ISSN 2010-7269

UZBEK MATHEMATICAL JOURNAL

2016 2

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O'ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O'zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

2. 2016

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2016

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№2, pp.93-100

УДК 517.54

О применении численно-аналитического метода к решению краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма с импульсным воздействием

Нуржанов О.Д., Курбанбаев О.О.

Maqolada chiziqli bo'lmagan ikki nuqtali chegaraviy shartlarga ega impuls ta'sirli Fredgol'm tipidagi integro-differensial tenglamalarni taqribiy yechishda sonli-analitik usul qo'llaniladi.

In this paper, a numerical-analytic method is used to approximate solution of impulsive integro-differential equations of Fredholm type with nonlinear two-point boundary conditions.

Численно-аналитический метод [1] является одним из эффективных методов исследования периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод получил достаточно широкое распространение и успешно применяется также к изучению решений краевых эадач для различных классов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [2, 3, 4].

В данной работе изучается вопрос сходимости одной итерационной схемы этого метода для импульсных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма с нелинейными краевыми условиями.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \int_0^T \sum_{j=1}^n a_j(t)b_j(s)x(s)ds), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{1}$$

$$\Delta x = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = G(x(\tau_i)), \tag{2}$$

с нелинейными двухточечными краевыми условиями вида

$$g(x(0), x(T)) = 0 \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n мерный вектор, $f(t,x,y)$, $a(t)$, $b(s)$, $G(x)$ – n мерные вектор-функции и

$$G(x(\tau_i)) = G(x(\tau_i - 0)), \tau_{i+1} - \tau_i = h = const.$$

Предположим, что вектор-функции $f(t,x,y)$ и $a(t)$, $b(s)$ определены и непрерывны в области

$$(t,s,x,y) \in [0,T] \times [0,T] \times D \times D_1, \tag{4}$$

где D и D_1-замкнутые ограниченные области в E_n и удовлетворяют условиям:

$$|f(t,x,y)| \leq M_1, \ |G(x)| \leq M_2, \tag{5}$$

$$|f(t,x'',y) - f(t,x',y)| \leq K_1|x'' - x'|, \tag{6}$$

$$|G(x'') - G(x')| \leq K_2|x'' - x'| \tag{7}$$

где $x, x', x'' \in D$, $y \in D_1$, $M_\ell = \{M_i^\ell\}$, $M_i^\ell \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $\ell = 1,2$; n-мерный постоянный вектор; $K_\ell = \{K_{ij}^{(\ell)}\}, K_{ij}^{(\ell)} \geq 0, \ell = 1,2$; $i,j = \overline{1,n}$; (n,n)-мерные матрицы с неотрицательными элементами; $|f| = (|f_1|, |f_2|, ..., |f_n|)$.

Пусть выполняются также следующие условия:

1) множество D_β точек $x_0(t,x_0,x_T) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T$, содержащихся в области D вместе со своей β скрестностью не пусто:

$$D_\beta \neq \emptyset; \ \beta = \frac{T}{2}(M_1 + \frac{1}{h}M_2) \tag{8}$$

2) наибольшее собственное значение $\lambda(Q)$ матрицы $Q = \frac{T}{3}K_1 + \frac{T}{2}K_2$ не превышает единицы:

$$\lambda(Q) < 1. \tag{9}$$

При таких предположениях построим последовательность функций $x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)$, зависящие от $x_0 = x(0)$, $x_T = x(T)$ и $C_i = \int_0^T b_i(s)x(s)ds, i = \overline{1,n}$ как от параметра, удовлетворяющих импульсным и краевым условиям (2), (3) и равномерно сходящихся к точному решению задачи (1)-(3) при определенных условиях. С этой целью рассмотрим последовательность функций

$$
\begin{aligned}
&x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T + \\
&+\int_0^t \{f(s, x_{m-1}(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j) + \\
&+\sum_i G(x_{m-1}(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n))\delta(s - \tau_i) - \\
&-\frac{1}{T}\int_0^T [f(s, x_{m-1}(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j) + \\
&+\sum_i G(x_{m-1}(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n))\delta(s - \tau_i)]ds\}ds
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $\delta(t)$-функция Дирака, связанная с функцией Хевисайд $\chi(t)$ по формуле

$$\int_{-\infty}^t \delta(s)ds = \chi(t).$$

Используя последнюю формулу последовательность функций (10) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
&x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T + \\
&+\int_0^t [f(s, x_{m-1}(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j) - \\
&-\frac{1}{T}\int_0^T [f(s, x_{m-1}(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j)ds]ds + \\
&+\sum_{\tau_i < t} G(x_{m-1}(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)) - \\
&-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N G(x_{m-1}(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)), \ m = 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{11}
$$

Проверка показывает, что все члены последовательности функций (11)

удовлетворяют краевым условиям

$$x_m(0, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_0,$$
$$x_m(T, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_T, \tag{12}$$
$$m = 0, 1, 2, ...$$

где

$$x_0(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_0(t, x_0, x_T) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T$$

Следуя методу, изложенному в [1], легко можно показать, что при каждом $x_0(t, x_0, x_T) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T \in D_\beta$ функции $x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ принадлежат D при $m \geq 1$. Действительно, на основании леммы 2.1 [2] из (11) находим

$$\begin{aligned}
&|x_1(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) - x_0(t, x_0, x_T)| \leq \\
&\leq (1 - \frac{t}{T}) \int_0^t |f(s, x_0(s, x_0, x_T), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j)|ds + \\
&+ \frac{t}{T} \int_0^T |f(s, x_0(s, x_0, x_T), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j)|ds + \\
&+ (1 - \frac{t}{T}) \sum_{\tau_i < t} |G(x_0(\tau_i, x_0, x_T))| - \frac{t}{T} \sum_{\tau_i > t} |G(x_0(\tau_i, x_0, x_T))| \leq \\
&\leq M_1[(1 - \frac{t}{T}) \int_0^t ds + \frac{t}{T} \int_t^T ds] + M_2[(1 - \frac{t}{T}) \sum_{\tau_i < t} 1 + \frac{t}{T} \sum_{\tau_i > t} 1] \leq \\
&\leq M_1\alpha_1(t) + \frac{1}{h}M_2\alpha_1(t) \leq \frac{T}{2}(M_1 + \frac{1}{h}M_2)
\end{aligned} \tag{13}$$

т.е. $x_1(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) \in D$ при $x_0(t, x_0, x_T) \in D_\beta$, где

$$\alpha_1(t) = (1 - \frac{t}{T}) \int_0^t ds + \frac{t}{T} \int_t^T ds$$

При помощи метода математической индукции можно установить, что для всех $m = 1, 2, ...,\ t \in [0, T]$ и любого $x_0(t, x_0, x_T) \in D_\beta$ все функции (11) также не выходят из области D.

Для установления сходимости функций $x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$

при $m \longrightarrow \infty$ на основании (11) составим разность $x_{m+1}(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) - x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)$ и оценим ее с учетом леммы 1 [1] и неравенств (6), (7) и (13). Тогда как и в работе [1,4] после аналогичных рассуждений получим оценку

$$|x_{m+1}(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) - x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)| \le$$
$$\le (\frac{T}{3}K_1 + \frac{T}{2}K_2)^m(M_1 + \frac{1}{h}M_2)\alpha_1(t)$$

В силу этого неравенства для всех $j \ge 1$ и $C_1, C_2, ..., C_n$

$$|x_{m+j}(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) - x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)| \le$$
$$\le Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i(M_1 + \frac{1}{h}M_2)\alpha_1(t),\ Q = \frac{T}{3}K_1 + \frac{T}{2}K_2 \qquad (14)$$

Учитывая предположение (9), получаем $\lim\limits_{x\to\infty} Q^m = 0$, тогда можно заключить, что при $m \to \infty$ последовательность функций $x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)$ равномерно сходится по $t,x_0,x_T) \in [0,T] \times D_\beta \times D_\beta$ к предельную функцию $x^*(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)$:

$$\lim_{x\to\infty}(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) = x^*(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) \qquad (15)$$

Учитывая неравенство (15) и условия (9), находим

$$|x^*(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n) - x_m(t,x_0,x_T,C_1,C_2,...,C_n)| \le$$
$$\le Q^m(E-Q)^{-1}(M_1 + \frac{1}{h}M_2)\alpha_1(t) \qquad (16)$$

где E-единичная матрица. Если в равенстве (11) перейти к пределу при $m \to \partial$ и принять во внимание соотношение (15), то функция

$x^*(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ будет решением интегрального уравнения

$$x(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = (1 - \frac{t}{T})x_0 + \frac{t}{T}x_T +$$
$$+ \int_0^t [f(s, x(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j) -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T [f(s, x(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n), \sum_{j=1}^n a_j(s)C_j)ds]ds + \tag{17}$$
$$+ \sum_{\tau_i < t} G(x(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)) -$$
$$-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N G(x(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n))$$

Поскольку заданное интегро-дифференциальное уравнение с импульсным воздействием (1), (2) эквивалентно уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), \int_0^T \sum_{j=1}^n a_j(t)b_j(s)x(s)ds)ds + \sum_{\tau_i < t} G(x(\tau_i)$$

то, проблема решения краевой задачи (1)-(3) свелась к нахождению таких значений параметров $x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n$ при котором вектор-функции

$$\varphi_0(x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_T - x_0 - \int_0^T f(s, x^*(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n),$$
$$\sum_{j=1}^n a_j(s)C_j)ds - \sum_{i=1}^N G(x(\tau_i, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n),$$

$$\varphi_j(x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = C_j - \int_0^T b_j(s)x^*(s, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)ds,$$
$$j = 1, 2, ..., n$$

обращаются в нуль.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть функции $f(t, x, y)$ и $G(x)$ определены и непрерывны по всем своим аргументам в области (4) и удовлетворяют неравенствам (5)-(9).

Тогда последовательность функций $x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ вида (11), удовлетворяющих условиям (12), равномерно сходится при $m \to \infty$ относительно $(t, x_0, x_T) \in [0, T] \times D_\beta \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$. При этом функция $x^*(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ является решением интегрального уравнения (17), проходящим при $t = 0$ через точку $x^*(0, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_0$ и при $t = T$ через точку $x^*(T, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = x_T$.

Для отклонения $x^*(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ от приближенного $x_m(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ верна оценка (16) для всех $m \geq 1$.

При значении параметров $x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n$, являющимися решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \\ \varphi_j(x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, j = \overline{1, n} \\ g(x_0, x_T) = 0, \end{cases}$$

функция $x^*(t, x_0, x_T, C_1, C_2, ..., C_n)$ является и решением краевой задачи (1)-(3).

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - Киев. "Вища школа 1976. -180 с.

2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. -Киев: "Наукова думка 1992. -290 с.

3. Нуржанов О.Д., Курбанбаев О.О., Баймуратова К.А. Численно-аналитический метод исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. -2013. №1-2 (18-19). - с.10-16.

4. Курбанбаев О.О. Численно-аналитический метод для нелинейных краевых задач с импульсным воздействием // УзМЖ. -2004. №4. - с.14-20.

Каракалпакский государственный университет им.Бердаха

Mundarija