = b_n - b_{n+1} \tag{1.6}$$

орынлы ҳәм

$$\lim_{n \to \infty} b_n = b \tag{1.7}$$

шекли лимитке ийе болса, онда (1.2) қатары жыйнақлы, ал оның қосындысы $S = b_1 - b$ болады, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b. \tag{1.8}$$

Шешими. (1.6) шәрттен

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Буннан (1.7) лимитке көре (1.2) қатардың жыйнақлы екенлиги ҳәм (1.8) теңлик келип шығады.

3–мысал. Егер $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қосындысын табың.

Шешими.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

екенлигинен $\{a_n\}$ избе-излиги ушын (1.6) ҳәм (1.7) шәртлериниң орынлы екенлиги анық болады, бул жерде $b_n = \dfrac{1}{2n(n+1)}$, $b = 0$. Соның ушын (1.8) формулаға көре

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

4–мысал. Төмендеги қатар

$$1 + 2 + 3 + ... + n + ...$$

таралыўшы, себеби бул қатардың дара қосындысы

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

болып, буннан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

5–мысал. Төмендеги қатар

$$1-1+1-1+.........$$

ҳәм таралыўшы, себеби бул қатардың дара қосындысы

$$S_n = 1-1+......+(-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & n=2k \quad (k\in N), \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$$

болып, буннан $\{S_n\}$ избе-излигиниң лимити анықланбаған.

1.1–теорема (қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти). Егер (1.2) қатар жыйнақлы болса, онда бул қатардың a_n улыўма ағзасы $n\to\infty$ де нолге умтылады, яғный

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.9}$$

Дәлиллениўи. Теорема шәрти бойынша (1.2) қатар жыйнақлы, яғный

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty.$$

Егер $a_n = S_n - S_{n-1}$ екенлигин итибарға алсақ, онда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Теорема дәлилленди.

Демек, (1.9) шәрти қатар жыйнақлығының тек зәрүрли шәртин береди.

1–ескертиў. (1.9) шәрти қатар жыйнақлығының жетерли шәрти бола алмайды, яғный базы бир қатардың улыўма ағзасы $n\to\infty$ да нолге умтылыўынан оның жыйнақлы болыўы ҳәр дайым келип шықпайды.

6–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатардың таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. $\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad k=1,2,....,n$ қатнастың дурыслығынан

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Буннан $S_n \to +\infty, \quad n\to\infty$ екенлигинен берилген қатар таралыўшы болады, яғный $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \not< \infty$.

7–мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$, $\alpha \neq \pi m$ $(m \in Z)$ қатардың таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Қатардың улыўма ағзасы $n \to \infty$ да нолге умтылмайтуғынын көрсетемиз, яғный $\sin n\alpha \not\to 0$, $n \to \infty$.

Оның ушын керисин болжаймыз:

$$\sin n\alpha \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Сонда $\sin (n+1)\alpha \to 0$, $n \to \infty$, яғный

$$\sin (n+1)\alpha = \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Буннан $\sin\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi m$ екенлигинен $\cos n\alpha \to 0$, $n \to \infty$ болады.

Демек, болжаўымызға көре $\sin n\alpha \to 0$, $n \to \infty$ екенлигинен $\cos n\alpha \to 0$, $n \to \infty$ келип шығады. Бирақ, бундай болыўы мүмкин емес, себеби $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$.

Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери

1–қәсийети. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарлары жыйнақлы ҳәм олардың қосындылары сәйкес S, σ болса, онда қәлеген $\lambda, \mu \in R$ санлары ушын

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \tag{1.10}$$

қатары ҳәм жыйнақлы болып, оның қосындысы

$$\tau = \lambda S + \mu\sigma \tag{1.11}$$

тең болады.

Дәлиллениўи. Мейли

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{ҳәм} \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$$

сәйкес $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ қатарлардың n–ши дара қосындылары болсын. Сонда $\tau_n = \lambda S_n + \mu \sigma_n$ болады. Буннан $S_n \to S$ ҳәм $\sigma_n \to \sigma$, $n \to \infty$ екенлигин есапқа алсақ, онда $\tau_n \to \tau = \lambda S + \mu \sigma$, $n \to \infty$, яғный (1.11) орынлы болады.

Енди қатардың қалдығы түсинигин келтиремиз. Егер (1.2) қатардың дәслепки m ағзасын алып тасласақ, онда төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + ... \qquad (1.12)$$

(1.12) қатар (1.2) қатардың (m–ши ағзасынан кейинги) қалдығы деп аталады.

2–қәсийети. Егер (1.2) қатар жыйнақлы болса, онда оның қәлеген $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, $m \in N$ қалдығы ҳәм жыйнақлы болады. Керисинше, егер тайынланған $m \in N$ де (1.12) қалдық қатар жыйнақлы болса, онда (1.2) қатар ҳәм жыйнақлы болады.

Дәлилления̆и. Базы бир натурал m санды тайынлап аламыз. Мейли

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{ҳәм} \quad \sigma_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k}$$

сәйкес тәризде (1.2) қатардың n–ши дара қосындысы ҳәм (1.12) қатардың k–ши дара қосындысы болсын. Сонда

$$\sigma_k^{(m)} = S_{m+k} - S_m,$$

яғный $n = m + k$ ушын

$$S_n = S_m + \sigma_k^{(m)}. \qquad (1.13)$$

Мейли (1.2) қатар жыйнақлы болсын. Сонда анықлама бойынша

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{k \to \infty} S_{m+k} = S < \infty$$

болады. Соң (1.13) теңликте лимитке өтемиз:

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k^{(m)} = S - S_m.$$

Бул нәтийже (1.12) қатардың хәр бир тайынланған $m \in N$ де жыйнақлы екенлигин аңлатады.

Мейли енди (1.12) қатар жыйнақлы болсын. Сонда анықлама бойынша

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_k^{(m)} = S^* < \infty$$

болады. Және (1.13) теңликте $k \to \infty$ де лимитке өтсек, онда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S_m + S^*, \qquad n = m + k$$

келип шығады. Бул (1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың жыйнақлы екенлигин билдиреди.

1–ескертиў. Сондай қылып, қатардың дәслепки шекли сандағы ағзаларын алып таслаў, ямаса қатарға басқа шекли сандағы жаңа ағзаларды қосып қойыў оның жыйнақлығына тәсир етпейди.

1–нәтийже. Егер (1.2) қатар жыйнақлы болса, онда оның қалдығы

$$r_m = \sum_{n = m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots.. + a_{m+k} + \ldots\ldots.$$

$m \to \infty$ да нолге умтылады.

Ҳақыйқатында да, мейли (1.2) қатар жыйнақлы хәм оның қосындысы S болсын. Сонда

$$S = S_m + r_m, \qquad r_m = S - S_m .$$

Буннан $\lim\limits_{m \to \infty} r_m = \lim\limits_{m \to \infty} (S - S_m) = 0$ болады.

3–қәсийети. Егер (1.2) қатар жыйнақлы болса, онда усы қатардың ағзаларының жайласыў тәртиби өзгертилместен группалаў нәтийжесинде келип шығатуғын

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \tag{1.14}$$

қатары хәм жыйнақлы болады. Соның менен бирге (1.2) хәм (1.14) қатарлардың қосындылары бирдей болады.

Дәлилleниўи. Мейли $j \in N$ ушын

$$b_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{k_1},$$

$$b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + ... + a_{k_2},$$

$$.......................................,$$

$$b_j = a_{k_{j-1}+1} + a_{k_{j-1}+2} + ... + a_{k_j},$$

$$..$$

болсын, бул жерде $\{k_j\}$ монотон өсиўши натурал санлар избе-излиги. Егер $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ҳәм $\sigma_m = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ деп белгилеп алсақ, онда $\sigma_m = S_{k_m}$.

Демек, $\{\sigma_m\}$ жыйнақлы $S_1, S_2, ...$ избе-изликтиң үлес избе-излиги екенлигинен $\lim\limits_{m \to \infty} \sigma_m = S < \infty$ болады, бул жерде S саны (1.2) қатардың қосындысы.

1–ескертиў. 3–қәсийеттиң кериси улыўма алғанда орынлы емес, яғный (1.14) қатардың жыйнақлы екенлигинен (1.2) қатардың жыйнақлы болыўы келип шықпайды.

1.1–теорема (Коши критериясы). (1.2) қатардың жыйнақлы болыўы ушын төмендеги Коши шәртиниң орынлы болыўы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N \to \left| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon \qquad (1.15)$$

зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Дәлиллениўи. Егер $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ (1.2) қатардың $n-$ши дара қосындысы екенлигин дыққатқа алсақ, онда

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n \ .$$

(1.15) шәрти санлы $\{S_n\}$ избе-излигиниң фундаменталлың екенлигин аңлатады. Сонда санлы избе-излиroutes ушын орынлы болған Коши критериясы бойынша (1.15) шәрти $\{S_n\}$ избе-излигиниң шекли лимитке ийе болыў шәрти менен тең күшли болады, яғный (1.2) қатардың жыйнақлы болыўы менен эквивалент.

8–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}+....$ қатардың жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Бул қатар ушын (1.15) Коши шәрти орынлы екенлигин көрсетемиз. Бунда

$$\left|\,a_{n+1}+a_{n+2}+.....+a_{n+p}\,\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+....+\frac{1}{(n+p)^2}\le$$

$$\le\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+....+\frac{1}{(n+p-1)\cdot(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+.....+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\le\frac{1}{n}.$$

Бул жерде $\forall p\in N$ екенлигин есапқа алынды. Сонда

$$\left|\,a_{n+1}+a_{n+2}+.....+a_{n+p}\,\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon\quad\to\quad N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Демек, мысалы $\varepsilon=0{,}00001$ деп алсақ, онда $\forall n\ge 100\,001$ номерлери ҳәм $\forall p\in N$ ушын

$$\left|\,a_{n+1}+a_{n+2}+.....+a_{n+p}\,\right|<0{,}00001.$$

1–ескертиў. Егер (1.15) шәрти орынлы болмаса, яғный

$$\exists\,\varepsilon_0>0:\quad\forall k\in N\quad\exists n\ge k,\ \exists p\in N:\left|\,a_{n+1}+a_{n+2}+.....+a_{n+p}\,\right|\ge\varepsilon_0,\qquad(1.16)$$

онда (1.2) қатар таралыўшы болады.

9–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+....$ гармоникалық қатардың таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Егер $0\ne a\in R$ ҳәм $0\ne b\in R$ санлары ушын $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ теңлиги орынлы болса, онда c саны a ҳәм b санларының орта гармоникалық мәниси деп айтылады. Берилген қатардың екинши ағзасынан баслап, ҳәр бир ағзасы өзине қоңсылас болған еки ағзасының орта гармоникалық мәниси болады. Соның ушын бул қатардың гармоникалық деп аталыўы ҳәм соннан келип шыққан.

Бул қатар ушын Коши критериясы шәртлериниң орынлы емес екенлигин көрсетемиз, яғный $\forall k \in N$ ушын $n = k,\quad p = k$ деп уйғарамыз. Сонда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 .$$

Сонлықтан (1.16) шәртке көре $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \not< \infty$ қатар таралыўшы болады.

10–мысал. Төмендеги қатарлардың қосындысын табың. Егер:

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

Шешими. а) Дәслеп бул қатардың қосындысын S деп белгилеп алып, соң оны индекс бойынша түрлендиремиз:

$$S = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} = \begin{pmatrix} n-2=m \\ n=m+2 \end{pmatrix}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m+2)(m+3)(m+4)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)(n+3)(n+4)} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+2)-(n+4)}{(n+2)(n+3)(n+4)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right),$$

$$S_n = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+3)(k+4)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} =$$

$$= -2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) =$$

$$= -2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{n+4} - \frac{1}{n+3} .$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{n+4} - \frac{1}{n+3} \right) = -\frac{1}{6} .$$

Демек, $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{6}$.

б) Берилген қатарды төмендеги көриниске түрлендиремиз. Сонда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+n+3}{n(n+1)(n+3)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(n+1)(n+3)} + \frac{1}{n\,(n+1)} \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)},$$

$$S_n = 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + ...+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right] + \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3},$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Демек, $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} = \frac{8}{3}$.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Төмендеги қатарлардың қосындысын табың.

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$;

1.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$;

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$;

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$;

1.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$;

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$;

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2+3n-2}$;

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-7n-12}$;

1.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n-2}$;

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-14n-48}$;

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{36n^2-24n-5}$;

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-84n-13}$;

1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2+4n-3}$;

1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+35n-6}$;

1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{9n^2+3n-20}$;

1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-42n-40}$;

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{16n^2-8n-15}$;

1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-21n-10}$;

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{25n^2+5n-6}$;

1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{4n^2-9}$;

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2-35n-6}$;

1.22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n-2}$;

1.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{12}{36n^2+12n-35}$;

1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+21n-10}$;

1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2-3n-2}$;

1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{25n^2-5n-6}$;

1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{16n^2+8n-15}$;

1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-56n-33}$;

1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{12}{36n^2-12n-35}$;

1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+7n-12}$;

1.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-70n-24}$.

Төмендеги қатарлардың қосындысын табың.

2.1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$;

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}$;

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$;

2.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$;

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$;

2.6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n^2-1)}$;

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$;

2.8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$;

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$;

2.11. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)\,n\,(n+2)}$;

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)(n+1)n}$;

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.14. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$;

2.15. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}$;

2.16. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2-1)}$;

2.17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$;

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n\,(n+1)(n+3)}$;

2.19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)\,n\,(n+2)}$;

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.22. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{2-n}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{(n-1)\,n\,(n+1)}$;

2.25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)}$;

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$;

2.27. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3n+1}{(n-1)\,n\,(n+1)}$;

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4-n}{n\,(n+1)(n+2)}$;

2.29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{4}{n(n-1)(n-2)}$;

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$;

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+8}{n\,(n+1)(n+2)}$.

2–§. Оң ағзалы қатарлар ҳәм олардың жыйнақлылығы

Қатарлар теориясының тийкарғы мәселелеринен бири қатардың жыйнақлы ямаса таралыўшы екенлигин анықлаўдан ибарат. Берилген қатардың жыйнақлы ямаса таралыўшы екенлигин анықлама бойынша тексерип көриў мүмкин. Бирақ көпшилик жағдайларда қатардың дара қосындысы S_n ниң аңлатпасы қурамалы көриниске ийе болып $n \to \infty$ да оның лимитке ийе болыўын (ямаса болмаўын) көрсетип бериў қыйын болады. Соны ҳәм атап өтиў керек, қатардың жыйнақлы ямаса таралыўшы екенин анықлаўда қатардың дара қосындысың мәнисин, ҳәтте қатардың қосындысын табыў зәрүрлиги болмайды. Нәтийжеде сондай усылларды (белгилерди) табыў мәселеси келип шығады, бул усыллар жәрдеминде, қатардың қосындысын есапламай турып, оның жыйнақлы ямаса таралыўшы екенлигин анықлаў мүмкин болады.

Дәслеп ағзаларының белгилери оң болған қатарларды қараймыз.

1–анықлама. Егер төмендеги қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2.1)$$

барлық ағзалары оң болса, яғный

$$a_n > 0, \quad n = 1,2,....... \qquad (2.2)$$

онда (2.1) қатар оң ағзалы қатар ямаса қысқаша оң қатар деп аталады.

2.1–теорема (жыйнақлылық критериясы). Оң ағзалы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың жыйнақлы болыўы ушын оның дара қосындылар избе-излигиниң жоқарыдан шегараланған болыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли болады, яғный

$$\exists M > 0: \ \forall n \in N \ \to \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le M \ . \qquad (2.3)$$

Дәлиллениўи. Зәрүрлиги. (2.1) қатардың $\{S_n\}$ дара қосындылары избе-излиги монотон өсиўши болады, себеби (2.2) шәртке көре

$$S_n - S_{n-1} = a_n > 0, \quad n \in N.$$

Мейли (2.1) қатар жыйнақлы болсын. Сонда анықлама бойынша қатардың дара қосындылары $\{S_n\}$ избе-излиги $n \to \infty$ да S ке умтылады, яғный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S < \infty$. Буннан монотон өсиўши жыйнақлы избе-изликтиң қәсийети бойынша $\{S_n\}$ жоқарыдан шегараланған болады.

Жетерлиги. Керисинше, мейли (2.1) қатардың дара қосындылар избе-излиги $\{S_n\}$ жоқарыдан шегараланған, яғный (2.3) шәрти орынлы болсын. Сонда монотон өсиўши ҳәм жоқарыдан шегараланған избе-излик шекли лимитке ийе болады, яғный (2.1) жыйнақлы болады.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатардың таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Биз бул қатардың қәлеген n – ши дара қосындысының $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ жоқарыдан шегараланбаған екенлигин келтирип шығарамыз. Оның ушын белгили лимиттиң нәтийжесинен пайдаланамыз, яғный

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad e \approx 2{,}718281828459045.$$

Бунда $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ избе-излиги монотон өсип e санына умтылатуғын еди. Сонлықтан

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e, \qquad \forall k \in N.$$

Бул теңсизликтиң еки тәрепин логарифмлеймиз. Сонда

$$ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \qquad \forall k \in N.$$

Енди $k = 1, 2, ..., n$ сан мәнислерин берип барлық теңсизликлерди бир-бирине қосамыз. Нәтийжеде төмендеги теңсизликке ийе боламыз:

$$ln\,2 + ln\frac{3}{2} + ln\frac{4}{3} + ...+ ln\frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...+ \frac{1}{n}\,, \qquad \forall n \in N,$$

яғный $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > ln\,(n+1)$. Буннан S_n – ниң қәлеген $M > 0$ саннан үлкен екенлиги келип шығады, себеби $ln\,(n+1) \to +\infty, \quad n \to \infty$.

2–мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарының жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Биз бул қатардың қәлеген n – ши дара қосындысының $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ жоқарыдан шегараланған екенлигин көрсетемиз. Оның ушын төмендеги баҳалаўды қолланамыз, яғный

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)\,k}\,, \qquad k \geq 2.$$

Сонда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ...$$

$$.......+ \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ...+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Нәтийжеде, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2, \quad \forall n \in N$. Буннан бул қатардың қосындысы $1 < S < 2$ аралықта болатуғынлығы келип шығады. Кейинги параграфларда Фурье қатары жәрдеминде биз

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

екенлигин көрсетемиз.

2.2–теорема (қатар жыйнақлығының интеграллық белгиси).

Егер $f(x)$ функциясы $[1, +\infty)$ аралықта оң ҳәм монотон кемиўши болса, онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \qquad (2.4)$$

қатары ҳәм

$$J = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2.5)$$

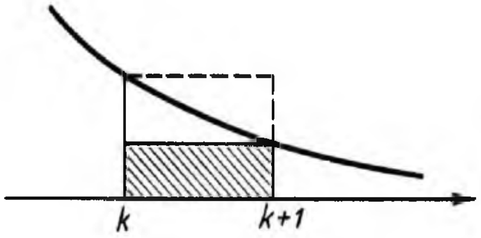
меншиксиз интегралы екеўи де бир ўақытта жыйнақлы, ямаса таралыўшы болады.

Дәлилλениўи. Мейли $\forall k \in N$ ушын $\Delta_k = [k,\ k+1]$ ҳәм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ болсын. Сонда теорема шәрти бойынша $f(x)$ функциясы $x \geq 1$ ушын монотон кемиўши екенлигинен, ол ҳәр бир $\Delta_k = [k,\ k+1]$ кесиндиде интегралланыўшы болады. Соның менен бирге $\forall x \in \Delta_k$ ушын

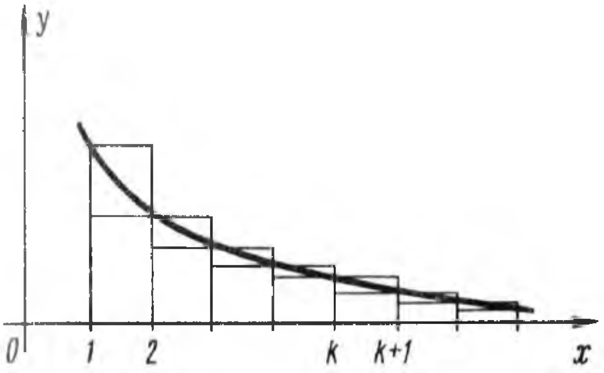
$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

шәрти орынлы болады. Буннан интегралдың әпиўайы қәсийети бойынша

$$f(k+1) \ \leq \ \int_{k}^{k+1} f(x)dx \ \leq \ f(k). \qquad (2.6)$$



1-сызылма



2-сызылма

Солай етип, дәслеп (2.6) де $k = 1,2,...,n$ деп алып, соң усы мәнислерге сәйкес болған барлық теңсизликлерди өз-ара қосып шықсақ, онда

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

ямаса

$$S_{n+1} - f(1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n . \qquad (2.7)$$

а) Мейли (2.5) меншиксиз интегралы жыйнақлы болсын, яғный

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} f(x)dx = J < \infty .$$

Шәрт бойынша $f(x)$ функциясы оң болғанлықтан, онда оң функцияның жыйнақлы меншиксиз интегралының қәсийети бойынша $\forall \xi \in [1, +\infty)$ ушын ол жоқарыдан шегараланған болады, яғный

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \le J .$$

Соның ушын

$$\forall n \in N \to \int_1^{n+1} f(x)dx \le J . \qquad (2.8)$$

Буннан (2.7) ҳәм (2.8) теңсизликлерден

$$\forall n \in N \to S_{n+1} \le f(1) + J$$

ийе боламыз, яғный (2.4) оң қатардың дара қосындылар избе-излигиниң жоқарыдан шегараланғанлығы келип шығады. Бул 2.1–теорема бойынша (2.4) қатардың жыйнақлы екенлигин аңлатады.

б) Керисинше, мейли оң ағзалы (2.4) қатары жыйнақлы, ал оның қосындысы S болсын. Сонда

$$\forall n \in N \to S_n \le S . \qquad (2.9)$$

Буннан (2.7) ҳәм (2.9) теңсизликлерден

$$\forall n \in N \to \int_1^{n+1} f(x)dx \le S \qquad (2.10)$$

ийе боламыз. Енди $\forall \xi \in [1, +\infty)$ ушын $n+1 \ge \xi$ шәрти орынлы болатуғындай етип сондай $n \in N$ санын таңлаймыз. Сонда (2.10) теңсизликтен ҳәм $f(x) \ge 0, \ \forall x \ge 1$ екенлигинен

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S .$$

Және оң функцияның меншиксиз интегралының жыйнақлылығы ҳаққындағы теорема бойынша (2.5) меншиксиз интегралы жыйнақлы болады.

Мейли енди (2.5) меншиксиз интегралы таралыўшы болсын. Сонда (2.4) қатар ҳәм таралыўшы болады, себеби кери жағдайда, жоқарыда дәлиллеп көрсеткенимиздей (2.4) қатардың жыйнақлы болыўынан (2.5) меншиксиз интегралы ҳәм жыйнақлы болады. Бул бизиң болжаўымызға туўры келмейди. Сонын менен бирге (2.4) қатардын таралыўшы екенлигинен (2.5) меншиксиз интегралдың ҳәм таралыўшы болатуғынлығы келип шығады.

3–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатардың $\alpha > 1$ лерде жыйнақлы, ал $\alpha \le 1$ лерде таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Мейли параметрдиң мәниси $\alpha > 0$ болсын. Сонда $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ функциясы $\forall x \in [1, +\infty)$ аралықта оң ҳәм монотон кемиўши, ал $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ меншиксиз интегралы $\alpha > 1$ де жыйнақлы, ал $\alpha \le 1$ де таралыўшы болады.

Ҳақыйқатында да, мейли $\alpha \ne 1$ болсын. Сонда

$$\int_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{x=1}^{x=\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} .$$

Егер $\alpha > 1$ болса, онда шекли лимит $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \int\limits_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}$ бар болады, яғный меншиксиз интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$ жыйнақлы. Егер $\alpha < 1$ болса, онда $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \int\limits_1^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty$ болады, яғный $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \nless \infty$ таралыўшы.

Параметрдиң $\alpha = 1$ мәнисинде ҳәм $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \int\limits_1^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\xi \to +\infty} \ln \xi = +\infty$ болады.

Сонлықтан 2.2–теорема бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатар ҳәм $\alpha > 1$ де жыйнақлы, ал $\alpha \le 1$ де таралыўшы болады. Егер $\alpha \le 0$ болса, онда қатардың улыўма ағзасы ушын $\frac{1}{n^{\alpha}} \not\to 0$, $n \to \infty$ орынлы болғанлықтан қатар таралыўшы болады.

4–мысал. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ қатардың $\alpha > 1$, $\forall \beta \in R$ ҳәм $\alpha = 1$, $\beta > 1$ мәнислеринде жыйнақлы, ал α ҳәм β параметрлериниң қалған барлық мәнислеринде таралыўшы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Бул қатардың жыйнақлығы, ямаса таралыўшылығы төмендеги меншиксиз интегралдың жыйнақлылығы, ямаса таралыўшылығы менен бирдей болады:

$$J = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}\,.$$

Бунда үш жағдайды көрип шығамыз: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ ҳәм $\alpha < 1$.

а) Биринши жағдай: $\alpha > 1$.

Егер $\alpha > 1$ болса, онда $\alpha = 1 + 2\delta$, $\delta > 0$ деп алыўымыз мүмкин. Бул жағдайда интеграл белгиси астындағы $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$, $x \ge 2$ функцияны төмендеги көринисте аңлатып жазып шығамыз:

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}}\, g(x), \qquad g(x) = \frac{1}{x^{\delta} \ln^{\beta} x}, \qquad x \ge 2\,.$$

Параметрдиң $\alpha > 0$ ҳәм β қәлеген болған мәнислеринде

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\delta} \ln^{\beta} x = +\infty$$

болады. Буннан сондай x_0, $x_0 > 2$ точкасы табылып $x \geq x_0$ шәрти менен анықланған x тың барлық мәнислеринде $0 < g(x) < 1$ теңсизлиги дурыс болады. Соның ушын $f(x)$ функциясы ушын $x \geq x_0$ ларда

$$0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta}}$$

баҳалаўы дурыс болады. Бунда меншиксиз интегралдың жыйнақлы $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}} < \infty$, $x_0 > 2$, $\delta > 0$ екенлигинен салыстырыў белгиси бойынша

параметрдиң $\alpha > 1$, $\forall \beta \in R$ мәнислеринде $J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \, ln^{\beta} x} < \infty$ меншиксиз интегралының ҳәм жыйнақлы болатуғынлығы келип шығады. Жуўмағында 2.2–теорема бойынша $\alpha > 1$, $\forall \beta \in R$ мәнислеринде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \, ln^{\beta} n}$ қатар ҳәм жыйнақлы болады.

б) Екинши жағдай: $\alpha = 1$.

Бул жағдайда, $J = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \, ln^{\beta} x} = \int\limits_{ln\,2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}$. Сонлықтан 1–мысалға көре

$\alpha = 1$ ҳәм $\beta > 1$ болғанда $J = \int\limits_{ln\,2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}} < \infty$ жыйнақлы, ал $\alpha = 1$ ҳәм $\beta \leq 1$

болғанда $J = \int\limits_{ln\,2}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta}} \not< \infty$ таралыўшы болады. Демек, 2.2–теорема бойынша

$\alpha = 1$ ҳәм $\beta > 1$ мәнислеринде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \, ln^{\beta} n}$ қатар ҳәм жыйнақлы болады.

в) Үшинши жағдай: $\alpha < 1$.

Егер $\alpha < 1$ болса, онда $\alpha = 1 - 2\delta$, $\delta > 0$ деп алыўымыз мүмкин. Бул жағдайда интеграл белгиси астындағы $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \, ln^{\beta} x}$, $x \geq 2$ функцияны төмендеги көринисте түрлендирип жазамыз:

$$f(x)=\frac{1}{x^{1-\delta}}\,g(x),\qquad g(x)=\frac{x^{\delta}}{ln^{\beta}x},\qquad x\geq 2\,.$$

$\delta>0$ ушын $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\delta}}{ln^{\beta}x}=+\infty$ болады. Буннан $x\geq x_0>2$ шәрти менен анықланған x тың барлық мәнислеринде $g(x)>1$ теңсизлиги дурыс болады. Соның ушын $f(x)$ функциясы ушын $x\geq x_0>2$ ларда

$$f(x)>\frac{1}{x^{1-\delta}},\qquad \delta>0$$

баҳалаўы дурыс болады. Бунда меншиксиз интегралдың таралыўшы $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{1-\delta}}\not<\infty,\quad x_0>2,\ \delta>0$ екенлигинен салыстырыў белгиси бойынша параметрдиң $\alpha<1$ мәнислеринде $J=\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}\,ln^{\beta}x}\not<\infty$ меншиксиз интегралы ҳәм таралыўшы болады. Сонда 2.2–теорема бойынша $\alpha<1$ мәнислеринде $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}\,ln^{\beta}n}$ қатар ҳәм таралыўшы болады.

Нәтийжеде, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}\,ln^{\beta}n}$ қатары $\alpha>1,\ \forall\beta\in R$ ҳәм $\alpha=1,\ \beta>1$ мәнислеринде жыйнақлы, ал $\alpha<1$ ҳәм $\beta>0$ мәнислеринде таралыўшы болады.

Салыстырыў белгилери

Оң қатардың жыйнақлылығын ямаса таралыўшылығын билген ҳалда, ағзалары бул қатар ағзалары менен белгили бир қатнаста болған екинши оң қатардың жыйнақлылығын ямаса таралыўшылығын анықлаў мүмкин. Олар төмендеги теоремалар арқалы бериледи.

2.3–теорема (қатар жыйнақлығының салыстырыў белгиси).

Мейли $\forall n\in N$ лер ушын

$$0<a_n\leq b_n \tag{2.11}$$

теңсизлиги орынлы болсын. Сонда:

а) Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар жыйнақлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болады;

б) Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар таралыўшы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар ҳәм таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. Теорема шәрти бойынша $0 < a_n \le b_n$, $\forall n \in N$ теңсизлиги орынлы екенлигинен берилген қатардың үлес қосындылары

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \qquad \sigma_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

ушын мына

$$S_n \le \sigma_n, \quad \forall n \in N \tag{2.12}$$

теңсизлиги ҳәм орынлы болады.

а) Мейли дәслеп $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ қатар жыйнақлы болсын. Сонда 2.1–теоремаға көре $\{\sigma_n\}$ избе-излиги жоқарыдан шегараланған болады, яғный сондай

$$\exists M > 0: \quad \forall n \in N \;\to\; \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \le M. \tag{2.13}$$

Буннан (2.12) теңсизликке көре $\forall n \in N \;\to\; S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le M$.

Демек, $\{S_n\}$ избе-излиги ҳәм жоқарыдан шегараланған. Жәнe сол 2.1–теоремаға көре $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ қатардың жыйнақлы болыўы келип шығады.

б) Енди қатар таралыўшы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \not< \infty$ болсын. Сонда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \not< \infty$ қатары ҳәм таралыўшы болыўы тийис, себеби кери жағдайда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатардың жыйнақлы болыўынан жоқарыдағы а) тастыйықлаўға көре $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болған болар еди. Бирақ бул бизиң болжаўымызға туўры келмейди. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

5–мысал. Егер $a_n = \dfrac{(3+2(-1)^n)(1+sin^3 n)}{n\sqrt{n}}$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Биз төмендеги баҳалаўлардан пайдаланамыз, яғный:

$$1 \le 3+2(-1)^n \le 5, \qquad 1 \le 1+sin^3 n \le 2, \quad \forall n \in N.$$

Сонда $0 \le a_n \le \dfrac{10}{n^{3/2}}$, $\forall n \in N$ болады. Соның ушын $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}} < \infty$ жыйнақлы екенлигинен $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм 2.3–теоремаға көре жыйнақлы болады.

1–нәтийже. Егер $\exists n_0 \in N$, $\forall n \ge n_0$ лер ушын $a_n > 0$, $b_n > 0$ ҳәм $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, яғный $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ (өз-ара эквивалент) болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ҳәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарларының екеўи де жыйнақлы, ямаса екеўи де таралыўшы болады.

6–мысал. Егер:

а) $a_n = \left(e^{arcsin\frac{1}{n}} - 1\right)^{\alpha}$; б) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{2n+1}{2n-1}} - \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$

болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. а) Биз асимптотикалық көринистеги қалдық ағзалы Тейлор қатарынан пайдаланамыз, яғный:

$$arcsin\, t = t + o(t^2), \qquad e^t - 1 = t + o(t),$$

$$e^{arcsin\, t} - 1 = t + o(t), \quad t \to 0.$$

Сонда $a_n \sim \dfrac{1}{n^{\alpha}}, \quad n \to \infty$ болады. Соның ушын берилген қатар $\alpha > 1$ жыйнақлы, ал $\alpha \le 1$ да таралыўшы болады.

б) Бул жерде ҳәм элементар функцияның Пеано көринисиндеги қалдық ағзалы Тейлор қатарынан (асимптотикалық формуладан) пайдаланамыз, яғный:

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t), \qquad t \to 0.$$

Сонда

$$\sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n-1}} = \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{1/3} = 1 + \frac{2}{3(2n-1)} + o(1/n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3n} + o(1/n), \qquad n \to \infty,$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n+1}\right) + o(1/n) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + o(1/n), \qquad n \to \infty.$$

Буннан $a_n \sim \dfrac{4}{3n}, \quad n \to \infty$ болады. Соның ушын берилген қатар таралыўшы болады.

2–нәтийже. Мейли $\exists\, m \in N, \quad \forall k \ge m$ лер ушын

$$a_k > 0, \qquad b_k > 0 \qquad \text{ҳәм} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k} \tag{2.14}$$

шәртлери орынлы болсын. Егер:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар жыйнақлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болады;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар таралыўшы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар ҳәм таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп (2.14) те избе-из $k = m,\ m+1,\ .....,\ n-1$ деп алып, соң бул теңсизликлерди өз-ара көбейтип шығамыз. Сонда:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\cdot.....\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_{m+1}}{b_m}\cdot\frac{b_{m+2}}{b_{m+1}}\cdot.....\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}},$$

ямаса $\frac{a_n}{a_m} \le \frac{b_n}{b_m}$ ийе боламыз. Буннан $\forall n \ge m+1$ ушын

$$a_n \le A\,b_n, \qquad A = \frac{a_m}{b_m} > 0.$$

Нәтийжеде 2.3–теорема шәртлеринен бул тастыйықлаўдың дәлиллениўи келип шығады.

7–мысал. Төмендеги қатарды салыстырыў белгиси бойынша

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arccos\,\frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ln\,n}{\sqrt{n^5+n}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. а) Кери тригонометриялық функция ушын төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$arccos\ x \le \frac{\pi}{2} \quad \to \quad \left| arccos\,\frac{(-1)^n n}{n+1} \right| \le \frac{\pi}{2}.$$

Соның менен бирге $n^2 + 2 > n^2 \ \to\ \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in N$

екенлигинен

$$\frac{\left| arccos\,\frac{(-1)^n n}{n+1} \right|}{n^2+2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2+2}$$

болады. Буннан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ қатарының жыйнақлы екенлигинен салыстырыў белгиси бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$ қатары абсолют жыйнақлы болады.

б) Логарифмлик функция ушын төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$\frac{ln\, n}{n} \le 1, \quad \forall n \in N.$$

Сонын ушын

$$\frac{ln\, n}{\sqrt{n^5+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^5+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3+\frac{1}{n}}} \le \frac{1}{n^{3/2}}, \qquad \forall n \in N.$$

Буннан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ қатарының жыйнақлы екенлигинен салыстырыў белгиси бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{\sqrt{n^5+n}}$ қатары ҳәм жыйнақлы болады.

8–мысал. Төмендеги қатарды салыстырыў белгиси бойынша

а) $\sum_{n=1}^{\infty} ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsin \frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. а) Дәслеп логарифмлик функцияны төмендеги көриниске түрлендиремиз:

$$ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2} = ln\left(1+\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)\right) = ln\left(1-\frac{n+1}{n^2+n+2}\right).$$

Соң $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+2}$ қатарды таралыўшы $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \not< \infty$ гармоникалық қатар менен салыстырамыз, яғный

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{n^2+n+2}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+n+2}=1.$$

Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+2}\not<\infty$ қатары таралыўшы болады. Енди берилген

$$\sum_{n=1}^{\infty} ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}=\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1-\frac{n+1}{n^2+n+2}\right)$$

қатарды таралыўшы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n=\frac{n+1}{n^2+n+2}$ қатар менен салыстырамыз.

Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1-\dfrac{n+1}{n^2+n+2}\right)}{\dfrac{n+1}{n^2+n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{n+1}{n^2+n+2}}{\dfrac{n+1}{n^2+n+2}}=-1.$$

Берилген қатар салыстырыў белгиси бойынша таралыўшы болады.

б) Кери тригонометриялық функция ушын төмендеги асимптотика орынлы болады:

$$arcsin\ x\approx x,\qquad x\to 0.$$

Сонын ушын

$$arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}\approx\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Енди берилген қатарды жыйнақлы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ Дирихле қатары менен салыстырамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{arcsin\dfrac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}}{\dfrac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}}{\dfrac{1}{n^4}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{\left(n^2+3\right)^{5/2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+3}\right)^{5/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-5/2} = 1.$$

Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin \frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}$ қатары жыйнақлы болады.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Берилген қатарларды салыстырыў белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, sin\, \frac{2+(-1)^n}{n^3}$;

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$;

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{\sqrt[3]{n^7}}$;

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-ln\, n}$;

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3+2}$;

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2+cos\, n\pi)}{2n^2-1}$;

3.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{arcsin\, \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$;

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n^2+1}$;

3.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$;

3.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{arccos\, \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$;

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\, cos^2 n}{n^3+5}$;

3.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n\, ln\, n}{n^2-3}$;

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+sin\,(n\pi/2))}$;

3.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\, sin\, \frac{2+(-1)^n}{6}\pi$;

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^3+n+1}$;

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+sin\,\dfrac{\pi n}{2}}{n^2}$;

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos^2\,\dfrac{\pi n}{3}}{3^n+2}$;

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(2+cos\,\dfrac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$;

3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+sin\,\dfrac{n\pi}{4}}{n^2}\,ctg\,\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin^2 2^n}{n^2}$;

3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ln\,n}{\sqrt{n^5+n}}$;

3.23. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 ln\,n+\sqrt[3]{ln^2 n}}$;

3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\dfrac{3}{\pi}\,arctg\,\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$;

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin\,\dfrac{\pi}{2n+1}}{n\left(3+sin\,\dfrac{n\pi}{4}\right)}$;

3.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2cos\,\dfrac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$;

3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$;

3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg\,[2+(-1)^n]}{ln\,(1+n)}$;

3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg\,(-1)^n}{\sqrt{n\,(2+n^2)}}$;

3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arcsin\,\dfrac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$;

3.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 sin^2 n}$.

Берилген қатарларды салыстырыў белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{5^{n-1}+n-1}$;

4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\,tg\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln\,\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$;

4.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,sin\,\dfrac{1}{n}$;

4.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \, arctg \, \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;

4.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5 + ln^4 n}$;

4.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5 + sin\, 2^n}$;

4.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + cos n}{3^n + sin\, n}$;

4.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - cos^2 6n}$;

4.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \, sin \, \frac{1}{\sqrt{n}}$;

4.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \, arctg \, \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$;

4.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - ln\, n}$;

4.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \, sin \, \frac{1}{n-1}$;

4.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} + 2} \, arctg \, \frac{n+3}{n^2+5}$;

4.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (e^{1/\sqrt{n}} - 1)$;

4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln \, \frac{n^2+1}{n^2+n+2}$;

4.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \, arctg \frac{1}{n^3}$;

4.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln \, \frac{n^3}{n^3+1}$;

4.19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^3 tg^5 \frac{\pi}{n}$;

4.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n} - 1)(n\sqrt[4]{n^3} - 1)}$;

4.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - cos \, \frac{\pi}{n}\right)$;

4.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin \, \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$;

4.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (e^{\sqrt{n}/(n^3-1)} - 1)$;

4.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin \, \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

4.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \, sin \, \frac{2\pi}{2n+1}$;

4.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n + n}$;

4.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(e^{1/n} - 1)^2$;

4.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \, sin \, \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$;

4.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg \, \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$;

4.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin \, \frac{n}{n^2 \cdot \sqrt[3]{n} + 5}$;

4.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arcsin \, \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$.

2.4–теорема (Даламбер белгиси). Мейли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad \forall n \in N$ қатар берилген болсын. Сонда:

а) егер $\exists q, \quad 0 < q < 1, \quad \exists\, m \in N, \quad \forall n \geq m$ лер ушын

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \tag{2.15}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы болады;

б) егер $\exists\, m \in N, \quad \forall n \geq m$ лер ушын

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \tag{2.16}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. (2.15) шәрттен $\forall n \geq m$ лер ушын

$$a_{m+1} \leq q a_m, \qquad a_{m+2} \leq q a_{m+1} \leq q^2 a_m$$

теңсизлиги дурыс ҳәм сонлықтан $\forall\, p \in N$ ушын

$$a_{m+p} \leq q^p a_m \tag{2.17}$$

орынлы болады. Буннан $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_m q^p, \quad 0 < q < 1$ қатары шексиз кемиўши геометриялық прогрессиянын қосындысы сыпатында жыйнақлы екенлигинен 2.3–теоремаға көре

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{m+p} \tag{2.18}$$

қатары ҳәм жыйнақлы болады. Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың m – ши қалдығы $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{m+p} < \infty$ жыйнақлы болыўынан қатардың өзи ҳәм жыйнақлы болады.

б) (2.16) шәрттен $\forall n \geq m$ лер ушын

$$a_{m+1} \geq a_m, \qquad a_{m+2} \geq a_{m+1} \geq a_m, \quad a_{m+3} \geq a_m, \ldots\ldots\ldots.$$

теңсизликлери дурыс ҳәм сонлықтан $\forall p \in N$ ушын

$$a_{m+p} \geq a_m > 0 \tag{2.19}$$

орынлы болады. Буннан (2.19) шәртке көре қатардың улыўма ағзасы, яғный $n-$ағзасы оң турақлы шама менен төменнен шегараланғанлықтан ол нолге умтылмайды, бул жерде қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти орынланбайды ($a_n \not\to 0, \quad n \to \infty$). Сонлықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың $m-$ши қалдығы $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{m+p} \not< \infty$ таралыўшы болыўынан қатардың өзи ҳәм таралыўшы болады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

Нәтийже (лимит көринисиндеги Даламбер белгиси). Мейли

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \tag{2.20}$$

лимити бар болсын. Сонда $\lambda < 1$ де $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы, ал $\lambda > 1$ де қатар таралыўшы болады.

7–мысал. Егер:

а) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}, \quad a > 0;$ б) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды Даламбер белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}, \quad a > 0$ қатар Даламбер белгиси бойынша жыйнақлы болады, себеби бул жағдайда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{ҳәм} \quad \lambda = 0 \quad \text{болады;}$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ қатар Даламбер белгиси бойынша жыйнақлы болады, себеби бул жағдайда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty \quad \text{ҳәм} \quad \lambda = \frac{1}{e} < 1$$

болады.

2.5–теорема (Коши белгиси). Мейли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad \forall n \in N$ қатар берилген болсын. Сонда:

а) егер $\exists q, \quad 0 < q < 1, \quad \exists\, m \in N, \quad \forall n \geq m$ лер ушын

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \tag{2.21}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы болады;

б) егер $\exists\, m \in N, \quad \forall n \geq m$ лер ушын

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \tag{2.22}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар таралыўшы болады.

Дәлилleниўи. а) (2.21) шәрттен $\forall n \geq m$ лер ушын

$$a_n \leq q^n, \quad 0 < q < 1$$

теңсизлиги орынлы болады. Буннан $\sum\limits_{n=m}^{\infty} q^p, \quad 0 < q < 1$ қатары шексиз кемиўши геометриялық прогрессияның қосындысы сыпатында жыйнақлы екенлигинен 2.3–теоремаға көре $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ қатары ҳәм жыйнақлы болады. Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың қалдығы $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n < \infty$ жыйнақлы болыўынан қатардың өзи ҳәм жыйнақлы болады.

б) (2.22) шәрттен $\forall n \geq m$ лер ушын $a_n \geq 1$ шәрти дурыс ҳәм сонлықтан $n-$ағзасы нолге умтылмайды, яғный $a_n \not\to 0, \quad n \to \infty$. Сонлықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың қалдығы $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n \not< \infty$ таралыўшы болыўынан қатардың өзи ҳәм таралыўшы болады.

Нәтийже (лимит көринисиндеги Коши белгиси). Мейли

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \tag{2.23}$$

лимити бар болсын. Сонда $\lambda < 1$ де $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы, ал $\lambda > 1$ де қатар таралыўшы болады.

1–ескертиў. Егер (2.20), ямаса (2.23) шәртлер $\lambda = 1$ де орынлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы да, таралыўшы да болыўы мүмкин, яғный $\lambda = 1$ де Даламбер ҳәм Коши белгилери қатардың жыйнақлы, ямаса таралыўшы екенлигин анықлап бере алмайды.

8–мысал. Егер $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды Коши белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Берилген қатар Коши белгиси бойынша жыйнақлы болады, себеби бул жағдайда

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty \quad \text{ҳәм} \quad \lambda = \frac{1}{e} < 1$$

болады.

2.6–теорема. Мейли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$ лимити бар болсын, бул жерде $b_n > 0, \quad \forall n \in N$. Егер:

а) $0 \leq k < +\infty$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар жыйнақлы болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болады;

б) $0 < k \leq +\infty$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар таралыўшы болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар ҳәм таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. а) Мейли $0 < k < +\infty$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар жыйнақлы болсын. Сонда лимит анықламасы бойынша:

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists n_0 \in N, \quad \forall n \geq n_0 \ \rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - k \right| < \varepsilon,$$

$$(k - \varepsilon)\, b_n < a_n < (k + \varepsilon)\, b_n \tag{2.24}$$

теңсизлиги орынлы болады. Шәртке көре $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар жыйнақлы. Соның ушын $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)\, b_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болады. Сонда (2.24) теңсизликтен ҳәм 2.3–теоремадан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың жыйнақлы болыўы келип шығады.

б) Мейли $0 < k < \infty$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар таралыўшы болсын. Сонда $\sum_{n=1}^{\infty} (k - \varepsilon)\, b_n$ қатар ҳәм таралыўшы болады. Сонда (2.24) теңсизликтен ҳәм 2.3–теоремадан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың таралыўшы болыўы келип шығады, себеби кери жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың жыйнақлы болыўынан а) пунктке көре $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатар ҳәм жыйнақлы болыўы келип шыққан болар еди.

Бирақ бул бизиң болжаўымызға қарама-қарсы келеди.

2.7–теорема (Раабе белгиси). Егер:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda \tag{2.25}$$

лимити бар болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар $\lambda>1$ да жыйнақлы, ал $\lambda<1$ де таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. а) Мейли дәслеп $\lambda>1$ болсын. Сонда $\lambda=1+3\alpha,\ \ \alpha>0$ деп белгилеп алыўымыз мүмкин. (2.25) шәртинен сондай $n_1\in N$ саны бар болып қәлеген $\forall n\ge n_1$ лар ушын

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1+2\alpha$$

теңсизлиги, ямаса оған тең күшли болған төмендеги

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{1+2\alpha}{n} \tag{2.26}$$

теңсизлигик дурыс болады. Биз сондай $n_2\in N$ саны бар болып қәлеген $\forall n\ge n_2$ лар ушын төмендеги

$$1+\frac{1+2\alpha}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} \tag{2.27}$$

теңсизлик орынлы болыўын дәлиллеймиз. Оның ушын жәрдемши функцияларды киритемиз:

$$\varphi(x)=ln\,(1+(1+2\alpha)x),\qquad \psi(x)=(1+\alpha)\ ln\,(1+x),\qquad x,\ \alpha>0\,.$$

Бул жағдайда

$$\varphi(0)=\psi(0)=0,$$

$$\varphi'(x)=\frac{1+2\alpha}{1+(1+2\alpha)x}\,,\qquad \psi'(x)=\frac{1+\alpha}{1+x}\,.$$

Төмендеги шәртти

$$\varphi'(x)>\psi'(x),\quad x>0\,,$$

ямаса оған тең күшли болған

$$(1+x)(1+2\alpha) > (1+\alpha)\,(1+(1+2\alpha)x)$$

теңсизликти қанаатландыратуғын x өзгериўшисиниң мәнислер көплиги $x < \dfrac{1}{1+2\alpha}$ екенлигин анықлап аламыз.

Лагранж теоремасынан келип шығатуғын нәтийжеге көре:

$$\varphi(x) > \psi(x), \qquad x \in \left(0,\ \frac{1}{1+2\alpha}\right)$$

болады. Буннан $x \in \left(0,\ \dfrac{1}{1+2\alpha}\right)$ ларда $e^{\varphi(x)} > e^{\psi(x)}$, яғный

$$1+(1+2\alpha)x > (1+x)^{1+\alpha}. \tag{2.28}$$

Биз енди $n_2 \in N$ номерди $n_2 > 1+2\alpha$ шәрти менен анықлаймыз. Сонда (2.28) теңсизлигинде $x = \dfrac{1}{n}$ мәнислеринде қәлеген $\forall n \geq n_2$ лар ушын орынлы болған (2.27) теңсизлиги келип шығады.

Солай етип, (2.26) ҳәм (2.27) дан $\forall n \geq n_0 = max\,(n_1, n_2)$ лар ушын

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}},$$

ямаса

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}}. \tag{2.29}$$

Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$ жыйнақлы екенлигинен (2.29) ден 2.3–теоремадан келип шығатуғын 2–нәтийжеге көре $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы болады;

б) Мейли $\lambda < 1$ болсын. (2.25) шәртинен сондай $n_0 \in N$ саны бар болып қәлеген $\forall n \ge n_0$ лар ушын

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$$

теңсизлиги, ямаса оған тең күшли болған төмендеги

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n}$$

теңсизлиги орынлы болады. Буннан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \tag{2.30}$$

теңсизлиги келип шығады. Соның ушын 2.3–теоремадан келип шығатуғын 2–нәтийжеге көре $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатардың таралыўшы болыўынан берилген қатардың таралыўшы екени келип шығады. **Раабе белгиси дәлилленди.**

9–мысал. Егер $a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды Раабе белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Даламбер белгиси берилген қатардың жыйнақлы, ямаса таралыўшы екенлигин анықлап бере алмайды, себеби бул жағдайда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Бул қатарды Раабе белгиси бойынша жыйнақлыққа тексеремиз. Сонда:

$$\sigma_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 1\right).$$

Бунда Тейлор формуласы менен байланыслы болған төмендеги

$$\lim_{x\to 0} \frac{e\,(1+x)^{-1/x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

лимиттиң нәтийжеси бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{2}$. Соның ушын Раабе белгиси бойынша қатар жыйнақлы болады.

10–мысал. Қатар жыйнақлығының интеграллық белгиси бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\,ln^2(5n+2)}$ қатарды жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Төмендеги меншиксиз интегралды жыйнақлыққа тексеремиз:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(5x+2)\,ln^2(5x+2)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{d(ln\,(5x+2))}{ln^2(5x+2)} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{ln(5x+2)} \right)\Bigg|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{ln7} - \frac{1}{ln(5b+2)} \right) = \frac{1}{ln7} < \infty.$$

Буннан бул меншиксиз интегралдың жыйнақлы болыўынан сәйкес $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)\,ln^2(5n+2)} < \infty$ қатарының ҳәм интеграллық белгиси бойынша жыйнақлы екенлиги келип шығады. Енди соңғы жыйнақлы қатарды берилген қатар менен салыстырамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(3n+4)\,ln^2(5n+2)}}{\dfrac{1}{(5n+2)\,ln^2(5n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{3n+4} = \frac{5}{3} < \infty.$$

Берилген $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\,ln^2(5n+2)}$ қатар салыстырыў белгиси бойынша жыйнақлы болады.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Берилген қатарларды Даламбер белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

5.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$;

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$;

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2 \cdot n!}{(2n)!}$;

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$;

5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$;

5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$;

5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$;

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$;

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2-1)}{n!}$;

5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$;

5.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;

5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$;

5.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots\ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$;

5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$;

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$;

5.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$;

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$;

5.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$;

5.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

5.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$;

5.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}$;

5.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots\ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots\ldots \cdot (3n-1)}$;

5.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots\ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots\ldots \cdot (2n+5)}$;

5.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$;

5.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$;

5.28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$;

5.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$;

5.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot(2n+1)!}{(3n)!}$;

5.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots\ldots \cdot(3n-2)}{2^{n+1}\,n!}$.

Берилген қатарларды Коши белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$;

6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

6.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

6.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$;

6.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

6.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$;

6.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$;

6.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$;

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,arcsin^n \frac{\pi}{4n}$;

6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$;

6.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^n}$;

6.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$;

6.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$;

6.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$;

6.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$;

6.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$;

6.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$;

6.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 sin^n \frac{\pi}{2n}$;

6.19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(ln\,n)^n}$;

6.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$;

6.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{3}\, arctg^{n}\, \frac{\pi}{3n};$

6.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5}\cdot 3^{n}}{(2n+1)^{n}};$

6.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\, e^{-n};$

6.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n};$

6.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^{2}};$

6.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^{2}+1)^{n/2}};$

6.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n};$

6.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}};$

6.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^{n}};$

6.30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n};$

6.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{4}\, arctg^{2n}\, \frac{\pi}{4n}.$

Қатар жыйнақлығының интеграллық белгиси бойынша төмендеги қатарларды жыйнақлылыққа тексериң.

7.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^{2}(3n+1)};$

7.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^{2}(2n+1)};$

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\, ln^{2}(2n+1)};$

7.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\, ln^{2}(4n-7)};$

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\, ln^{2}(5n+2)};$

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, ln^{2}(n\sqrt{5}+2)};$

7.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\, ln^{2}(n\sqrt{3}+1)};$

7.8. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\, ln\,(n-3)};$

7.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\, ln\,(2n)};$

7.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, ln\,(2n)};$

7.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\, ln\, n};$

7.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\, ln\,(n+1)};$

7.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\, ln\, (3n+1)}$;

7.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\, ln^2 n}$;

7.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\, ln^2 (2n)}$;

7.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\, ln^2 (n+1)}$;

7.17. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\, ln\, (n-1)}$;

7.18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{ln\, (3n-1)}}$;

7.19. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \sqrt{ln\, (n-3)}}$;

7.20. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \sqrt{ln\, (n-2)}}$;

7.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\, ln^2 (n+1)}$;

7.22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n\,/\,3)\, ln^2 (n+7)}$;

7.23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\; ln\, n}$;

7.24. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\; ln^2 n}$;

7.25. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1)\; ln^2 (n/2)}$;

7.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\; ln\, n}$;

7.27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\; ln\, n}$;

7.28. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\; ln\, (n-2)}$;

7.29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\; ln\, (n/2)}$;

7.30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\, ln\, n}$;

7.31. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\, ln\, (2n)}$.

3–§. Абсолют ҳәм шәртли жыйнақлы қатарлар

1–анықлама. Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

қатардың агзаларының модуллеринен дүзилген

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3.2}$$

қатар жыйнақлы болса, онда (3.1) қатар абсолют жыйнақлы деп аталады.

1–қәсийети. Егер қатар абсолют жыйнақлы болса, онда ол әпиўайы жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Мейли (3.2) қатар жыйнақлы болсын. Сонда бул ушын Коши шәрти орынлы болады, ягный:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N \to \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon .$$

Буннан $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$ екенлигинен (3.1) қатар ушын ҳәм Коши шәрти орынлы болады, ягный Коши критериясы бойынша (3.1) қатар жыйнақлы болады.

2–қәсийети. Егер (3.1) қатар абсолют жыйнақлы, ал $\{b_n\}$ избе-излиги шегараланган

$$\exists M > 0 : \quad \forall n \in N \to |b_n| \leq M \tag{3.3}$$

болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қатары абсолют жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. (3.3) шәртке көре

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

теңсизлиги ҳәм абсолют жыйнақлы (3.1) қатар ушын Коши шәрти орынлы болады. Сонда Коши критериясы бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қатары абсолют жыйнақлы болады.

3–қәсийети. Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ҳәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолют жыйнақлы қатарлар болса, онда қәлеген $\lambda, \mu \in R$ лар ушын $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ қатары ҳәм абсолют жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи Коши критериясы бойынша келип шығады болады.

4–қәсийети. Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолют жыйнақлы қатар болса, онда бул қатардың ағзаларының орынларын алмастырыўдан дүзилген

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j \tag{3.4}$$

ҳәм абсолют жыйнақлы қатар болады. Соның менен бирге (3.4) ҳәм (3.1) қатарлардың қосындылары өз-ара тең болады, яғный $\tilde{S} = S$.

Дәлиллениўи. Дәлиллеўди еки пунктке ажыратамыз:

а) Дәслеп (3.4) қатардың абсолют жыйнақлы екенлигин, яғный

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \tilde{a}_j \right| \tag{3.5}$$

қатардың жыйнақлы екенлигин көрсетемиз. Бунда (3.4) қатар (3.1) қатардан тек ағзаларының жайласыў орны менен өзгешеленеди, яғный

$$\forall j \in N, \quad \forall k_j \in N: \quad a_{k_j} = \tilde{a}_j .$$

Мейли $\tilde{\sigma}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \left| \tilde{a}_j \right|$ ҳәм $\tilde{n} = \max\limits_{1 \le j \le n} k_j$ белгилеўлерин киритемиз.

Сонда $n \le \tilde{n}$ ҳәм $\forall n \in N$ ушын төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$\tilde{\sigma}_n \le \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \left| a_k \right| \le A,$$

бул жерде A саны (3.2) қатардың қосындысы, яғный $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A$.

2–§ тың 2.1–теоремасы бойынша (3.5) жыйнақлы болады.

б) Енди $\widetilde{S} = S$ екенлигин дәлиллеп көрсетемиз. Шәрт бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың абсолют жыйнақлы болыўынан төмендеги қатнаслар орынлы болады: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N \rightarrow$

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \varepsilon / 2, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} | a_k | < \varepsilon / 2. \tag{3.7}$$

Мейли (3.1) қатардың $a_1, a_2, ..., a_m$, $m = N_\varepsilon$ номерли ағзаларының (3.4) қатардағы жайласыў тәртип номерлериниң ишиндеги ең үлкенин $\widetilde{m}$ деп белгилейик, яғный $\widetilde{m} = max\ \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, $a_k = \widetilde{a}_{j_k}$, $k = \overline{1, m}$. Сонда

$$m \leq \widetilde{m}. \tag{3.8}$$

Енди (3.4) қатардың n – ши дара қосындысын $\widetilde{S}_n$ деп белгилеймиз ҳәм $\forall n > \widetilde{m}$ лерде төмендеги теңсизликтиң дурыс екенлигин

$$\left| S - \widetilde{S}_n \right| < \varepsilon \tag{3.9}$$

көрсетемиз. $\forall n > \widetilde{m}$ лерде (3.4) қатардың $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k$ n – ши дара қосындысы (3.8) шәрт бойынша $\widetilde{m}$ ниң таңланыўынан келип шыққан ҳалда (3.1) қатардың $a_1, a_2, ..., a_m$, $m = N_\varepsilon$ ағзаларын ҳәм өз қурамына алған болады.

Сонда төмендеги айырма $\forall n > \widetilde{m}$ лерде

$$\Delta = \widetilde{S}_n - S_m = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \tag{3.10}$$

(3.1) қатардың тек тәртип номери $n > m = N_\varepsilon$ болған ағзаларды ғана өз қурамына алған болады. Мейли енди $\forall n > m$ лерде (3.4) қатардың $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ номерли ағзаларының (3.1) қатардағы жайласыў тәртип номерлериниң ишиндеги ең үлкенин m^* деп белгилейик, яғный $m^* = max\ \{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $a_{k_j} = \widetilde{a}_j$, $j = \overline{1, n}$. Сонда

$$m^* = m + p, \quad p \in N.$$

Демек, (3.10) теңликке көре Δ айырмасы (3.1) қатардың тәртип номерлери $m < n \le m + p$ болған ағзалардан ибарат болады екен. Солай етип (3.7) шәртке муўапық

$$|\Delta| \le \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k| < \varepsilon/2. \qquad (3.11)$$

Буннан төмендеги аңлатпадан

$$S - \widetilde{S}_n = S - S_m - (\widetilde{S}_n - S_m) = S - S_m - \Delta,$$

$\forall n > \widetilde{m}$ лерде (3.6) хәм (3.11) теңсизликлерден (3.9) теңсизлиги келип шығады. Бул $\lim\limits_{n \to \infty} \widetilde{S}_n = S$, яғный $\widetilde{S} = S$ екенлигин көрсетеди.

5–қәсийети. Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ хәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолют жыйнақлы қатарлар болса, онда төмендеги көринистеги қатар хәм

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s} \qquad (3.12)$$

абсолют жыйнақлы болады. Соның менен бирге (3.12) қатардың қосындысы берилген қатарлардың қосындыларының көбеймесине тең болады.

Дәлилилениўи. (3.12) қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ хәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарлардың мүмкин болған барлық жуп болып алынған ағзаларының көбеймелериниң қосындысынан дүзилген болып табылады. Биз төмендеги қатардың

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| a_{i_s} b_{j_s} \right| \qquad (3.13)$$

абсолют жыйнақлы екенлигин дәлиллеп көрсетемиз. Оның ушын жаңа белгилеўлерди киритемиз. Мейли $\widetilde{\tau}_m = \sum_{s=1}^{m} \left| a_{i_s} b_{j_s} \right|$ (13) қатардың m – ши дара қосындысы, ал $A = \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n \right|$ ге тең болсын. Сонда

$$\widetilde{\tau}_m = \sum_{s=1}^{m} \left| a_{i_s} b_{j_s} \right| \le \sum_{s=1}^{m} \left| a_{i_s} \right| \cdot \sum_{s=1}^{m} \left| b_{j_s} \right| \le AB,$$

яғный (3.13) қатардың дара қосындылары жоқарыдан шегараланған болады, буннан 2–§ тың 2.1–теоремасына көре (3.13) қатар жыйнақлы болады.

б) Енди (3.12) қатардың $\tau = \sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{j_s}$ қосындысы берилген $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ҳәм $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$ қатарлардың қосындыларының көбеймесине тең болатуғынлығын келтирип шығарамыз, яғный $\tau = S \cdot \sigma$.

Бунда (3.12) қатардың барлық ағзалары төмендеги кесте ишинде жайласқан болады.

(1) $a_1 b_1$	(2) $a_2 b_1$	(5) $a_3 b_1$	(10) $a_4 b_1$	………
(4) $a_1 b_2$	(3) $a_2 b_2$	(6) $a_3 b_2$	(11) $a_4 b_2$	………
(9) $a_1 b_3$	(8) $a_2 b_3$	(7) $a_3 b_3$	(12) $a_4 b_3$	………
(16) $a_1 b_4$	(15) $a_2 b_4$	(14) $a_3 b_4$	(13) $a_4 b_4$	………
………	………	………	………	………

Енди бул кестениң элементлерин көрсетилген тәртипте номерлеп шығамыз (бундай тәртиплестириў усылы «квадратлар методы» деп аталады). Бул жағдайда төмендеги (3.12) көринистеги қатар келип шығады:

$$a_1b_1+(a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2)+(a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3+a_2b_3+a_1b_3)+$$
$$+(a_4b_1+a_4b_2+a_4b_3+a_4b_4+a_3b_4+a_2b_4+a_1b_4)+........ \qquad (3.14)$$

Жоқарыда теореманың а) пункти бойынша ҳәр қандай (3.12), ямаса дара жағдайда (3.14) көринистеги қатарлар абсолют жыйнақлы болады, буннан олар 1–қәсийет бойынша әпиўайы мағанада ҳәм жыйнақлы болады. Соның менен бирге 4–қәсийет бойынша (3.12) қатардың қосындысының мәниси оның ағзаларының жайласыў орнына ғәрезли болмайды. Соның ушын (3.14) қатар ҳәм жыйнақлы, ал оның қосындысы τ тең болады.

Мейли $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ҳәм τ_n (3.14) қатардың $n-$ши дара қосындылары болсын. Сонда $\tau_{n^2}=S_n\cdot\sigma_n$ ге тең болады. Енди

$$S_n\to S, \quad n\to\infty \quad \text{ҳәм} \quad \sigma_n\to\sigma, \quad n\to\infty$$

екенлигин есапқа алсақ, онда $\tau_{n^2}\to S\cdot\sigma$, $n\to\infty$ ге ийе боламыз. Екинши тәрептен $\{\tau_{n^2}\}$ τ ға жыйнақлы болған $\{\tau_n\}$ избе-изликтиң үлес избе-излиги екенлигинен $\tau_{n^2}\to\tau$, $n\to\infty$ болады. Демек, $\tau=S\cdot\sigma$.

2–анықлама. Төмендеги көринистеги қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \quad a_n>0, \quad \forall n\in N \qquad (3.15)$$

белгиси алмасып келиўши қатар деп аталады.

3.1–теорема (Лейбниц теоремасы). Егер $\{a_n\}$ избе-излиги монотон кемейип нолге умтылса, яғный

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n\in N \qquad (3.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \qquad (3.17)$$

онда (3.15) жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Мейли $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ болсын. Сонда (3.16) шәртке көре төмендеги теңсизлик орынлы

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

болады, яғный $\{S_{2n}\}$ избе-излиги монотон өсиўши. Соның менен бирге $a_n > 0, \quad \forall n \in N$ ҳәм $\{a_n\}$ избе-излигиниң монотон кемиўши ((3.16) шәрт) екенлигинен төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - .... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1 .$$

Демек, монотон өсиўши ҳәм жоқарыдан шегараланған избе-изликтиң жыйнақлы екенлиги ҳаққындағы теорема бойынша $\{S_{2n}\}$ избе-излиги шекли S лимитке ийе болады, яғный $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n} = S$.

Енди $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ екенлигин есапқа алып $n \to \infty$ лимитке өтсек, онда $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = S$ келип шығады, себеби (3.17) шәртке көре $\lim\limits_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0$. Солай етип $n -$ ниң жуп ямаса тақ екенлигинен ғәрезсиз ҳалда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ болады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

Салдар. Белгиси алмасып келиўши (3.15) қатар ушын $\forall n \in N$ лерде

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \tag{3.18}$$

$$| S - S_n | \leq a_{n+1} \tag{3.19}$$

теңсизликлери орынлы болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп тақ номерлердеги дара қосындылардын монотон кемейиўши екенлигин көрсетемиз. Оның ушын (3.16) шәртке көре

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$$

екенлигинен $\{S_{2n+1}\}$ избе-излиги монотон кемиўши болады. Буннан S саны монотон өсиўши $\{S_{2n}\}$ ҳәм монотон кемиўши $\{S_{2n+1}\}$

избе-изликлериниң лимити екенлигинен (3.18) қатнас келип шығады. Бул (3.18) қатнасты төмендеги көринисте түрлендирсек, яғный

$$S_{2n-1} + a_{2n} \le S \le S_{2n} + a_{2n+1},$$

онда

$$S_{2n-1} - S \le a_{2n}, \qquad S - S_{2n} \le a_{2n+1}.$$

Бул қатнаслар $\forall n \in N$ лерде (3.18) теңсизликтиң дурыс екенлигин аңлатады.

1–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ қатардың жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. $\left\{ \frac{1}{n^{\alpha}} \right\}$, $\alpha > 0$ избе-излиги монотон кемейип нолге умтылады. Сонлықтан бул қатар 3.1–теорема (Лейбниц белгиси) бойынша жыйнақлы болады. Дара жағдайда, $\alpha = 1$ де

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots\ldots$$

қатары жыйнақлы болады. Бунда оның қосындысы S (3.18) теңсизликке көре $n = 1$ де $\frac{1}{2} \le S \le \frac{5}{6}$ болады. Кейиншелик биз бул қатардың қосындысы $S = ln\,2$ ге тең болатуғынлығын келтирип шығарамыз.

3.2–теорема (Дирихле белгиси). Мейли төмендеги қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.20}$$

берилген болсын. Егер:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатардың $\{B_n\}$ дара қосындылары избе-излиги шегараланған, яғный сондай $\exists M > 0$ саны бар болып, $\forall n \in N$ лер ушын

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \le M; \tag{3.21}$$

б) $\{a_n\}$ избе-излиги монотон кемейип $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in N$, ямаса $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in N$ монотон өсип нолге умтылатуғын

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{3.22}$$

болса, онда (3.20) қатар жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп төмендеги белгилеўди киритемиз:

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k, \qquad p \in N.$$

Егер биз берилген (3.20) қатар ушын Коши шәртиниң орынланыўын көрсетсек, яғный

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in N \colon \;\; \forall n \ge n_\varepsilon \quad \forall p \in N \;\to\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon$$

онда (3.20) қатардың жыйнақлы екенлигин көрсеткен боламыз.

Оның ушын $b_k = B_k - B_{k-1}$, $k > 1$ екенлигин есапқа алып жоқарыдағы аңлатпадағы b_k ның орнына қойсақ, онда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \left(B_k - B_{k-1} \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1}, \tag{3.23}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k + a_{n+1} B_n, \tag{3.24}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k B_k + a_{n+p} B_{n+p} \tag{3.25}$$

лерге ийе боламыз. Пайда болған (3.24) ҳәм (3.25) аңлатпаларды (3.23) ге алып барып қойып төмендеги

$$\sigma = a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(a_k - a_{k+1} \right) B_k \tag{3.26}$$

(3.26) Абел түрлендириўине ийе боламыз. (3.26) теңликти модул бойынша баҳалаймыз:

$$|\sigma| \le M \left(\left| a_{n+p} \right| + \left| a_{n+1} \right| \right) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(a_k - a_{k+1} \right),$$

бул жерде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{n+p} \le \left|a_{n+p}\right| + \left|a_{n+1}\right|.$$

Демек, барлық $\forall n \in N$ ҳәм $\forall p \in N$ ушын төмендеги теңсизлик

$$|\sigma| \le 2M\left(\left|a_{n+p}\right| + \left|a_{n+1}\right|\right) \qquad (3.27)$$

орынлы болады.

Енди (3.22) лимит анықламасы көре

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in N: \ \forall n \ge n_\varepsilon \rightarrow \left|a_n\right| < \frac{\varepsilon}{4M}. \qquad (3.28)$$

(3.28) ге тийкарланып (3.27) теңсизликтен төмендеги баҳалаўға ийе боламыз:

$$|\sigma| \le 2M\left(\left|a_{n+p}\right| + \left|a_{n+1}\right|\right) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon.$$

Бул теңсизлик $\sigma = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$, $p \in N$ ушын Коши шәртиниң орынлы екенлигин аңлатады, буннан берилген (3.20) қатардың жыйнақлы екенлиги келип шығады.

1–ескертиў. Егер Дирихле белгисинде $b_n = (-1)^{n+1}$ деп алсақ, онда Лейбниң белгиси шәртлери келип шығады. Соның менен бирге (3.26) Абел түрлендириўин бөлеклеп интеграллаў формуласының дискрет аналогы деп қарастырыў мүмкин.

Енди жоқарыдағы дәлиллениўи менен келтирилген Дирихле белгисиниң дара жағдайы болған Абел белгисин келтирип өтемиз.

3.3–теорема (Абел белгиси). Мейли (3.20) қатар берилген болсын. Сонда егер:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ қатар жыйнақлы;

б) $\{a_n\}$ избе-излиги монотон $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in N$ (кемейиўши)

$(a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in N)$ ҳәм шегараланған болса, онда (3.20) қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. $\{a_n\}$ монотон ҳәм шегараланған избе-излик болыўынан оның лимити шекли болады. Мейли бул лимит

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty$$

болсын. Сонда $\{\, a_n - a \,\}$ избе-излиги монотон тәризде нолге $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$ умтылады. Басқа тәрептен шәрт бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ қатардың жыйнақлы болыўынан оның қәлеген дара қосындысының шегараланғанлығы келип шығады, яғный

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq M, \quad \forall n \in N .$$

Жуўмақлап айтқанда $a_n b_n = (a_n - a)\, b_n + a b_n$ аңлатпаның оң тәрепиндеги $a \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ қатар теорема шәрти бойынша жыйнақлы болады, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a)\, b_n$ қатары Дирихле белгиси бойынша жыйнақлы болады.

Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қатары еки жыйнақлы қатарлардың қосындысы сыпатында жыйнақлы болады.

2–мысал. Егер $\forall n \in N$ лерде $\{a_n\}$ избе-излиги монотон кемейип $a_n \leq a_{n+1}$, ямаса $a_n \geq a_{n+1}$ монотон өсип нолге умтылатуғын $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда $\forall x \in R$ точкаларда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{3.29}$$

қатардың жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Егер $x = 2\pi m, \quad m \in Z$ болса, онда (3.29) қатардың барлық ағзалары ноллерден ибарат болады. Соның ушын (3.29) қатар жыйнақлы болады (тривиал жағдай).

Мейли $x \neq 2\pi m, \quad m \in Z$ болсын. Сонда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} sin\, nx$ қатардың $n-$ши дара қосындысын $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} sin\, kx$ деп белгилеп алсақ, онда оның

$$B_n(x) = \frac{sin\frac{n+1}{2}x \cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$$

ге тең екенлигин көрсетиў мүмкин. Буннан төмендеги баҳалаўы $\forall n \in N$ ушын

$$|B_n(x)| \leq \frac{1}{|sin\, x/2|}$$

дурыс болады, яғный, $\{B_n(x)\}$ дара қосындылар избе-излиги шегараланған.

Солай етип, 3.2–теорема (Дирихле белгиси) бойынша (3.29) қатар $x \neq 2\pi m, \quad m \in Z$ ушын жыйнақлы болады. Демек, (3.29) $\forall x \in R$ точкада жыйнақлы болады. Дара жағдайда, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$ қатары $\forall x \in R$ точкада жыйнақлы.

3–мысал. Егер $\forall n \in N$ лерде $\{a_n\}$ избе-излиги монотон кемейип $a_n \leq a_{n+1}$, ямаса $a_n \geq a_{n+1}$ монотон өсип нолге умтылатуғын $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ болса, онда қәлеген $x \neq 2\pi m, \quad m \in Z$ точкада $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\, nx$ қатардың жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cos\, nx, \quad x \neq 2\pi m, \quad m \in Z$ қатардың $n-$ши дара қосындысы ушын төмендеги формула орынлы болады:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Буннан төмендеги баҳалаўы $\forall n \in N$ ушын

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \le \frac{1}{|\sin x/2|}, \qquad x \ne 2\pi m, \quad m \in Z$$

дурыс болады, яғный, дара қосындылар избе-излиги шегараланған.

Солай етип, 3.2–теорема (Дирихле белгиси) бойынша $x \ne 2\pi m, \quad m \in Z$ ушын $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ қатар жыйнақлы болады. Дара жағдайда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

қатары қәлеген $x \ne \pi m, \quad m \in Z$ точкада жыйнақлы.

4–мысал. Егер $a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n}\ ln(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ көринисте болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарды жыйнақлыққа тексериң.

Шешими. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n}\ ln(n+1)}$ қатары 3–мысалға (Дирихле белгиси) көре жыйнақлы, ал $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$ монотон ҳәм шегараланған болады. Соның ушын 3.3–теорема (Абел белгиси) бойынша берилген қатар жыйнақлы болады.

3–анықлама. Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.30}$$

жыйнақлы, ал қатардың ағзаларының модуллеринен дүзилген

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \tag{3.31}$$

қатар таралыўшы болса, онда (3.30) қатар **шәртли жыйнақлы** деп аталады.

Берилген қатарларды абсолют ҳәм шәртли жыйнақлыққа изертлегенимизде төмендеги тастыйықлаў шәртлерин тексерип көриўге туўры келеди.

4–теорема. Егер (3.30) қатар абсолют жыйнақлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ҳәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қатарларының екеўи де бир ўақытта абсолют жыйнақлы, ямаса шәртли жыйнақлы, ямаса таралыўшы болады.

5–мысал. Төмендеги қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, nx}{n^{\alpha}}, \quad 0<\alpha \le 1, \quad x \ne \pi m, \quad m \in Z \tag{3.32}$$

шәртли жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Бул қатар 2–мысалға (Дирихле белгиси) көре $\forall x \in R$ точкада жыйнақлы болады. Енди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sin\, nx|}{n^{\alpha}}, \quad 0<\alpha \le 1, \quad x \ne \pi m, \quad m \in Z \tag{3.33}$$

қатары таралыўшы екенлигин дәлиллеймиз. Оның ушын төмендеги теңсизликтен пайдаланамыз:

$$\frac{|sin\, nx|}{n^{\alpha}} \ge \frac{sin^2\, nx}{n^{\alpha}}. \tag{3.34}$$

Бунда $sin^2\, nx = \dfrac{1-cos\, 2nx}{2}$ екенлигинен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2\, nx}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\alpha}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\, 2nx}{2n^{\alpha}}, \quad 0<\alpha \le 1, \quad x \ne \pi m, \quad m \in Z .$$

Соның ушын $0<\alpha\leq 1$, $x\neq\pi m$, $m\in Z$ ларда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^{\alpha}}<\infty$ қатары (3–мысал) жыйнақлы, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\alpha}}\not<\infty$ қатары таралыўшы болғанлығынан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^{\alpha}}\not<\infty$ қатары ҳәм таралыўшы болады.

Демек, (3.34) шәрттен (3.33) қатардың салыстырыў белгиси бойынша таралыўшы екенлигине ийе боламыз. Бул берилген (3.32) қатардың шәртли жыйнақлы екенлигин аңлатады.

6–мысал. Егер:

а) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$; б) $a_n=e^{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}}-\cos\frac{1}{n}$

көринисте болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарды жыйнақлыққа ҳәм абсолют жыйнақлыққа тексериң.

Шешими. а) a_n ди төмендеги көриниске түрлендиремиз, яғный

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}.$$

Бунда асимптотикалық Тейлор формуласынан

$$(1+t)^{-1}=1-t+t^2+o\left(t^2\right),\qquad t\to 0$$

пайдаланамыз. Сонда

$$\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^{-1}=1-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}(1+\alpha_n),$$

бул жерде $\alpha_n\to 0$, $n\to\infty$, ҳәм сонлықтан $|\alpha_n|\leq 1$, $n\geq n_0$. Нәтийжеде

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+b_n,\qquad |b_n|\leq\frac{2}{n^{3/2}},\quad n\geq n_0,$$

буннан b_n берилген қатардың жыйнақлығына тәсир жасай алмайды (3.4–теорема). Жуўмақты төмендеги тастыйықлаўлардан келтирип шығарамыз, яғный $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ қатар шәртли жыйнақлы, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатары таралыўшы екенлигинен берилген қатар ҳәм таралыўшы болады.

б) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad cos\, t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0$

асимптотикалық формулаларға көре

$$e^{\frac{sin\, n}{\sqrt[3]{n^2}}} = 1 + \frac{sin\, n}{\sqrt[3]{n^2}} + \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n^4}}, \qquad |\alpha_n| \le c_1,$$

$$cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{\beta_n}{n^2}, \qquad |\beta_n| \le c_2,$$

$$a_n = \frac{sin\, n}{n^{2/3}} + b_n, \qquad |b_n| \le \frac{c_1}{\sqrt[3]{n^4}} + \frac{c_2}{n^2}.$$

Демек, буннан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатары абсолют жыйнақлы , ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin\, n}{n^{2/3}}$ қатары шәртли жыйнақлы (5–мысал) болғанлықтан берилген қатар ҳәм шәртли жыйнақлы болады.

2–ескертиў. Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ белгиси алмасып келиўши қатар ҳәм $a_n \sim b_n, \quad n \to \infty \quad \left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \right)$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ҳәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ лардың жыйнақлылық мағанасында бир-бирине эквивалент, яғный екеўиниң де бир ўақытта жыйнақлы, ямаса таралыўшы болыўы келип шықпайды. Мысал ушын $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$ болсын (6–мысал а)). Сонда $a_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty$. Бирақ, бул жерде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ қатар шәртли жыйнақлы, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар таралыўшы болады.

7–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ белгиси алмасып келиўши қатарды Лейбниц белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Дәслеп берилген қатарды төмендеги көриниске түрлендирип аламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\,(-1)^n sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Бул қатар Лейбниц теоремасының шәртлерин қанаатландыратуғын қатар болып табылады, себеби

$$2sin^2\frac{1}{2} > 2sin^2\frac{1}{2\sqrt{2}} > 2sin^2\frac{1}{2\sqrt{3}} > .... > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 2sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}=0.$$

Демек, Лейбниц белгиси бойынша қатардың өзи жыйнақлы. Енди қатар ағзаларының модуллеринен дүзилген жаңа қатарды алып, берилген қатарды абсолют жыйнақлыққа тексеремиз. Сонда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|2\,(-1)^n sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}2\,sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Соңғы қатар салыстырыў белгиси бойынша таралыўшы болады, себеби $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатар таралыўшы ҳәм

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{1}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1/4n}{1/n}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Берилген қатар шәртли жыйнақлы болады.

8–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ қатардың қосындысын $\alpha=0{,}001$ дәллигинде есаплаң.

Шешими. Бул қатар белгиси алмасып келиўши жыйнақлы қатар болады табылады, себеби Лейбниц теоремасы шәртлери орынлы

$$\frac{1}{9} > \frac{2}{9\cdot 25} > \frac{3}{25\cdot 49} > \frac{4}{49\cdot 64} > \ldots\ldots ,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = 0 .$$

Бундай түрдеги қатарлардың қәсийети бойынша оның қалдығы 1–ши ағзасынан үлкен болмайды, яғный

$$|S - S_n| = |r_n| \le a_{n+1} < \alpha = 0{,}001 .$$

Буннан

$$\frac{1}{9} > 0{,}001, \quad \frac{2}{9\cdot 25} \approx 0{,}0089 > 0{,}001, \quad \frac{3}{25\cdot 49} \approx 0{,}0024 > 0{,}001,$$

$$\frac{4}{49\cdot 81} \approx 0{,}0010078 > 0{,}001, \quad \frac{5}{81\cdot 121} \approx 0{,}0005 < 0{,}001 .$$

Сонлықтан берилген қатардың $\alpha = 0{,}001$ дәллигинде қосындысы төмендегише болады:

$$S \approx -\frac{1}{9} + \frac{2}{9\cdot 25} - \frac{3}{25\cdot 49} + \frac{4}{49\cdot 81} \approx -0{,}104 .$$

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Берилген белгиси алмасып келиўши қатарларды Лейбниц белгиси бойынша жыйнақлылыққа тексериң.

8.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$;

8.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

8.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ln(n+1)}$;

8.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(ln(ln\, n))\, ln\, n}$;

8.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$;

8.6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\, ln\, n}$;

8.7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$

8.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[4]{2n+3}};$

8.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}};$

8.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n};$

8.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!};$

8.12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)};$

8.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n};$

8.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2};$

8.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\, 2^{2n}};$

8.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n + \ln n}};$

8.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,(3/2)^n};$

8.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n};$

8.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{\ln(n+4)};$

8.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}};$

8.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}};$

8.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, 2^{2n+1}};$

8.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}};$

8.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos(2/\sqrt{n+4})};$

8.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n};$

8.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n};$

8.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n};$

8.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right);$

8.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n};$

8.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right);$

8.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}.$

Берилген қатардың қосындысын α дәллигинде есаплаң.

9.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}, \quad \alpha = 0{,}01;$

9.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad \alpha = 0{,}01;$

9.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}, \quad \alpha = 0{,}001;$

9.4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n!\,(2n+1)}, \quad \alpha = 0{,}001;$

9.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \quad \alpha = 0{,}01;$

9.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}, \quad \alpha = 0{,}0001;$

9.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{2^n}, \quad \alpha = 0{,}1;$

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{3^n}, \quad \alpha = 0{,}1;$

9.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{(2n-1)^2\,(2n+1)^2}, \quad \alpha = 0{,}001;$

9.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!!}, \quad \alpha = 0{,}0001;$

9.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!!}, \quad \alpha = 0{,}001;$

9.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n}, \quad \alpha = 0{,}01;$

9.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot n}{7^n}, \quad \alpha = 0{,}0001;$

9.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \alpha = 0{,}1;$

9.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \qquad \alpha = 0{,}01;$

9.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot 2n}, \qquad \alpha = 0{,}00001;$

9.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n)! \cdot n!}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot n!}, \qquad \alpha = 0{,}00001;$

9.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n+1)}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3}, \qquad \alpha = 0{,}01;$

9.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \qquad \alpha = 0{,}001;$

9.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + \pi n)}{n^3 + 1}, \qquad \alpha = 0{,}01;$

9.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3(n+3)}$, $\alpha = 0{,}01;$

9.29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{(n^3+1)^2}$, $\alpha = 0{,}001;$

9.30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $\alpha = 0{,}01;$

9.31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha = 0{,}001.$

Төмендеги теңликлерди Даламбер, ямаса Коши белгилеринен пайдаланып дәлиллең.

10.1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$

10.2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$

10.3. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} = 0;$

10.4. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0;$

10.5. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{2n^2!} = 0;$

10.6. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0;$

10.7. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0;$

10.8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0;$

10.9. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0;$

10.10. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n+1)!} = 0;$

10.11. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0;$

10.12. $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0;$

10.13. $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0;$

10.14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0;$

10.15. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0;$

10.16. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0;$

10.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{n^n}=0;$

10.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{n^n}=0;$

10.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}=0;$

10.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{4^{n^2}}=0;$

10.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{n^n}=0;$

10.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!!}{n^n}=0;$

10.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)!}{2^{n^2}}=0;$

10.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(2n)!!}=0.$

10.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n-1)!}=0;$

10.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!}=0;$

10.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{[(n+1)!]^2}=0;$

10.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{2^{n^2}}=0;$

10.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n+3)!}=0;$

10.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!}=0;$

10.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{[(n+2)!]^2}=0;$

4–§. Функционаллық избе-излик ҳәм қатарлар, олардың жыйнақлылығы

1–анықлама. Егер $\forall n \in N$ ушын базы бир қәдеге муўапық $f_n(x)$, $x \in X$ функциясы сәйкес қойылған болса, онда X көплигинде

$$f_1(x), f_2(x), \ldots.., f_n(x), \ldots.. \qquad (4.1)$$

функционаллық избе-излиги берилген деп аталады ҳәм ол қысқаша $\{f_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots.$ символикалық көринисте белгиленеди.

$f_1(x), f_2(x), \ldots.., f_n(x), \ldots..$ функционаллық избе-излигиниң ҳәр бир ағзасының анықланыў областы, улыўма алғанда, ҳәр қыйлы болыўы мүмкин. Биз X көплиги сыпатында сол областлардың барлығына улыўма болған бөлегин аламыз.

(4.1) избе-изликте $f_n(x)$ функциясы усы избе-изликтиң улыўма ағзасы ($n -$ ши ағзасы) деп айтылады. Демек, (4.1) функционаллық избе-излигиниң улыўма ағзасы $x \in X$ ҳәм $n \in N$ өзгериўшилеринен ғәрезли болады екен.

1–мысал. $f -$ ҳәр бир натурал n санға $\frac{1}{n^2 + x^2}$ функцияны сәйкес қойыўшы сәўлелендириў болсын. Онда $X = (-\infty, +\infty)$ көпликте анықланған

$$\frac{1}{1+x^2}, \ \frac{1}{4+x^2}, \ \frac{1}{9+x^2}, \ \ldots, \ \frac{1}{n^2+x^2}, \ldots.$$

функционаллық избе-изликке ийе боламыз. Бул избе-изликтиң улыўма ағзасы төмендеги көринисте болады:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

X көплигинде берилген базы бир избе-излигин қарайық

$$f_1(x), f_2(x), \ldots.., f_n(x), \ldots..$$

ҳәм x_0 $(x_0 \in X)$ точканы алып, берилген избе-изликтиң ҳәр бир $f_n(x)$ ағзасының усы точкадағы мәнисин есаплаймыз.

Нәтийжеде төмендеги

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots . f_n(x_0), \ldots \ldots \qquad (4.2)$$

санлы избе-излигине ийе боламыз.

2–анықлама. Егер $\{f_n(x_0)\}$ санлы избе-излиги жыйнақлы (таралыўшы) болса, онда $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги x_0 точкада жыйнақлы (таралыўшы) деп аталады, ал x_0 усы функционаллық избе-изликтиң **жыйнақлылық (таралыўшылық) точкасы** деп айтылады.

3–анықлама. $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излигиниң барлық жыйнақлылық (таралыўшылық) точкаларынан ибарат болған көплик $\{f_n(x)\}$ избе-излигиниң **жыйнақлылық (таралыўшылыў) областы** деп аталады.

Мейли базы бир $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги берилген ҳәм E усы избе-изликтиң жыйнақлылық областы болсын. Онда $\forall x_0 \in E$ ушын оған сәйкес

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots . f_n(x_0), \ldots \ldots$$

избе-излиги $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0)$ шекли анық лимитке ийе болады.

Егер E көпликтен алынған ҳәр бир x ке, оған сәйкес келетуғын $f_1(x), f_2(x), \ldots ., f_n(x), \ldots .$ избе-излигиниң лимитин сәйкес қойсақ, яғный

$$f : x \to \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

онда E көпликте анықланған $f(x)$ функциясына ийе боламыз. Бул $f(x)$ функциясы $\{f_n(x)\}$ избе-излигиниң лимит функциясы деп айтылады. Демек,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E, \qquad (4.3)$$

ямаса $f_n(x) \to f(x), \quad x \in E$.

Лимит анықламасы бойынша (4.3) ни төмендегише қылып жазыў мүмкин, яғный

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x): \; \forall x \in E \quad \forall n \geq N \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2–мысал. E көпликте берилген $\{f_n(x)\}$ избе-излигиниң $f(x)$ лимит функциясын табың. Егер:

1) $f_n(x)=\dfrac{n+1}{n+x^2}$, $E=R^1 \to$ $f_n(x)=\dfrac{1+1/n}{1+x^2/n}$ дан $f(x)=1$.

2) $f_n(x)=n\,sin\dfrac{1}{nx}$, $E=(0;+\infty)$.

Бул жерде $sint \sim t$, $t \to 0$ асимтотикалық формуладан пайдалансақ, онда $n\,sin\dfrac{1}{nx} \sim n\cdot\dfrac{1}{nx}$, $n\to\infty$, $x\neq 0$ болады. Сонлықтан $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Мейли базы бир $X\left(X\subset R^1\right)$ көплигинде

$$u_1(x), u_2(x),....., u_n(x),......$$

функционаллық избе-излиги берилген болсын.

4–анықлама. Төмендеги

$$u_1(x)+u_2(x)+....+u_n(x)+.....$$

аңлатпа функционаллық қатар деп аталады ҳәм ол қысқаша $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ символикалық көринисте белгиленеди, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+....+u_n(x)+..... \qquad (4.4)$$

$u_1(x), u_2(x),...$ функциялар (4.4) функционаллық қатардың ағзалары, ал $u_n(x)$ **функционаллық қатардың улыўма ағзасы** ($n-$ши ағзасы) деп айтылады.

1–еслетпе. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ функционаллық қатардың ҳәр бир ағзасының анықланыў областы (көпликлери), улыўма айтқанда, ҳәр түрли болады. Бул жерде X көплиги сыпатында усы областлардың барлығына улыўма болған бөлегин түсинемиз.

X көплигинен $x_0\left(x_0\in X\right)$ точканы алып, (4.4) функционаллық қатардың ҳәр бир $u_n(x)$, $n=1,2,....$ ағзасының усы точкадағы мәнисин табамыз. Нәтийжеде төмендеги

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \tag{4.5}$$

санлы қатарына ийе боламыз.

5–анықлама. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ санлы қатары жыйнақлы (таралыўшы) болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатар x_0 $(x_0 \in X)$ точкада **жыйнақлы (таралыўшы)** деп аталады, ал x_0 усы функционаллық қатардын **жыйнақлылық (таралыўшылық) точкасы** деп айтылады.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарының барлық жыйнақлылық (таралыўшылық) точкаларынан ибарат болған көплик, бул функционаллық қатардың **жыйнақлылық (таралыўшылық) областы** деп айтылады.

Кейинги баянлаўда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарының жыйнақлылық (таралыўшылық) областы E көплиги болсын деп жазыў орнына $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатары E көплигинде жыйнақлы (таралыўшы) деп жазыўды қолланып бара беремиз.

Егер базы бир $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарының жыйнақлылық областы E көплиги болса, онда $\forall x_0 \in E$ ушын сәйкес санлы қатары

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ...$$

жыйнақлы болады ҳәм оның қосындысын S_0 деп белгилейик.

Егер E көпликтен алынған ҳәр бир x ке оған сәйкес келетуғын

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

қатардын қосындысын сәйкес қойсақ, онда E көпликте берилген $S(x)$ функциясына ийе боламыз. Бул $S(x)$ функциясы

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

функционаллық қатардың қосындысы деп аталады. Демек, $\forall x \in E$ ушын

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = S(x).$$

Функционаллық қатарларда да, санлы қатарларға уқсас, қатардың дара қосындысы түсиниги киритиледи.

(4.4) функционаллық қатардың дәслепки ағзаларынан дүзилген

$$S_1(x) = u_1(x),$$

$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

қосындылар (4.4) функционаллық қатардың **дара қосындылары** деп аталады. Демек, (4.4) функционаллық қатары берилген жағдайда ҳәр дайым бул қатардын дара қосындыларынан ибарат

$$\{S_n(x)\}:\ S_1(x),\ S_2(x),\ .....,\ S_n(x),\ ...... \qquad (4.6)$$

функционаллық избе-изликти пайда етиў мүмкин.

6–анықлама. Егер $n \to \infty$ ке $\{S_n(x)\}$ функционаллық избе-изликтиң лимит функциясы $S(x)$ анықланған болса, яғный

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$$

болса, онда $S(x)$ (4.4) функционаллық қатардын қосындысы деп аталады.

3–мысал. Төмендеги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \qquad (0 < x < +\infty)$$

функционаллық қатарды қарайық. Бул қатардың дара қосындысын табамыз:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right]=1-\frac{1}{nx+1}.$$

Онда

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{nx+1}\right]=1\quad(0<x<+\infty)$$

болады. Демек, берилген қатардың қосындысы $S(x)=1$ болады.

4–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$ функционаллық қатардын жыйнақлылық областын табың.

Шешими. Бул жерде төмендеги үш жағдайды көрип шығамыз:

а) Егер $|x|>1$ болса, онда $x^n\to\infty,\quad n\to\infty$. Сонлықтан қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти орынлы емес екенлигинен, яғный

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}=-1\neq 0,$$

қатар $|x|>1$ ушын таралыўшы болады.

б) Егер $|x|<1$ болса, онда $x^n\to 0,\quad n\to\infty$. Буннан

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}=1\neq 0.$$

Сонда берилген қатар бул жағдайда ҳәм $|x|<1$ ушын таралыўшы болады.

в) $x=1$ ҳәм $x=-1$ мәнислеринде берилген қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1-(-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1+(-1)^{n+1}}$$

анықланбаған болады.

Сонлықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$ функционаллық қатары $-\infty<x<+\infty$ барлық мәнислеринде таралыўшы.

5–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$ функционаллық қатардын жыйнақлылық областын табыӊ.

Шешими. Бул қатарды салыстырыў белгиси бойынша тексеремиз. Оныӊ ушын оны жыйнақлы болған Дирихле қатары менен салыстырамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}} < \infty .$$

Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}}{\dfrac{1}{n^{5/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{x^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{x}{n}\right)^2+1} = 1 \neq 0,$$

яғный бул қатарлар өз-ара эквивалент болғанлықтан берилген қатар $x \in (-\infty, +\infty)$ барлық мәнислеринде жыйнақлы болады.

6–мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{3n}$ қатардыӊ жыйнақлылық областын табыӊ.

Шешими. Бул қатардын жыйнақлылық интервалын Коши белгиси бойынша анықлаймыз:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| 2^n x^{3n} \arcsin \frac{x}{3n} \right|} =$$

$$= 2|x|^3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\arcsin \left|\frac{x}{3n}\right|} = 2|x|^3 < 1,$$

бул жерде белгили лимиттен $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0$ қолланылды. Буннан $x \in \left(-\sqrt[3]{0{,}5}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}5}\right)$. Енди бул интервалдыӊ шетки точкаларында қатарды жыйнақлылыққа тексеремиз.

а) $x = \sqrt[3]{0{,}5}$ де берилген қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt[3]{0{,}5}}{3n}$ салыстырыў белгиси бойынша таралыўшы болады, себеби $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатар таралыўшы ҳәм

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{arc\,sin\dfrac{\sqrt[3]{0,5}}{3n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{0,5}}{3n}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{\sqrt[3]{0,5}}{3}<1.$$

б) $x=-\sqrt[3]{0,5}$ де белгиси алмасып келиўши $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n arc\,sin\dfrac{\sqrt[3]{0,5}}{3n}$ қатар келип шығады. Бул қатар Лейбниц белгиси бойынша жыйнақлы болады, себеби

$$arc\,sin\frac{\sqrt[3]{0,5}}{3}>arc\,sin\frac{\sqrt[3]{0,5}}{6}>arc\,sin\frac{\sqrt[3]{0,5}}{9}>.......$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}arc\,sin\frac{\sqrt[3]{0,5}}{3n}=0.$$

Демек, берилген функционаллық қатардын жыйнақлылық областы $x\in\left[-\sqrt[3]{0,5}\,;\ \sqrt[3]{0,5}\right)$.

7–мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^{n/2}}\,tg^n x$ жыйнақлылық областын табың.

Шешими. Бул қатардың улыўма ағзасы $a_n=\dfrac{1}{n\cdot 3^{n/2}}\,tg^n x$ көринисте болып, қатар төмендеги шәрт орынлы болғанда жыйнақлы болады:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 3^{n/2}}\,tg^n x\right|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}|tg\,x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{|tg\,x|}{\sqrt{3}}<1,$$

бул жерде $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Буннан $-\sqrt{3}<tg\,x<\sqrt{3}$ теңсизлигинен

$$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right),\quad k\in Z.$$

Енди бул интервалдын шетки точкаларында қатарды жыйнақлылыққа тексеремиз.

а) $x_k = \frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$ де берилген қатар таралыўшы, себеби ол усы точкаларда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатарға тең болады.

б) $x_k = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$ де $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатар келип шығады. Бул қатар Лейбниц белгиси бойынша жыйнақлы болады, себеби

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots\ldots > \frac{1}{n} > \ldots\ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Демек, берилген функционаллық қатардын жыйнақлылық областы $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{3} + \pi k \right),\quad k \in Z$.

8–мысал. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\, ln(n+2)\, (x-3)^{2n}}$ жыйнақлылық областын табың.

Шешими. Бул қатар Даламбер белгиси бойынша төмендеги шәрт орынлы болғанда

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

жыйнақлы болады.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)\, ln(n+2)\, (x-3)^{2n}}{(n+3)\, ln(n+3)\, (x-3)^{2n+2}} = \frac{1}{(x-3)^2} < 1.$$

Буннан $(x-3)^2 > 1$ теңсизлигинен $x \in (-\infty;\, 2) \cup (4;\, +\infty)$. Енди шетки точкаларда қатарды жыйнақлылыққа тексеремиз.

$x = 2$ ҳәм $x = 4$ лерде берилген қатар $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\,ln(n+2)}$ интеграллық белгиси бойынша таралыўшы, себеби төмендеги меншиксиз интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\,ln(x+2)} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{d(ln(x+2))}{ln(x+2)} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} ln\,(ln(x+2))\Big|_{x=2}^{x=b} = +\infty$$

таралыўшы. Қатардың жыйнақлылық областы $x \in (-\infty;\, 2) \cup (4;\, +\infty)$.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Берилген функционаллық қатарлардың жыйнақлылық областын табың.

11.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$;

11.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

11.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$;

11.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2-4x+6)^n$;

11.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$;

11.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$;

11.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

11.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$;

11.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$;

11.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$;

11.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1\right)^{2x+1}}$;

11.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^3}$;

11.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$;

11.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2 - 5x + 11)^n}{5^n(n^2 + 5)}$;

11.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+x)^n}{n^n}$;

11.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(n+x)}$;

11.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^2}$;

11.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+x^n}{1-x^n}$;

11.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{xn^x}$;

11.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^{x^2-1}}$;

11.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n(n^2+1)}(25x^2 + 1)^n$;

11.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}$;

11.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3}{n^3+2} \cdot \dfrac{1}{(3x^2 + 10x + 9)^n}$;

11.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x + 2^n}$;

11.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$;

11.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n + |x|^{-n}}{2}$;

11.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n\,(n + e^x)}$;

11.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(n - e^x)(n^2+1)}$;

11.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n-x)^{1/3}}$;

11.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{3^{nx} + 2}$;

11.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n + x^2}$.

Берилген функционаллық қатарлардың жыйнақлылық областын табың.

12.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n}{n} x^{2n} \, sin\,(x + \pi n)$;

12.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n} \sin(2x-\pi n)$;

12.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{4n} \cos(x+\pi n)$;

12.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^{2n} \cos(x-\pi n)$;

12.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}} x^{4n} \sin(3x+\pi n)$;

12.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n} x^{2n} \sin(5x-\pi n)$;

12.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}} x^{2n} \cos(x+\pi n)$;

12.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n} \sin(3x-\pi n)$;

12.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \sin\frac{x}{n}$;

12.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{2n} x^n \sin\frac{x}{2n}$;

12.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin\frac{2x}{n}$;

12.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$;

12.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \, tg\frac{3x}{n}$;

12.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n x^{3n} \, tg\frac{x}{4\sqrt{n}}$;

12.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{3n} \, tg\frac{2x}{3n}$;

12.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} \arcsin\frac{x}{3n}$;

12.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 16^n x^{3n} \arcsin\frac{x}{\sqrt[3]{n}}$;

12.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 32^n x^{5n} \arcsin\frac{x}{\sqrt{n}}$;

12.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n \, arctg\frac{2x}{n+1}$;

12.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{3n} arctg \frac{x}{2(n+3)}$;

12.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 27^n x^{3n} arctg \frac{3x}{2n+3}$;

12.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} sin^{3n} x$;

12.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n n^2 sin^{3n} x$;

12.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} sin^{2n}(2x)$;

12.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} tg^{2n} x$;

12.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} sin^n(3x)$;

12.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} sin^{2n} x$;

12.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} tg^n(2x)$;

12.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} tg^n x$;

12.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n/2}} tg^n x$;

12.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} tg^n(2x)$.

Берилген функционаллық қатарлардың жыйнақлылық областын табың.

13.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2\sqrt{x-2} \cdot e^{-\frac{n^2}{(x-1)^2}}$;

13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$;

13.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \cdot 5^{-\frac{n}{(x+1)^2}}$;

13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{x-1} \cdot e^{-\frac{n}{x}}$;

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}$;

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 3^{\frac{n}{x-1}}$;

13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-n^3 sin\frac{x^2+1}{n}}$;

13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^n(x-1)}$;

13.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{nx} arctg \frac{x}{7^{nx}(x-1)}$;

13.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^{n}(x+2)}$;

13.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} \cdot 3^{-\frac{n}{x^{2}}}$;

13.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^{n}(x+e)}$;

13.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n^{2} sin \frac{x^{2}+1}{n}}$;

13.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\frac{n}{cos\, x}}$;

13.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+ln(lnx)\right)^{n}}{\sqrt{x-e^{1/e}}}$;

13.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{ln|x|}}$;

13.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^{n}\left(x+\frac{1}{e}\right)}$;

13.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin^{n} \frac{x \cdot ln(n)}{x-n}$;

13.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n\, sin\, x}}$;

13.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\, 5^{-n^{2} arctg \frac{1}{n|x|}}$;

13.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\, 3^{-n^{2} ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$;

13.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos \frac{n}{x-1}}{e^{n\sqrt{x}}}$;

13.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}} arcsin \frac{x}{3^{nx}}$;

13.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2x} arctg \frac{\sqrt{x}}{2^{nx}}$;

13.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, 2^{\frac{-n^{2}\, ln\, n}{x^{2}+1}}$;

13.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, ln\left(x-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{n}{ln\, x}}$;

13.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^n x}$;

13.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 5^{-\frac{n\, ln(n)}{x^2}}$;

13.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 sin \frac{1}{n^2 x^2}}$;

13.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{ln(1+x^2)}}$;

13.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}$.

Берилген функционаллык катарлардын жыйнактуулук областын табыӊ.

14.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}$;

14.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)\, 5^n}$;

14.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\, 9^n}$;

14.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$;

14.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$;

14.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$;

14.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$;

14.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$;

14.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$;

14.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)\, 4^n}$;

14.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)\, 2^n}$;

14.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n\,(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$;

14.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \, tg \frac{1}{3^n}$;

14.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n$;

14.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}}$;

14.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$;

14.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$;

14.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}$;

14.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n-2)(x-3)^{n}}{(n+1)^{2} \cdot 2^{n+1}}$;

14.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^{n}}{(n+4)\ ln\,(n+4)}$;

14.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\,ln\,(n+2)\,(x-3)^{2n}}$;

14.22. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n}\, n^{2}\, (x+2)^{n}}$;

14.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^{n^{2}}}{n^{n+1}}$;

14.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{5}}{x^{n}}$;

14.25. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{3^{n}\,(x+3)^{n}}$;

14.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n}\,(x+1)^{2n}}{n}$;

14.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+5}{(2n+9)^{5}\,(x+2)^{2n}}$;

14.28. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{n^{2}+1}{5^{n}\,(x+4)^{n}}$;

14.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^{n}}{3^{n}\,(2n+1)}$;

14.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2}\,(x-3)^{n}}{(n^{4}+1)^{2}}$;

14.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{5}\,x^{2n}}{2n+1}$.

5–§. Функционаллық избе-излик ҳәм қатарлардың тең өлшеўли жыйнақлылығы

Мейли базы бир

$$\{f_n(x)\}: \ f_1(x), \ f_2(x), \ ....., \ f_n(x), \ ..... \qquad (5.1)$$

функционаллық избе-излиги берилген болып, $E\left(E \subset R^1\right)$ оның жыйнақлылық областы, ал $f(x)$ функциясы бул избе-изликтиң лимит функциясы болсын. Демек, $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излик E көпликтиң ҳәр бир x_0 $(x_0 \in E)$ точкасында, $n \to \infty$ да сәйкес $f(x_0)$ ге умтылады:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Избе-изликтиң лимити анықламасы бойынша бул төмендегини аңлатады:

$\forall \varepsilon > 0$ саны алынғанда ҳәм, сондай $N_0 = N(\varepsilon, x_0)$ номери табылып, барлық қәлеген $n \geq N_0$ номерлер ушын

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

бул жерде N_0 натурал саны $\varepsilon > 0$ ға ҳәм алынған x_0 точкаға ғәрезли.

1–мысал. Мына функционаллық избе-изликти қарайық:

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n+x}\right\}, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Шешими. Бул функционаллық избе-изликтиң лимит функциясы $f(x) = x$ болады:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{n\left(\frac{1}{n} + 1 + \frac{x}{n}\right)} = x$$

Анықлама бойынша $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ қылып алынғанда ҳәм сондай $N_0 = N(\varepsilon, x_0)$ номери бар болады. Усы номерди төмендеги теңсизликтен анықлаймыз:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{nx_0}{1+n+x_0} - x_0\right| = \frac{x_0(1+x_0)}{1+n+x_0} < \varepsilon. \qquad (5.2)$$

Элементар есаплаўлар нәтийжесинде

$$N_0 = \left[(1+x_0)\left(\frac{x_0}{\varepsilon} - 1 \right) \right] + 1$$

тең болады, бул жерде [ ] қаўысы санның пүтин бөлегин аңлатады.

Демек, $\forall n \geq N_0$ ҳәм $0 \leq x_0 \leq 1$ точкасы ушын (5.2) теңсизлиги орынлы болады, бул жерде N_0 номери ε ҳәм x_0 точкаға ғәрезли. Енди N_0^* деп

$$N_0^* = \max_{0 \leq x_0 \leq 1} N_0 = \left[2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right] + 1$$

номерди алсақ, онда $\forall n \geq N_0^*$ ҳәм $\forall x \in [0;1]$ ушын (5.2) теңсизлиги орынлы болады. Бул N_0^* номери барлық $x\,(0 \leq x \leq 1)$ точкалар ушын улыўма болып, берилген избе-изликтиң өз лимит функциясына тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин аңлатады.

2–мысал. Мейли функционаллық избе-излиги берилген болсын:

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Шешими. Оның лимит функциясы:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Бул анықлама бойынша төмендегини анлатады:

$\forall \varepsilon > 0$ санын қәлегенше қылып алып, сондай $N_0 = N(\varepsilon, x_0)$ номерди

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} - 0 \right| = \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} < \frac{1}{nx_0} < \varepsilon \qquad (5.3)$$

элементар теңсизликтен табамыз. Ол

$$N_0 = N(\varepsilon, x_0) = \left[\frac{1}{\varepsilon\, x_0} \right] + 1, \quad (x_0 \neq 0) \qquad (5.4)$$

деп алынса, онда $\forall n \geq N_0$ ҳәм $0 < x_0 \leq 1$ точкасы ушын (5.3) тиң орынлы екенлиги анық, бул жерде $\forall n \in N$ ушын $f_n(0) = f(0) = 0$ (тривиал жағдай).

Егер $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ деп алсақ, онда $\forall n \in N$ номери ҳәм $x_0 = \frac{1}{n}$ точкалары ушын

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2} \cdot n^2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 .$$

Демек, барлық $x\,(0 < x \le 1)$ точкалар ушын улыўма болған ҳәм (5.3) теңсизлиги орынлы болатуғын N_0 номери анықланбаған. Сонлықтан, берилген избе-излик тең өлшеўли жыйнақлы емес.

1–анықлама. Егер $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\exists N_\varepsilon$ номери табылып, қәлеген $\forall n \ge N_\varepsilon$ номери ҳәм қәлеген $\forall x \in E$ точкасы ушын

$$|\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon \tag{5.5}$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги E көплигинде $f(x)$ лимит функциясына **тең өлшеўли жыйнақлы** деп аталады ҳәм бул тастыйықлаў

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad \forall x \in E$$

символикалық көринисте белгиленеди.

1–салдар. Егер сондай n_0 номери ҳәм $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ болатуғын $\{a_n\}$ санлы избе-излиги табылып төмендеги

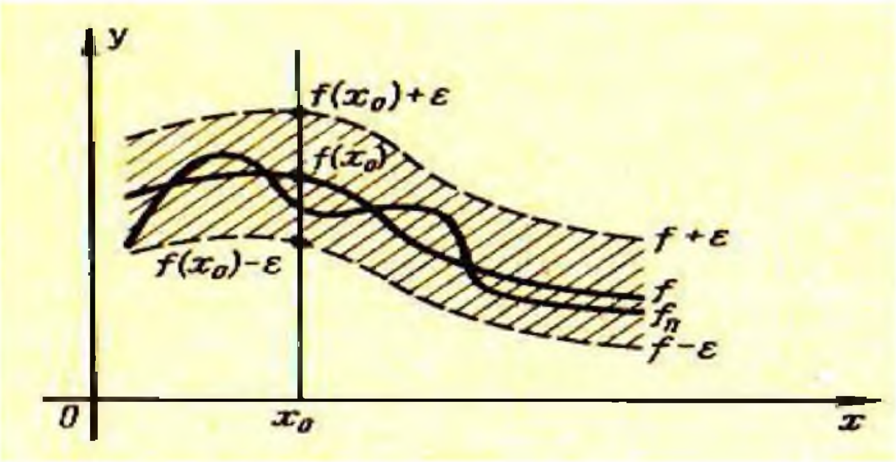
$$\forall n \ge n_0, \ \ \forall x \in E \to \ \left| f_n(x) - f(x) \right| \le a_n$$

теңсизлиги орынлы болса, онда $f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad \forall x \in E$.

Базы бир E көплигинде берилген $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-изликтин $f(x)$ лимит функциясына тен өлшеўли жыйнақлы болыўы әпиўайы геометриялық мағанаға ийе, яғный $\forall \varepsilon > 0$ ушын сондай $n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ номери табылып қәлеген $\forall n \ge n_\varepsilon$ ҳәм $\forall x \in E$ точкасы ушын $|\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$ теңсизлиги орынлы болады. Бул $f_n(x)$ функциялардың «графиклери» $f(x)$ лимит функциясының графигин өз ишине алатуғын «ε–жол» дан сыртқа шығып кетпеслигин аңлатады, яғный

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad x \in E$$

Демек, жетерли дәрежеде киши $\varepsilon > 0$ ҳәм жетерли дәрежеде үлкен n, $n \geq n_\varepsilon$ лерде пүткил E көпликте $f(x)$ функцияны $f_n(x)$ функциялардың мәнислери менен «ε» нан киши болған қәтелик пенен жуўықластырыў мүмкин.



3-сызылма

3–мысал. $f_n(x) = x^n$, $(0 \leq x \leq 1)$ функционаллық избе-излигиниң лимит функциясы төмендегише болады:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Бирақ, бул лимит функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болмайды, себеби $0 < \varepsilon < 1, \quad 0 < x < 1$ деп алсақ, онда

$$| f_n(x) - f(x) | = x^n < \varepsilon$$

теңсизлиги тек $\forall n > n(\varepsilon, x) = \frac{ln\varepsilon}{lnx}$ лерде ғана орынлы болады. Буннан

$0 < \varepsilon < 1$ да $n(\varepsilon, x) = \frac{ln\varepsilon}{lnx} \to +\infty, \quad x \to 1 - 0$ болады. Демек, $0 < \varepsilon < 1$ да x өзгериўшисиниң $0 \leq x < 1$ ярым интервалдағы барлық мәнислери ҳәм $\forall n > n(\varepsilon)$ лерде $| f_n(x) - f(x) | = x^n < \varepsilon$ теңсизлиги дурыс болатуғын x өзгериўшисине ғәрезли болмаған сондай $n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ номери анықланбаған.

Егер $0 \le x \le 1$ кесиндини «киширек» $0 \le x \le 1-\delta$, $0<\delta<1$ кесинди менен алмастырсақ, онда $f_n(x)=x^n$ избе-излиги $f(x)\equiv 0$ лимит функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болады. Ҳақыйқатында да, барлық $0 \le x \le 1-\delta$ да

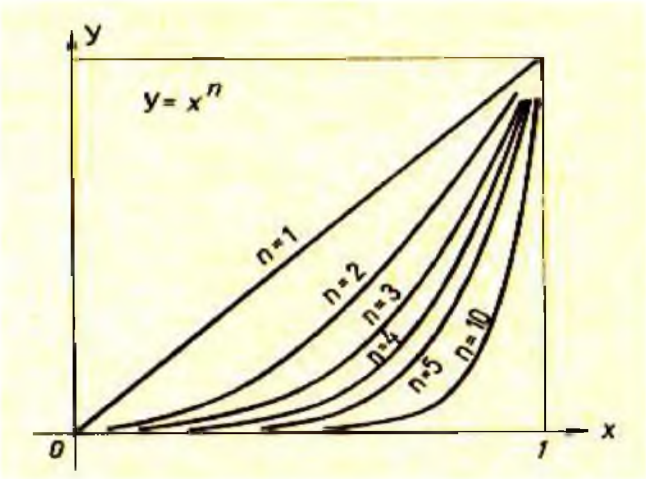
$n(\varepsilon,x)=\frac{ln\varepsilon}{lnx} \le n(\varepsilon)=\frac{ln\varepsilon}{ln(1-\delta)}$ болады. Сонда

$$\forall n > n(\varepsilon)=\frac{ln\varepsilon}{ln(1-\delta)}, \quad \forall x \in \left[0, 1-\delta\right] \to |\, f_n(x)-f(x)\,| = x^n < \varepsilon,$$

яғный

$$f_n(x)=x^n \rightrightarrows 0, \qquad 0 \le x \le 1-\delta.$$

Бул мысалдың анализине геометриялық жақтан нәзер салып көремиз.



4-сызылма

Сызылмада $f(x)$ лимит функцияның графиги $0 \le x < 1$ ярым кесиндиден ҳәм координаталары $(1, 1)$ болған жеккеленген точкадан ибарат. $f(x)$ лимит функциясының графиги «ε–жолы» $(0<\varepsilon<1)$ менен қапланған болсын. $f_n(x)=x^n$ функцияларының ҳәр бириниң графиги координата басынан өтип, әлбетте, базы бир x, $0<x<1$ да усы «ε–жолы» нан шығып кетеди, себеби олардың ҳәр бириниң оң ушлары $(1, 1)$ точкаға умтылады. Бул $f_n(x)=x^n$, $n=1,2,...$ избе-изликтиң $0 \le x \le 1$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин билдиреди, яғный

$$f_n(x)=x^n \not\rightrightarrows 0, \qquad 0 \le x \le 1.$$

4–мысал. E көпликте берилген $\{f_n(x)\}$ избе-излигиниң $f(x)$ лимит функциясын табың. Егер:

а) $f_n(x)=\dfrac{n+1}{n+x^2}$, $E=[-1,1]\to f_n(x)=\dfrac{1+1/n}{1+x^2/n}$ дан $f(x)=1$.

$|x|\le 1$ лер ушын

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{n+1}{n+x^2}-1\right|=\frac{1-x^2}{n+x^2}\le\frac{1}{n},$$

буннан 1–салдар бойынша $a_n=\dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. Демек,

$$f_n(x)=\frac{n+1}{n+x^2}\rightrightarrows 1,\quad x\in[-1,1].$$

б) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$, $E=R^1$ $(E=(-\infty,+\infty))\to f(x)=|x|$.

Төмендеги теңсизликке көре

$$x^2+\frac{1}{n}\le\left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

мына баҳалаўлар дурыс болады, яғный

$$0\le\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{x^2}\le|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}-|x|=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Сонда 1–салдар бойынша $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Демек,

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\rightrightarrows|x|\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

в) $f_n(x)=n\,sin\dfrac{1}{nx}$, $E=[1,+\infty)$.

Биз бул избе-изликтиң лимит функциясы $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ге тең екенлигин алдын есаплап шыққан един. Енди $g(t)=sin\,t$ функциясы ушын $t_0=0$ точка дөгерегинде Тейлор формуласын

$$g(t)=g(t_0)+\frac{g'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{g''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+.....+$$

$$+\frac{g^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

$n=1$ болғанда қолланамыз. Сонда

$$sin\,t=t-\frac{sin\,\xi}{2!}t^2.$$

Буннан

$$|sin\,t-t|\le\frac{t^2}{2},\quad t\in R^1.$$

Жуўмағында $x\ge 1$ лерде

$$|f_n(x)-f(x)|=n\left|sin\frac{1}{nx}-\frac{1}{nx}\right|\le n\frac{1}{2(nx)^2}\le\frac{1}{n}.$$

Нәтийжеде 1–салдарға муўапық, $a_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Демек,

$$n\,sin\frac{1}{nx}\Rightarrow\frac{1}{x},\quad x\in[1,+\infty).$$

5.1–теорема. Базы бир E көплигинде берилген $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги $f(x)$ лимит функциясына E де тең өлшеўли жыйнақлы болыўы ушын

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0 \tag{5.6}$$

шәрттиң орынлы болыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Дәлиллениўи. Егер $\sigma_n=\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0$ деп белгилеў киритсек, онда (5.6) шәрти

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon=n(\varepsilon):\ \forall n\ge n_\varepsilon\to\ \sigma_n<\varepsilon \tag{5.7}$$

екенлигин билдиреди.

Мейли $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, $\forall x\in E$ болсын, онда анықлама бойынша

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon:\ \forall n\ge N_\varepsilon,\ \forall x\in E\to|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

болады, буннан

$$n_\varepsilon = N_\varepsilon : \ \forall n \geq N_\varepsilon \to \ \sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \, .$$

Енди керисин болжаймыз. (5.6) ямаса оған тең күшли болған (5.7) шәртлердиң биреўи орынлы болсын. Сонда $\forall x \in E, \ \ \forall n \in N$ лар ушын дурыс болған $| \, f_n(x) - f(x) \, | \leq \sigma_n$ теңсизликтен төмендеги жуўмаққа келемиз:

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists n_\varepsilon : \ \forall n \geq n_\varepsilon , \ \ \forall x \in E \ \to \ | \, f_n(x) - f(x) \, | < \varepsilon \, ,$$

яғный

$$f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad \forall x \in E \, .$$

5–мысал. Төмендеги

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad E = [0,1]$$

избе-изликтиң тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин көрсетиң.

Шешими. Егер $x \in [0,1)$ болса, онда $x^n \to 0, \quad n \to \infty$ екенлигинен $f_n(x) \to 0, \quad n \to \infty$ ғы анық. $x = 1$ де $f_n(1) = 0$, буннан $f(1) = 0$. Сонлықтан берилген избе-изликтин лимит функциясы

$$f(x) = 0, \quad x \in [0,1] .$$

Енди $\sup\limits_{x \in E} | \, f_n(x) - f(x) \, | = \sup\limits_{x \in E} | \, f_n(x) |$ анықлаў ушын $f_n(x)$ функциясының экстремум мәнислерин табыў керек. Белгили алгоритм бойынша бул функцияның ең үлкен мәнисин анықлаймыз.

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - x(n+1)) = 0$$

теңлемеси $[0, \, 1]$ кесиндиде бирден бир $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ коренге ийе. Сонда

$$f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n}$$

болады. Монотонлық аралықлары

$$f_n'(x) > 0, \quad x \in (0, x_n) \quad \text{ҳәм} \quad f_n'(x) < 0, \quad x \in (x_n, 1) .$$

Буннан $\sup\limits_{x\in E} f_n(x)=\max\limits_{x\in E} f_n(x)=f_n(x_n)<\frac{1}{n}, \quad \forall n\in N$. Сонлықтан 5.1–теоремаға муўапық $f_n(x)=x^n-x^{n+1}\Rightarrow 0, \quad x\in[0,\ 1]$ болады.

6–мысал. Мына

$$f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}, \quad \alpha>4, \quad E=R^1$$

избе-изликти тең өлшеўли жыйнақлылыққа тексериң.

Шешими. Егер $x=0$ болса, онда $\forall n\in N$ де $f_n(0)=0$ болады, ҳәм соның ушын $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=f(0)=0$. Ал, егер $x\neq 0$ болса, онда

$$|f_n(x)|=\left|\frac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}\right|\leq\frac{2n^2|x|}{n^\alpha x^2}=\frac{2}{|x|\,n^{\alpha-2}}\to 0, \quad n\to\infty \ (\alpha>4).$$

Демек, бул избе-изликтиң лимит функциясы $f(x)=0, \quad x\in R^1$.

Енди белгили теңсизликтен пайдаланамыз, яғный $x\neq 0$ де

$$\left(1-n^{\alpha/2}|x|\right)^2\geq 0 \ \to \ 1+n^\alpha x^2\geq 2n^{\alpha/2}|x|.$$

Бул жерде теңсизлик тек бир жағдайда $|x|=n^{-\alpha/2}$ ге тең болғанда теңликке айланады. Бул теңсизликке көре төмендеги баҳалаўлар орынлы болады:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{2n^2|x|}{2n^{\alpha/2}|x|}=\frac{1}{n^{\alpha/2-2}}, \quad (\alpha>4, \ x\neq 0).$$

Сонлықтан

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n^{\alpha/2-2}}\to 0, \quad n\to\infty, \quad \alpha>2.$$

Жуўмағында 5.1–теорема тастыйықлаўы бойынша

$$f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}\Rightarrow 0, \quad x\in R^1, \ \alpha>4$$

болады.

7–мысал. Төмендеги функционаллық избе-изликти

$$\{f_n(x)\}=\left\{n\left(\sqrt{x+1/n}\ -\ \sqrt{x}\right)\right\} \quad (0<x<\infty)$$

қараймыз. Бул избе-изликтиң лимит функциясын табамыз:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x}\right)=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\left(\sqrt{x+1/n}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad (0<x<\infty).$$

Демек, $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(0<x<\infty)$. Бул жағдайда,

$$\sup_{0<x<\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|=$$

$$=\sup_{0<x<\infty}\left|n\left(\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|=\sup_{0<x<\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|=$$

$$=\sup_{0<x<\infty}\frac{\sqrt{x+1/n}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}\right)}=\sup_{0<x<\infty}\frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1/n}+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\sup_{0<x<\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{nx+1}+\sqrt{nx}\right)^2}=\infty$$

болып, берилген функционаллық избе-излик ушын 5.1–теорема шәртлери орынланбайды, яғный берилген функционаллық избе-излик өз лимит функциясына тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

5.2–теорема (избе-изликтиң тең олшеўли жыйнақлы болыўының Коши критериясы). E көпликте берилген $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги усы көпликте тен өлшеўли жыйнақлы болыўы ушын төмендеги Коши шәртиниң орынлы болыўы

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon:\ \forall n\ge N_\varepsilon,\ \ \forall p\in N,\quad \forall x\in E\ \to\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon \qquad (5.8)$$

зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Дәлиллениўи. Зәрүрлиги. Мейли $f_n(x)\Rightarrow f(x),\quad \forall x\in E$ болсын. Сонда избе-изликтиң тең өлшеўли жыйнақлылық анықламасы бойынша

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon:\ \forall k\ge N_\varepsilon,\ \ \forall x\in E\ \to\ \left|f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon/2 \qquad (5.9)$$

Дара жағдайда, егер $n \geq N_\varepsilon$ болса, онда (5.9) теңсизлиги $k = n$ ҳәм $k = n + p$, $p \in N$ мәнислери ушын орынлы болады, яғный

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \qquad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2,$$

буннан

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |(f_{n+p}(x) - f(x)) - (f_n(x) - f(x))| \leq$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Демек, (5.8) шәрт орынлы болады.

Жеткиликлиги. Мейли ҳәр бир тайынланған $x_0 \in E$ точкада $\{f_n(x_0)\}$ санлы избе-излиги (5.8) Коши шәртин қанаатландырсын. Сонда санлы избе-изликлер ушын Коши критериясына көре

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) \tag{5.10}$$

лимити шекли болады. (5.10) лимиттиң мәниси ҳәр бир тайынланған $x_0 \in E$ точкада бар ҳәм шекли болыўынан бул көпликте $\{f_n(x)\}$ избе-изликтиң лимит функциясы болатуғын базы бир $f(x)$ функциясы анықланған болады.

Енди (5.8) Коши шәртин төмендегише қылып жазып аламыз:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N, \quad \forall x \in E \to |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2. \tag{5.11}$$

Дәслеп (5.11) теңсизликте ҳәр бир тайынланған $n \geq N_\varepsilon$ ҳәм тайынланған $x \in E$ лерде $p \to \infty$ да лимитке өтемиз. Нәтийжеде,

$$\lim_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$$

екенлигин есапқа алған ҳалда төмендеги теңсизликке ийе боламыз:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall x \in E \to |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

Соңғы шәртлер $f_n(x) \Rightarrow f(x), \quad \forall x \in E$ екенлигин аңлатады.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–салдар. Егер (5.8) Коши шәрти орынлы болмаса, яғный

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in N \quad \exists n \geq k \quad \exists p \in N \quad \exists \tilde{x} \in E: |f_{n+p}(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0, \tag{5.12}$$

онда $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

8–мысал. Төмендеги функционаллық избе-изликтиң

$$f_n(x) = \frac{ln\,nx}{\sqrt{nx}}, \quad E = (0,1)$$

тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин көрсетемиз.

Шешими. Оның ушын Коши шәртиниң орынлы емес екенлигин, яғный (5.12) ниң шәртлерин тексерип көремиз. Егер $\forall k \in N$ ушын $n = k$, $p = n = k$, ҳәм $\tilde{x} = \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$ деп алсақ, онда

$$|\, f_{n+p}(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})\,| = \left| f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) - f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{ln\,2}{\sqrt{2}} - ln\,1 \right| = \frac{ln\,2}{\sqrt{2}} = \varepsilon_0 \,.$$

Бул Коши шәртине кери болған (5.12) ниң барлық шәртлерин қанаатландыратуғын параметрлердиң бар екенлиги берилген избе-изликтиң берилген интервалда тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин аңлатады.

2–анықлама (функционаллық избе-изликтиң тең олшеўли жыйнақлы болмаўы). E көпликте берилген $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излигиниң $f(x)$ лимит функциясы бар болып (5.5) шәрти орынлы болмаса, яғный

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in N \quad \exists n \geq k \quad \exists \tilde{x} \in E: \;|\, f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\,| \geq \varepsilon_0, \qquad (5.13)$$

онда $\{f_n(x)\}$ избе-излиги E көплигинде $f(x)$ ке тең өлшеўли жыйнақлы емес деп аталады.

9–мысал. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $E = [0,1]$ избе-изликтиң тең өлшеўли жыйнақлылыққа тексеремиз.

Шешими. Берилген избе-изликтиң лимит функциясы $f(x) = 0$, $x \in E$. Енди (5.13) ниң шәртлерин тексерип көремиз. Егер $\forall k \in N$ ушын $n = k$ ҳәм $\tilde{x} = 1/\sqrt[n]{2}$ деп алсақ, онда $\forall n \in N$ лерде $\tilde{x} \in E$ болып, буннан

$$|\, f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\,| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 \,.$$

Бул $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x),\ x \in E$ избе-изликтиң берилген кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин аңлатады.

Избе-изликтиң тең өлшеўли жыйнақлы болмаў шәртлерин 5.1–теорема дан ҳәм пайдаланып келтирип өтиў мүмкин.

2–салдар. Егер (5.6) шәрти орынлы болмаса, яғный

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.14}$$

онда $\{f_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги E көплигинде $f(x)$ лимит функцияға тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

10–мысал. $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $E = (0, 2)$ избе-изликтиң тең өлшеўли жыйнақлылыққа тексеремиз.

Шешими. Берилген избе-излик ушын (5.14) шәрт орынлы болады. Ҳақыйқатында да, дәслеп оның лимит функциясын табамыз:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2x^2}{e^{nx}} = 0, \quad E = (0, 2).$$

Төмендеги теңлеме

$$f_n'(x) = n^2xe^{-nx}(2 - xn) = 0$$

(0, 2) интервалға тийисли болған жалғыз $x_n = 2/n$ коренге ийе болып, ал монотонлық аралықлары

$$f_n'(x) > 0, \quad x \in (0, x_n) \quad \text{ҳәм} \quad f_n'(x) < 0, \quad x \in (x_n, 2).$$

Буннан

$$\sup_{x \in (0,2)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(x_n) = \frac{4}{e^2} \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Сонлықтан $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx} \not\rightrightarrows f(x) = 0, \quad E = (0, 2)$ болады.

Функционаллық қатарлардың тең өлшеўли жыйнақлы болыў критериялары

Мейли $u_n(x),\ n \in N$ функциялары E көпликте анықланған ҳәм

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x) \qquad (5.15)$$

болсын.

3–анықлама. Егер E көпликте анықланған сондай $S(x)$ функциясы бар болып

$$S_n(x)\rightrightarrows S(x),\quad x\in E \qquad (5.16)$$

болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (5.17)$$

функционаллық қатары E көпликте **тең өлшеўли жыйнақлы** деп аталады.

(5.16) тең өлшеўли жыйнақлылық анықламасын төмендегише қылып ҳәм келтирип өтиў мүмкин:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon:\ \forall n\ge N_\varepsilon,\ \forall x\in E\ \to\ \left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon. \qquad (5.18)$$

Егер $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ деп (5.17) қатардың $n-$ши қалдығын белгилесек, онда (5.16) шәрти төмендеги көринисте

$$r_n(x)\rightrightarrows 0,\quad x\in E,$$

болады, яғный

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N_\varepsilon:\ \forall n\ge N_\varepsilon,\ \forall x\in E\ \to\ \left|r_n(x)\right|<\varepsilon. \qquad (5.19)$$

5.1–теоремаға муўапық (5.17) қатардың E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болыўы ушын

$$\sup_{x\in E}\left|r_n(x)\right|\to 0,\qquad n\to\infty \qquad (5.20)$$

шәрттиң орынланыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли болады.

Егер (5.17) функционаллық қатар E көпликте жыйнақлы, бирақ (5.19) ямаса оған тең күшли (5.20) шәртлердиң биреўи орынланбаса, онда (5.17) қатар E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болмайды деп айтылады.

Демек, егер

$$\exists\varepsilon_0>0:\quad \forall k\in N\quad \exists n\ge k\quad \exists\widetilde{x}\in E:\ \left|r_n(\widetilde{x})\right|\ge\varepsilon_0, \qquad (5.21)$$

ямаса

$$\sup_{x \in E} |r_n(x)| \not\to 0, \qquad n \to \infty \tag{5.22}$$

болса, онда (5.17) қатар E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

5.3–теорема (Коши критериясы). (5.17) қатар E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болыўы ушын төмендеги Коши шәртиниң орынлы болыўы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N, \quad \forall x \in E \to \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \tag{5.23}$$

зәрүрли ҳәм жеткиликли.

1–салдар. Егер (5.23) Коши шәрти орынлы болмаса, яғный

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall m \in N \quad \exists n \geq m \quad \exists p \in N \quad \exists \tilde{x} \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\tilde{x}) \right| \geq \varepsilon_0, \tag{5.24}$$

онда (5.17) функционаллық қатар E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

Дара жағдайда, егер

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall n_0 \in N, \quad \exists n \geq n_0 \quad \exists x_n \in E: \ |u_n(x_n)| \geq \varepsilon_0, \tag{5.25}$$

онда (5.17) функционаллық қатар E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

11–мысал. Төмендеги $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарларды берилген көпликлерде тең өлшеўли жыйнақлылыққа тексериң. Егер:

а) $u_n(x) = x^{n-1}$, $E_1 = (-q, q)$, бул жерде $0 < q < 1$, $E_2 = (-1, 1)$;

б) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$, $E = [0, +\infty)$.

Шешими. а) бул жағдайда геометриялық прогрессияның қосындысын есаплаў формуласы бойынша $S_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $\forall x \in E_1, E_2$.

Енди $\forall x \in E_1$ ушын төмендеги теңсизлик

$$|r_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \le \frac{|x|^n}{1-|x|},$$

дурыс болғанлықтан (5.20) шәрт орынлы болады, яғный

$$\sup_{x \in E_1} |r_n(x)| \le \frac{q^n}{1-q} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Демек, қатар E_1 көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы.

Берилген функционаллық қатар E_2 көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болмайды, себеби $\forall n \in N$ ушын сондай $\exists \tilde{x} \in E_2$, $\tilde{x} = 1 - \frac{1}{n}$ бар болып бул точкаларда жоқарыдағы (5.22) шәрт дурыс болады:

$$\sup_{x \in E_2} |r_n(x)| \not\to 0, \quad n \to \infty,$$

яғный

$$r_n(\tilde{x}) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

б) $\forall x \ge 0$ мәнислеринде $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$, $n = 1,2,.....$ избе-излиги монотон кемип нолге умтылады, сонлықтан белгиси алмасып келиўши санлы қатарлардың жыйнақлылығы ҳаққындағы Лейбниц белгиси бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0, +\infty)$$

қатары $E = [0, +\infty)$ көплигинде жыйнақлы болады. Бундай қатардың белгили қәсийетине көре

$$|r_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

теңсизлиги дурыс болғанлықтан (5.20) шәрт орынлы, яғный

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |r_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Демек, қатар $E = [0, +\infty)$ көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы.

12–мысал. Мына

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \qquad (0 \le x < +\infty)$$

функционаллық қатарды қараймыз.

Шешими. Бул қатардың дара қосындысы

$$S_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}$$

болып, онық қосындысы

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Енди берилген қатарды тең өлшеўли жыйнақлылыққа анықлама бойынша тексерип көремиз, яғный $\forall \varepsilon > 0$ саны алынғанда сондай $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x)\right] + 1$ номери табылып барлық $n \ge n_0$ номерлер ушын

$$| S_n(x) - S(x) | = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+1+n} < \varepsilon \qquad (5.26)$$

теңсизлиги орынлы болады. Бунда n_0 номери $\varepsilon > 0$ ҳәм x $(0 \le x \le +\infty)$ точкаға ғәрезли. Бирақ, егер n_0^* деп

$$n_0^* = \max_{0 \le x < +\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon} - (1+x)\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$$

көринисте алынса, онда $n \ge n_0^*$ болған n де жоқарыдағы (5.26) теңсизлиги дурыс болады. Демек, берилген функционаллық қатар ушын анықламадағы n_0^* номери барлық x $(0 \le x \le +\infty)$ точкалар ушын улыўма болады, яғный x қа ғәрезли болмайды. Бул, функционаллық қатардың берилген аралықта тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин аңлатады.

13–мысал. Төмендеги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \qquad (0 < x < +\infty)$$

функционаллық қатарды қараймыз.

Шешими. Бул қатардын дара қосындысы

$$S_n(x) = \frac{x}{1\cdot(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + ...+ \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + ...+ \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 - \frac{1}{nx+1}$$

болып, онын қосындысы

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 \quad (0 < x < \infty).$$

Анықлама бойынша $\forall \varepsilon > 0$ қылып алынғанда да сондай номери $n_0 = \left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$, $x \neq 0$ бар болып, барлық $n > n_0$ ушын

$$| S_n(x) - S(x) | = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{(n_0+1)x+1} < \varepsilon$$

болады. Бул жерде ҳәм n_0 номери $\varepsilon > 0$ ҳәм $x\ (0 < x < +\infty)$ точкасына ғәрезли. Бул номерди барлық $x\ (0 < x < +\infty)$ точкалар ушын улыўма қылып таңлай алмаймыз, себеби $n_0 = \left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$ диң $(0, +\infty)$ аралықта x өзгериўшиси бойынша максимумы анықланбаған.

Басқаша қылып түсиндиргенде, қәлеген $\forall n \in N$ ушын сондай $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right)$ саны бар болып шексиз көп $x = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$ точкаларда төмендеги

$$| S_n(1/n) - S(1/n) | = \frac{1}{n\cdot\frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0$$

теңсизлик дурыс болады. Бул берилген қатардың көрсетилген аралықта тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин аңлатады.

Енди берилген қатардың $E_1 = (\delta, +\infty)$, $\delta > 0$ көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болатуғынлығын көрсетемиз. Ҳақыйқатында да, бул жағдайда

$$|\, r_n(x) \,| = |\, S_n(x) - S(x) \,| = \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1+n\delta} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

яғный (5.19) шәрт орынлы болады.

14–мысал. Төмендеги $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарларды берилген көпликлерде тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин көрсетиң. Егер:

а) $u_n(x) = \dfrac{n^2}{x} e^{-\frac{n^2}{x}}$, $\quad E = (0, +\infty)$;

б) $u_n(x) = \dfrac{n}{1+n^2x^2}\, tg \sqrt{\dfrac{x}{n}}$, $\quad E = (0, 1)$;

в) $u_n(x) = \dfrac{sin\, nx}{n^{\alpha}}$, $\quad E = [0, 2\pi]$, $\quad 0 < \alpha \le 1$.

Шешими. а) $\forall n \in N$ ушын сондай шексиз көп сандағы $x_n = n^2 \in (0, +\infty)$ точкалары ҳәм $\varepsilon_0 = 1/3$ саны бар болып

$$|u_n(x_n)| = e^{-1} \ge \varepsilon_0$$

(5.25) шәрт дурыс болады. Бул берилген қатардың E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин аңлатады.

б) дәслеп биринши әжайып лимитти келтирип шығарыўда қолланылатуғын төмендеги теңсизликтен пайдаланамыз:

$$tg\, x > x\,, \qquad 0 < x < \pi/2\,.$$

Сонда бул мысалда ҳәм $\forall n \in N$ ушын сондай шексиз көп сандағы $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0, 1)$ точкалары ҳәм $\varepsilon_0 = 1/2$ саны

$$|u_n(x_n)| = \frac{n}{2}\, tg \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

табылады. Демек, берилген қатар E көплигинде тен өлшеўли жыйнақлы емес екен.

в) дәслеп бул мысалда $\forall n \in N$ ушын $x_n = \dfrac{\pi}{4(n+1)} \in [0, 2\pi]$ точкалары ушын төмендеги баҳалаўлар дурыс болады.

Мейли $n+1 \le k \le 2n$ болсын, онда

$$(n+1) \cdot \frac{\pi}{4(n+1)} \le k\, x_n \le 2n \cdot \frac{\pi}{4(n+1)},$$

$$\frac{\pi}{4} \le k\, x_n \le \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2n}{n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Соның ушын $sin\, k x_n \ge sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, буннан $0 < \alpha \le 1$ лерде

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{sin\, k x_n}{k^{\alpha}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{\alpha}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{\sqrt{2}}\, n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ge \varepsilon_0,$$

баҳалаўы дурыс. Демек, (5.24) шәрт орынлы болып, берилген қатар $E = [0, 2\pi]$ көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болмайды.

15–мысал. Анықламасы бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{7n-11}$ функционаллық қатарлардың $[0; 1]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин дәлиллең. n – ниң қандай мәнислеринде $\forall x \in [0; 1]$ да қатардың қалдық ағзасы абсолют шамасы бойынша 0,1 ден үлкен болмайды?

Шешими. Егер қатардың қосындысын $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{7n-11}$, ал оның n – ши дара қосындысын $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{7k-11}$ деп белгилеп алсақ, онда

$$|S(x) - S_n(x)| = |\, r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{7k-11} \right|.$$

Бунда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^k}{7k-11}$ белгиси алмасып келиўши қатар болыўынан оның қосындысы абсолют шамасы бойынша өзиниң 1–ши ағзасынан үлкен болмайды, яғный

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{7k-11}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{7n-4} < \frac{1}{7n-4}, \qquad \forall x\in[0;1].$$

Қатардың тең өлшеўли жыйнақлылығы анықламасы бойынша

$$|S(x)-S_n(x)| < \frac{1}{7n-4} < \varepsilon \ \to \ n_\varepsilon = n(\varepsilon) > \frac{1}{7}\left(\frac{1}{\varepsilon}+4\right).$$

Демек, мәселениң шәрти бойынша $\varepsilon = 0{,}1$. Сонда $n(\varepsilon) > \frac{1}{7}\left(\frac{1}{0{,}1}+4\right) = 2$.

Буннан $\forall n \ge 3$ ушын $|r_n(x)| < 0{,}1$.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Анықламасы бойынша төмендеги функционаллық қатарлардын $[0,1]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин дәлиллең. n – ниң қандай мәнислеринде $\forall x\in[0,1]$ да қатардың қалдық ағзасы абсолют шамасы бойынша 0,1 ден үлкен болмайды?

15.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n-11}$;

15.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-6}$;

15.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4n-6}$;

15.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-5}}$;

15.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4n-5}$;

15.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-9}$;

15.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3n-4}$;

15.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-2}}$;

15.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-11}$;

15.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-7}}$;

15.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n-10}$;

15.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-8}$;

15.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-4}}$;

15.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n-3}$;

15.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{8n-12}$;

15.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-7}$;

15.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-8}$;

15.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-10}$;

15.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4n-7}$;

15.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5n-7}$;

15.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{7n-13}$;

15.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-21}}$;

15.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3n-5}$;

15.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-19}}$;

15.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{8n-11}$;

15.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-11}}$;

15.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-12}}$;

15.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-3}}$;

15.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{9n-15}$;

15.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10n-12}$;

15.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-6}}$.

6–§. Функционаллық қатарлардың тең олшеўли жыйнақлы болыўының Вейерштрасс, Дирихле ҳәм Абель белгилери

6.1–теорема (Вейерштрасс белгиси). Егер мына

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots.. + u_n(x) + \ldots.. \tag{6.1}$$

функционаллық қатардың ҳәр бир ағзасы $E\left(E \subset R^1\right)$ көпликте $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in E$ лар ушын төмендеги

$$|\, u_n(x) \,| \leq a_n \tag{6.2}$$

теңсизликти қанаатландырса ҳәм

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n + \ldots.. \tag{6.3}$$

санлы қатары жыйнақлы болса, онда (6.1) функционаллық қатар E көпликте тең өлшеўли ҳәм абсолют жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Теорема шәрти бойынша (6.3) санлы (оң) қатар жыйнақлы болса, онда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \ \forall p \in N \ \rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \tag{6.4}$$

болады. Енди (6.2) шәртке тийкарланып $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in N$ ҳәм $\forall x \in E$ лар ушын

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\, u_k(x) \,| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \tag{6.5}$$

теңсизлиги дурыс болады. (6.4) ҳәм (6.5) ден (6.1) функционаллық қатар ушын Коши шәрти орынлы екенлиги келип шығады, буннан (6.1) қатардың E көплигинде тең өлшеўли ҳәм абсолют жыйнақлы болыўы келип шығады.

1–нәтийже. Егер $a_n = \sup\limits_{x \in E} |\, u_n(x) \,|$ дан дүзилген қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ санлы (оң) қатар жыйнақлы болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатар E көплигинде теӊ өлшеўли ҳәм абсолют жыйнақлы болады.

1–мысал. Вейерштрасс белгиси төмендеги $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционаллық қатарларды берилген көпликлерде тен өлшеўли жыйнақлы екенлигин көрсетиӊ. Егер:

а) $u_n(x)=\dfrac{nx}{n^2+x^2}\, arctg\, \dfrac{x}{n}, \qquad E=[-1,1];$

б) $u_n(x)=ln\left(1+\dfrac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right), \qquad E=[0,3];$

в) $u_n(x)=\dfrac{sin\dfrac{1}{nx}\cdot cos\, nx}{4+ln^2(n+1)x}, \qquad E=[1,+\infty);$

г) $u_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^5x^2}, \qquad E=[0,+\infty).$

Шешими. а) егер $[x_1, x_2]$ кесиндиде $arctg\, x$ функциясы ушын орта мәнис ҳаққындағы Лагранж теоремасын қоллансақ, онда

$$arctg\, x_2 - arctg\, x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1).$$

Буннан $|\, arctg\, x_2 - arctg\, x_1\,| = \dfrac{|x_2-x_1|}{1+\xi^2} \le |x_2-x_1|$, себеби $0<\dfrac{1}{1+\xi^2}\le 1.$

Енди $x_2=t, \quad x_1=0$ деп алсақ, онда $|\, arctg\, t\,| \le |t|, \quad \forall t\in R^1$. Бизиӊ жағдайымызда $|x|\le 1$ ҳәм $n^2+x^2\ge n^2$ екенлигинен төмендеги баҳалаўлар дурыс болады:

$$|\, u_n(x)| \le \frac{|nx|}{n^2+x^2}\cdot\left|\frac{x}{n}\right| \le \frac{x^2}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2}.$$

Сонда мажарант $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}<\infty$ он қатары жыйнақлы екенлигинен берилген функционаллық қатар Вейерштрасс белгиси бойынша абсолют ҳәм теӊ өлшеўли жыйнақлы болады.

б) бул мысалда ҳәм Лагранж теоремасынан келип шығатуғын нәтийжеден пайдаланамыз, яғный егер $[0, x]$, $x > 0$ кесиндиде $f(x) = ln\,(1 + x)$ функциясы ушын аталған теореманы қоллансақ, онда

$$ln\,(1 + x) = \frac{1}{1 + \xi}\,x\,.$$

Буннан $0 < \xi < x$ лерде $ln\,(1 + x) < x$ болады, бул жерде $x > 0$.

Енди жоқарыдағы теңсизликке көре төмендеги баҳалаўлар дурыс болады:

$$|\,u_n(x)\,| \le \frac{x}{n\,\sqrt[3]{n+1}} \le \frac{3}{n^{3/2}}, \qquad x \in [0, 3].$$

Нәтийжеде мажарант $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ улыўмаласқан гармоникалық қатардың жыйнақлы екенлигинен берилген функционаллық қатар Вейерштрасс белгиси бойынша абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

в) бул мысалда дәслеп берилген тригонометриялық функциялар ушын белгили баҳалаўлардан пайдаланамыз, яғный $|\,sin\,t\,| \le |\,t\,|$, $|\,cos\,t\,| \le 1$, $\forall t \in R^1$, ал $x \ge 1$ ларда

$$|\,u_n(x)\,| \le \frac{1}{nx \cdot ln^2(n+1)x} \le \frac{1}{n\,ln^2(n+1)}\,.$$

Нәтийжеде мажарант $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,ln^2(n+1)}$ қатары жыйнақлықтың интеграллық белгиси бойынша жыйнақлы болады, буннан берилген қатар ҳәм абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

г) $u_n(x) = \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ функцияны $[0, +\infty)$ аралықта экстремумға тексеремиз. $u_n(x)$ функция бирден бир $x = n^{-5/2}$ стационарлық точкаға ийе. Бул стационарлық точкада

$$u_n''(n^{-5/2}) < 0$$

болады. Демек, $u_n(x)$ функциясы $x = n^{-5/2} \in [0, +\infty)$ точкада максимумге ериседи. Оның максимум мәниси $u_n(n^{-5/2}) = \frac{1}{2} n^{-3/2}$ ге тең. Демек, $0 \le x < +\infty$ де

$$\sup_{x \in E} |u_n(x)| \le \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Мажаранта $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ екенлигинен берилген қатар Вейерштрасс белгиси бойынша $[0, +\infty)$ аралықта абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

6.2–теорема (Дирихле белгиси). Төмендеги функционаллық қатары

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x), \qquad x \in E \tag{6.6}$$

берилген болсын. Егер:

а) $\{B_n(x)\}$, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ дара қосындылар избе–излиги E көплигинде тең өлшеўли чегараланған, яғный

$$\exists M > 0: \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in N \to |B_n(x)| \le M; \tag{6.7}$$

б) $\{a_n(x)\}$ функционаллық избе-излиги E көплигинде монотон кемиўши, яғный

$$\forall n \in N \quad \forall x \in E \to a_{n+1}(x) \le a_n(x) \tag{6.8}$$

ҳәм нолге тен өлшеўли жыйнақлы

$$a_n(x) \rightrightarrows 0, \qquad \forall x \in E \tag{6.9}$$

болса, онда (6.6) қатары E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Теореманы дәлиллеў ушын бөлеклеп интеграллаў формуласының дискрет аналогы – Абел түрлендириўинен пайдаланамыз. Оның ушын төмендеги белгилеўлерди киритемиз:

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x), \tag{6.10}$$

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x), \qquad n\in N, \quad p\in N, \quad x\in E. \tag{11}$$

Енди $b_k(x)=B_k(x)-B_{k-1}(x), \quad k>1$ екенлигин есапқа алған ҳалда σ ны төмендегише қылып түрлендиремиз:

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)B_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)B_{k-1}(x).$$

Бунда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)B_{k-1}(x) = \begin{pmatrix} k-1=m \\ k=m+1 \end{pmatrix} = \sum_{m=n}^{n+p-1} a_{m+1}(x)B_m(x) = \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1}(x)B_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1}(x)B_k(x) - a_{n+1}(x)B_n(x).$$

Соның ушын

$$\sigma = a_{n+p}(x)B_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k(x)B_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1}(x)B_k(x) - a_{n+1}(x)B_n(x) =$$

$$= a_{n+p}(x)B_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x)-a_{k+1}(x))\, B_k(x). \tag{6.12}$$

Теорема шәртиндеги (6.7) ҳәм (6.8) теңсизликлерден төмендеги баҳалаўлар дурыс болады:

$$|\sigma| \le M\left(|a_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)|\right) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x)-a_{k+1}(x)).$$

Бунда төмендеги баҳалаўды итибарға алсақ

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k(x)-a_{k+1}(x)) = a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x) \le |a_{n+1}(x)| + |a_{n+p}(x)|,$$

онда

$$|\sigma| \le 2M\left(|a_{n+p}(x)| + |a_{n+1}(x)|\right) \tag{6.13}$$

теңсизлиги $\forall n\in N, \ \forall p\in N$ ҳәм $\forall x\in E$ лар ушын орынлы болады. Теорема шәртиндеги $a_n(x) \rightrightarrows 0, \quad \forall x\in E$ ни тең өлшеўли жыйнақлылық анықламасы бойынша жазып шықсақ, онда

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon=N(\varepsilon): \quad \forall k\geq N_\varepsilon,\ \forall x\in E \ \rightarrow \ |a_k|<\frac{\varepsilon}{4M} \qquad (6.14)$$

болады. Нәтийжеде (6.7),(6.13) ҳәм (6.14) ден $\forall n\geq N_\varepsilon,\ \forall p\in N,\ \forall x\in E$ ушын

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|<\varepsilon$$

ийе боламыз. Бул Коши критериясы бойынша берилген (6.6) функционаллық қатары E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болатуғынлығын аңлатады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

2–мысал. Параметр $\alpha>0$ мәнислеринде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^\alpha}$ функционаллық қатардың $E=[\delta,2\pi-\delta]$ көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин көрсетиң, бул жерде $0<\delta<2\pi-\delta<2\pi$.

Шешими. Егер $\alpha>1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^\alpha}$ қатары Вейерштрасс белгиси бойынша пүткил сан көшеринде $((-\infty,+\infty))$ абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады, себеби бул жағдайда $|sin\,x|\leq 1$, ал $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$ улыўмаласқан гармоникалық қатары жыйнақлы болады.

Енди параметрдиң мәнислери $0<\alpha\leq 1$ болсын, онда $\{a_n\}$, $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$ избе-излиги 6.2–теореманың (Дирихле белгиси) (6.8), (6.9) шәртлерин толық қанаатландырады, ал

$$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n} sin\,kx=\frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}, \qquad x\neq\pi m,\ \ m\in Z$$

қосындысы $\forall x\in E=[\delta,2\pi-\delta]$ көплигинде шегараланған болады, яғный

$$|B_n(x)| \le \frac{1}{sin\frac{\delta}{2}}.$$

Жуўмағында берилген қатардың Дирихле белгиси (6.2–теорема) бойынша E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы екенлиги келип шығады.

Ескертиў. Алдыңғы параграфта биз α параметрдиң $0<\alpha\le 1$ де $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^{\alpha}}$ функционаллық қатардың $E=[0,2\pi]$ көплигинде тен өлшеўли жыйнақлы емес екенлигин көрсеткен едик.

6.3–теорема (Абел белгиси). Мейли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x),\quad x\in E$ қатары берилген болсын. Егер:

а) төмендеги қатар E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x),\quad x\in E; \tag{6.15}$$

б) $\{a_n(x)\}$ избе-излиги $x\in E$ көпликте монотон кемиўши

$$\forall n\in N\quad \forall x\in E\ \rightarrow a_{n+1}(x)\le a_n(x) \tag{6.16}$$

ҳәм тең өлшеўли шегараланған, яғный

$$\exists M>0:\quad \forall n\in N\quad \forall x\in E\rightarrow |a_n(x)|\le M \tag{6.17}$$

болса, онда берилген қатар E көпликте тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Берилген қатар ушын Коши критерияcы шәртлери орынлы екенлигин көрсетемиз. Дәслеп төмендеги белгилеўди

$$B_j^{(n)}(x)=\sum_{k=n+1}^{n+j} b_k(x)$$

киритемиз. Теорема шәрти бойынша (6.15) қатар E көплигинде тең өлшеўли жыйнақлы болғанлықтан Коши шәртин қанаатландырады, яғный

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_{\varepsilon}=n(\varepsilon):\quad \forall n\ge n_{\varepsilon},\quad \forall j\in N,\quad \forall x\in E\rightarrow\left|B_j^{(n)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

(6.12) Абел алмастырыўына көре төмендеги қосындыны түрлендиремиз:

$$\sigma = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = \begin{pmatrix} k-n=j \\ k=n+j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x)b_{n+j}(x),$$

$$b_{n+j}(x) = B_j^{(n)}(x) - B_{j-1}^{(n)}(x),$$

бул жерде $j=1,2,...,p$, $B_0^{(n)}(x)=0$. Буннан

$$\sigma = \sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x)(B_j^{(n)}(x) - B_{j-1}^{(n)}(x)) = \sum_{k=1}^{p} a_{n+j}(x)B_j^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x)B_{j-1}^{(n)}(x) = (*)$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x)B_{j-1}^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} j-1=m \\ j=m+1 \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{p-1} a_{n+m+1}(x)B_m^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} a_{n+j+1}(x)B_j^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+j+1}(x)B_j^{(n)}(x) + a_{n+1}(x)B_0^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+j+1}(x)B_j^{(n)}(x),$$

$$(*) = B_p^{(n)}(x)a_{n+p}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+j}(x)B_j^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{n+j+1}(x)B_j^{(n)}(x) =$$

$$= B_p^{(n)}(x)\ a_{n+p}(x) + \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x))B_j^{(n)}(x).$$

Енди (6.16), (6.17) ҳәм (6.18) шәртлерден

$$|\sigma| = \left| \sum_{j=1}^{p} a_{n+j}(x)b_{n+j}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j}(x) - a_{n+j+1}(x)) + \frac{\varepsilon}{3M} \left| a_{n+p}(x) \right| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M} \left(a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x) + \left| a_{n+p}(x) \right| \right) \le \frac{\varepsilon}{3M} \left(2\left| a_{n+p}(x) \right| + \left| a_{n+1}(x) \right| \right) \le \varepsilon,$$

яғный берилген қатар ушын E көплигинде Коши критериясының барлық шәртлери орынлы болады:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon):\ \ \forall n \ge n_\varepsilon,\ \ \forall p \in N,\ \ \forall x \in E \to \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Теорема толығы менен дәлилленди.

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалыр

Берилген функционаллық қатарлардың мажарантасын табың ҳәм олардың көрсетилген кесиндилерде тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин дәлиллең.

16.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\, cos(nx)}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad x \in [0; 2];$

16.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\, 2^n}, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$

16.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad x \in [-2; 2];$

16.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right];$

16.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right];$

16.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 5^n}(x-3)^n, \quad x \in [-1; 6];$

16.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad x \in [2; 4];$

16.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi - x)\, cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, \quad x \in [0; \pi];$

16.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 9^n}(x-1)^{2n}, \quad x \in [-1; 3];$

16.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n, \quad x \in [-5; -1];$

16.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2\, ln\,(n+1)}, \quad x \in [1; 3];$

16.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in [-3; 3];$

16.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \quad x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right];$

16.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\,3^n\, ln\, n}, \quad x\in[-2;\ 2];$

16.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n}(x+5)^{2n-1}, \quad x\in[-7;\ -3];$

16.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad x\in[-3;\ -1];$

16.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right];$

16.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, \quad x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right];$

16.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, \quad x\in[-6;\ -4];$

16.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n}, \quad x\in\left[\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right];$

16.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\,2^n}, \quad x\in[1;\ 3];$

16.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\,sin^2(nx)}{n\sqrt{n+1}}, \quad x\in[-3;\ 0];$

16.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad x\in[-1;\ 1];$

16.24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt{n^2+1}}, \quad x\in[-6;\ -4];$

16.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, \quad x\in[-2;\ 2];$

16.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(sin\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n, \quad x\in[1;\ 3];$

16.27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}, \quad x \in [0;\ 2];$

16.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\, 4^n} (x+1)^{2n}, \quad x \in [-1;\ 0];$

16.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n\,(x+2)^n}{(n+1)\ \sqrt[3]{n+2}}, \quad x \in [-3;\ -1];$

16.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}, \quad x \in [2;\ 4];$

16.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)\, ln^2(n+1)}, \quad x \in [-2;\ 0].$

7–§. Тең өлшеўли жыйнақлы болған функционаллық қатарлардың қәсийетлери

Базы бир шекли $[a, b]$ кесиндиде жыйнақлы болған

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{7.1}$$

функционаллық қатары берилген болып, оның қосындысы $S(x)$ болсын, яғный $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

7.1–теорема (қосындының үзликсизлиги). Егер (7.1) қатардың хәр бир ағзасы $u_n(x)$ $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болып, бул функционаллық қатар $[a, b]$ де тең өлшеўли жыйнақлы болса, онда қатардың қосындысы $S(x)$ хәм $[a, b]$ де үзликсиз болады.

Дәлилłениўи. Мейли $\forall x_0 \in [a, b]$ болсын. Анықлық ушын $x_0 \in (a, b)$ деп аламыз. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функцияның x_0 точкада үзликсиз екенлигин дәлиллеў керек, яғный

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \to |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon, \tag{7.2}$$

бул жерде $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset [a,\ b]$.

Теорема шәрти бойынша $S_n(x) \Rightarrow S(x), \quad x \in [a, b], \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, яғный тең өлшеўли жыйнақлылық анықламасы бойынша:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall x \in [a, b] \to |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.3}$$

Енди сондай n_0 $(n_0 \geq N_\varepsilon)$ номерди тайынлап аламыз. Сонда (7.3) ден $n = n_0$ да

$$|S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.4}$$

теңсизлигине ийе боламыз. Дара жағдайда, егер $x = x_0$ болса, онда

$$\left| S(x) - S_{n_0}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (7.5)$$

Бунда $S_{n_0}(x) = \sum_{k=1}^{n_0} u_k(x)$ шекли сандағы $u_k(x),\ k = 1,2,...,n_0$ үзликсиз функциялардың қосындысы сыпатында x_0 точкада үзликсиз болады, буннан «$\varepsilon - \delta$» тилиндеги үзликсиз болыў анықламасы бойынша

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \to \left| S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (7.6)$$

Енди төмендеги айырманы түрлендирип аламыз:

$$S(x) - S(x_0) = (S(x) - S_{n_0}(x)) + (S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)) + (S_{n_0}(x_0) - S(x_0)).$$

Соң (4),(5) ҳәм (6) теңсизликлерге көре төмендеги баҳалаў орынлы

$$|S(x) - S(x_0)| \le \left| S(x) - S_{n_0}(x) \right| + \left| S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) \right| +$$
$$+ \left| S_{n_0}(x_0) - S(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b]$$

болады, яғный (7.2) тастыйықлаўға ийе боламыз. $\forall x_0 \in [a, b]$ екенлигинен $S(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болады деп жуўмақ шығарамыз.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–еслетпе. 7.1–теорема шәртлери орынлы болғанда

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x),$$

яғный қатарда ағзама-ағза лимитке өтиў мүмкин болады.

7.2–теорема. Егер $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болған функциялар избе-излиги $\{S_n(x)\}$ $[a, b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болса, онда оның лимит функциясы $S(x)$ ҳәм $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болады, яғный

$$S(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to \infty} S_n(x) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to x_0} S_n(x) \right].$$

7.3–теорема (функционаллық қатарларды ағзама-ағза интеграллаў). Егер (7.1) қатардың ҳәр бир ағзасы $u_n(x)$ $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болып, бул функционаллық қатар $[a, b]$ де тең өлшеўли жыйнақлы болса, онда қатар ағзаларының интегралларынан дүзилген

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt \tag{7.7}$$

қатар ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады, оның қосындысы

$$\int_a^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt, \qquad \forall x \in [a, b] \tag{7.8}$$

тең болады, яғный $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатарды ағзама-ағза интеграллаў мүмкин.

Дәлиллениўи. Теорема шәрти бойынша (7.1) қатар $[a, b]$ де тең өлшеўли жыйнақлы, яғный

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \Rightarrow S(x), \qquad x \in [a, b].$$

Бул анықлама бойынша төмендегини аңлатады:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \ \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall t \in [a, b] \ \to \ |S(t) - S_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{7.9}$$

Мейли (7.7) қатардың қосындысын

$$\sigma(x) = \int_a^x S(t)\,dt,$$

ал оның n – ши дара қосындысын

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\,dt$$

деп белгилеп алайық. Теорема шәрти бойынша $u_k(x)$, $k \in N$ функциялары $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз ҳәм соның ушын олар $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы болады. $S(x)$ функциясы ҳәм $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы болады, себеби ол 7.1–теоремаға көре $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз. Нәтийжеде интегралдың әпиўайы қәсийети бойынша:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(t)\,dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\,dt = \int_a^x S_n(t)\,dt.$$

Буннан

$$\sigma(x) - \sigma_n(x) = \int_a^x (S(t) - S_n(t))dt,$$

ҳәм (7.9) шәрттен төмендеги баҳалаў дурыс болады:

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^x dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \le \varepsilon,$$

$$\forall n \ge N_\varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

Соңғы теңсизлик $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$ қатардың $[a,b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин ҳәм (7.8) теңлик орынлы болатуғынлығын аңлатады.

2–еслетпе. 7.3–теорема шәртлери орынлы болғанда

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt, \qquad \forall x \in [a,b],$$

яғный қатарды ағзама-ағза интеграллаў мүмкин болады.

7.4–теорема. Егер

$$S_n(x) \Rightarrow S(x), \qquad x \in [a,b],$$

ал $S_n(x)$ функцияларының ҳәр бири $[a,b]$ кесиндиде үзликсиз болса, онда

$$\int_{x_0}^x S_n(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^x S(t)dt, \qquad \forall x_0 \in [a,b].$$

7.5–теорема (қатарларды ағзама-ағза дифференциаллаў). Егер $u_n(x),\ n \in N$ функциялары $[a,b]$ кесиндиде үзликсиз туўындыларға $u_n'(x),\ n \in N$ ийе ҳәм олардан дүзилген қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad x \in [a,b] \tag{7.10}$$

$[a,b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы, ал $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары кеминде бир $x_0 \in [a,b]$ точкада $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) < \infty$ жыйнақлы болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары ҳәм $[a,b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болады ҳәм оны ағзама-ағза дифференциаллаў мүмкин, басқаша айтқанда, егер $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ оның қосындысы болса, онда төмендеги теңлик дурыс болады:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \qquad x\in[a,b]. \tag{7.11}$$

Дәлиллениўи. (7.10) қатардың қосындысын $\tau(x)$ деп белгилеп аламыз:

$$\tau(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \qquad x\in[a,b]. \tag{7.12}$$

Сонда 7.3–теоремаға көре (7.12) қатарды ағзама-ағза интеграллаў мүмкин:

$$\int_{x_0}^{x}\tau(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n'(t)\,dt, \qquad x,x_0\in[a,b]. \tag{7.13}$$

Бунда (7.13) теңликтиң оң тәрепиндеги функционаллық қатар 7.3–теоремаға муўапық $[a,b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болады. Енди төмендеги тенликтен пайдаланып

$$\int_{x_0}^{x}u_n'(t)\,dt=u_n(x)-u_n(x_0), \qquad x,x_0\in[a,b],$$

(7.13) теңликти

$$\int_{x_0}^{x}\tau(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x), \qquad x,x_0\in[a,b], \tag{7.14}$$

көринисте жазып аламыз, бул жерде

$$v_n(x)=u_n(x)-u_n(x_0). \tag{7.15}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ қатардың тең өлшеўли жыйнақлы екенлигин атап өткен едик, ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)<\infty$ қатары теорема шәрти бойынша жыйнақлы. Сонлықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ қатары $[a,b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болған қатарлардын қосындысы сыпатында

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

$[a, b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Нәтийжеде, (7.14), (7.15) ҳәм $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ден

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)\,dt = S(x) - S(x_0) \qquad (7.16)$$

болады. 7.1–теоремаға көре $\tau(t)$ функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз, онда жоқары шегарасы өзгериўши болған интеграллардың қәсийети бойынша (7.16) ның шеп тәрепиниң туўындысы $\tau(x)$ ға тең болады. Буннан, (7.16) оң тәрепи ҳәм дифференциалланыўшы функция болып, ол $S'(x)$ ға тең. Нәтийжеде, $\tau(x) = S'(x)$, яғный (7.11) теңлик $\forall x \in [a, b]$ дурыс болады.

Теорема толығы менен дәлилленди.

Ескертиў. 7.5–теорема шәртлеринде $S'(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз, яғный $S(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз дифференциалланыўшы функция деп алынады.

7.6–теорема. Егер $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз дифференциалланыўшы функциялар избе-излиги $\{S_n(x)\}$ keминде бир кеминде бир $x_0 \in [a, b]$ точкада жыйнақлы ҳәм $\{S_n'(x)\}$ избе-излиги $[a, b]$ де тен өлшеўли жыйнақлы болса, онда $\{S_n(x)\}$ избе-излиги ҳәм $[a, b]$ де базы бир $S(x)$ функциясына тең өлшеўли жыйнақлы ҳәм

$$S'(x) = \lim_{n \to \infty} S_n'(x), \qquad x \in [a, b]$$

болады, яғный

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}[u_n(x)], \qquad x \in [a, b].$$

8–§. Дәрежели қатарлар

1–анықлама. Төмендеги көринистеги функционаллық қатарлар

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - a)^n, \qquad (8.1)$$

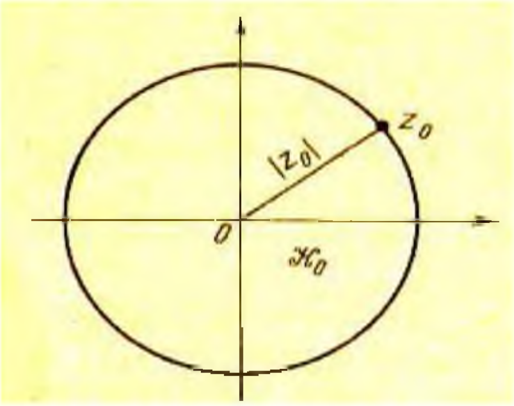
дәрежели қатарлар деп аталады, бул жерде c_n $(n = 0,1,2,.....)$ ҳәм a алдын ала берилген комплекс санлар, ал ζ комплекс өзгериўшиси болады. Әдетте, c_n лар дәрежели қатардың коэффициентлери деп айтылады.

Егер (8.1) де $z = \zeta - a$ деп өзгериўшини алмастырсақ, онда (8.1) ге тең күшли болған төмендеги дәрежели қатарға ийе боламыз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \qquad (8.2)$$

8.1–теорема (Абель теоремасы). Егер (8.2) дәрежели қатар $z = z_0 \neq 0$ де жыйнақлы болса, онда ол $|z| < |z_0|$ теңсизлигин қанаатландыратуғын z тиң барлық мәнислеринде абсолют жыйнақлы болады, ал егер (8.2) қатар $z = z_1 \neq 0$ де таралыўшы болса, онда ол $|z| > |z_1|$ теңсизлиги орынлы болған z тиң барлық мәнислеринде таралыўшы болады.

Дәлиллениўи. а) Мейли $K_0 = \{z : |z| < |z_0|\}$ комплекс тегисликтеги орайы O точкада ҳәм радиусы $|z_0|$ болған дөңгелек болсын (5-сызылма). Сонда $\forall z \in K_0$ ушын



5-сызылма

$| z | < | z_0 |$ болады, буннан

$$q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1. \tag{8.3}$$

Теорема шәрти бойынша (8.2) қатар z_0 точкада жыйнақлы болғанлықтан қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти орынланыўы тийис, яғный

$$\lim_{n \to \infty} c_n z_0^n = 0$$

болады. Демек, жыйнақлы $\{c_n z_0^n\}$ избе-излиги шегараланған болады:

$$\exists M > 0: \quad \forall n \in N \to \left| c_n z_0^n \right| \le M. \tag{8.4}$$

Енди (8.3) ҳәм (8.4) теңсизликлерден төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$| c_n z^n | = | c_n z_0^n | \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \le M q^n, \qquad 0 \le q < 1. \tag{8.5}$$

Нәтийжеде, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M q^n, \quad 0 \le q < 1$ шексиз кемиўши геометриялық прогрессия сыпатында жыйнақлы, ал $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| c_n z^n \right|$ қатары жыйнақлы болыўдың салыстырыў белгиси бойынша $\forall z \in K_0$ лерде абсолют жыйнақлы болады.

б) Мейли (8.2) дәрежели қатары $z_1 \ne 0$ точкада таралыўшы болсын. Сонда ол $| z_1 | < | \tilde{z} |$ шәрти менен анықланған ҳәр бир $\tilde{z}$ точкада таралыўшы болыўы тийис, себеби кери жағдайда жоқарыдағы дәлилленген теореманың а) пункти бойынша қатар z_1 точкада жыйнақлы болар еди. Бул бизиң болжаўымызға қарама-қарсы келеди.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–салдар. Егер (8.2) қатар $z_0 \ne 0$ точкада жыйнақлы болса, онда ол $K_1 = \{z : | z | \le \rho\}$, $\rho < | z_0 |$ дөңгелектиң $\forall z \in K_1$ точкасында абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Егер $\forall z \in K_1$ болса, онда $\left| c_n z^n \right| \leq M\, q_1^n$, $q_1 = \dfrac{\rho}{|z_0|}$, сонлықтан $0 \leq q_1 < 1$. Буннан Вейерштрасс белгиси бойынша (8.2) қатар дөңгелектиң $\forall z \in K_1$ точкасында абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

2–салдар. Егер (8.2) қатар $z_0 \neq 0$ точкада жыйнақлы болса, онда

$$\sum_{n=m}^{\infty} c_n\, z^{n-m}, \qquad m \in N, \tag{8.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n\, z^{n-1} \tag{8.7}$$

дәрежели қатарлары сәйкес $\forall z \in K_0$ дөнгелекте абсолют, ал $\forall z \in K_1$ дөңгелекте абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. (8.6) қатар ушын $\forall z \in K_0$ дөңгелекте сәйкес тәризде

$$\left| c_n z^{n-m} \right| \leq \frac{M}{|z_0|^n} q^{n-m}, \qquad 0 \leq q < 1,$$

ал $\forall z \in K_1$ дөнгелекте

$$\left| c_n z^{n-m} \right| \leq \frac{M}{|z_0|^m} q_1^{n-m}, \qquad 0 \leq q_1 < 1, \qquad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$$

теңсизликлери орынлы болады. Енди (8.7) қатар ушын K_0 ҳәм K_1 дөңгелек точкалары ушын сәйкес төмендеги теңсизликлер дурыс болады:

$$\left| n c_n z^{n-1} \right| \leq \frac{M}{|z_0|} n q^{n-1},$$

$$\left| n c_n z^{n-1} \right| \leq \frac{M}{|z_0|} n q_1^{n-1}, \qquad 0 \leq q_1 < 1, \qquad q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}.$$

Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A q^n$, $A > 0$ ҳәм $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B n q^{n-1}$, $B > 0$ қатарлар ушын жыйнақлылық белгилерин (Даламбер, ямаса Коши белгилери) қоллансақ, онда 2–салдар нәтийжесине ийе боламыз, бул жерде $0 \leq q < 1$.

8.2–теорема. Қәлеген (8.2) дәрежели қатар ушын төмендеги шәртлерди қанаатландыратуғын R ($R \geq 0$ – сан, ямаса $+\infty$) анықланған болады:

а) егер $R \neq 0$ ҳәм $R \neq \infty$, яғный шекли оң сан болса, онда (8.2) дәрежели қатар $K = \{z: \ |z| < R\}$ дөңгелектиң $\forall z \in K$ точкасында абсолют жыйнақлы, ал дөңгелектиң сыртында, яғный $\forall z \notin K$ точкаларда бул қатар таралыўшы болады. Бунда K дөңгелеги (8.2) қатардың **жыйнақлылық областы**, R оның **жыйнақлылық радиусы** деп аталады;

б) егер $R = 0$ болса, онда (8.2) дәрежели қатар тек бир $z = 0$ точкада жыйнақлы болады;

в) егер $R = +\infty$ символына тең болса, онда (8.2) дәрежели қатар пүткил комплекс тегислигинде жыйнақлы болады.

Дәлиллениўи. Мейли (8.2) дәрежели қатардың барлық жыйнақлылық точкалары көплиги D болсын. Ол бос көплик болмайды, себеби (8.2) қатар ҳәр дайым $z = 0$ точкада жыйнақлы болады (тривиал жағдай).

Егер D шегараланбаған көплик болса, онда (8.2) дәрежели қатар комплекс тегислигиниң $\forall \tilde{z} \in C$ точкасында жыйнақлы болады. Ҳақыйқатында да, $|\tilde{z}| < |z_0|$ шәрти менен анықланған сондай бир $z_0 \in D$ точкасын таңлап аламыз. Сонда Абель теоремасы бойынша (8.2) қатар $\tilde{z}$ точкасында жыйнақлы болады. Буннан $R = +\infty$.

Мейли D шегараланған көплик болсын. Егер D тек бир $z = 0$ точкадан ибарат болса, онда (8.2) қатар усы $z = 0$ точкада жыйнақлы, ал қалған барлық $z \neq 0$ точкаларда таралыўшы болады. Бул жағдайда $R = 0$.

Егер D көплиги $z = 0$ точкадан өзгеше болған кеминде және бир точкаға ийе болса, онда (8.2) дәрежели қатар $K = \{z: \ |z| < R\}$ дөңгелектиң $\forall z \in K$ точкасында абсолют жыйнақлы, ал $\forall z \notin K$ точкаларда таралыўшы екенлигин дәлиллеп көрсетемиз, бул жерде $R = \sup\limits_{z \in D} |z|$.

Мейли $\forall \tilde{z} \in K$ болсын, онда $|\tilde{z}| < R$. Енди көпликтиң анық жоқарғы шегарасы анықламасы бойынша:

$$\exists z_1 \in D: \quad |\tilde{z}| < |z_1| \leq R.$$

Буннан (8.2) дәрежели қатардың z_1 точкада жыйнақлы екенлигинен Абель теоремасы бойынша $\tilde{z}$ точкада абсолют жыйнақлы болады. Демек, K дөңгелектиң ҳәр бир ишки точкасында қатар абсолют жыйнақлы болар екен.

Мейли z' точкасы K дөңгелектиң сыртқы точкасы болсын, яғный $|z'| > R$. Буннан көпликтиң анық жоқарғы шегарасы анықламасы бойынша $z' \notin D$, сонлықтан (8.2) дәрежели қатар z' точкада таралыўшы болады.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–ескертиў. (8.2) қатар K дөңгелектиң шегарасында $|z| = R$ жыйнақлы да, таралыўшы да болыўы мүмкин. Бирақ қәлеген басқа киши $K_1 = \{z: \ |z| \leq \rho < R\}$ дөңгелекте (8.2) қатар абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.

8.3–теорема (Абель теоремасы). Егер $0 < R < +\infty$ саны (8.2) дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусы ҳәм бул қатар $z = R$ де жыйнақлы болса, онда ол $[0, R]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы, ал оның қосындысы $[0, R]$ де үзликсиз функция болады.

8.4–теорема (Коши-Адамар формуласы). Мейли R (8.2) дәрежели қатардың $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ жыйнақлылық радиусы болсын. Сонда:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{8.8}$$

болады. (8.8) Коши-Адамар формуласы деп аталады.

Дәлилleниўи. $\rho = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ деп белгилеўин киритемиз. Дәслеп $\rho = 0$ тең болған жағдайды көрип шығамыз. Бул жағдайда (8.2) қатар қәлеген z точкада жыйнақлы болыўын көрсетемиз. Оның ушын жоқары лимиттиң анықламасы бойынша:

$$\forall \varepsilon \in (0,1), \quad \forall z \neq 0 \quad \exists N_\varepsilon: \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \rightarrow \sqrt[n]{|\,c_n\,|} < \frac{\varepsilon}{|\,z\,|},$$

яғный

$$|\,c_n\,||\,z\,|^n < \varepsilon^n, \qquad \forall n \geq N_\varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Буннан салыстырыў белгиси бойынша (8.2) қатардың абсолют, соның менен бирге әпиўайы жыйнақлы, ал z точкасының қәлеген екенлигинен $R = +\infty$ болады. Енди $\rho = +\infty$ тең болсын. Бул жағдайда (8.2) қатар қәлеген $z \neq 0$ точкада таралыўшы болады. Ҳақыйқатында да, егер $\rho = +\infty$ болса, онда

$$\exists \{n_k\}, \ k = 1,2,.....: \ \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[n_k]{|\,c_{n_k}\,|} = +\infty,$$

яғный жоқары лимит анықламасы бойынша:

$$\forall z \neq 0 \quad \exists k_z: \ \forall k \geq k_z \ \rightarrow \sqrt[n_k]{|\,c_{n_k}\,|} \geq \frac{1}{|\,z\,|} \ \rightarrow \left|\,c_{n_k} z^{n_k}\,\right| \geq 1.$$

Буннан қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти орынлы емес, яғный оның $n-$ши ағзасы нолге умтылмайды. Соның ушын (8.2) қатар $z \neq 0$ точкада таралыўшы, ал z точкасынын қәлеген екенлигинен $R = 0$ болады.

Мейли $0 < \rho < +\infty$ болсын. Енди (8.2) қатардың $|\,z\,| < \dfrac{1}{\rho}$ теңсизлиги менен анықланған қәлеген z ушын жыйнақлы екенлигин көрсетемиз. Оның ушын $|\,z\,| < \dfrac{1}{\rho + \varepsilon}$ шәрти орынланатуғын етип $\forall \varepsilon > 0$ санын таңлаймыз. Сонда $q = |\,z\,|(\rho + \varepsilon) < 1$, буннан жоқары лимит анықламасы бойынша:

$$\exists N_1: \ \forall n \geq N_1 \rightarrow \sqrt[n]{|\,c_n\,|} < \rho + \varepsilon,$$

$$|z| \sqrt[n]{|\,c_n\,|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \qquad |\,c_n z^n\,| < q^n, \qquad 0 < q < 1.$$

Соның ушын салыстырыў белгиси бойынша (8.2) қатар $|z| < \frac{1}{\rho}$ шәртти қанаатландыратуғын қәлеген z точкасында абсолют, соның менен бирге әпиўайы жыйнақлы болады.

Енди (8.2) дәрежели қатардың $|z| > \frac{1}{\rho}$ шәрти менен анықланған қәлеген z точкасында таралыўшы екенлигин дәлиллеп көрсетемиз. Оның ушын

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0 \tag{8.9}$$

шәрти орынланатуғын етип $\forall \varepsilon > 0$ санын таңлаймыз. Сонда $|z|(\rho - \varepsilon) > 1$, буннан жоқары лимит анықламасы бойынша сондай $\exists\{n_k\},\ k = 1,2,.....$ үлес избе-излиги табылып:

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1,2,.....,$$

Сонлықтан (8.9) бахалаўға муўапық:

$$\left| c_{n_k} z^{n_k} \right| > 1, \quad k = 1,2,......$$

Демек, бунда қатар жыйнақлығының зәрүрли шәрти орынланбайды, яғный оның $n-$ши ағзасы нолге умтылмайды. Соның ушын (8.2) қатар $|z| > \frac{1}{\rho}$ шәрти менен анықланған қәлеген z точкасында таралыўшы болады. Бул жыйнақлылық радиусы $R = \frac{1}{\rho}$ екенлигин аңлатады.

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–еслетпе. (8.2) дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусын төмендеги

$$R = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

формула менен ҳәм анықлаў мүмкин.

8.5–теорема (дәрежели қатарлардың қәсийетлери). Төмендеги көринистеги дәрежели қатарлар

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n , \tag{8.10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} , \tag{8.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{8.12}$$

бирдей жыйнақлылық радиусларға ийе болады.

Дәлиллениўи. Мейли R, R_1 ҳәм R_2 лер сәйкес тәризде (8.10), (8.11) ҳәм (8.12) дәрежели қатарлардың жыйнақлылық радиуслары, ал K, K_1 ҳәм K_2 лер усы қатарлардың сәйкес жыйнақлылық областлары болсын. Биз олардың жыйнақлылық радиусларының өз-ара тең болатуғынлығын келтирип шығарамыз:

$$R = R_1 = R_2 . \tag{8.13}$$

Оның ушын дәслеп төмендеги айқын қатнастан пайдаланамыз:

$$\frac{1}{n+1} \le 1 \le n, \quad \forall n \in N .$$

Буннан

$$\left| \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} \right| \le |z| \cdot \left| c_n z^n \right| \le \left| z^2 \right| \cdot \left| n c_n z^{n-1} \right|, \tag{8.14}$$

бул жерде $\forall z \in C, \quad \forall n \in N$.

а) Мейли $z = z_0 \in K_2, \ z_0 \ne 0$ болсын. Сонда 8.2–теорема бойынша (8.12) қатары z_0 точкасында абсолют жыйнақлы болады, ал (8.14) қос теңсизликтиң оң тәрепиндеги қатнастан салыстырыў белгиси бойынша (8.10) қатардың ҳәм z_0 точкада абсолют жыйнақлы екенлиги келип шығады. Демек, егер $z_0 \in K_2$ болса, онда $z_0 \in K \rightarrow K_2 \subset K$ болады. Соның ушын

$$R_2 \le R . \tag{8.15}$$

б) Тап усындай жол менен $z = z_0 \neq 0 \in K$ деп болжаймыз. Сонда (8.14) қос теңсизликтиң шеп тәрепиндеги қатнастан салыстырыў белгиси бойынша (8.11) қатары z_0 точкада абсолют жыйнақлы болады. Демек, егер $z_0 \in K$ болса, онда $z_0 \in K_1 \rightarrow K \subset K_1$ ҳәм сонлықтан

$$R \leq R_1. \qquad (8.16)$$

(8.15) ҳәм (8.16) теңсизликлерден қос теңсизликти келтирип шығарамыз:

$$R_2 \leq R \leq R_1. \qquad (8.17)$$

в) теорема нәтийжесине ийе болыў ушын (8.17) ге қарама-қарсы теңсизликти келтирип шығарыў шәрт:

$$R_1 \leq R_2. \qquad (8.18)$$

Егер $z = z_0 \in K_1$, $z_0 \neq 0$ болса, онда $|\, z_0 \,| < R_1$ ҳәм 8.2–теорема бойынша (8.11) қатары z_0 точкасында абсолют жыйнақлы болады. Енди сондай $\rho > 0$ санын

$$|\, z_0 \,| < \rho < R_1 \qquad (8.19)$$

теңсизлиги дурыс болатуғындай етип таңлап аламыз. Кейин төмендеги

$$\left| n c_n z_0^{\,n-1} \right| = \left| \frac{c_n \rho^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left(\frac{|\, z_0 \,|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{n(n+1)}{|\, z_0 \,|^2} \qquad (8.20)$$

аңлатпаны түрлендирип аламыз. (8.19) шәртке муўапық $\rho \in K_1$, сонлықтан (8.11) дәрежели қатар $z = \rho$ точкада жыйнақлы ҳәм $\left\{ \frac{c_n}{n+1} \rho^{n+1} \right\}$ санлы избе-излиги шегараланған болады, яғный

$$\exists M > 0 : \ \ \forall n \in N \rightarrow \left| \frac{c_n}{n+1} \rho^{n+1} \right| \leq M . \qquad (8.21)$$

(8.19) шәртке ҳәм $z_0 \neq 0$ көре $q = \frac{|\, z_0 \,|}{\rho}$, $0 < q < 1$ болады. Енди (8.21) ге көре (8.20) теңликтен төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$\left| n c_n z_0^{\,n-1} \right| \leq \frac{M}{|\, z_0 \,|^2} n\,(n+1)\, q^{n+1}, \qquad 0 < q < 1. \qquad (8.22)$$

Нәтийжеде,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|z_0|^2} n(n+1) q^{n+1}, \qquad 0 < q < 1$$

қатары Даламбер белгиси бойынша жыйнақлы, ал (8.22) ден $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ қатардың салыстырыў белгиси бойынша z_0 точкада абсолют жыйнақлы болады. Демек, егер $z_0 \in K_1$ болса, онда $z_0 \in K_2 \to K_1 \subset K_2$ болады. Соның ушын

$$R_1 \le R_2. \tag{8.23}$$

Нәтийжеде, (8.17) ҳәм (8.23) теңсизликлерден (8.13) теңлик келип шығады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

Төмендеги көринистеги дәрежели қатарларда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{8.24}$$

a_n $(n = 0,1,2,.....)$ ҳәм x_0 алдын ала берилген ҳақыйқый санлар, ал x ҳақыйқый өзгериўшиси болады. Бул (8.24) қатарлар ушында 8.2–теоремага көре сондай R $(R \ge 0 -$ сан, ямаса $R = +\infty)$ анықланган болады. Егер $0 < R < +\infty$ болса, онда (8.24) дәрежели қатар $|x - x_0| < R$ интервалда жыйнақлы, ал $|x - x_0| > R$ да таралыўшы болады. Бунда $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ аралыгы (8.24) қатардың **жыйнақлылық интервалы**, R оның **жыйнақлылық радиусы** деп аталады.

8.6–теорема. Егер төмендеги дәрежели қатардың

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{8.25}$$

жыйнақлылық радиусы $R > 0$ ге тең болса, онда:

1) қатардың $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ жыйнақлылық интервалында $f(x)$ функция (8.25) қатарды агзама-агза дифференциаллаў арқалы қәлеген тәртиптеги туўындыга ийе болады;

2) жыйнақлылық интервалының ишки точкаларында бул қатарды ағзама-ағза интеграллаў мүмкин, яғный қәлеген $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ ушын

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \tag{8.26}$$

теңлиги орынлы болады.

Дәлиллениўи. Төмендеги дәрежели қатарды

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k (x - x_0)^{k-1} \tag{8.27}$$

қарастырамыз. 8.5–теорема бойынша бул қатар (8.25) сыяқлы бирдей жыйнақлылық радиусларға ийе ҳәм 8.1–теоремадан келип шығатуғын 1–салдар бойынша (8.27) қатар $\Delta_\rho = [x_0 - \rho,\ x_0 + \rho]$, $0 < \rho < R$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болады. Сонда 7–§ тың 7.5–теоремасына көре (8.25) қатарды Δ_ρ кесиндиде ағзама-ағза дифференциаллаў мүмкин, соның менен бирге қәлеген $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ точкада:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k (x - x_0)^{k-1}, \qquad x \in (x_0 - R,\ x_0 + R). \tag{8.28}$$

Индукция бойынша төмендеги дәлиллеп келтирип шығарыў мүмкин:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1(k-2)......(k-(n-1))(x - x_0)^{k-n}, \tag{8.29}$$

бул жерде $n \in N,\ x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$. Демек, (8.25) қатарды теорема шәртлери орынлы болғанда қәлеген мәрте дифференциаллаў мүмкин. Енди (8.26) теңликтиң дурыс екенлиги 7–§ тың 7.3–теоремасы шәртлеринен келип шығады.

1–салдар. Жыйнақлылық радиусы $R > 0$ ге тең болған (8.25) дәрежели қатардың коэффициентлери төмендеги формулалар менен аңлатылады:

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n \in N. \tag{8.30}$$

1–ескертиў. (8.30) формуладан $f(x)$ функциясының (8.25) көринистеги дәрежели қатарға жайылмасы бирден-бир болатуғынлығы келип шығады.

1–мысал. Төмендеги дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусын, жыйнақлылық интервалын ҳәм областын табың:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \ldots\ldots$$

Шешими. Бул дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусын (8.8) Коши-Адамар формуласы бойынша табамыз:

$$R = \frac{1}{\rho}, \qquad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} 2^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1.$$

болады. Демек, берилген дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусы $R = 1$, ал жыйнақлылық интервалы $(-1,\ 1)$ ден ибарат. Бул дәрежели қатардың жыйнақлылық интервалының ушларында сәйкес түрде төмендеги

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}} \quad \text{ҳәм} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

сәйкес санлы қатарларға айланып, оларды Лейбниц ҳәмде Раабе белгилеринен пайдаланып жыйнақлы екенлигин көрсетиўге болады.

Демек, берилген дәрежели қатардын жыйнақлылық областы $[-1,\ 1]$ кесиндиден ибарат.

Дәрежели қатарлардын жыйнақлылық областларын табыўда санлы қатарлар теориясында келтирилген белгилерден пайдаланады. Бунда өзгериўши x параметр сыпатында қаралады.

2–мысал. Төмендеги дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусын, жыйнақлылық интервалын ҳәм областын табың:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n} = 1 + \frac{x}{2\cdot 5} + \frac{x^2}{3\cdot 5^2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{(n+1)5^n} + \ldots\ldots.$$

Шешими. Бул қатарға Даламбер белгисин қолланып төмендегиге ийе боламыз:

$$d = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)\,5^{n+1}} : \frac{x^n}{(n+1)\,5^n} \right| = \frac{|x|}{5} \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{5}.$$

Демек, $\frac{|x|}{5} < 1$, яғный $|x| < 5$ болғанда қатар жыйнақлы, ал $\frac{|x|}{5} > 1$, яғный $|x| > 5$ болғанда қатар таралыўшы. Солай етип, берилген дәрежели қатардың жыйнақлылық радиусы $R = 5$, жыйнақлылық интервалы $(-5,\ 5)$ болады. Жыйнақлылық интервалының $(-5,\ 5)$ ушларында дәрежели қатар сәйкес түрде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad \text{ҳәм} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

санлы қатарларға айланып, олардың биринshиси жыйнақлы, ал екиншиси таралыўшы болады. Сонлықтан, берилген қатардың жыйнақлылық областы $[-5,\ 5)$ ярым сегменттен ибарат болады.

3–мысал. Төмендеги қатарлардың қосындысын есаплаң. Егер:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)x^{n-1}$.

Шешими. а) Төмендеги көринистеги қатардың қосындысын

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} x^{2n-1} = S(x)$$

деп белгилеп аламыз. Элементар алмастырыўлар арқалы оны мына

$$\begin{pmatrix} 2n-1=m \\ n = \dfrac{m+1}{2} \end{pmatrix} \to \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\,3^{\frac{m-1}{2}}} x^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\,3^{\frac{n-1}{2}}} x^n \qquad (8.31)$$

көриниске келтирип аламыз, соң (8.31) қатардың жыйнақлылық радиусын есаплап шығамыз. Бунда

$$a_n = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\,3^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)\,3^{\frac{n}{2}}}.$$

Бул қатардың жыйнақлылық радиусын төмендеги формула менен ҳәм анықлаймыз:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(n+1)\,3^{\frac{n}{2}}}{n\,3^{\frac{n-1}{2}}} = \sqrt{3}.$$

Демек, қатардың жыйнақлылық интервалы $|x| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Дәслеп дәрежели қатарды ағзама-ағза дифференциаллаймыз. Сонда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} x^{2(n-1)} = S'(x),$$

$$S'(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3^2} - \frac{x^6}{3^3} + \ldots\ldots = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3 + x^2},$$

себеби $q = \frac{x^2}{3}$, $0 < q < 1$ болып, биз шексиз кемиўши геометриялық прогрессияның қосындысын табыў формуласынан пайдаландық. Енди соңғы аңлатпаны интеграллаймыз, яғный:

$$\int_0^x dS(\tau) = 3\int_0^x \frac{d\tau}{3 + x^2} \;\rightarrow\; S(x) = \sqrt{3}\ arctg\frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$x = 1 \;\rightarrow\; S(1) = \sqrt{3}\ arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}.$$

Демек,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}.$$

б) Төмендеги көринистеги дәрежели қатардын қосындысын

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)x^{n-1} = S(x)$$

деп белгилеп аламыз. Элементар алмастырыўлар арқалы оны мына

$$\begin{pmatrix} n-1=m \\ n=m+1 \end{pmatrix} \to \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)\, x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, x^n \qquad (8.32)$$

көриниске келтирип аламыз, соң (8.32) қатардың жыйнақлылық радиусын есаплап шығамыз. Бунда

$$a_n = (n+1)(n+2), \qquad a_{n+1} = (n+2)(n+3).$$

Бул қатардын жыйнақлылық радиусын төмендеги формула менен ҳәм анықлаймыз:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1.$$

Қатардың жыйнақлылық интервалы $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. (8.32) дәрежели қатарды ағзама-ағза еки рет интеграллаўға туўры келеди. Сонда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n\,(n+1)\tau^{n-1} d\tau = \int_0^x S(\tau)d\tau,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \int_0^x S(\tau)d\tau,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+1)\, t^n dt = \int_0^x \left(\int_0^t S(\tau)d\tau \right) dt,$$

$$\int_0^x \left(\int_0^t S(\tau)d\tau \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \qquad |x|<1.$$

Енди соңғы теңликти еки мәрте избе-из дифференциаллаймыз. Сонда:

$$\int_0^x S(\tau)d\tau = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, \qquad |x|<1,$$

$$S(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 - 2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{2(1-2x+x^2+2x-x^2)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad |x|<1.$$

Демек,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad |x|<1.$$

4–мысал. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n^2+9n+5)x^{n+1}$ қатардың қосындысын есаплаң.

Шешими. Дәслеп квадрат үш ағзалыны $4n^2+9n+5=(4n+5)(n+1)$ көбейтиўшилерге жиклеймиз.

Төмендеги көринистеги қатардың қосындысын

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4n^2+9n+5)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+5)(n+1)\,x^{n+1} = S(x)$$

деп белгилеп аламыз. Бул қатардың жыйнақлылық радиусын төмендеги формула менен ҳәм анықлаймыз:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(4n+5)(n+1)}{(4n+9)(n+2)} = 1.$$

Демек, қатардың жыйнақлылық интервалы $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. Дәслеп дәрежели қатарды төмендеги көринисте түрлендирип жазып аламыз. Сонда:

$$(4n+5)(n+1) = (4(n+2)-3)((n+2)-1) = 4(n+2)^2 - 7(n+2)+3,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4(n+2)^2 - 7(n+2)+3)\,x^{n+1} = S(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2\,x^{n+1} = S_1(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,x^{n+1} = S_2(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = S_3(x), \qquad S(x) = 4S_1(x) - 7S_2(x) + 3S_3(x).$$

Дәслеп $S_1(x)$ дәрежели қатарды ағзама-ағза еки рет интеграллаўға туўры келеди. Сонда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)^2\,\tau^{n+1}d\tau = \int_0^x S_1(\tau)d\tau, \qquad -1<x<1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\,x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+3)-1)\,x^{n+2} = \int_0^x S_1(\tau)d\tau,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\,x^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\,x^{n+2}-\frac{x^2}{1-x}=\int_0^x S_1(\tau)d\tau\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+3)\,t^{n+2}dt+\int_0^x\frac{t^2}{t-1}\,dt=\int_0^x\left(\int_0^t S_1(\tau)d\tau\right)dt\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}+\int_0^x\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{x^3}{1-x}+\frac{x^2}{2}+x+ln\,(1-x)=$$

$$=-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}+\frac{x^2}{2}+x+ln\,(1-x)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{1-x}-1+ln\,(1-x)=\int_0^x\left(\int_0^t S_1(\tau)d\tau\right)dt\,.$$

Енди соңғы теңликти еки мәрте избе-из дифференциаллаймыз. Сонда:

$$\int_0^x S_1(\tau)\,d\tau=-\,x+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}\,,\qquad |x|<1,$$

$$S_1(x)=-1+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x^3-3x^2+4x}{(1-x)^3},\qquad |x|<1.$$

Енди $S_2(x)$ дәрежели қатарды ағзама-ағза бир рет интеграллаймыз. Сонда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+2)\,\tau^{n+1}d\tau=\int_0^x S_2(\tau)d\tau,\qquad -1<x<1\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}=-\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)=\int_0^x S_2(\tau)d\tau,\qquad -1<x<1\,,$$

Енди соңғы теңликти бир мәрте дифференциаллаймыз. Сонда:

$$S_2(x)=-1+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2},\qquad |x|<1.$$

Демек,

$$S(x)=4S_1(x)-7S_2(x)+3S_3(x)=$$

$$=4\cdot\frac{x^3-3x^2+4x}{(1-x)^3}-7\cdot\frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}+\frac{3x}{1-x}=\frac{3x^2+5x}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n^2+9n+5)x^{n+1}=\frac{3x^2+5x}{(1-x)^3},\qquad |x|<1\,.$$

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалар

Төмендеги қатарлардың қосындысын табың.

18.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4n^2+9n+5)x^{n+1}$;

18.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n^2+7n+4)x^{n}$;

18.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)x^{n+3}$;

18.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+4n+3)x^{n+2}$;

18.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+5n+3)x^{n}$;

18.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+5n+3)x^{n+1}$;

18.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n^2+8n+5)x^{n+2}$;

18.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+8n+5)x^{n}$;

18.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+7n+5)x^{n+1}$;

18.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n^2+7n+5)x^{n}$;

18.11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(2n-1)x^{n+2}$;

18.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^{n}$;

18.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-1)x^{n}$;

18.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n^2+5n+4)x^{n+1}$;

18.15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+7n+4)x^{n}$;

18.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-n-2)x^{n+1}$;

18.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+2n+1)x^{n}$;

18.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+2n-1)x^{n+1}$;

18.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+2)x^{n+2}$;

18.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+4n+3)x^{n+1}$;

19.21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+5n+4)x^{n+2}$;

18.22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^{n}$;

18.23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-2n-1)x^{n+1}$;

18.24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-2n+2)x^{n}$;

18.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n - 2)\, x^{n+1}$;

18.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n^2 + 6n + 5)\, x^{n}$;

18.27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2 + 6n + 5)\, x^{n+1}$;

18.28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\,(2n + 1)\, x^{n+2}$;

18.29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n + 1)\, x^{n+1}$;

18.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n^2 + n - 1)\, x^{n}$;

18.31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)\, x^{n+1}$.

9–§. Тейлор қатары

1–анықлама. Егер $f(x)$ функциясы x_0 точкасының базы бир

$$U_\delta(x_0)=\{x:\ x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

дөгерегинде анықланған, усы точкада қәлеген тәртиптеги туўындыларға ийе болса, онда төмендеги көринистеги дәрежели қатар

$$f(x_0)\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{9.1}$$

$f(x)$ функциясының x_0 точкадағы **Тейлор қатары** деп аталады.

Мейли $f(x)$ функциясы x_0 точкасының базы бир дөгерегинде усы функцияға жыйнақлы болған дәрежели қатар көринисинде аңлатып жазылған болсын:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad |x-x_0|<\rho,\quad \rho>0\,. \tag{9.2}$$

Сонда 8–§ тың 8.6–теоремасы шәртлеринен $f(x)$ функциясы x_0 точкасынын базы бир дөгерегинде қәлеген мәрте дифференциалланыўшы болып, оның коэффициентлери төмендеги формулалардан анықланады:

$$a_0=f(x_0),\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\qquad n\in N. \tag{9.3}$$

$f(x)$ функциясы x_0 точкасында (x_0 нын базы бир дөгерегинде) шексиз мәрте дифференциалланыўшы болғаны менен усы функция ушын жасалған (9.1) көринистеги Тейлор қатары тап $f(x)$ қа $x\neq x_0$ точкада жыйнақлы болады деп тастыйықлаў орынлы болмайды.

1–мысал. Мына

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функцияны қараймыз. Бул функция $R=(-\infty,+\infty)$ де барлық тәртиптеги туўындыларға ийе:

а) $x \neq 0$ болғанда

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2},$$

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot Q_{3n}\left(\frac{1}{x} \right),$$

бул жерде $Q_{3n}(t)$ – t өзгериўшисиниң $3n$ – ши тәртипли көпағзалысы. Бул

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot Q_{3n}\left(\frac{1}{x} \right), \quad n = 1,2, \dots..$$

қатнас математикалық индукция методы жәрдеминде көрсетиледи.

б) Енди $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|^k} e^{-1/x^2} = 0, \quad \forall k \in N$ екенлигинен пайдаланып

$$f^{(k)}(x) = 0, \quad \forall k \in N \qquad (9.4)$$

көрсетемиз. Ҳақыйқатында да,

$$k = 1 \to f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0,$$

(9.4) формула $k = n$ де дурыс деп есаплап индукция методы менен

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} Q_{3n}\left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = 0.$$

Демек, (9.4) формуланың дурыслығы математикалық индукция методы жәрдеминде көрсетилди. Соның ушын қаралып атырған функцияның $x_0 = 0$ точкадағы (9.1) Тейлор қатарының барлық коэффициентлери нолге тең болады.

Бирақ $e^{-1/x^2} \neq 0, \quad x \neq 0$ екенлигинен берилген функцияның (9.1) Тейлор қатарының қосындысы $f(x)$ функция менен $x = 0$ да бирдей болмайды, яғный берилген $f(x)$ функцияны $x_0 = 0$ точканың дөгерегинде оған жыйнақлы болған Тейлор қатары менен аңлатып жазыў мүмкин емес.

Егер $f(z)$ функциясын комплекс тегислигинде берилген деп қарасақ, онда жоқарыдағы жағдайдың себеби айдынласады. Ҳақыйқатында да, $f(z)=e^{-1/z^2}$ функциясы $z=0$ үзликсиз болмайды, себеби

$$f(x)=e^{-1/x^2}\to 0, \quad x\to 0, \text{ ал } f(iy)=e^{1/y^2}\to\infty, \quad y\to 0.$$

2–анықлама. Мейли $f(x)$ функциясы x_0 точкасында шексиз мәрте дифференциалланыўшы болсын. Сонда бул функцияға (9.1) көринистеги дәрежели қатарды сәйкес қойыў мүмкин. Енди төмендеги белгилеўлерди киритемиз:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{9.5}$$

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x). \tag{9.6}$$

(9.6) дағы $r_n(x)$ $f(x)$ функциясының x_0 точкадағы Тейлор формуласының **қалдық ағзасы** деп аталады.

Демек, егер

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \tag{9.7}$$

болса, онда қатар жыйнақлығының анықламасы бойынша (9.1) қатары $f(x)$ функциясына x точкада жыйнақлы болады, яғный:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{9.8}$$

9.1–теорема. Егер $f(x), f'(x), ...,f^{(n+1)}(x)$ функциялары $\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$ интервалында үзликсиз болса, онда $\forall x\in\Delta$ ушын $f(x)$ функциясының x_0 точкадағы Тейлор формуласының қалдық ағзасын:

$$\text{а)} \quad r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{9.9}$$

интеграллық ҳәм

б) $$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad x_0<\xi<x \tag{9.10}$$

Лагранж көринислеринде аңлатып жазыў мүмкин.

Дәлиллениўи. (9.9) формуланы индукция методы менен дәлиллеп көрсетемиз. (9.5) ҳәм (9.6) теңликлерден

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{9.11}$$

тең екенлигин көрсетиў талап етиледи. Оның ушын $\int_{x_0}^{x}f'(t)dt=f(x)-f(x_0)$ формуласының шеп тәрепин бөлеклеп интеграллаў формуласы бойынша түрлендиремиз:

$$\int_{x_0}^{x}f'(t)dt=-\int_{x_0}^{x}f'(t)d(x-t)=\left[-f'(x)\cdot(x-t)\right]\Big|_{t=x_0}^{t=x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt.$$

Солай етип $n=1$ де (9.11) формула төмендегише болады:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt.$$

Енди (9.11) формула $n-1$ номер ушын ҳәм дурыс деп болжаймыз, яғный:

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt. \tag{9.12}$$

(9.12) формуланың оң тәрепин бөлеклеп интеграллаў усылы бойынша түрлендиремиз, яғный:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt=-\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)d((x-t)^n)=$$

$$=\left[-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)\cdot(x-t)^n\right]\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt=$$

$$= \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n + \frac{1}{n\,!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Нәтийжеде, (9.12) теңликти (9.11) көринисте жазыў мүмкин екенлиги келип шығады, (9.9) формула дурыс болады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

9.2–теорема. $f(x)$ функциясы $f'(x), \ldots\ldots, f^{(n)}(x),\ n=1,2,\ldots\ldots$ ҳәм оның барлық туўындылары $\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta),\ \ \delta>0$ интервалында шегараланған болса, яғный

$$\exists M>0:\quad \forall x\in\Delta \rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\quad n=0,1,2,\ldots\ldots, \qquad (9.13)$$

онда $f(x)$ функциясының $\forall x\in\Delta$ точкадағы (9.8) Тейлор қатары анықланған болады.

Дәлилллениўи. Мейли $x\in\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ болсын. Сонда (9.10) формула ҳәм (9.13) шәрттен қатардың қалдық ағзасы ушын төмендеги баҳалаўы дурыс болады:

$$\left|r_n(x)\right|\le M\,\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)\,!},\qquad n=0,1,2,\ldots\ldots \qquad (9.14)$$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n\,!}=0,\ \ \forall a>0$ лимиттиң мәнисин итибарға алсақ, онда (9.14) тен (9.7) шәрттиң дурыс екенлиги келип шығады, яғный $f(x)$ функциясының x точкадағы (9.8) Тейлор қатары анықланған болады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

Тийкарғы элементар функциялардың $x_0=0$ точканың базы бир дөгерегиндеги Тейлор қатарына жайылмасын

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (9.15)$$

анықлаймыз, (9.15) функцияның **Маклорен қатары** деп аталады.

1) Мейли $f(x)=e^x$ болсын. Сонда $\forall x\in(-\rho,\ \rho),\ \ \rho>0$ ушын төмендеги баҳалаўлар орынлы болады:

$$0 < f(x) < e^{\rho}, \qquad 0 < f^{(n)}(x) < e^{\rho}, \qquad n \in N.$$

Сонлықтан 9.2–теорема бойынша $f(x) = e^x$ функциясының (9.15) қатары усы функцияға $(-\rho,\ \rho)$ интервалда $\forall \rho > 0$ да жыйнақлы, яғный қатардың жыйнақлылық радиусы $R = +\infty$ болады.

Енди $f(x) = e^x$ функциясы ушын $f(0) = 1,\ f^{(n)}(0) = 1,\ \forall n \in N$ екенлигинен (9.15) формула бойынша көрсеткишли функцияның Маклорен қатарына жайылмасына ийе боламыз:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9.16}$$

(9.16) жайылма ҳәм төмендеги формулалардан

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

гиперболикалық косинус ҳәм гиперболикалық синуслардың Маклорен қатары жайылмаларын келтирип шығарамыз:

$$ch\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{9.17}$$

$$sh\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{9.18}$$

бул жерде (9.17) ҳәм (9.18) қатарлардың ҳәр бириниң жыйнақлылық радиусы $R = +\infty$.

2) Мейли $f(x) = sin\,x$ болсын. Сонда $\forall x \in (-\infty,\ +\infty)$, $\forall n \in N$ ушын $|f(x)| \le 1$ ҳәм $|f^{(n)}(x)| \le 1$ баҳалаўлары дурыс болады. Сонлықтан 9.2–теорема бойынша $f(x) = sin\,x$ функциясының (9.15) қатары усы функцияға $\forall x \in (-\infty,\ +\infty)$ да жыйнақлы, ал қатардың жыйнақлылық радиусы $R = +\infty$ болады. Енди $f(x) = sin\,x$ функциясы ушын $f(0) = 0,\ f^{(2n)}(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,\ \forall n \in N$ екенлигинен (9.15) формула бойынша синустың Маклорен қатарына жайылмасына ийе боламыз:

$$sin\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} . \qquad (9.19)$$

Тап усындай жол менен $f(x) = cos\, x$ функциясы ушын да $\left|f(x)\right| \leq 1$ ҳәм $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ баҳалаўлары $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\forall n \in N$ дурыс болады. Бул функцияның $f(0) = 1$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $f'(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$, $\forall n \in N$ екенлигинен (9.15) формула бойынша косинустың Маклорен қатарына жайылмасы

$$cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (9.20)$$

көринисте болады, бул жерде (9.19) ҳәм (9.20) қатарлардың ҳәр бириниң жыйнақлылық радиусы $R = +\infty$.

3) Мейли $f(x) = ln\,(1+x)$ болсын. Сонда бул функцияның $n-$ши тәртипли туўындысының рекуррент формуласы төмендегише болады:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad (9.21)$$

буннан

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} . \qquad (9.22)$$

Енди 9.1–теорема шәртиндеги (9.9) формулада $x_0 = 0$ деп алып интеграллық көринистеги $r_n(x)$ қалдық ағзаны баҳалаймыз. Оның ушын дәслеп өзгериўшини $t = \tau x$, $x = const$ көринисте алмастырамыз. Сонда $dt = x d\tau$, $x - t = x(1-\tau)$ итибарға алсақ, онда (9.9) формула төмендеги көриниске ийе болады:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau x) d\tau . \qquad (9.23)$$

Солай етип, $f(x) = ln\,(1+x)$ ҳәм (9.21) теңликти қолланып (9.23) ти төмендегише қылып түрлендиремиз:

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^n}{(1+\tau x)^{n+1}} d\tau . \qquad (9.24)$$

Егер $|x| < 1$ болса, онда

$$|1+\tau x| \geq 1 - \tau |x| \geq 1 - \tau, \qquad (9.25)$$

$$|1+\tau x| \geq 1 - |x|, \qquad 0 \leq \tau \leq 1 . \qquad (9.26)$$

Соның ушын $\forall n \in N$ лерде

$$|1+\tau x|^{n+1} \geq (1-\tau)^n \left(1 - |x|\right). \qquad (9.27)$$

Нәтийжеде (9.27) теңсизликти пайдаланып (9.24) формуладан қалдық ағза ушын төмендеги баҳалаўды келтирип шығарамыз:

$$|r_n(x)| \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{d\tau}{1-|x|} = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} ,$$

бул жерде $r_n(x) \to 0, \quad n \to \infty, \quad |x| < 1$.

Мейли $x = 1$ болсын. Сонда

$$1 + \tau x = 1 + \tau , \quad (1+\tau)^{n+1} \geq 1, \quad 1 - \tau \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1 .$$

Буннан ҳәм (9.24) формуладан

$$|r_n(1)| \leq \int_0^1 (1-\tau)^n d\tau = \frac{1}{n+1} \;\to\; r_n(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Солай етип, егер $x \in (-1, 1]$ болса, онда $f(x) = ln\,(1+x)$ функциясының $r_n(x)$ қалдық ағзасы $n \to \infty$ да нолге умтылады, яғный Маклорен қатарының қосындысы $f(x)$ қа тең.

Жуўмағында, (9.15) ҳәм (9.22) формулалардан $ln\,(1+x)$ функциясының Маклорен қатарына ийе боламыз:

$$ln\,(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n , \qquad (9.28)$$

бул жерде (9.28) қатардың жыйнақлылық радиусы $R = 1$ ге тең.

(9.28) формула $x = 1$ де ҳәм орынлы болады, яғный

$$ln\,2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+......$$

Әмелий мысалларды шешкенимизде керек болатуғын және бир теңликти келтирип өтемиз, яғный (9.28) де x ты $-x$ қа алмастырамыз:

$$ln\,(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. \qquad (9.29)$$

4) Мейли $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ болсын. Егер $\alpha=0$, $f(x)=1$, ал $\alpha=n\in N$, болса, онда $f(x)$ функциясы $n-$ши тәртипли көпағзалы болып, оның жайылмасы шекли қосынды сыпатында Ньютон биномы бойынша анықланады:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,x^k\,,$$

бул жерде $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)......(n-(k-1))}{k!}$, $k=1,2,....,n$, $C_n^0=1$.

Биз $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin N$, $\alpha\neq 0$ функциясының $\forall x\in(-1,\,1)$ интервалдағы төмендеги көринистеги Маклорен қатарын келтирип шығарамыз:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}\,x^n\,, \qquad (9.30)$$

бул жерде

$$C_{\alpha}^{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-(n-1))}{n!}, \qquad C_{\alpha}^{0}=1. \qquad (9.31)$$

Сонда бул функцияның $(n+1)-$ши тәртипли туўындысының рекуррент формуласы төмендегише болады:

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-n)\cdot(1+x)^{\alpha-(n+1)}. \qquad (9.32)$$

Буннан пайдаланып бул функцияның қалдық ағзасы ушын (9.23) формулаға көре төмендеги аңлатпаға ийе боламыз:

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau x} \right)^n (1+\tau x)^{\alpha - 1} d\tau , \tag{9.33}$$

бул жерде

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-n)}{n!} .$$

Енди сондай $m \in N$ санын $|\alpha| \le m$ шәртинен таңлаймыз. Сонда $\forall n \ge m$ лерде төмендеги баҳалаўлар дурыс болады:

$$|A_n| \le \frac{m(m-1)......(m+n)}{n!} \le \frac{(m+n)!}{n!} = (n+1)......(n+m) \le (2n)^m . \tag{9.34}$$

Бунда (9.25), (9.26) теңсизликлерден және $|1+\tau x| \le 1+|x|,\ \ 0 \le \tau \le 1$ қатнасынан пайдаланып, төмендеги әҳмийетли қос теңсизликти келтирип шығарамыз:

$$0 \le \frac{1-\tau}{1+\tau x} \le 1, \tag{9.35}$$

бул жерде

$$|1+\tau x|^{\alpha-1} \le \beta(x) = \begin{cases} (1+|x|)^{\alpha-1}, & \alpha \ge 1, \\ (1-|x|)^{\alpha-1}, & \alpha < 1. \end{cases} \tag{9.36}$$

Солай етип, (9.33) формуладан ҳәм (9.34)–(9.36) баҳалаўлардан берилген функцияның Маклорен формуласының қалдық ағзасы ушын жуўмақлаўшы баҳалаўды келтирип шығарамыз:

$$|r_n(x)| \le \beta(x) \cdot 2^m n^m |x|^{n+1}, \tag{9.37}$$

бул жерде $\forall n \ge m$ ҳәм $\forall x \in (-1,\ 1)$.

Егер $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^m}{a^t} = 0,\ \ \forall a > 1$ лимиттиң мәнисин итибарға алсақ, онда $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^m}{(1/|x|)^{n+1}} = 0$. Сонлықтан (9.37) ден $r_n(x) \to 0,\ \ n \to \infty$.

Демек, $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \notin N,\ \alpha \ne 0$ функциясының $\forall x \in (-1,\ 1)$ точкадағы Маклорен формуласының $r_n(x)$ қалдық ағзасы $n \to \infty$да нолге умтылады, яғный (9.30) теңликтиң дәлиллениўин келтирип шығардық, бул жерде (9.30) қатардың жыйнақлылық радиусы $R = 1$.

(9.30) формуланың әҳмийетли дара жағдайларын келтирип өтемиз:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{9.38}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{9.39}$$

Әдетте, берилген функцияны Тейлор қатарына жайғанымызда (9.16) – (9.20), (9.28) – (9.30) формулалары қолланылады. Соның менен бирге сол берилген функцияны Тейлор қатары белгили болған функциялардын сызықлы комбинациясы көринисде анлатып жазыў, өзгериўшини алмастырыў, қатарды ағзама-ағза дифференциаллаў ҳәм интеграллаў усыллары көп қолланылады.

2–мысал. Төмендеги $f(x)$ функциясын Маклорен қатарына жайың ҳәм оның жыйнақлылық радиусын R табың. Егер:

а) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$.

Шешими. а) (9.38) формуладан жыйнақлық радиусы $R = 1$ болған төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \tag{9.40}$$

б) (9.30) теңликтен

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-1/2}^{n} x^{2n},$$

бул жерде

$$C_{-1/2}^{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot \ldots\ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Нәтийжеде, жыйнақлық радиусы $R=1$ болған төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}. \qquad (9.41)$$

в) Берилген функция әпиўайы рационал функцияларға ажыратамыз:

$$f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}.$$

Нәтийжеде, (9.38) ҳәм (9.39) формулалардан жыйнақлық радиусы $R=2$ болған төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$\frac{2x-1}{x^2+x-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n.$$

3–мысал. Төмендеги функцияларды Маклорен қатарына жайың ҳәм олардың жыйнақлылық радиусларын R табың. Егер:

а) $arctg\,x$; б) $arc\sin x$; в) $ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Шешими. а) (9.40) қатарды ағзама-ағза интеграллаў арқалы төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$arctg\,x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R=1.$$

б) (9.41) формулада x^2ты $-x^2$ алмастырсақ, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}.$$

Буннан

$$arc\sin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}, \qquad R=1.$$

в) (9.41) қатарды ағзама-ағза интеграллаў нәтийжесинде жыйнақлық радиусы $R=1$ болған төмендеги қатарға ийе боламыз:

$$ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}.$$

4–мысал. $f(x)=ln(4+3x-x^2)$ функцияны $x_0=2$ точкада Маклорен қатарына жайың.

Шешими. Дәслеп квадрат үш ағзалы көбейтиўшилерге жиклеймиз:

$$4+3x-x^2=-(x-4)(x+1)$$

ҳәм өзгериўшини $t=x-2$ деп алмастырамыз. Сонда:

$$f(x)=ln\ (4-x)(x+1)=g(t)=ln\ (2-t)(3+t)=$$

$$=ln\,6+ln\left(1-\frac{t}{2}\right)+ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Бунда (9.28) ҳәм (9.29) формулаларды қолләнсақ, онда:

$$g(t)=ln\,6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n3^n},\qquad |t|<2.$$

Нәтийжеде,

$$ln(4+3x-x^2)=ln\,6-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)\frac{(x-2)^n}{n},\qquad R=2.$$

5–мысал. $\int_0^1 cos\,x^2\,dx$ интегралды $\alpha=0{,}001$ дәллигинде есаплаң.

Шешими. Интеграл белгиси астындағы функцияның Маклорен қатарына жайылмасынан пайдаланамыз. Оның ушын

$$cos\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+......\quad x\in(-\infty,\ \infty)$$

жайылмада x ты x^2 пенен алмастырамыз. Сонда

$$cos\,x^2=1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^2)^6}{6!}+......=$$

$$=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+......\quad x\in(-\infty,\ \infty)\,.$$

Бул қатар қәлеген x точкада жыйнақлы екенлигинен оны ағзама-ағза интеграллаў мүмкин, яғный:

$$\int_0^1 cos\,x^2\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+......\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}+......\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{13\cdot 6!}+......=$$

$$\approx 1-0{,}1+0{,}0046\approx 0{,}905\,.$$

Бунда интеграллаў нәтийжесинде келип шыққан анлатпа белгиси алмасып келиўши қатар болғанлықтан $|S-S_n|\le |a_{n+1}|$ шәрт орынлы болады. Буннан $|S-S_3|\le |a_4|\approx 0{,}0001<0{,}001$ болып, берилген дәлликти тәмийинлеў ушын дәслепки үш ағзасын алыў жеткиликли болады.

6–мысал. $\int\limits_0^{0,1}\frac{ln\,(1+2x)}{x}dx$ интегралды $\alpha=0{,}001$ дәллигинде есаплаң.

Шешими. Бул мысалда ҳәм интеграл белгиси астындағы функцияның Маклорен қатарына жайылмасынан пайдаланамыз.

$$ln\,(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}-......$$

жайылмада t ны $2x$ пенен алмастырамыз. Сонда

$$ln\,(1+2x)=2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}-4x^4+\frac{32x^5}{5}-......$$

Бул қатар қәлеген $|x|<\frac{1}{2}$ точкаларда жыйнақлы екенлигинен оны ағзама-ағза интеграллаў мүмкин, яғный:

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{ln\,(1+2x)}{x}dx=\int\limits_0^{0,1}\left(2-2x+\frac{8x^2}{3}-4x^3+\frac{32x^4}{5}-......\right)dx=$$

$$=\left(2x-x^2+\frac{8x^3}{9}-x^4+\frac{32x^5}{25}-......\right)\Bigg|_{x=0}^{x=0,1}=$$

$$=0{,}2-0{,}01+0{,}0008889-0{,}00011+........$$

Бул Лейбниц теоремасы шәртлерин қанаатландыратуғын белгиси алмасып келиўши қатар болады. Оның қалдығы ушын $|r_n| = |S - S_n| \le |a_{n+1}|$ шәрти орынлы болады. Буннан $|S - S_2| \le |a_3| \approx 0{,}0008889 < \alpha$.

Демек,

$$\int_0^{0,1} \frac{ln\,(1+2x)}{x}\,dx \approx 0{,}2 - 0{,}01 = 0{,}19\,.$$

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалыр

Төмендеги функцияларды x өзгериўшисиниң дәрежелери бойынша Тейлор қатарына жайың.

19.1. $f(x) = \dfrac{9}{20 - x - x^2}$;

19.2. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}$;

19.3. $f(x) = ln\,(1 - x - 6x^2)$;

19.4. $f(x) = 2x\,cos^2(x/2) - x$;

19.5. $f(x) = \dfrac{sh\,2x}{x} - 2$;

19.6. $f(x) = \dfrac{7}{12 + x - x^2}$;

19.7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}$;

19.8. $f(x) = ln\,(1 + x - 6x^2)$;

19.9. $f(x) = (x-1)\,sin\,5x$;

19.10. $f(x) = \dfrac{ch\,3x - 1}{x^2}$;

19.11. $f(x) = \dfrac{6}{8 + 2x - x^2}$;

19.12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16 - 3x}}$;

19.13. $f(x) = ln\,(1 - x - 12x^2)$;

19.14. $f(x) = (3 + e^{-x})^2$;

19.15. $f(x) = \dfrac{arcsin\,x}{x} - 1$;

19.16. $f(x) = \dfrac{7}{12 - x - x^2}$;

19.17. $f(x) = x^2\sqrt{4 - 3x}$;

19.18. $f(x) = ln\,(1 + 2x - 8x^2)$;

19.19. $f(x) = 2x\,sin^2(x/2) - x$;

19.20. $f(x) = (x-1)\,sh\,x$;

19.21. $f(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}$;

19.22. $f(x)=x\sqrt[3]{27-2x}$;

19.23. $f(x)=ln\,(1+x-12x^2)$;

19.24. $f(x)=\dfrac{sin\,3x}{x}-cos\,3x$;

19.25. $f(x)=\dfrac{arctg\,x}{x}$;

19.26. $f(x)=\dfrac{5}{6-x-x^2}$;

19.27. $f(x)=\sqrt[4]{16-5x}$;

19.28. $f(x)=ln\,(1-x-20x^2)$;

19.29. $f(x)=(2-e^x)^2$;

19.30. $f(x)=(x-1)\,ch\,x$;

19.31. $f(x)=\dfrac{3}{2-x-x^2}$.

Төмендеги интегралларды $\alpha=0{,}001$ дәллигинде есаплаң.

20.1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$;

20.2. $\int\limits_0^{0,1} sin\,(100x^2)dx$;

20.3. $\int\limits_0^{1} cos\,x^2\,dx$;

20.4. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

20.5. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{1-e^{-2x}}{x}dx$;

20.6. $\int\limits_0^{1} \dfrac{ln\,(1+x/5)}{x}dx$;

20.7. $\int\limits_0^{1,5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$;

20.8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$;

20.9. $\int\limits_0^{0,2} sin\,(25x^2)dx$;

20.10. $\int\limits_0^{0,5} cos\,(4x^2)dx$;

20.11. $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$;

20.12. $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx$;

20.13. $\int\limits_0^{0,4} \dfrac{ln\,(1+x/2)}{x}dx$;

20.14. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$;

20.15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$;

20.16. $\int\limits_0^{0,4} sin\,(5x/2)^2\,dx$;

20.17. $\int\limits_0^{0,2} cos\,(25x^2)dx;$

20.18. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}};$

20.19. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}dx;$

20.20. $\int\limits_0^{0,1} \frac{ln\,(1+2x)}{x}dx;$

20.21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}};$

20.22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx;$

20.23. $\int\limits_0^{0,5} sin\,(4x^2)dx;$

20.24. $\int\limits_0^{0,4} cos\,(5x/2)^2\,dx;$

20.25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}};$

20.26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};$

20.27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}};$

20.28. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}};$

20.29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx;$

20.30. $\int\limits_0^{1} sin\,x^2\,dx;$

20.31. $\int\limits_0^{0,1} cos\,(100x^2)dx.$

10–§. Фурье қатары

1–анықлама. Егер төмендеги шәрт

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad n \neq m, \quad n,m \in N \tag{10.1}$$

орынлы болса, онда $[a,\, b]$ кесиндиде үзликсиз болған функциялар $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...,\varphi_n(x), ...$ системасы **ортогоналлық** деп аталады.

Сонын менен бирге

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad \forall n \in N \tag{10.2}$$

болса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасы $[a,\, b]$ кесиндисинде ортонормалланған деп айтылады.

Мысалы, төмендеги тригонометриялық система $[-l,\, l]$ кесиндисинде

$$\frac{1}{2},\ cos\frac{\pi x}{l},\ sin\frac{\pi x}{l},\ ....,\ cos\frac{n\pi x}{l},\ sin\frac{n\pi x}{l},\ .... \tag{10.3}$$

ортогоналлық болады. Енди

$$2\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_{-l}^{l} cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = \int_{-l}^{l} sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l, \qquad \forall n \in N \tag{10.4}$$

екенлигинен (10.3) системаның барлық ағзаларын $\sqrt{l}$, ал бириншi ағзасын $\sqrt{l/2}$ ге бөлсек, онда $[-l,\, l]$ де ортонормалланған тригонометриялық системасына ийе боламыз, яғный:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}cos\frac{\pi x}{l},\ \ \frac{1}{\sqrt{l}}sin\frac{\pi x}{l},\ .... \tag{10.5}$$

Дара жағдайда, $l = \pi$ болғанда (10.3) система жәнеде әпиўайы көриниске келеди:

$$\frac{1}{2},\ cos\,x,\ sin\,x,\ ....,\ cos\,nx,\ sin\,nx,\ .... \tag{10.6}$$

Бул система $[-\pi,\, \pi]$ кесиндисинде ортогоналлық болады.

1-мысал. Төмендеги көринистеги ацлатпа

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\qquad n\in N,\quad L_0(x)=1 \tag{10.7}$$

Лежандр көпағзалысы $[-1,\,1]$ кесиндисинде ортогоналлық функциялар системасын дүзеди.

Дәлиллениўи. Лежандр полиномларының $[-1,\,1]$ кесиндидеги ортогоналлық шәртиниң дурыслығы төмендеги бирдейликтиң $n>m$ де орынлы екенлиги менен анықланады, яғный:

$$J=\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx=0\,.$$

Бунда $x=-1$ ҳәм $x=1$ лер $(x^2-1)^n$ көпағзалысының n есели корени екенлигинен пайдаланамыз. Соның ушын $(x^2-1)^n$ көпағзалысының $n-1$ тәртипке дейинги барлық туўындыларының $x=-1$ ҳәм $x=1$ точкалардағы мәнислери нолге айланады.

Енди J аңлатпасын бөлеклеп интеграллаймыз:

$$J=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx=.....$$

$$.....=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx=0,$$

себеби шәртке көре $n>m$ ҳәм $n+m>2m$, ал $(x^2-1)^m$ көпағзалысының тәртиби $2m$ ге тең. Сонлықтан дифференциаллаў тәртиби оның дәреже тәртибинен үлкен болған көпағзалының туўындысы анық нолге тең.

Мейли $f(x)$ функциясы $[a,\,b]$ кесиндиде үзликсиз, ал $\{\varphi_k(x)\}$ үзликсиз функциялар $[a,\,b]$ кесиндиде ортогоналлық система болып, олардың ҳеш бири $\varphi_k(x)$ $[a,\,b]$ кесиндиде нолге тең болмасын.

2–анықлама. Егер $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ функционаллық қатары жыйнақлы ҳәм оның қосындысы $f(x)$ функциясына тең болатуғындай сондай $\{a_k\}$ санлы избе-излиги

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \qquad x\in[a,\ b] \tag{10.8}$$

бар болса, онда $f(x)$ функциясы $\{\varphi_k(x)\}$ ортогоналлық функциялар системасы бойынша $[a,\ b]$ кесиндиде жыйнақлы болған қатарға жайылған деп аталады.

10.1–лемма. Егер (10.8) функционаллық қатары $[a,\ b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болса, онда оның коэффициентлери ушын төмендеги аңлатпалар орынлы болады:

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}, \qquad n\in N. \tag{10.9}$$

Дәлиллениўи. Шәртке көре $\varphi_n(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзликсиз, буннан Вейерштрасс теоремасы бойынша ол усы кесиндиде шегараланған болады. Егер тең өлшеўли жыйнақлы болған қатарды шегараланған функцияға көбейтирсек, онда және тең өлшеўли жыйнақлы болған қатарға ийе боламыз (тең өлшеўли жыйнақлылық анықламасынан тиккелей келип шығады). Соның ушын (10.8) қатарды $\varphi_n(x)$ функциясына көбейтиремиз. Нәтийжеде:

$$f(x)\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)\varphi_n(x), \qquad n\in N, \tag{10.10}$$

бул жерде (10.10) ның оң тәрепиндеги функционаллық қатары $[a,\ b]$ кесиндиде тең өлшеўли жыйнақлы болады.

Енди функционаллық қатарды ағзама-ағза интеграллаў ҳаққындағы теореманың шәртлери орынлы болыўынан ҳәм $\varphi_k(x)$ функциялардың $[a,\ b]$ кесиндиде өз-ара ортогонал екенлигинен пайдаланамыз:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)\right)\varphi_n(x)dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_n(x)dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx. \tag{10.11}$$

Соның ушын шәртке көре $\varphi_n(x) \not\equiv 0,\ \forall x \in [a,\ b]$ ҳәм үзликсиз болыўынан $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0$. Демек, (10.11) теңликтен a_n коэффициентлерин анықлайтуғын (10.9) формулаға ийе боламыз.

3–анықлама. $[a,\ b]$ кесиндиде ортогоналлық $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар системасы бойынша жайылған (10.8) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ функционаллық қатары $f(x)$ функциясының Фурье қатары, ал a_n санлары Фурье коэффициентлери деп аталады.

$f(x)$ функциясынын $[-l,\ l]$ кесиндидеги тригонометриялық системасы бойынша жайылған Фурье қатары:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l,\ l]. \tag{10.12}$$

(10.12) қатар $f(x)$ функциясының $[-l,\ l]$ ги тригонометриялық Фурье қатары деп аталады, бул жерде a_k ҳәм b_k коэффициентлерин анықлаў ушын (10.9) формулаға тригонометриялық функциялардың аңлатпаларын алып барып қойыў ҳәм (10.4) формулаларды қолланыў керек, яғный:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \tag{10.13}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad n \in N.$$

Дара жағдайда, $l = \pi$ болғанда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{10.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n \in N.$$

Мейли $[a,\ b]$ кесиндиде $f(x)$ базы бир абсолют интегралланыўшы функция, ал $\{\varphi_k(x)\}$ функциялары усы кесиндиде үзликсиз ҳәм ҳеш бири кесиндиде $\varphi_k(x)\not\equiv 0,\quad \forall k\in N,\quad \forall x\in[a,\ b]$ нолге тең болмасын. Усы шәртлер орынлы болғанда, $[a,\ b]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы қәлеген $f(x)$ функциясының Фурье коэффициентлери (10.9) формула бойынша анықланады.

Ҳақыйқатында да, мейли меншиксиз интеграл сыпатында $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx<\infty$ жыйнақлы болсын. Сонда

$$|f(x)\,\varphi_n(x)|\ \le\ k_n\,|f(x)|,\qquad k_n=\sup_{x\in[a,\ b]}|\varphi_n(x)|.$$

Буннан салыстырыў белгиси бойынша $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ меншиксиз интегралы абсолют жыйнақлы болады, яғный $\int\limits_a^b |f(x)\,\varphi_n(x)|\,dx<\infty$. Демек, $f(x)$ тың барлық Фурье коэффициентлери (10.9) формула менен табылады. Улыўма алғанда, $[a,\ b]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы $f(x)$ функциясының Фурье қатары $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x)$ таралыўшы ҳәм болыўы мүмкин. Сонлықтан бундай типтеги функциялар ушын төмендеги белгилеўди қабыл етемиз:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x).\tag{10.15}$$

Дара жағдайда, (10.3) тригонометриялық система ушын (10.15) формула төмендеги күриниске ийе болады:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).\tag{10.16}$$

(10.15) жазылыўда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ қатары $f(x)$ функциясының ортогоналлық $\{\varphi_k(x)\}$ системасы бойынша жайылған Фурье қатарын билдиреди.

Төмендеги Риман леммасы тригонометриялық Фурье қатары ҳәм интеграллары теориясында үлкен әҳмийетке ийе.

10.2–лемма (Риман леммасы). Мейли $f(x)$ функциясы шекли ямаса шексиз болған $(a,\ b)$ интервалында абсолют интегралланыўшы болсын. Сонда

$$\lim_{w \to \infty} \int_a^b f(x)\, \sin wx\, dx = \lim_{w \to \infty} \int_a^b f(x)\, \cos wx\, dx = 0. \qquad (10.17)$$

Дәлиллениўи. Лемманың дәлиллениўин еки пунктке ажыратамыз.

а) Мейли дәслеп $f(x)$ функциясы Риман мағанасында $[a,\ b]$ кесиндиде интегралланыўшы болсын. Сонда интегралланыўшылық критериясы бойынша қәлеген $\varepsilon > 0$ ушын $[a,\ b]$ кесиндисиниң сондай $T = \{x_i\},\ i = 0,1,2,......$ бөлиниўи табылып, бул бөлиниўге сәйкес болған S_T жоқарғы ҳәм s_T төменги Дарбу қосындылары ушын

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

шәрти орынлы, бул жерде $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1},\ x_i]} f(x)$, $\quad m_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1},\ x_i]} f(x)$.

Бул жағдайда, қәлеген $i = \overline{1, n}$ ҳәм қәлеген $x \in [x_{i-1},\ x_i]$ ушын $0 \le f(x) - m_i \le M_i - m_i$ теңсизлиги ҳәм төмендеги баҳалаўлары дурыс болады:

$$\left| \int_a^b f(x)\, \sin wx\, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, \sin wx\, dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin wx\, dx + \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin wx\, dx \right| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f(x) - m_i \right| \cdot \left| sin\, wx \right| dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left| m_i \right|}{\left| w \right|} \left| cos\, wx_i - cos\, wx_{i-1} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta x_i + \frac{2}{\left| w \right|} \sum_{i=1}^{n} \left| m_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c_0}{\left| w \right|},$$

бул жерде $c_0 = 2n \cdot \sup_{x \in [a,\, b]} \left| f(x) \right|$.

Енди тайынланған n ниң мәнисинде сондай $w_0 > 0$ саны бар болып $\left| w \right| > w_0$ шәртин қанаатландыратуғын қәлеген w саны ушын $\dfrac{c_0}{\left| w \right|} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ теңсизлиги дурыс болады. Демек, w параметрдиң $\left| w \right| > w_0$ мәнислеринде

$$\left| \int_a^b f(x)\, sin\, wx\, dx \right| < \varepsilon$$

болады, яғный

$$\lim_{w \to \infty} \int_a^b f(x)\, sin\, wx\, dx = 0.$$

б) Мейли енди $f(x)$ функциясы $(a,\, b)$ интервалында абсолют интегралланыўшы болсын. Пикирлеўди шегараламаған ҳалда $\int_a^b \left| f(x) \right| dx$ меншиксиз интегралының тек бир дана b айрықша точкасы бар деп есаплаймыз. Бунда биз тек шекли сандағы айрықша точкаларға ийе болған меншиксиз интегралларды қарастырамыз. Сонда меншиксиз интегралдың жыйнақлы болыў шәртине көре $\forall \varepsilon > 0$ ушын $\exists\, b^*$, $b^* < b$ табылып $\left[a,\, b^*\right]$ кесиндиде $f(x)$ функциясы Риман мағанасында интегралланыўшы, ал төмендеги меншиксиз интеграл ушын

$$\int_{b^*}^{b} \left| f(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

баҳалаўы дурыс болады.

Риман мағанасында интегралланыўшы функциялар ушын лемманың дәлиллениўи а) пунктте келтирилген еди. Буннан сондай $w_0 > 0$ саны бар болып $w > w_0$ шәрти менен анықланған w ның барлық мәнислеринде

$$\left| \int_a^{b^*} f(x)\, sin\, wx\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Соның ушын w параметрдиң $|w| > w_0$ мәнислеринде

$$\left| \int_a^{b} f(x)\, sin\, wx\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^{b^*} f(x)\, sin\, wx\, dx + \int_{b^*}^{a} f(x)\, sin\, wx\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^{b^*} f(x)\, sin\, wx\, dx \right| + \int_{b^*}^{a} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Демек, $\int_a^b f(x)\, sin\, wx\, dx \to 0, \quad w \to \infty$. Тап усындай жол менен $\lim\limits_{w \to \infty} \int_a^b f(x)\, cos\, wx\, dx = 0$ екенлигин көрсетиў мүмкин.

1-салдар. Егер $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы функция болса, онда оның (10.13) формулалары менен анықланған Фурье коэффициентлери $n \to \infty$ умтылғанда нолге умтылады.

Тригонометриялық Фурье қатарының дара қосындылары ушын формула

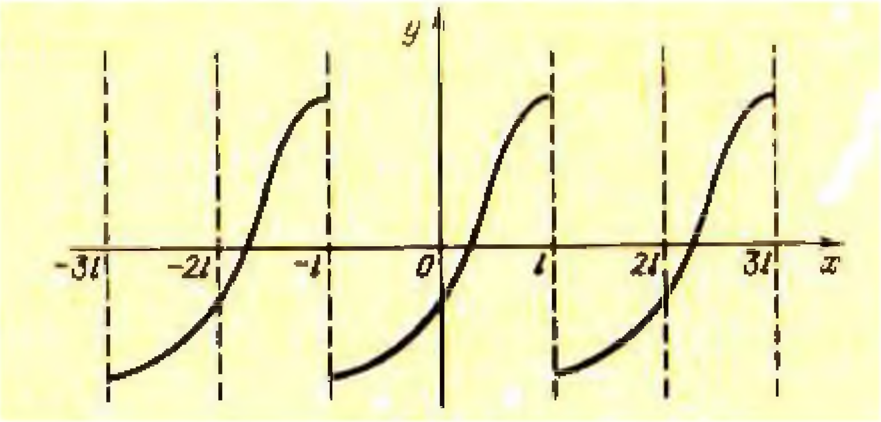
$f(x)$ функциясының периоды T дегенде биз сол период болатуғын санлардың ең кишисин қабыл етемиз. Егер $f(x)$ функциясының периоды $2l$ ге тең болса, онда оны $2l$ периодлы деп айтамыз. $[-l, l)$ ярым сегментте анықланған $f(x)$ функцияны $(-\infty, \infty)$ аралыққа периодикалық даўам еттириўге болады. Бунын ушын $[-l, l)$ ярым сегменттеги $f(x)$ функцияның графигин Ox көшери бойлап параллел рәўиште

$2nl,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ бирликке көширемиз. Соның менен бирге, егер $f(-l+0)$ ҳәм $f(l-0)$ бир тәреплеме лимитлери бар болса, онда функцияның периодлығына көре төмендеги теңликлер орынлы болады:

$$f(l+0) = \lim_{x \to l+0} f(x) = \lim_{u \to +0} f(l+u) = \lim_{u \to +0} f(-l+u) =$$

$$= \lim_{x \to -l+0} f(x) = f(-l+0).$$

Егер $f(-l+0) \neq f(l-0)$ болса, онда $[-l, l)$ аралықта анықланған (үзликсиз болған) $f(x)$ функцияның периодлы даўамында $l(2n+1), \quad n \in Z$ точкалары секириўи $\mid f(-l+0) - f(l-0) \mid$ ге тең болған биринши түр үзилис точкалары болады.



6-сызылма

Тек бир жағдайда, егер $f(-l+0) = f(l-0)$ болса, онда $[-l, l)$ аралықта үзликсиз болған $f(x)$ функцияның $(-\infty, \infty)$ аралыққа периодлы даўамы ҳәм үзликсиз болып қалады.

10.3–лемма. Егер $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы ҳәм $2l$ периодлы болса, онда қәлеген ҳақыйқый a саны ушын төмендеги теңлик орынлы болады:

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Енди $2l$ периодлы $[-l, l]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы $f(x)$ функциясының (12) көринистеги тригонометриялық Фурье қатарын итибарға алып, оның дара қосындылар избе-излигин жасаймыз:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad x \in [-l, l]. \tag{10.18}$$

Бунда $S_n(x)$ функциялары шексиз дифференциалланыўшы ҳәм $2l$ периодлы екенлиги анық. Енди $S_n(x)$ ушын формуланы (Дирихле формуласы) келтирип шығарамыз, яғный $u \neq 2k\pi$, $k \in Z$ де дурыс болған төмендеги бирдейликти дәлиллеймиз:

$$D_n(u) \equiv \frac{1}{2} + \cos u + ... + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{10.19}$$

Бул тастыйықлаўдың дәлиллениўи төмендеги түрлендириўден тиккелей келип шығады:

$$2D_n(u)\sin\frac{u}{2} \equiv \sin\frac{u}{2} + 2\cos u \sin\frac{u}{2} + ... + 2\cos nu \sin\frac{u}{2} =$$

$$= \sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} + ... + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u -$$

$$-\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u.$$

(10.19) формула менен анықланған $D_n(u)$ функциясы Дирихле ядросы деп аталады.

10.4–лемма. Дирихле ядросы шексиз дифференциалланыўшы жуп 2π периодлы функция ҳәм оның ушын төмендеги теңлик орынлы болады:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, du = 1. \tag{10.20}$$

Дәлиллениўи. (10.19) формуладан $\cos ku$ лар жуп, 2π периодлы ҳәм шексиз дифференциалланыўшы екенлигинен усы қәсийетлерге Дирихле ядросы ҳәм ийе болады. (10.19) формуланы пайдаланып Дирихле ядросының аңлатпасынан тиккелей (10.20) формуланы келтирип шығарыў мүмкин:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos u+......+\cos nu\right)du =$$

$$= 1+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ku\,du = 1.$$

Енди Фурье қатарының дара қосындылары ушын Дирихле формуласын келтирип шығарамыз. Оның ушын дәслеп (10.13) аңлатпалары менен берилген Фурье коэффициентлерин (10.18) формулаға алып барып қоямыз, соң Дирихле ядросының (10.19) формуласынан пайдаланамыз. Нәтийжеде:

$$S_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt + \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\right]=$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{l}(x-t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(x-u)\,D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du.$$

Соңғы интегралда интеграл белгиси астындағы функция $2l$ периодлы, буннан 10.3–леммаға көре узынлығы $2l$ кесинди бойынша алынған интегралдын мәниси, сол кесиндинин сан көшериндеги жайласқан орнынан ғәрезсиз екенлигин аңлатады, яғный

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x-u)\,D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du. \qquad (10.21)$$

Фурье қатарының дара қосындысы ушын алынған (10.21) аңлатпасы **Дирихле формуласы** деп аталады.

Егер (10.21) де интеграллаў кесиндисин $[-l,\,0]$ ҳәм $[0,\,l]$ болған симметриялық кесиндилерге ажыратып, соң екиншисинде $u=-v$ деп өзгериўшини алмастырып ҳәм Дирихле ядросының жуп екенлигин есапқа алсақ, онда (10.21) формуланы төмендегише қылып түрлендириў мүмкин:

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[f(x+u) + f(x-u) \right] D_n\left(\frac{\pi}{l} u \right) du . \tag{10.22}$$

Дара жағдайда, $l = \pi$ болғанда (10.21) ҳәм (10.22) формулалар жәнеде әпиўайыласады

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+u) + f(x-u) \right] D_n(u)\, du . \tag{10.23}$$

Фурье қатарыныц точкада жыйнақлы болыўы

Фурье қатарының x_0 точкада жыйнақлы болыўы (10.23) Дирихле формуласы менен анықланған $S_n(x_0)$ дара қосындылар избе-излигиниң жыйнақлылық шәрти менен алмастырылады. Келеси баянлаўымызда тек $l = \pi$ болған жағдайды қарастырамыз. Бул бизлердиң пикир жүритиўимизди шегаралап қоймайды, себеби 2π периодтан $2l$ периодқа әпиўайы өзгериўшини алмастырыў усылы менен өтип алыўға болады.

10.1–теорема (локализациялаў принципи). Мейли $f(x)$ функциясы 2π периодлы ҳәм $[-\pi, \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы болсын. Сонда $f(x)$ функциясының x_0 точкадағы Фурье қатарының жыйнақлы болыў шәрти ҳәм $f(x)$ функциясының x_0 точкадағы Фурье қатарының қосындысы (егер бул қатар жыйнақлы болса) тек $f(x)$ функциясынын $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ қәлегенше киши интервалдағы мәнисинен ғәрезли болады.

Дәлиллениўи. Фурье қатарының дара қосындылары аңлатпасы болған (10.23) формуласынан пайдаланамыз. Дәслеп бул формуланы төмендеги көринисте жазып аламыз:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}\, sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du\,. \qquad (10.24)$$

Бунда $f(x_0+u)+f(x_0-u)$ функциясы $[-\pi,\ \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы, ал қәлеген $\delta > 0$ ҳәм қәлеген $u \in [\delta,\ \pi]$ ушын мына баҳалаўы дурыс

$$\left|\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}\right| \le \frac{1}{2\,sin\frac{\delta}{2}}\,|\,f(x_0+u)+f(x_0-u)\,|$$

болады. Соның ушын салыстырыў белгиси бойынша

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}, \qquad u \in [\delta,\ \pi]$$

функциясы $[\delta,\ \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы болады. Буннан Риман леммасы бойынша

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}\, sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du = 0\,.$$

Нәтийжеде, (10.24) формулаға муўапық

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}\, sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du\right] = 0\,. \qquad (10.25)$$

Демек, бул (10.25) формуладан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ лимиттиң бар болыўы ҳәм оның мәниси тек төмендеги лимитиң

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\,sin\frac{u}{2}}\, sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du$$

бар болыўы ҳәм оның мәнисинен ғәрезли болады, яғный $(x_0-\delta,\ \ x_0+\delta)$ интервалдағы f функцияның мәнисинен ғәрезли болады. **Теорема толығы менен дәлилленди.**

1–ескертиў. $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ функциясы ушын (10.25) формула төмендеги көринисте болады:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2}, \qquad \forall \delta > 0. \tag{10.26}$$

4–анықлама. Егер шекли $f(x_0 \pm 0)$ бир тәреплеме лимитлери ҳәм сондай $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $c_0 > 0$ санлары бар болып барлық $u \in (0, \delta)$ лар ушын төмендеги теңсизликлер орынлы

$$| f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) | \leq c_0 u^{\alpha}, \tag{10.27}$$

$$| f(x_0 - u) - f(x_0 - 0) | \leq c_0 u^{\alpha}$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 точкада **Гельдер шәртин** қанаатландырады деп аталады. Бул жерде α саны Гельдер көрсеткиши деп айтылады.

Егер x_0 точкада (10.27)) Гельдер шәртин қанаатландырыўшы $f(x)$ функциясы ушын $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ болса, онда функция усы точкада биринши түр үзилиске ийе болыўы мүмкин.

Енди бир тәреплеме туўындылардың белгили болған анықламаларын улыўмаластырып келтиремиз:

$$f'_+(x_0) = \lim_{u \to +0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{u \to +0} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}.$$

10.5–лемма. Егер $f(x)$ функциясы x_0 точкада шекли $f'_+(x_0)$ ҳәм $f'_-(x_0)$ бир тәреплеме туўындыларға ийе болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 точкада Гельдер шәртин $\alpha = 1$ көрсеткиши менен қанаатландырады.

Дәлиллениўи. Шәрт бойынша төмендеги функциялар

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}, \qquad \psi(u) = \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}$$

$u \to +0$ да шекли лимитлерге ийе болады. Соның ушын базы бир $(0, \delta)$ интервалда шегараланған, яғный сондай $c_0 > 0$ саны бар болып

$$\left| \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \right| \le c_0, \qquad \left| \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u} \right| \le c_0$$

теңсизликлери орынлы болады.

Демек, $f(x)$ функциясы x_0 точкада Гельдер шәртин $\alpha = 1$ көрсеткиши менен қанаатландырады екен.

1-салдар. Егер $f(x)$ функциясы x_0 точкада туўындыға ийе болса, онда ол Гельдер шәртин қанаатландырады. Кери тастыйықлаў улыўма алғанда дурыс емес, мысалы: $f(x) = |x|^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ функциясы $x = 0$ точкада Гельдер шәртин қанаатландырады, бирақ $x = 0$ точкада дифференциалланыўшы емес.

10.2–теорема (Фурье қатарының точкада жыйнақлы болыўы). Мейли 2π периодлы $f(x)$ функциясы $[-\pi, \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы ҳәм x_0 точкада Гельдер шәртин қанаатландырсын. Сонда $f(x)$ функцияның x_0 точкадағы Фурье қатары

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$$

ге жыйнақлы болады. Соның менен бирге, егер $f(x)$ функциясы x_0 точкада үзликсиз болса, онда усы точкадағы Фурье қатарының қосындысы $f(x_0)$ ге тең болады.

Дәлиллениўи. Теорема шәрти бойынша $f(x)$ функциясы x_0 точкада Гельдер шәртин қанаатландырады, яғный $0 < u < \delta$ ҳәм $\alpha > 0$ лар ушын (10.27) теңсизликлери орынлы болады. Берилген $\delta > 0$ ушын (10.25), (10.26) теңликлерин жазып аламыз. Соң (10.26) теңликти дәслеп $f(x_0+0)+f(x_0-0)$ ге көбейтемиз ҳәм нәтийжени (10.25) теңликтен алып таслаймыз:

$$\lim_{n \to \infty} \left[S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \right. \tag{10.28}$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}} \times \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du \right] = 0.$$

(10.27) Гельдер шәртинен төмендеги

$$\Phi(u) = \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{10.29}$$

функцияның $[0, \delta]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы екенлиги анық. Ҳақыйқатында да, егер Гельдер шәртин қоллансақ, онда (10.29) теңлиги менен анықланған $\Phi(u)$ функциясы ушын төмендеги теңсизлиги дурыс болады:

$$\Phi(u) = \frac{2c_0 u^{\alpha}}{\frac{2}{\pi}u} = \pi c_0 u^{\alpha-1}, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \tag{10.30}$$

Демек, меншиксиз интеграллардын жыйнақлы болыўынын салыстырыў белгиси бойынша (10.30) теңлик пенен анықланған $\Phi(u)$ функциясы $[0, \delta]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы болады.

Риман леммасына муўапық

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} \Phi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du = 0.$$

Нәтийжеде, (10.28) формуладан төмендеги жуўмақлаўшы теңликке ийе боламыз:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Теорема толығы менен дәлилленди.

1–салдар. Егер 2π периодлы ҳәм $[-\pi, \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы $f(x)$ функциясы x_0 точкада $f'_+(x_0)$ ҳәм $f'_-(x_0)$ бир тәреплеме туўындыларға ийе болса, онда оның x_0 точкадағы Фурье қатары $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$ ге жыйнақлы болады.

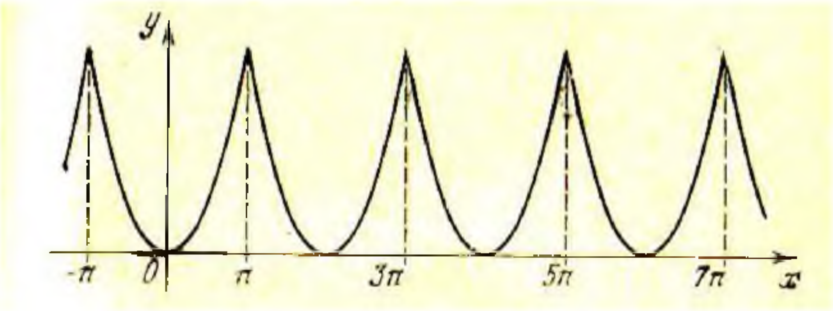
2–салдар. Егер 2π периодлы ҳәм $[-\pi, \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы $f(x)$ функциясы x_0 точкада $f'(x_0)$ туўындыға ийе болса, онда оның x_0 точкадағы Фурье қатары $f(x_0)$ ге жыйнақлы болады.

3–салдар. Егер 2π периодлы ҳәм $[-\pi, \pi]$ кесиндиде абсолют интегралланыўшы $f(x)$ функциясы $\pm\pi$ точкаларда Гельдер шәртин қанаатландырса, онда оның периодлығы бойынша $\pm\pi$ точкалардағы Фурье қатары $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$ ге жыйнақлы болады.

1–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Шешими. $f(x)=x^2$, $[-\pi,\pi]$ функциясы жуп ҳәм оның периодлы даўам қылынған функциясы үзликсиз ҳәм бөлек-сыйпақ болады (6-сызылма). Соның ушын 10.2–теорема бойынша Фурье қатары $[-\pi,\pi]$ кесиндиниң дерлик барлық жеринде $f(x)=x^2$ функциясына абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.



6-сызылма

Есаплаўлардан:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

$b_n = 0, \quad n = 1,2,3,......$ (себеби $f(x) = x^2$ функциясы жуп). Сонлықтан барлық $-\pi \le x \le \pi$ ушын

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}. \tag{10.31}$$

(10.31) ни төмендегише қылып түрлендиремиз, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}. \tag{10.32}$$

Егерде (10.32) де $x = 0$ деп алсақ, онда керекли болған нәтийжеге ийе боламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

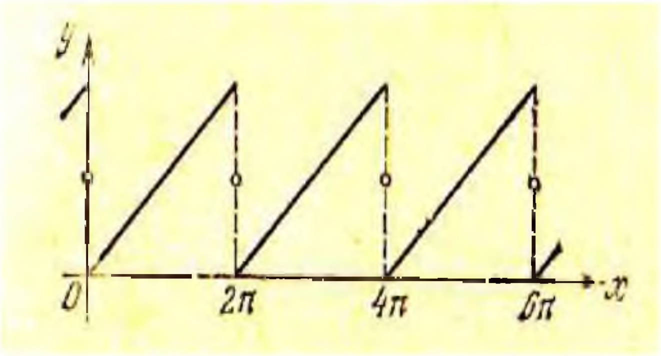
2–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Шешими. $f(x) = x$ функциясын $0 < x < 2\pi$ аралықта Фурье қатарына жайыў мәселесин көрип шығамыз. Бул функцияның графиги төмендегише болады (7-сызылма). Оның периодлы даўам қылынған функциясына 10.2–теорема шәртлерин қолланыў мүмкин. Үзилис ноқатларында ($x = 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2,....$) Фурье қатары функцияның оң ҳәм шеп ноқатлардағы лимит мәнислериниң орта арифметигине

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \pi,$$

яғный π ге жыйнақлы болады. Берилген функция жупта, тақта емес.



7-сызылма

Сонлықтан, Фурье коэффициентлери төмендегише болады.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi n}\left(x \sin nx\right)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx\, dx = 0 ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi n}\left(x \cos nx\right)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = -\frac{2}{n} .$$

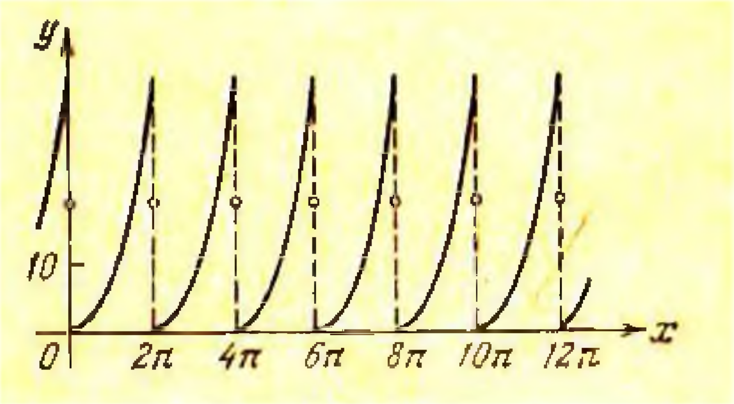
Сонлықтан барлық $0 < x < 2\pi$ ушын $x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Буннан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} . \qquad (10.33)$$

Енди тап усындай қылып $f(x) = x^2$ функциясының $0 < x < 2\pi$ аралықта Фурье қатарына жайыў мәселесин қарастырамыз. Бул функцияның графиги төмендегише болады (8-сызылма). Оның периодлы даўам қылынған функциясына 10.2–теорема шәртлерин, яғный жыйнақлылық белгисин қолланыў мүмкин. Үзилис ноқатларында ($x = 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) Фурье қатары функцияның оң ҳәм шеп ноқатлардағы лимит мәнислериниң орта арифметигине

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = 2\pi^2 ,$$

яғный $2\pi^2$ ге жыйнақлы. Берилген функция жупта, тақта емес.



8-сызылма

Сонлықтан, Фурье коэффициентлери төмендегише болады.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(x \cos nx\right)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi n}\left(x^2 \cos nx\right)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx = -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} \sin nx\, dx = -\frac{4\pi}{n}.$$

Сонлықтан барлық $0 < x < 2\pi$ ушын

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{10.34}$$

Егер (10.33) ни $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ екенлигин инабатқа алсақ, онда (10.34) ни төмендегише қылып түрлендирип жазыў мүмкин.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}. \qquad (10.35)$$

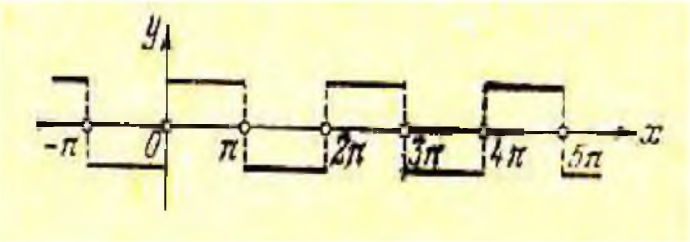
Енди (10.35) де $x=0$ деп алсақ, онда керекли болған нәтийжеге ийе боламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

3–мысал. Функциянын Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

Шешими. $f(x)=1$, $0<x<\pi$ функциясын берилген аралықта Фурье қатарына синуслар бойынша жайып шығамыз. Бул функцияның $[-\pi;0]$ кесиндиде тақ болған периодлы даўамында $x=0$ үзилис ноқаты болатуғынлығын аңлаймыз. Ox көшерине тақ, периодлы$(T=2\pi)$ даўам қылынған $f(x)$ функциясының графиги төмендегише болады (9-сызылма). Үзилис ноқатларында ($x=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,....$) қатардың қосындысы нолге тең болады, яғный $\frac{f(0)+f(\pi)}{2}=0$.



9-сызылма

Фурье коэффициентлери төмендегише болады.

$$a_n=0, \quad n=0,1,2,.....,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\left(-\cos nx\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right].$$

Сонлықтан барлық $0 < x < \pi$ ушын $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. Буннан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \qquad (10.36)$$

Енди (10.36) де $x = \frac{\pi}{2}$ деп алсақ, онда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, яғный

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

4–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-(-1)^n}{n^2} = \frac{7}{12}\pi^2.$$

Шешими. Биз 1–мысалда $f(x) = x^2$, $[-\pi, \pi]$ функциясының көрсетилген кесиндидеги Фурье қатарына жайылмасынан төмендеги келтирип шығарған едик, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}. \qquad (10.37)$$

Тап усындай қылып, 2–мысалда $f(x) = x$ функциясының $0 < x < 2\pi$ интервалдағы Фурье қатарына жайылмасынан төмендеги теңликти, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}. \qquad (10.38)$$

Енди 2–мысалда $f(x) = x^2$ функциясының $0 < x < 2\pi$ интервалдағы Фурье қатарына жайылмасынан төмендеги теңликти, яғный

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad (10.39)$$

келтирип шығарған едик.

Енди (10.37) де $x = 0$ деп алсақ, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \tag{10.40}$$

Егер (10.39) де $x = 0$ деп алсақ, онда

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{6\pi^2}{12}. \tag{10.41}$$

Нәтийжеде, (10.40) ҳәм (10.41) өз-ара қоссақ, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^2} = \frac{7}{12}\pi^2$$

керекли болған нәтийжеге ийе боламыз.

5–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{sh\pi}\right).$$

Шешими. $f(x) = e^{ax}$, $a = const$, $a \neq 0$ функциясының $-\pi < x < \pi$ аралықтағы Фурье қатарына жайылмасын келтирип шығарамыз.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n = 1,2,3,......,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad n = 1,2,3,.......$$

Тиккелей есаплаўлар нәтийжесинде

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{1}{a\pi}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) = \frac{2}{a\pi}\, sh\, a\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2}\, e^{ax}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} =$$

$$=(-1)^n \frac{2a}{\pi(a^2+n^2)}\, sh\, a\pi, \qquad n=1,2,3,......$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\,x}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}\,e^{a\,x}\right)\right|_{x=-\pi}^{x=\pi}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2n}{\pi(a^2+n^2)}\, sh\, a\pi, \qquad n=1,2,3,......$$

Сонда берилген функцияның Фурье қатары төмендеги көринисте

$$e^{a\,x}=\frac{2\, sh\, a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left(a\cos nx-n\sin nx\right)\right] \tag{10.42}$$

болады. Енди (10.42) де $x=0$ ҳәм $a=1$ деп алсақ, онда

$$1=\frac{2\, sh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right].$$

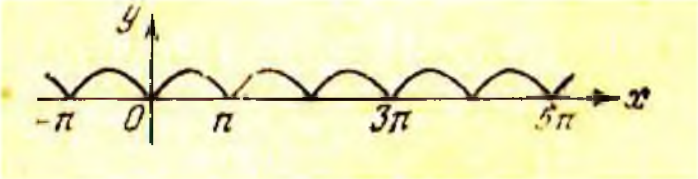
Буннан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{sh\pi}\right). \tag{10.43}$$

6–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

Шешими. $f(x)=|\sin x|$ функциясын қараймыз. Ол x тиң барлық мәнислеринде анықланған ҳәм жуп, бөлек-сыйпақ үзликсиз функция болады. Оның графиги 10-сызылмада келтирилген. Жыйнақлылық белгиси орынлы болып, $f(x)=|\sin x|$ функциясы өзиниң барлық жерде абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болған Фурье қатарына тең болады.



10-сызылма

$0 \leq x \leq \pi$ ушын $|sin x| = sin x$ екенлигинен

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= -2\frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2-1)} = \begin{cases} 0, & егер \quad n = 2k+1, \\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, & егер \quad n = 2k, \; k = 1,2,,,,, \end{cases}$$

$n = 1$ де $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = 0$, ал $b_n = 0, \quad n = 1,2,........$

Демек, берилген функцияның Фурье қатары төмендеги көринисте

$$|sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \tag{10.44}$$

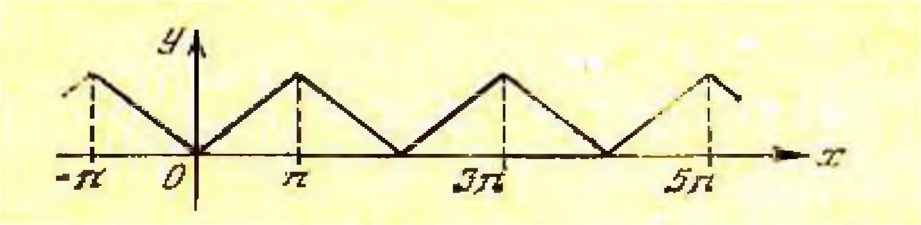
болады. Енди (10.44) де $x = 0$ деп алсақ, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}. \tag{10.45}$$

7–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Шешими. $f(x) = |x|$ функциясын $-\pi \leq x \leq \pi$ ушын қараймыз. Функция жуп. Оның периодлы даўамының графиги 11-сызылмада келтирилген. «Даўам еттирилген» функция үзликсиз ҳәм бөлек-сыйпақ болады. Жыйнақлылық белгисин қолланыў мүмкин. Сонлықтан, Фурье қатары $f(x) = |x|$ функциясына $[-\pi, \pi]$ кесиндиниң барлық ноқатларында ҳәм оның «периодлы даўамына» абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады.



11-сызылма

$x \geq 0$ ушын $|x| = x$ екенлигинен

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi \, ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2}\,(\cos nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & егер \quad n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & егер \quad n = 2k+1, \;\; k = 0,1,2,.... \end{cases}$$

$$b_n = 0, \;\; n = 1,2,........$$

Демек, берилген функцияның Фурье қатары төмендеги көринисте

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \qquad (10.46)$$

болады. Енди (10.46) де $x = 0$ деп алсақ, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \qquad (10.47)$$

8–мысал. Функцияның Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып, төмендеги теңликтиң орынлы болыўын көрсетиң:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}\,.$$

Шешими. $f(x) = \left|\cos(\pi x / l)\right|$, $l = const,\; l > 0$ функциясын $0 \leq x \leq l$ ушын қараймыз. Функция жуп. «Даўам еттирилген» функция үзликсиз ҳәм бөлек-сыйпақ болады. Жыйнақлылық белгисин қолланыў мүмкин. Сонлықтан, Фурье қатары $f(x) = \left|\cos(\pi x / l)\right|$ функциясына $[0; l]$ кесиндиниң барлық ноқатларында ҳәм оның «периодлы даўамына» абсолют ҳәм тең өлшеўли жыйнақлы болады. Енди

$$f(x)=\begin{cases} \cos(\pi x/l), & егер \quad 0\le x\le l/2, \\ -\cos(\pi x/l), & егер \quad -l/2\le x\le l \end{cases} \qquad (10.48)$$

екенлигин есапқа алсақ, онда Фурье коэффициентлери

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\pi n/l)x\,dx, \quad n=0,1,2,......,$$

$$b_n=0, \quad n=1,2,3,.......$$

көринисте болады. Тиккелей есаплаўлар нәтийжесинде

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\pi n/l)x dx=$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}\cos(\pi x/l)\cos(\pi n/l)x\,dx-\int_{l/2}^{l}\cos(\pi x/l)\cos(\pi n/l)x\,dx\right]=$$

Өзгериўшини алмастырамыз: $\pi x/l=t$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(\cos(n+1)t-\cos(n-1)t)\,dt-\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos(n+1)t-\cos(n-1)t)\,dt\right], \quad n=1,2,....$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(\cos 2t\,dt-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos 2t\,dt\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\sin(n+1)t}{(n+1)}+\frac{\sin(n-1)t}{(n-1)}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2}-\left(\frac{\sin(n+1)t}{(n+1)}+\frac{\sin(n-1)t}{(n-1)}\right)\Bigg|_{t=\pi/2}^{t=\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)/2}{(n+1)}-\frac{\cos(n\pi)/2}{(n-1)}\right]=-\frac{4}{\pi}\;\frac{(-1)^{n/2}}{n^2-1}.$$

Демек,

$$\left|\cos(\pi x/l)\right|=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(2\pi n/l)x\right]. \qquad (10.49)$$

Енди (10.49) де $x=0$ деп алсақ, онда

$$1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\right].$$

Буннан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}. \qquad (10.50)$$

9–мысал. Берилген функцияны Фурье қатарына жайың:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}x, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi}{4}(\pi - x), & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Шешими. Берилген $f(x)$ функциясының $-\pi \le x \le \pi$ кесиндидеги Фурье қатарына жайылмасын келтирип шығарамыз.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4}xdx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x)dx\right] = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4}x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x)\cos nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n^2}(\cos nx)\Big|_{x=-\pi}^{x=0} - \frac{\pi}{4n^2}(\cos nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \quad k = 1,2,.... \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4}x\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}(\pi - x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{\pi}{2(2k-1)}, & n = 2k-1, \quad k = 1,2,.... \end{cases}$$

Сонда берилген функциянын Фурье қатары төмендеги көринисте

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x + \frac{\pi}{2(2k-1)}\sin(2k-1)x\right] =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)}\right] \tag{10.51}$$

болады.

10–мысал. Берилген функцияны Фурье қатарына жайың:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right), & -\pi\le x\le 0,\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right), & 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

Шешими. Берилген $f(x)$ функциясының $-\pi\le x\le\pi$ кесиндидеги Фурье қатарына жайылмасын келтирип шығарамыз.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right)dx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0}+\frac{1}{2\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n^2\pi^2}\left(-1+(-1)^n+1-(-1)^n\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \frac{2}{\pi(2k-1)}, & n=2k-1,\quad k=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Сонда берилген функцияның Фурье қатары төмендеги көринисте болады:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}. \tag{10.52}$$

Өз бетинше ислеў ушын тапсырмалыр

Төмендеги функцияларды $(-\pi;\ \pi)$ интервалда Фурье қатарына жайың.

21.1. $f(x)=1-2x$;

21.2. $f(x)=x+\pi$;

21.3. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & 0<x\le\pi; \end{cases}$

21.4. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0<x\le\pi; \end{cases}$

21.5. $f(x)=\begin{cases} \pi, & -\pi \le x \le 0, \\ \pi-x, & 0<x\le\pi; \end{cases}$

21.6. $f(x)=\begin{cases} 5, & -\pi \le x \le 0, \\ -3, & 0<x\le\pi; \end{cases}$

21.7. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi x}{4}, & 0<x\le\pi; \end{cases}$

21.8. $f(x)=x-|\,x\,|$.

Төмендеги функцияларды көрсетилген аралықларда синуслар бойынша Фурье қатарына жайың.

21.9. $f(x)=x, \quad x\in[0;\ \pi]$;

21.10. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, \quad x\in[0;\ \pi]$;

21.11. $f(x)=cos\,x, \quad x\in[0;\ \pi]$;

21.12. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi, \end{cases}$

21.13. $f(x)=x, \quad x\in[0;\ 3]$;

21.14. $f(x)=x^2, \quad x\in[0;\ 1]$;

21.15. $f(x)=\begin{cases} sin\,\dfrac{\pi}{l}x, & 0\le x<\dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2}<x\le l; \end{cases}$

21.16. $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{l}x, & 0\le x<\dfrac{l}{2}, \\ -\sin\dfrac{\pi}{l}x, & \dfrac{l}{2}<x\le l. \end{cases}$

Төмендеги функцияларды көрсетилген аралықларда косинуслар бойынша Фурье қатарына жайың.

21.17. $f(x)=x, \quad x\in[0;\ \pi];$

21.18. $f(x)=\dfrac{1}{2}x-1, \quad x\in[0;\ \pi];$

21.19. $f(x)=x^2, \quad x\in[0;\ \pi];$

21.20. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3, \quad x\in[0;\ \pi];$

21.21. $f(x)=\sin x, \quad x\in[0;\ \pi];$

21.22. $f(x)=x, \quad x\in[0;\ 1];$ 21.23. $f(x)=x^2, \quad x\in[0;\ 3];$

21.24. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le h, \\ 0, & h<x\le\pi; \end{cases}$

21.25. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2h}, & 0\le x\le 2h, \\ 0, & 2h<x\le\pi. \end{cases}$

Берилген функцияның $(-\pi;\ \pi)$ интервалдағы Фурье қатарына жайылмасынан пайдаланып қатардың қосындысын есаплаң.

21.26. $f(x)=x, \quad x\in(-\pi;\ \pi), \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=?;$

21.27. $f(x)=x^2, \quad x\in(-\pi;\ \pi), \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=?;$

21.28. $f(x)=x^2, \quad x\in(-\pi;\ \pi), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?;$

21.29. $f(x)=|x|, \quad x\in(-\pi;\ \pi), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=?;$

21.30. $f(x)=sign\ x, \quad x\in(-\pi;\ \pi), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=?.$

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Азларов Т.А., Мансуров Х. «Математик анализ», 1,2–қисмлар, Тошкент: «Ўқитувчи» нашриёти, 1986, 1989.
2. Тер – Крикоров А.М., Шабунин М.И. «Курс математического анализа», Москва, изд. «Наука», 1988.
3. Толстов Г.П. «Ряды Фурье», Москва, изд. «Наука», 1980.
4. Джураев Т., Саъдуллаев А., Худойберганов Г. ва бошқалар «Олий математика асослари», Тошкент: «Ўзбекистон» нашриёти, 1995.
5. Саъдуллаев А. ва бошқалар «Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами», Тошкент: «Ўзбекистон» нашриёти, 1992.
6. Шокирова Ҳ.Р. «Каррали ва эгри чизиқли интеграллар», Тошкент, «Ўзбекистон» нашриёти, 1992.
7. Гусак А.А. «Ряды и кратные интегралы», Минск, изд. БГУ, 1970.
8. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления» т. 3, М.: «Наука», 1969.
9. Кудрявцев Л.Д. «Курс математического анализа», т.2, Москва, изд. «Высшая школа», 1988.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. «Высшая математика: дифференциальные уравнения, кратные интегралы, функции комплексного переменного», Москва, изд. «Наука», 1981.

Интернет сайтлары

1. *http://allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan.htm*
2. *www.dmvn.mexmat.net/ccalaculus.php*
3. *www.pm298.ru/mkanaliz.php www.z_math.ru/*