

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
BERDAQ NOMIDAGI QORAQALPOQ DAVLAT
UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
Amaliy matematika kafedrası
«Amaliy matematika va informatika»
ta'lim yo`nalishi IV kurs talabasi
Abduqodirova Ilmiraning**

**BITIRUV
MALAKAVIY ISHI**

**Mavzu: Matritsaning xos sonlarining
qismaniy masalasini proeksion – differensial usuli bilan
yechish**

Ilmiy rahbar:	prof. A. O. Otarov
Kafedra mudiri:	dots. M.Q.Berdimuratov

Nukus – 2019

Mundarija

Kirish.....	3
1-§. Proeksion – differensial usulning asosiy rejalari.....	7
1.1 Umumiy mulohazalar	7
1.2 Usulning soddalashtirilgan algoritimi	10
1.3 Proeksion – differensial usulning yangi varianti	11
1.4 Chiziqli algebraik tenglamalarning sistemasi (CHATS) uchun preksion- differensial usulning yaqinlashuvchiligini tekshirish.....	14
2-§. Proeksion – differensial usulining ixtiyoriy matritsaning xos qiymatlarini va xos vektorlarini topishda qo`llanilishi	18
2.1 Xos qiymatlarning qismaniy masalasini yechishning yangi iteratsion usuli.....	20
2.2 CHATS larni differensial usul bilan yechish	23
3-§. Sonli misollar.....	26
Xulosa.....	31
Foydalanilgan adabiyotlar.....	33
Qo`shimchalar	35

KIRISH

Ko'plagan ilmiy-texnik masalalar ayniqsa fizik, mexanik, astranomik masalalarini matritsalarining xos qiymatlarini va xos vektorlarini topishni ya'ni

$$Ax = \lambda x \quad (0.1)$$

chiziqli algebraik tenglamalarni bir jinsli tenglamalar sistemasining noldan farqli yechimlari bor bo'lgan λ parametirining qiymatlarini topishga ham bu qiymatlar-ga mos (1) sistemaning noldan farqli yechimlarini aniqlash masalasini yechishga keltiriladi. Bunda $A = (a_{ij}; i, j = \overline{1, n})$ n -tartibli kvadrat matritsa, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ nomalum vektor.

Barcha o'zgaruvchan tebranish yo'nalishlarida matritsalarining xos qiymatlari va ularga mos xos vektorlarini topish usullari katta ro'l o'ynaydi. Sababi bunday yo'nalishlarda tebranishning ampitudasi bazi bir matritsalarining xos qiymatlari bilan va bu tebranishning formasi uning xos vektorlari bilan aniqlanadi. Shuning uchun matritsalarini xos qiymatlarini topish ahamiyatli ilmiy – texnik izlanishlardan iborat [4,9,13,15,17].

Kvadrat A matritsaning xos qiymatlari

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n [\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} - \dots - P_{n-1} \lambda - P_n] = 0 \quad (0.2)$$

algebraik tenglamalarning ildizlari bo'ladi. Bunda E – n – tartibli birlik matritsa. Bu tenglama A matritsaning xarakteristik tenglamasi deb va $D(\lambda)$ - xos ko'p hadi deb ataladi. Shunday qilib A matritsasining xos qiymatlari va xos vektorlarini topish masalasini quyidagi uch bosqichga bo'lish mumkin:

- 1) matritsaning $D(\lambda)$ xos ko'p hadini yasash;
- 2) matritsaning $D(\lambda) = 0$ xarakteristik tenglamasini yechib, uning λ_i ($i = \overline{1, n}$) xos qiymatlarini aniqlash ;
- 3) chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli

$$(A - \lambda_i E)x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (0.3)$$

sistemani yechish , yani berilgan matritsaning xos vektorini aniqlash.

Hozirgi vaqtgacha matritsaning xos qiymatlarini va xos vektorlarini topishning soddalashtirilgan ko'plagan maxsus usullar ishlab chiqilgan. Bu usullar to'g'ri (aniq) va iteratsion usullar deb ataladigan katta ikki guruhga bo'linadi [1-4,6,8,9].

To'g'ri usullarning ma'nosi quyidagidan iborat : chekli sondagi o'xshash turlantirishlarni bajarish yo'li bilan dastlab berilgan matritsaning xarakteristik ko'p hadini kayfitsentlari va xos vektorlari oson topiladigan, oddiy turdagi matritsaga keltiriladi. Bunda matritsaning xos qiymatlari xarakteristik tenglamani ildizlarini hisoblashda qandaydir bir usullar yordamida aniqlanadi.

To'g'ri usullarning ahamiyatli xususiyati shundaki ularning qo'llanish oralig'lari keng bo'lishida va qo'yilgan masalani yechishda tez yechishni taminlaydi. Ammo bunday usullardan ahamiyatli bo'lib foydalanish kerak. Sababi deyarli ularning barchasi oraliq hisoblashlarni natijalarini xatoliklari sezilarli bo'ladi [4,6,9].

Bir jinsli (3) sistemalarning yechimlari turg'unligi o'zgarmas A matritsasiga bevosita bog'liq boladi. Agar A matritsasi karrali xos qiymatlarga ega bo'lsa unda (3) sistema matritsasi aynigan bo'ladi. Aynigan matritsali sistemalar o'zgarmas qiymati yechimga ega bo'lishi mumkin emas. Bunda kayfitsentlarni kichik muqdorga o'zgartirish bilan bunday sistemani birliksiz sistemaga aylantiriladi. A matritsasining bir necha yaqin xos qiymatlariga ega bo'lgan hollarda (3) sistemasining yechimi o'zgaruvchan bo'ladi [4,5,6,13,14,15].

To'g'ri usullarning ko'rsatilgan kamchiligi A matritsasiga o'xshash turlantirishlarga asoslangan to'g'ri usullar yo'q. Ammo bunday usullarda xarakteristik tenglamaning kayfitsentlari katta qiymatlar bilan aniqlanadi [4,5,6,16].

Iteratsion usullarda matritsaning xos qiymatlarini, xarakteristik ko'p hadlarining kayfitsentlarini oldindan aniqlamasdan bazi bir usullar bilan yasalgan sonlar ketma – ketligini limiti hisobga olinadi. Bunda bir vaqtdan matritsaning xos vektorlari va ular bilan oddiy ifodalar orqali bog'liq bazi bir boshqa vektorlar aniqlanadi. Iteratsion usullarni to'g'ri usullar bilan solishtirganda yaxlitlash

xatoliklari kam bo`ladi, ammo ularning hisoblash algoritimi anacha murakkab bo`ladi. Bu usullarning tezlik bilan rivojlanishi va hisoblash amaliyotida keng qo`llanilishi, EHM larning paydo bo`lishi bilan bunday usullarni tezlik bilan hisoblash mumkin bo`ldi [3,6,9].

Iteratsion usullar ko`p hollarda xos qiymatlarni yagona (xususiy) masalasi deb ataladigan masalani yechishga, yani matritsaning bitta yoki bir necha xos qiymatlarni va ularga mos xos vektorlarini topish mumkin. To`g`ri usullar xos qiymatlarni to`liq masalasini yechishga yani matritsaning barcha xos qiymatlarni va ularga mos xos vektorlarini aniqlash imkonini beradi. Xos qiymatlarni to`liq masalasini bazi bir iteratsion usullari bilan yechish mumkin [4,6,9,15].

Iteratsion usullar orasida, simmetrik matritsaning xos qiymatlarni to`liq masalasini yechish uchun maxsus usul (Yakob usuli) ahamiyatli o`rin egallaydi [4,6,15]. Bu usul berilgan matritsaga o`xshash va ortaganal va bosh dioganaldan tashqarida yotadigan barcha elementlarining kvadratarining yig`indisi nolgacha manaton kamayuvchi matritsalar ketma-ketligini yasashga asoslangan.

Iteratsion usulning hisoblash algoritimi oddiy va yaqinlashuvchi bo`ladi va u EHM da yengil amalga oshiriladi. Xos qiymatlarining joylashishiga bog`liqsiz bu usul asimptotik kvadratik yaqinlashunchilikka ega. Karrali va bir biriga yaqin bo`lgan xos qiymatlariga ega bo`lishi usulning yaqinlashuvchiligini taminlaydi va yaqinlashuvning tezlanishiga olib keladi. Yaqin xos qiymatlar qancha ko`p bo`lsa yaqinlashish tezligi shuncha katta bo`ladi. Bu usulda hisoblash algoritimidagi hisoblashlar natijalarini yaxlitlash xatoliklarini ta`sirida bo`ladi [4,6,14]. Iteratsion usulning yuqorida ko`rsatilgan ahamiyatli xossalari uning to`liq masalasini yechish uchun bir necha yangi maxsus usullarni paydo bo`lishiga sabab bo`ldi [5,10].

Ixtiyoriy matritsaning xos qiymatlarini topishning ayrim usullari Shura teoremasiga asoslangan [10,13]. Bu teorema o`xshash turlantirishlar ketma-ketligi yordamida dastlabki matritsani uchburchak matritsaga keltirish mumkinligini asoslab beradi. Buni bajarishning ikki usuli [4,14] va [10] ishlaridan keltirilgan. Ularning birinchisida bosh dioganalining quyida joylashgan elementlar navbatma

navbat no'lga aylantiriladi va ikkinchisida diogonal ostidagi elementlarni kvadratlarining yig'indisini kichraytirilib boriladi.

Ancha oddiy va yaxshi hossalarga ega bo'lgan ixtiyoriy matritsaning diogonal matritsaga turlantirish usuli [10] ishida berilgan. Bu usuli haqiqiy simmetrik matritsalar uchun iteratsion usuli bilan to'liq mos keladi. Bu usulning yaqinlashuvchi bo'lishi va EHM larda oson amalga oshiriladi. Agar dastlabki berilgan matritsa n chiziqli bog'liqsiz xos vektorlariga ega bo'lsa unda xos qiymatlarining joylashishiga bog'liqsiz, asimpitotik kvadratik yaqinlashuvchi bo'ladi.

Matritsaning xos qiymatlarini to'liq masalasini yechish iteratsion usullar orasida katta guruh darajali usullardan iborat [4,10,15]. Ular oddiy hisoblash sxemalariga ega va EHM da oson amalga oshiriladi.

Bu usullarning asosiy ortiq xususiyati berilgan matritsaning xususiyatiga bog'liqsiz ular birdan – bir sxema bo'yicha matritsaning xos qiymatlarining to'liq masalasini yechish imkoniyatini beradi. Ammo ularning yaqinlashish tezligi yuqori emas va geometrik progressiyaning yaqinlashish tezligidan yuqori bo'lmaydi [4,15].

Bu bitiruv mutaxassislik ishida proeksion – differensial usulning soddalash-tirilgan yangi algoritimi ixtiyoriy matritsaning xos qiymatini yagona masalasiga qo'llanish mumkin bo'ladi. U kirish bo'limidan, uch paragrafdan, xolosa bo'limi, foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati va qo'shimchalardan iborat bo'ladi. Kirish qismida qaralayotgan masal bo'yicha adabiyotlarga qisqacha malumotlar olindi. 1-paragrafda proeksion differensial usulining yangi algoritimlari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga bag'ishlangan. 2-paragrafda proeksion – differensial usulning 1- paragrafda keltirilgan hisoblash algoritimi ixtiyoriy matritsaning xos qiymatlarini va ularga mos xos vektorlarini aniqlash uchun qo'llaniladi. Ishning 3-paragrafida proeksion – differensial usullning 2-paragrafda keltirilgan hisoblash sxemasini qo'llanib EHM lar yordamida yechiladigan sonli misollar natijalari keltirilgan xulosa bo'limida bitiruv malakaviy ishining asosiy natijalariga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishining qo'shimchalar qismida EHM uchun tuzilgan pragrammalar va ularning bajarishdan olingan sonli natijalar keltirilgan.

1-§ Proekson – differensial usulning asosiy rejalari.

Bu paragrafda proekson – differensial usulning [7,11] asosida yotadigan yani ma'lumotlar keltiriladi.

Qabul qilingan belgilashlar: E^n - n -o'lchamli Evklid fazosi; $(x, y) - x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in E^n$ vektorlarining skalyar ko'paytmasi; a_{0i} - (0.1) sistemaning dastlabki i ta tenglamalarining yechimi a_i ga tegishli bo'ladigan va (0.2) Koshi masalalarining rekurrent ketma-ketligi uchun $x^{(0)} = \alpha_{00}$ boshlang'ich shartiga mos keladigan vektor.

1.1. Umumiy mulohazalar. Umumiy holda chiziqli bo'lmagan quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

bunda $x \in E^n$, $f(x) \in E^m$, $m \leq n$, $f_j(x)$ ($j = \overline{1, m}$) funksiyalari ikkinchi tartibgacha xususiy hosilalarga ega va (1) tenglamasi bazi bir $\omega \subset E^n$ sohasida birdan bir $x = \alpha$ yechimga ega bo'ladi deb faraz qilinadi.

Shunda (1) tenglamaning $x = \alpha$ yechimiga pastga tushish quyidagi Koshi masalasining rekurrentli ketma – ketligining $x_i(t_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) yechimlaridan tuzilgan egri chiziqlar bo'yicha amalga oshiriladi:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = \frac{a_i^{i-1}}{(f'_i, a_i^{i-1})}, x_i^0 = x_i(t_i = t_i^{(0)}) = x_{i-1}(t_{i-1} = 0) = a_{0i}, \quad (1.2)$$

$$t_i^0 = f_i(a_{0i-1}), \quad x^{(0)} = a_{00}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

bunda $\{a_i^{i-1}(x)\}_i^m$ vektor – funksiyalari $f(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) funksiyalaridan quyidagi shartlar bajariladiganday etib yasaladi:

$$(f'_i, a_i^{i-1}) = 0, \quad j \leq i-1, \quad (1.3)$$

$$(f'_i, a_i^{i-1}) \neq 0, \quad j = i, \quad j = \text{grad} f_j(x), \quad (1.4)$$

Shunda $f_j(x)$ va $a_i^{i-1}(x)$ larga bazi bir shartlar qo'yilganda (2) tenglama $[t_i^0, 0]$ chekli oralig'ida aniqlangan va

$$\lim_{t_j \rightarrow 0} x_i(t_j) = a_{0i}$$

xossasiga ega bo'lgan, $x_i(t_j)$ yechimga ega bo'ladi [7,11]. Shu kabi (2) Koshi masalasi uchun dastlabki iteratsiyalar ma'lum:

$$f_j(x_i(t_j)) = 0, \quad j \leq i-1, \quad (1.5)$$

$$t_i - f_i(x_i(t_i)) = 0 \quad (1.6)$$

Agar (1) – chiziqli emas tenglamalar sistemasi bo'lsa, unda unga mos keladigan (2) differensial pastga tushish tenglamasida chiziqli emas tenglamalar boladi. Shuning uchun (2) Koshi masalasini yechish uchun differensial tenglamalarning integrallash formulalaridan foydalaniladi [1,2,8,11,12]. Boshqacha aytganda, (1) tenglamasining $x = \alpha$ yechimiga pastga tushish (2) Koshi masalasining taqribiy yechimlari bilan aniqlanadigan egri chiziqlar bo'yicha bajariladi.

Differensialning pastga tushish usulining bu varianti (3), (4) xossalariga ega bo'lgan $\{a_i^{i-1}(x)\}_1^m$ vektor – funksiyasiylarini yasashni talab etadi. Ular bizi bir chiziqli bog'liq bo'lmagan $\{a_i^0(x)\}_1^m$ boshlang'ich vekotrlar sistemasidan, masalan quyidagi formula bo'yicha yasash mumkin[16]:

$$a_i^j = a_i^{j-1} - \frac{(f'_j, a_i^{i-1})}{(f'_j, a_j^{j-1})} a_j^{j-1}, \quad j < i, \quad (1.7)$$

bunda i, j -butun sonlar. Xususiy holda $\{f'_i\}_i^m$ chiziqli bog'liqsiz vektorlar sistemasi bo'lsa, unda (7) da $\{f'_i = a_i^0\}_i^m$ deb qabul qilish mumkin. Shuning uchun $\{a_i^{i-1}(x)\}_1^m$ vektor – funksiyasini yasash uchun chiziqli bog'liqsiz vektorlar sistemasini ortogonallashtirishning, A ortogonallashtirishning ma'lum usularidan foydalanish mumkin [16].

$\{a_i^{i-1}(x)\}_1^m$ vektor – funksiyalaridan har xil usullar bilan yasash imkoniyatlaridan foydalanib ularni oson yasash usullarini izlash mumkin. Shunday hollarga bogʻliq, quyida (1) tenglamalar sistemasini turli turlantirishlarga asoslangan, proeksion - differensial usulning bazi bir yangi hisoblash algoritimlari keltiriladi.

1.1. Usulning soddalashtirilgan algoritimi. Avval (1) tenglamani vektor tenglama koʻrinishida yozamiz:

$$F(x) = 0, \quad (1.8)$$

bunda

$$F_i(x) = f_j(x),$$

$$F_k(x) = f_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{f'_k, F'_i}{(F'_i, F'_i)} \right) F'_i = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m$$

$\{f'_i = \text{grad} f'_j(x)\}_1^m$ vektorlar sistemasi chiziqli bogʻliq emas deb faraz qilinadi, (1) va (8) tenglamalar sistemalarining teng kuchli boʻladigani va

$$(F_i, F'_i) = \begin{cases} 0, & \text{agar } j=1, 2, \dots, i-1 \text{ bo'lsa,} \\ A_{ii}(x) > 0 & \text{agar } i=j \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (1.9)$$

shartlari bajariladiganini induksiya boʻyicha oson isbotlash mumkin boʻladi.

Shuning uchun bu holda

$$a_i^{i-1}(x) = F'_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.10)$$

deb qabul qilish mumkin va (8) sistemaga mos keladigan Koshi masalasiga rekur-rent ketma- ketlik quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dx_i}{dt_i} = \frac{F_i(x)}{(F'_i, F'_i)}, \quad x_i^0 = x_i(t_i = t_i^{(0)}) = x_{i-1}(t_{i-1} = 0) = a_{0i-1}, \quad (1.11)$$

$$t_i^{(0)} = f_i(a_{0i-1}), \quad x^{(0)} = a_{00}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Xususiyl holda agar (1) tenglama matritsasi $A_{m \times n}$ oʻlchamli $Ax = b$ koʻrinishidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi boʻlsa, unda bunday sistema

$$f_i(x) = (A_i, x) - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.12)$$

ko`rinishida yozamiz. Bunda $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$ vektorlari, b_i - ozod had b vektorining tuzuvchilari, x - izlanayotgan noma'lum vektor.

Bu holda (11) Koshi masalasini to'liq qadamli Eyler usuli bilan integrallagandan so'ng, (12) sistemani yechimi $a = a_{0m}$ quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$a_{0i} = a_{0i-1} - \frac{F_i(a_{0i-1})}{(F_i, F'_i)} F'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.13)$$

bunda $F_i(x)$ (1.8) formulasi bilan topiladi.

Shunday qilib berilgan (1) tenglamalar sistemasiga teng kuchli turlantirishlar orqali (1) sistemadan F'_i (9) shartlarini qanoatlantiradigan (8) sistemaga o'tadi. Bunday holda (10) tengliklariga bog'liq (3) va (4) xossalariga ega bo'lgan $\{a_i^{i-1}\}_1^m$ vektor funksiyalari (7) formulasi bo'yicha yasash talab etilmaydi.

1.2. Proeksion – differensial usulning yangi varianti. Yuqoridagi (5) va (6) nisbatlaridan (1) sistemaning $i-1$ - tenglamadagi moslik soni nolga teng bo'lganda (2) Koshi masalasi bu sistemaning i - tenglamasini moslik sonini nolga aylantirish uchun foydalanishga mumkin ekanligi kelib chiqadi. Boshqacha aytganda, (1) sistemaning dastlabki $i-1$ tenglamlarini yechimini saqlab turib bu sistemani i - tenglamasini yechish mumkin bo'ladi. O'z navbatida (1) sistemaning dastlabki i tenglamasini yechimini aniqlash uchun (2) Koshi masalasining dastlabki i masalasini yechimlarini yaqinlashuvchi usullarni qo'llanib ketma – ket topiladi.

Proeksion – differensialning quyida keltirilgan o'zgartirilgan usuli quyidagiga asoslangan: (1) sistemaning avvalgi turlantirishlar yo'li bilan uning ixtiyoriy $x^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashuvini dastlabki $m-1$ tenglamalarini yechimi bo'ladigan teng kuchli sistemalar bilan almashtirishdan iborat bo'ladi. Bu holda qaralayotgan proeksion differensial usulining xossasi bo'yicha (3-punktning boshida aytib o'tilgan) oxirgi sistemani yechish uchun uning faqat eng oxirgi m - tenglamasini yechish yetarli bo'ladi. Shuning uchun bu usulning bunday

o'zgartirilgan turlaridan foydalanilganda (2) Koshi masalasini kerakli aniqlik bilan yechish kerak.

Proeksion – differensial usulning bunday o'zgartirilgan turining ma'nosi quyidagidan iborat.

Bazi bir aynimagan B matritsasi yordamida (1) sistemasidan unga teng kuchli bo'lgan

$$\varphi(x) \equiv Bf(x) = 0 \quad (1.14)$$

sistemasiga o'tiladi. Bunda $\varphi_i(x^{(0)}) = 0, i = 1, 2, \dots, m-1$ va $\varphi_m(x^{(0)}) \neq 0$ deb faraz qilinadi, $x^{(0)} \in \omega, x = a$ ko'rinishida ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashuvchi.

Jumladan: B matritsasi hisobida quyidagi matritsani olish mumkin

$$B = \begin{bmatrix} f_m^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -f_1^0 \\ 0 & f_m^0 & 0 & \dots & 0 & -f_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_m^0 - f_{m-1}^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Bunda $f_i^0 = f_i(x^{(0)}) (i = 1, 2, \dots, m)$ (1) sistemasining tenglamalarning boshlang'ich $x^{(0)}$ yaqinlashuvchisidagi mos emas sonlari. Shunda (1) va (14) sistemalarining teng kuchliligini saqlash uchun $f_i^0 \neq 0 i = 1, 2, \dots, m$ bo'lishi kerak. Shunda (15) matritsadan foydalanib (14) sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &\equiv f_i(x) f_i^0 = 0, & i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \varphi_m(x) &\equiv f_m(x) = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Endi (15) matritsani quyidagicha yozish qulay bo'ladi:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -f_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -f_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -f_{m-1}^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15')$$

Bu matritsadan foydalanib (14) sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &\equiv f_i(x) - \varphi_m(x) f_i^0 = 0, \quad i=1,2,\dots,m-1, \\ \varphi_m(x) &\equiv \frac{f_m(x)}{f_m(x^{(0)})} = 0 \quad (f_m(x^{(0)}) \neq 0)\end{aligned}\quad (1.16')$$

Hisoblashda foydalanish uchun (15') matritsasidan f_i^0 , $i=1,2,\dots,m-1$ larning ishorasini o'zgarish orqali uning teskari matritsasini oson aniqlash mumkin bo'ladi:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{m-1}^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashuvchisida (16) va (16') sistemalarining dastlabki $m-1$ tenglamalarini qanoatlantirishidan bu tenglamalarning yechimini saqlab turib eng oxirgi m – tenglamaning kerakli aniqlik bilan yechish kerak. Bu masalani proeksion – differensial usulning bu o'zgartirilgan variantini qo'llanib yechish mumkin bo'ladi.

Shunday qilib (16) va (16') tenglamalar sistemasini yechish masalasi proeksion – differensial usuli bilan uning eng so'ngi m –tenglamasini yechish mumkin bo'ladi. Buning uchun o'z navbatida (2) Koshi masalalar ketma – ketligida faqat m –tenglamani kerakli aniqlik bilan integrallash kerak bo'ladi:

$$\frac{dx_m}{dt_m} = \frac{a_m^{m-1}}{(\varphi_m', a_m^{m-1})}, \quad x_m^0 = x_m(t_m = t_m^0) = x_{m-1}(t_{m-1} = 0) = a_{00}, \quad (1.17)$$

$$t_m^{(0)} = \varphi_m(x^{(0)}), \quad a_{00} = x^{(0)}$$

Bu holda $a_m^{m-1}(x)$ vektor – funksiyasi $\varphi_i(x)$ funksiallaridan (3), (4) turidagi shartlarni yani, quyidagi shartlarini qanoatlantiradiganday etib yasaladi:

$$(\varphi_m', a_m^{m-1}) = 0, \quad j \leq m-1,$$

$$(\varphi'_m, a_m^{m-1}) \neq 0, \quad \varphi'_j = \text{grad} \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

Agarda (12) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsa, unda (17) Koshi masalasini Eyler usuli bilan [1,2,3,8] integrallangandan so'ng bu sistemaning yechimini quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$a_{0m} = a_{00} - \frac{f_m(a_{00})}{(f'_m, a_m^{m-1})} a_m^{m-1}, \quad (1.18)$$

Bunda $a_{00} = x^{(0)} = \omega$, $f_i(x^{(0)}) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) shartlarini qanoatlantiradigan (12) sistemasining yechimiga ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashuvchi.

Agarda xussiy holda $x^{(0)}$ - nollik vektor bo'lsa, unda $f_i^0 = f_i(x^{(0)}) = -b$ ($b_i \neq 0, i = \overline{1, m}$) va (16) sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &\equiv f_m(x)b_i - f_i(x)b_m = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \varphi_m(x) &\equiv f_m(x) = (A_m, x) - b_m = 0 \end{aligned}$$

Shunda (18) formula bo'yicha quyidagi natijaga kelamiz:

$$a_{0m} = \frac{b_m}{(A_m, a_m^{m-1})} a_m^{m-1} \quad (1.18')$$

Shunday qilib (16') chi sistemasi berilgan holda $t_m^{(0)} = \varphi_m(x^{(0)}) = 1$ bo'ladi va (18') formulasi yana ham soddalashadi:

$$a_{0m} = -\frac{1}{(A_m, a_m^{m-1})} a_m^{m-1} \quad (1.18'')$$

Tekshirib ko'rish yo'li bilan (13), (18), (18'), (18'') formulalari (12) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining aniq yechimini aniqlash mumkin bo'ladi. Agar bu formulalar bo'yicha hisoblashlar to'g'ri bajarilsa unda iteratsiyalar ko'rinishida hisoblash mumkin bo'ladi.

Proeksion – differensial usulning bu yangi varianti xossalriga mos (boshlang'ich tayanch yechim (1) tenglamalari sistemasining dastlabki $m-1$ tenglamasining yechimi bo'ladi va bu sistemaning yechimini aniqlash uchun (2) Koshi masalasini faqatgina m – masalasini kerakli aniqlik bilan integrallash yetarli) (18), (18'')

formulalari bo'yicha bajariladigan hisoblashlarning hajmi usulning [7,11] ishlarida keltirilgan hisoblashlar sxemasi bilan solishtirganda ancha qisqaradi va yechimni yuqori aniqlik bilan topish mumkin bo'ladi. Hisoblash jarayonini boshlash uchun oldindan (16), (16') tenglamalarning sistemasini yasash qiyin emas, ammo ular hisoblashlarning barchasida foydalanilmaydi.

1.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi uchun proeksion – differensial usulning yaqinlashuvchiligini tekshirish.

Avval aniqlik uchun A matritsasi simmetrik va musbat aniqlangan

$$f(x) = Ax - b = 0 \quad (1.19)$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qaraymiz: $A = (a_{ij}, i, j = \overline{1, n}) n \times n$ o'lchamli kvadrat matritsa. Bu sistemani unga teng kuchli bo'lgan quyidagi skalyar tenglamalarning sistemasi bilan almashtiramiz:

$$f_i(x) = (Ax - b, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.20)$$

Bunda $\{\varphi_i\}_i^n - E^n$ fazosida chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasi (bazis). Bu holdan funksionalning gradient uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$f'_i = \text{grad} f_i(x) = A\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\{\varphi_i\}_1^n, \{a_i^{i-1}\}_1^n$ vektorlar sistemalarini (19) sistemasining $\{f(a_{0i}) = Aa_{0i} - b\}_i^n$ mos emas vektorlaridan ketma – ket yasaladi va bu holda $\{a_i^{i-1}\}_1^n$ vektorlarining x ga bog'liq bo'lmaganligi hisobga olinib, (2) ni integrallab (20) sistemaning yechimini quyidagi formula bo'yicha aniqlash mumkin:

$$\begin{aligned} a_i^{i-1} &= \varphi_i = f(a_{i0}) - \beta_i \varphi_{i-1}, \\ \beta_i &= \begin{cases} 0, & \text{agar } i=1 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{(f(a_{0i}), A\varphi_{i-1})}{(A\varphi_{i-1}, \varphi_{i-1})}, & \text{agar } i \geq 2 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \\ a_{0i} &= a_{0i-1} \gamma_i \varphi_i, \quad \gamma_i = \frac{(f(a_{0i-1}), \varphi_i)}{(A\varphi_i, \varphi_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.21)$$

Bu formulalarda β_i kayfitseni quyidagi shartlardan saylab olinadi:

$$(a_i^{i-1}, f'_{i-1}) = (\varphi_i, f'_{i-1}) = (\varphi_i, A\varphi_{i-1}) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Shunda quyidagi teorema to'g'ri bo'ladi.

TEOREMA: Agar $x^{(0)} = a_{00} \in E^n$ va $\{f(a_{0i})\}$ ($i = \overline{0, n-1}$) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lmasa, unda (21) iteratsion jarayon korrekt aniqlangan va n dan ortiq bo'lmagan qadamlarda yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti induksiya bo'yicha bajariladi. Mayli a_{0i} yaqinlashuvi (21) formulasi bo'yicha topilgan bo'lsin, yani $f_j(a_{0i}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i$ bo'lib, barcha $f(a_{0j}) \neq 0, \quad j \leq i$ va $i > 2$ uchun quyidagi tenglik bajarilsin ($i = 1, 2$ uchun ularning bajariladigani tenkshirib ko'riladi):

$$(A\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i-1, \quad (1.22)$$

$$\gamma_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (1.23)$$

$$\beta_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad (1.24)$$

$$(f(a_{0i}), f(a_{0j})) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, i-1, \quad (1.25)$$

Agar $f(a_{0j}) = 0, \quad j < i$ bo'lsa, unda $a_{0j} = a - (20)$ sistemaning yechimi bo'ladi va jarayon tamomlanadi.

Endi (21) – (25) farazlarning (21) – iteratsion jarayonning $(i+1)$ – qadamida bajarilishini isbotlaymiz. Avval (21) formuladan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(a_{0j}) = f(a_{0j-1}) - \frac{f_j(a_{0j-1})}{(A\varphi_j, \varphi_j)} A\varphi_j = f(a_{0j-1}) - \gamma_j A\varphi_j, \quad (1.26)$$

$$f(a_{0j}) = \varphi_{j+1} - \beta_{j+1} \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \quad (1.27)$$

Bu formuladan foydalanib quyidagi natijga kelamiz:

$$A\varphi_i = \frac{1}{\gamma_i} [-\varphi_{j+1} - \beta_{j+1} \varphi_j + f(a_{0j-1})] = b_j \varphi_{j+1} + c_j \varphi_j + d_j \varphi_{j-1},$$

$$b_j = \frac{1}{\gamma_j}, \quad c_j = \frac{1 - \beta_{j+1}}{\gamma_j}, \quad d_j = \frac{\beta_j}{\gamma_i}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1$$

(bu yerda $\varphi_0 = 0$ deb faraz qilinadi).

Yuqoridagi farazlarga ko'ra quyidagi nisbatlarni yozish mumkin bo'ladi:

$$\begin{aligned} (A\varphi_{j+1}, \varphi_j) &= (Af(a_{0i}) + \beta_{j+1}(A\varphi_j, \varphi_j) = (Af(a_{0i}), \varphi_j) + \beta_{j+1}(A\varphi_j, \varphi_j) = \\ (f(a_{0i}), A\varphi_j) &= b_j(f(a_{0i}), \varphi_{j+1}) + c_j(f(a_{0i}), \varphi_j) + d_j(f(a_{0i}), \varphi_{j-1}) = \\ b_j f_{i+i}(a_{0i}) + c_j f(a_{0i}) + d_j f_{i-1}(a_{0i}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \end{aligned}$$

Bu bo'yicha $(A\varphi_{j+1}, \varphi_j) = 0$ bo'lgani uchun barcha $j < i$ lar uchun $(A\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1}) = 0$ bo'ladi. Bu (21) iteratsion jarayonning $(i+1)$ - qadamida (22) hisoblashlarning bajarilishi ko'rsatadi. Endi

$$\gamma_{j+1} = \frac{(f(a_{01}), \varphi_{i+1})}{(A\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1})} = \frac{(f(a_{01}), f(a_{01}) - \beta_{i+1}\varphi_i)}{(A\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1})} = \frac{(f(a_{01}), f(a_{01}))}{(A\varphi_{j+1}, \varphi_{i+1})}$$

miqdorining musbat bo'ladiganini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham aksincha bo'lganda $\gamma_{j+1} = 0$ bo'ladi va $f(a_{0i}) = 0$ bo'ladigani kelib chiqadi. Bu $\{f(a_{0i})\}_i^n$ vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqsiz deb farazimizga qarshi keladi.

Bundan so'ng $j = 1, 2, \dots, i$ bo'lganda $(f(a_{0i+1}), f(a_{0j})) = 0$ bo'ladiganini isbotlaymiz. Buning uchun (26) formuladan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} (f(a_{0i+1}), f(a_{0j})) &= (f(a_{0i+1}), \varphi_{j+1} - \beta_{j+1}\varphi_j) = \\ (f(a_{0i+1}), \varphi_{j+1}) - \beta_{j+1}(f(a_{0i+1}), \varphi_j) &= 0 \end{aligned}$$

ixtiyoriy $0 \leq j \leq i$ uchun. Shunda (27) formula bo'yicha

$$A\varphi_j = \frac{1}{\gamma_i} [f(a_{0j}) - f(a_{0j-1})], \quad j = 1, 2, 3, \dots, i-1$$

bo'ladi. Shuning uchun (26) nisbatlari asosan $j = \overline{1, i-1}$ bo'lganda

$$(f(a_{0i}), A\varphi_j) = -\frac{1}{\gamma_j} [(f(a_{0i}), f(a_{0j})) - (f(a_{0i}), f(a_{0j-1}))] = 0, \quad (j = \overline{1, i-1}),$$

$$(f(a_{0i}), A\varphi_j) = -\frac{1}{\gamma_j} (f(a_{0i}), f(a_{0i})) = -\frac{(A\varphi_i, \varphi)}{(f(a_{0i-1}), f(a_{0i-1}))} (f(a_{0i}), f(a_{0i})),$$

bo`ladi va (28) dan foydalanib quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\beta_i = \frac{(f(a_{0i}), A\varphi_i)}{(A\varphi_i, \varphi_i)} = - \frac{(A\varphi_i, \varphi_i)(f(a_{0i}), f(a_{0i}))}{(f(a_{0i-1}), f(a_{0i-1}))(A\varphi_i, \varphi_i)} = - \frac{\|f(a_{0i})\|^2}{\|f(a_{0i-1})\|^2} < 0$$

Shunday qilib (21) iteratsion jarayon $(i+1)$ – qadamida (22) – (25) ifodalarining to`g`ri bo`ladigani isbotlandi.

Yuqoridagi isbotlangan teoremlardan quyidagi xulosaga kelamiz: agarda (21) formula bo`yicha hisoblashlar bajarilganda  $f(a_{0j})=0$  vektori kelib chiqsa, unda (21) usul korrekt aniqlangan bo`ladi. Sababi β_i va γ_i larning maxrajlarini noldan farqli va $(f(a_{0j}), f(a_{0n}))=0, \{f(a_{0j})\}, j=1,2,...,n-1$ vektorlari o`zaro ortogonal bo`ladi, demak ular chiziqli bog`liqsiz. Shuning uchun  $f(a_{0n})=0$  bo`ladi. Agar j -qadamida $f(a_{0j})=0$ bo`lsa, unda hisoblashlar n qadamdan burun tugatiladi.

Taqribiy a_{0n} yechimining (19) va (20) sistemasining yechimi bilan mos kelishini quyidagicha ko`rsatish mumkin: (21) formulalarini ketma – ket qo`llanib iteratsion jarayonni n -qadamida quyidagi formulaga ega bo`lamiz:

$$a_{0n} = a_{00} - \sum_{j=1}^n \gamma_j \varphi_j = a_{00} - \sum_{j=1}^n \frac{(f(a_{0j-1}), \varphi_j)}{(A\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j \quad (1.29)$$

Shuningdek $\{\varphi_i\}_1^n$ vektorlari chiziqli bog`liqsiz bo`lgani uchun $a-a_{00}$ vektori ularning chiziqli kombinatsiasi ko`rinishida ko`rsatish mumkin :

$$a = a_{00} + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, \quad a = A^{-1}b, \quad (1.30)$$

$$(f(a_{0j-1}), \varphi_j) = (f(a_{0j-2}), \varphi_j) = (f(a_{0j-3}), \varphi_j) = \dots = (f(a_{00}), \varphi_j)$$

ekanligini hisobga olib c_k koeffitsientlari uchun quyidagi formulani keltirib chiqaramiz:

$$c_k = \frac{(f(a_{0k-1}), \varphi_k)}{(A\varphi_k, \varphi_k)}, \quad k=1,2,...,n$$

Endi (29) va (30) larni soddalashtirib, $a_{0n} = a = A^{-1}b$ bo`ladi degan xulosaga kelamiz. Mayli endi (19) sistemadan  $A$  – ixtiyoriy aynimagan matritsa bo`lsin. kelib chiqqan A' matritsasiga ko`paytirib, unga teng kuchli bo`lgan $A'Ax = A'b$ sistemasiga ega bolamiz. (19) sistemani bunday turlantirib Gaussning birinichi transformatsiya deb ataladigan [16] natijasida kelib chiqqan CHATS ning matritsasi simmetrik va musbat bo`ladi. Bu oxirgi sistemaning ko`rinishidan (21) formulalar quyidagi ko`rinishda yoziladi.

$$a_i^{i-1} = \varphi_i = A' f(a_{0i-1}) - \beta_i \varphi_{i-1},$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{agar } i=1 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{(A' f(a_{0i-1}), A' A \varphi_{i-1})}{(A \varphi_{i-1}, A \varphi_{i-1})}, & \text{agar } i \geq 2 \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad (1.21')$$

$$a_{0i} = a_{0i-1} \gamma_i \varphi_i, \quad \gamma_i = \frac{(f(a_{0i-1}), A \varphi_i)}{(A \varphi_i, A \varphi_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

bunda $f(a_{00})$ -dastlabki (19) sistemasining moslik bo`lmagan vektori.

Xuddi shunday hisoblash algoritimini, to`liq aniqlanmagan CHATS lar uchun Gaussning ikkinchi transformatsiyasini qo`llanib kelitrib chiqarish mumkin bo`ladi.

2 – §. Proeksion – differensial usulni ixtiyoriy matritsaning xos qiymatlarini va xos vektorlarini topish uchun qo`llanilishi.

Matritsaning xos qiymatining yagona masalasini yechish uchun yani matritsaning modul bo`yicha eng katta bitta yoki bir necha xos qiymatlarini va ularga mos keladigan xos vektorlarini aniqlash uchun ko`p sondagi usullar ishlab chiqilgan [4,14,16]. Bu usullarning asosida matritsaning u yoki bu xossalardan foydalanish g`oyalari yotadi. Masalan matritsaning xos qiymatlarini modul bo`yicha bo`lishtirish va ularning karraliligi, xos vektorlarining ortogonal bo`lishi va boshqalar. Matritsaning xos qiymatlarining yagona masalasini yechish usullari iteratsion usullar bo`ladi.[4,14,16].

Ixtiyoriy simmetrik bo'lmagan matritsa uchun uning xos qiymatlarini hisoblash masalasi simmetrik matritsa holiga solishtriganda anchagina murakkabroq bo'ladi va uni hisoblash usullari ham murakkab bo'ladi.

Simmetrik bo'lmagan matritsaning xos qiymatlarini unga yomon shartlashgan bo'lishi mumkin [4,8,13,14]. Shuning uchun simmetrik emas matritsalarining xos qiymatlarini aniq hisoblashga imkoniyat beradigan usullarni ishlab chiqish juda murakkab masala bo'ladi. Agar ixtiyoriy A matritsasi berilgan bo'lsa unda eng qulay holda $A+J$ turidagi matritsaning xos qiymatlarini berilgan aniqlik bilan hisoblaydigan usullar bor deb ishonishimiz mumkin. Bunda J - elementlari qandaydiy bir qiymatlari kichik bo'lgan $n \times n$ - o'lchamli matritsa. Agarda bu holda hisoblangan xos qiymatlar ularning aniq qiymatidan ko'p miqdorda farq qilsa, unda bu xos qiymatlarning yomon shartlashganligini ifodalaydi.

Agarda λ_i - A matritsasining xos qiymatlari bo'lsa, unda unga mos xos vektor

$$(A - \lambda_i E)x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasini qanoatlantiradi. Bunda E - $n \times n$ o'lchamli birlik matritsa.

Ammo ixtiyoriy sonli usul matritsaning aniq xos qiymatini λ_i ning o'rniga uning yaqinlashuvchi $\bar{\lambda}_i$ qiymatini topishga imkoniyat beradi va noldan kichik qiymatga farq qilsada $(A - \bar{\lambda}_i E) \neq 0$ boladi. Shuning uchun (1) sistema $\bar{\lambda}_i$ ni foydalanganda faqatgina $x = 0$ yechimiga ega bo'ladi. Shu holga bog'liq (1) sistemadan matritsaning xos qiymatlarini sonli usullardan barchasini topish mumkin bo'lmaydi.

2.1. Xos qiymatlarni topishning yangi iteratsion usuli. Bu paragrafda proekson – differensial usulning [7,11] simmetrik emas ixtiyoriy matritsaning xos vektorlarini topishga qo'llanish mumkin bo'ladi. Yuqorida ko'rsatilgan qiyinchiliklardan qutilish uchun iteratsion jarayonning har bir qadamida (1) Sistema-ning o'rniga bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasini yechiladi.

Dastlab ixtiyoriy $x_0 \neq 0$ boshlang'ich yaqinlashuvchisini saylab olinadi va quyidagi formula bo'yicha $\{\lambda_i^{(k)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sonlari va $\{x_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) vektorlar sistemasi yasaladi:

$$(A - \lambda_i^{(k-1)} E) y_k = x_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

$$x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|} = \frac{y_k}{\sqrt{(y_k, y_k)}}, \quad (2.2)$$

$$\lambda_i^{k-1} = (Ax_{k-1}, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

Bu yerda (1) sistemaning aniqlavchisi noldan farqli bo'lgani uchun bu sistema faqat yagona yechimga ega bo'liadi. Shuning uchun (1)-(3) formulalari bilan aniqlangan $\lambda_i^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sonlari A matritsasining xos qiymatiga kvadratik yaqinlashuvchi ekanini ko'rsatamiz.

A matritsasi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ xos qiymatlariga mos n ta chiziqli bog'liqsiz $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ xos vektorlariga ega bo'lgan hol bilan cheklanamiz. Bu holda matritsaning xos vektorlari bazisini tuzadi va y_k, x_{k-1} vektorlarini shu bazis bo'yicha yoyib yozish mumkin bo'ladi:

$$y_k = \sum_{j=1}^n a_j u_j, \quad x_{k-1} = \sum_{j=1}^n \beta_j u_j \quad (2.4)$$

Bu juftliklar (1) sistemasiga olib borib qo'yib barcha hadlarini tenglikning chap tomoniga o'tkazsak va $Au_j = u_j \lambda_j$ tengligini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{j=1}^n [a_j (\lambda_j - \lambda_i^{k-1}) - \beta_j] u_j = 0 \quad (2.5)$$

Ammo u_i , $i = \overline{1, n}$ xos vektorlari chiziqli bog'liqsiz bo'lgani uchun ularning chiziqli juftliklari barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lgan holdagina nolga aylanadi. Shuning uchun (5) dan:

$$a_j = \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda_j^{(k-1)}} \quad (2.6)$$

tengligi kelib chiqadi. Bundan so`ng (6) ni y_k uchun foydalanib , quyidagiga kelamiz:

$$y_k = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\lambda_j - \lambda_j^{(k-1)}} u_j, \quad (2.7)$$

$$\lambda_i^{(k-1)} = \frac{(Ay_k, y_k)}{(y_k, y_k)} = \frac{\frac{\beta_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2} \lambda_1 + \dots + \frac{\beta_n^2}{(\lambda_n - \lambda_i^{(k-1)})^2} \lambda_n}{\frac{\beta_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2} + \dots + \frac{\beta_n^2}{(\lambda_n - \lambda_i^{(k-1)})^2}}$$

Mayli $\lambda_i^{(k-1)}$ xos qiymatlarining birortasiga, masalan λ_1 ga yaqin bo`lsin.

Bunday holda quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\lambda_i^{(k)} - \lambda_1 = \frac{\sum_{j=2}^n \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j - \lambda_i^{(k-1)})^2} (\lambda_j - \lambda_1)}{\sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j - \lambda_i^{(k-1)})^2}}$$

Bunda

$$\begin{aligned} |\lambda_j^{(k)} - \lambda_1| &= |\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)}|^2 \frac{\sum_{j=2}^n \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j - \lambda_i^{(k-1)})^2} (\lambda_j - \lambda_1)}{\beta_1^2 + (\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2 \sum_{j=2}^n \frac{\beta_j^2}{(\lambda_j - \lambda_i^{(k-1)})^2}} \\ &= O((\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bu (8) formuladan

$$|\lambda_1 - \lambda_i^{(k)}| \leq q |\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)}|^2$$

tengsizligi to`g`ri ekanligi kelib chiqadi. Bunda $q > 0$ – bazi bir o`zgarmas son.

Natijada quyidagi ketma – ketlikga ega bo`lamiz:

$$\begin{aligned} |\lambda_1 - \lambda_i^{(k)}| &\leq q(\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2 \leq q[q(\lambda_1 - \lambda_i^{(k-1)})^2] \leq \dots \leq \\ &\leq q^{1+2+\dots+2^{(k-1)}} (\lambda_1 - \lambda_i^{(0)})^{2^k} = q^{2^{(k-1)}} (\lambda_1 - \lambda_i^{(0)})^{2^k} = \frac{1}{q} [q(\lambda_1 - \lambda_i^{(0)})]^{2^k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bu (9) bahosidan quyidagi xulosaga kelamiz: agar boshlang'ich x_0 yechimini qulay qilib saylab olinsa, yani $q(\lambda_i^{(0)} - \lambda_1) < 1$ tengsizligi bajarilsa, unda $\{\lambda_i^{(k)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi va

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{(k)} = \lambda_1$$

tengligi bajariladi. Shunda (9) formuladan ko`rinib turganiday, bu yaqinlashuvchi kvadratlik yaqinlashuv bo`ladi.

Shunda (7) formulasida k ning yetarli katta qiymatlarida $\{\lambda_i^{(k)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi bo`lganligidan λ_1 xos qiymatiga mos keladigan xos vektori hisobida ixtiyoriy kerakli aniqlik bilan y_k vektorini olish mumkinligi kelib chiqadi.

Bu usul quyidagicha amalga oshiriladi: dastlab $x_0 \neq 0$ boshlang'ich yaqinlashuvi saylab olinib, $\lambda_i^{(0)} = \frac{(Ax_0, x_0)}{(x_0, x_0)}$ sonini saylab olamiz. Undan so`ng  $(A - \lambda_1^{(0)}E)y_1 = x_0$  sistemasini proeksion – differensial usul bilan yechib  $y_1$  yechimni topamiz va uning normalaymiz. Kelasi qadamda (1) – (3) formulalari bo`yicha $\lambda_i^{(1)}$ soni va y_0 vektori aniqlanadi va iteratsion jarayon shundayligicha davom ettiriladi. Bu jarayon ikkita ketma – ket kelgan $\lambda_i^{(k)}$ va $\lambda_i^{(k+1)}$ yaqinlashuvchilari berilgan aniqlik bilan mos kelguncha davom ettiriladi.

Bundan so`ng  $x_0$  boshlang'ich yaqinlashuvchiga quyidagiday talablar qo`yiladi: birinchida yo`nalishi bo`yicha mos xos qiymatlari yaxshi yaqinlashishi kerak; ikkinchidan u har xil yaqinlashuvchi $\lambda_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, n}$) xos vektorlarining chiziqli bog`liqsiz bo`lishi kerak. Shuning uchun x_j xos vektoriga boshlang'ich yaqinlashuvini vektor hisobida, j -tuzuvchisi 1 ga teng va boshqa tuzuvchilari nolga teng bo`lganda  $e_j$  birlik vektoriniq qabul qilish bu talabga to`liq javob beradi. Keyingi xos vektorini aniqlash uchun boshlang'ich yaqinlashuvchi hisobida

bunda $f_j^{(k-1)} (j=\overline{1,n}) - f_j(y_k)$ fuksiyasining bazi bir $y_k = x_0$ boshlang'ich nuqtadagi qiymati, yani

$$f_j^{(k-1)} = (A_i^{(k-1)}, x_0) - x_{k-1}^i = f_j^{(k-1)}(x_0), \quad i=1,2,\dots,n$$

2. (12) sistemasining gradient vektorini hisoblaymiz:

$$\phi_i' = \text{grad } \phi_i = f_i' f_n^{(k-1)} - f_n' f_i^{(k-1)} = A_i^{(k-1)'} f_n^{(k-1)} - A_n^{(k-1)'} f_i^{(k-1)}, \\ i=1,2,\dots,n-1,$$

$$\phi_n' = \text{grad } \phi_n = f_n' = A_n^{(k-1)'} = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} - \lambda_i^{(k-1)})$$

3. $a_i^0 = \phi_i' (i=\overline{1,n})$ deb faraz qilib (1.7) formulasi bo'yicha a_i^j vektori yasaladi.

Bu formulada i ning har bir qiymatida $j = 0,1,2,\dots,i-1$, qiymatlarini qabul etib yani quyidagi vektorlar sistemasini tuzish kerak:

1. $i=1$ bo'lganda $j=0$ bo'ladi: $a_i^0 = \phi_i'$;

2. $i=2$ bo'lganda $j=0,1$ qiymatlarini qabul qiladi:

$$a_2^0 = \phi_2'; \quad a_2^1 = a_2^0 - \frac{(\phi_1', a_2^0)}{(\phi_1', a_1^0)} a_1^0 = \phi_2' - \frac{(\phi_1', \phi_2')}{(\phi_1', \phi_1')} \phi_1';$$

3. $i=3$ bo'lganda $j=0,1,2$ qiymatlarini qabul qiladi:

$$a_3^0 = \phi_3'; \quad a_3^1 = a_3^0 - \frac{(\phi_1', a_3^0)}{(\phi_1', a_1^0)} a_1^0 = \phi_3' - \frac{(\phi_1', \phi_3')}{(\phi_1', \phi_1')} \phi_1';$$

$$a_3^2 = a_3^1 - \frac{(\phi_2', a_3^1)}{(\phi_2', a_2^1)} a_2^1$$

va boshqalar.

4. Bundan so'ng

$$(\phi_k', a_i^{i-1}) = 0, \quad k=1,2,\dots,i-1 \quad (2.13)$$

shartlari bajarilishini tekshiramiz. Agarda (13) shartlari bajarilsa unda a_i^j vektorlarining (7) formulasi bo'yicha to'g'ri yasalgan va algoritimning keying qismi bajarishga o'tiladi.

5. (1) sistemasining yechimiga ketma-ket yaqinlashuvchi (8) formulasi bilan aniqlanadi. Bu formula (11) sistemasi uchun quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$y_k = y_{k-1} - \frac{a_n^{n-1}}{(\phi_n', a_n^{n-1})} h_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.14)$$

yoki ochib yozsak quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} y^1_k &= y^1_{k-1} - \frac{c_1}{B_n} h_k \\ y^2_k &= y^2_{k-1} - \frac{c_2}{B_n} h_k, \\ &\dots\dots\dots \\ y^n_k &= y^n_{k-1} - \frac{c_n}{B_n} h_k, \end{aligned} \tag{2.15}$$

bunda $y_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)$ yechimiga ketma – ket yaqinlashuvchilar;
 $a_n^{n-1} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - (1.7) formula bilan yasalgan n -o`lchamli vektor;
 $B_n = (\phi_n', a_n^{n-1}) - \phi_n'$ va a_n^{n-1} larning skalyar ko`paytmasi;

$$h_k = \phi_n(y_k) = f_n(y_k) = f_n^k; \quad h_0 = \phi_n(y_k^{(0)}) = f_n(y_k^{(0)}) = f_n^0;$$

6. (14) yoki (15) formulasi bilan aniqlangan yaqinlashuvchi yechim (2.2) formulasi bilan normalashtiriladi.

7. (14) yoki (15) formulasi bilan bajarilgan har bir iteratsiyadan so'ng $|f_n(y_k)| \leq \varepsilon$ shartining bajarilishi tekshiriladi, bunda $\varepsilon > 0$ oldindan berilgan aniqlik. Agarda bu shartlar bajarilsa, unda iteratsion jarayon bajarish to'xtatiladi va teskari holda $y_k = x_l$ deb faraz qilinib, keying iteratsiyaga, yani 1- punktga o'tiladi va shu tarzda davom ettiriladi.

3- §. Sonli misollar

Bitiruv malakaviy ishining bu paragrafida yuqoridagi asosiy rejalari bayon qilinigan proeksion – differensial usulning berilgan aniq matritsaning xos qiymatlarining to'liq masalasini yechishga qo'llanilishi ko'rsatiladi. Usulning

hisoblash algoritimining amalga oshirishni ko'rsatish uchun tartibi har xil bo'lgan matritsalarini xos qiymatlarini va ularga mos xos vektorlarini kompyuterdan foydalanib, ko'p sonli hisoblashlar tajribada bajarildi. Ularning natijalari proeksion – differensial usullarning nazariyalarni to'g'riligini ko'p bora tasdiqlab, uning xos qiymatlarining to'liq masalasini yechish uchun qulay va yuqori natijali usul ekanligini ko'rsatildi: hisoblashlar algoritmlari kompyuter uchun programmlar tuzilib ularda yaxshi natijalarga erishildi. Berilgan matritsaning barcha xos qiymatlari va xos vektorlarini ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashuvchisidan berilgan aniqlik bilan hisoblashga ikoniyatlar beradi. Qo'shimcha aytib o'tishi uchun holi: matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlari ketma – ket yaqinlashuvchilari bir vaqtda hisoblab borildi. Quyida C++ algaritimi tilida programmlar tuzilib, kompyuterdan foydalanib bajarilgan katta hajimdagi hisoblashlarning bittasini natijalarini keltiramiz:

Misol: Quyidagi matritsaning xos qiymatlarining to'liq masalasini proeksion – differensial usulini qo'llanib yeching:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0.8 & 1.7 & 0.3 & 1.5 & 0.2 & -1.4 \\ 0.8 & 1.2 & 0.5 & 1.3 & 0.7 & 0.8 & 1.4 \\ 1.7 & 0.5 & 2.1 & 0.9 & 1.8 & -2.2 & -1.7 \\ 0.3 & 1.3 & 0.9 & 1.7 & 0.3 & 1.5 & 2.3 \\ 1.5 & 0.7 & 1.8 & 0.3 & -1.4 & 0.5 & 1.6 \\ 0.2 & 0.8 & -2.2 & 1.5 & 0.5 & 1.1 & 2.4 \\ -1.4 & 1.4 & -1.7 & 2.3 & 1.6 & 2.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Yechish: Usulning bu algoritimining qulayligi, (2.1) – (2.3) formulalaridan ko'rinib turganidek, matritsaning xos qiymatlari va unga mos xos vektorlariga ketma – ket yaqinlashishilarning bir vaqtda hisoblanishi bo'ladi.

Differensial pastga tushish usulining ko'rsatilgan algoritimi asosida berilgan matritsasining xos qiymatlarining to'liq masalasini yechish uchun programma tuzib hisoblashlar EHM da bajarildi. Mos xos qiymatlarga boshlang'ich yaqinlashishlar hisobida quyidagi vektorlar qabul qilindi.

$$a) x^{(0)} = (1, 1, 1, -1, -1, 1, 0) \quad b) x^{(0)} = (1, -1, 0, -1, -1, 1, 0)$$

$$v) x^{(0)} = (1, 1, 1, 0, -1, 1, 0) \quad g) x^{(0)} = (0, 0, 0, -1, 0, 1, 1)$$

$$c) x^{(0)} = (0, -1, 0, 0, -1, 1, 1) \quad d) x^{(0)} = (1, 1, 0, 0, -1, 1, 0)$$

$$k) x^{(0)} = (-1, 1, 0, -1, 0, 1, 1)$$

Shunda (2.1) – (2.3) algoritimi bo'yicha hisoblashlar

$$\max_i |Ax^{(k)} - \lambda_i x^{(i)}| \leq \varepsilon = 10^{-7} \quad (3.2)$$

sharti bajarilganda to'xtatildi. Bunda λ_i orqali λ xos qiymatiga va $x^{(i)}$ orqali x xos vektorlarining i - yaqinlashuvchilari belgilandi.

Ko'rsatilgan aniqlik bilan hisoblashlarning natijalari quyida jadvalda keltirilgan. Bu olingan natijalar asosida berilgan (1) matritsasining $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ xos qiymatlarining taqribiy qiymatlari quyidagicha qabul qilindi:

$$a) \lambda_1 = \lambda_1^{(6)} = -4.0257157915; \quad b) \lambda_2 = \lambda_2^{(6)} = -1.9673684749;$$

$$v) \lambda_3 = \lambda_3^{(3)} = -0.5366672394; \quad g) \lambda_4 = \lambda_4^{(4)} = 0.1334592591;$$

$$c) \lambda_5 = \lambda_5^{(3)} = 1.3775926129; \quad d) \lambda_6 = \lambda_6^{(4)} = 5.4053710881;$$

$$k) \lambda_7 = \lambda_7^{(3)} = 6.8133288869;$$

Endi (1) matritsaning proeksion – differensial usuli bilan topilgan xos qiymatlarining yig'indisini topamiz:

$$S = \lambda_1^{(6)} + \lambda_2^{(6)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(4)} + \lambda_5^{(3)} + \lambda_6^{(4)} + \lambda_7^{(3)} = 7.2000003402;$$

Endi (1) matritsasining

$$SpA = 2 + 1.2 + 2.1 + 1.7 - 1.4 + 1.1 + 0.5 = 7.2;$$

soniga teng bo'ladi. Bu berilgan (1) matritsani xos qiymatlarini berilgan aniqlik bilan topilganini tasdiqlaydi.

Berilgan (1) matritsaning proeksion – differensial usuli bilan topilgan xos qiymatlariga mos xos vektorlarini quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}
x_1^{(6)} &= (0.2229732708, -0.0716559614, 0.3409458025, \\
&-0.2482642676, -0.6647295153, 0.0193732010, 0.570112714); \\
x_2^{(6)} &= (-0.3142892479, 0.0950292738, 0.4403093348, \\
&-0.1536825522, -0.1421861738, 0.7113377095, -0.3853346904); \\
x_3^{(3)} &= (-0.1607473943, -0.2601463322, 0.2245705899, \\
&-0.4984095568, 0.6459022874, 0.0786801359, 0.4292549315); \\
x_4^{(4)} &= (0.1664294923, -0.8461084665, 0.0833695723, \\
&0.4478609172, 0.0072776659, 0.2195035122, -0.0252397314); \\
x_5^{(3)} &= (-0.6984405689, 0.0016712854, 0.4065210361, \\
&0.3954917162, -0.0583446390, -0.4063480096, 0.1482637053); \\
x_6^{(4)} &= (0.5198573056, 0.3757913075, 0.5562303593, \\
&0.390669819, 0.3383788622, 0.306834415, 0.0776733304); \\
x_7^{(3)} &= (-0.1997391240, 0.2470573068, -0.393028397, \\
&0.3894602845, 0.0526375129, 0.5226765555, 0.5599791251);
\end{aligned}$$

Natijalarda proeksion – differensial usulining matritsaning xos qiymatlarining to'liq masalasini yechish uchun boshqa usullar bilan solishtirganda afzalliklarini aytib o'tamiz.

- Usulning hisoblash algoritimi sodda, kompyuterlar uchun pragrammalar tuzish uchun qulay;
- Usulning har bir qadamida (2.1) tenglamalarining sistemasini aniq yechiladi. Sababi bu usul chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi uchun aniq usul bo'ladi;
- Usulning har bir qadamida matritsaning xos vektorlaridagi yaqinlashuvlar normalashtirilib boriladi (2.2 formulasiga qarang)
- Berilgan matritsaning xos qiymatlarini va xos vektorlarini usulning har bir iteratsiyasida bir vaqtda hisoblash mumkin bo'ladi.
- Kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko'p sonli hisoblash natijalari bu usulning hisoblashlarni bajarish uchun qulay va yuqori natijali usul hisoblanadi;

Xulosa.

Matritsaning xos qiymatini topish masalalari, yani (2.1) sistemasini noldan farqli yechimlarini aniqlash masalasi, sonli tanlashning eng qiziqarli va eng ahamiyatli masalalaridan biri. Bu masalaning qo'yilishi sodda bo'lishiga qaramasdan, amaliyotda uchraydigan bunday barcha masalalarni yechish uchun ahamiyatli bo'lgan, ko'p qirrali yagona algoritimni ishonish mumkin emas [13,14,15,16,17]. Bunday masalalarni yechishning hozirgi kunda mavjud bo'lgan ko'p sonli algoritimlarning orasidan bir algoritimni saylab olish masalasining qo'yilishiga bog'liq bo'ladi. Masalan, to'g'ri (aniq) usullar matritsalarining xos qiymatlarining va ularga mos xos vektorlarining to'liq masalasini yechishga imkoniyat beradi. Xos qiymatlarning to'liq masalasini ba'zi bir iteratsion usular bilan ham yechish mumkin, lekin ular, aniq usullar bilan solishtirganda ancha murakkab bo'ladi [13,14,15,16,17]. Iteratsion usullar ko'pchilik hollarda matritsalarining xos qiymatlarining yagona masalasini yechishga, yani bir yoki bir nechta xos qiymatlarini va ularga mos xos qiymatlarini topish uchun qo'llaniladi. Shunday qilib, xos qiymatlarning to'liq va xususiy masalalarini, ularning yechish usularini ham qo'llanish yo'nalishlari bo'yicha ham bir – birdan katta farq qiladi. Sababi, uncha tartibi yuqori bo'lmagan matritsalarining xos qiymatlarini topish masalasini yechish uchun ham katta hajimdagi hisoblash ishlarini bajarish bilan bog'liq. Shuning uchun matritsalarining xususiy masalasini, to'liq masala holida hisoblash qiyinchiliklaridan qutilishga imkoniyat beradigan, iteratsion usullar bilan yechish amaliyot uchun ancha muhim bo'ladi.

Haqiqiy simmetrik matritsalarining xos qiymatlarini va xos vektorlarini hisoblash, umumiy turdagi matritsalar uchun bu masalalarning yechishga

solishtirganda ancha oson masala hisoblanadi. Sababi, simmetirik haqiqiy matritsalarining xos qiymatlari har yaxshi shartlashgan bo`ladi. Simmetrik emas matritsaning xos qiymatlarining yomon shatrlashganligi, ularning xos qiymatlarini aniq aniqlaydigan usulni ishlab chiqish imkoniyatlaridan o`zgacha [15,16,17].

Bu yuqorida keltirilgan hollarga bog`liq, bitiruv mutaxassislik ishida, ixtiyoriy simmetrik emas matritsaning xos qiymatining yagona masalasini yechish uchun, hisoblash algoritimi va hisoblashdan olingan natijalarini proeksion – differensial usuli qo`llaniladi [7,11]. Bu usulning dastlabki variantlari bilan solishtirgandan, kerakli hisoblashlarni hajmi ancha qisqarishga va yechimni ancha aniqlik bilan topish imkoniyat beradigan, uning soddalashtirgan yangi algoritimilari keltirilgan. Ularning birortasiga asosida ixtiyoriy bir matritsaning xos qiymatlari va ularga mos xos vektorlarini topishga imkon berdigan iteratsion usullar ishlab chiqilgan. Bu usul bo`yicha aniqlangan ketma – ket yaqinlashularning mos xos qiymatlariga kvadratik yaqinlashuvchi bo`ladigani isbotlangan. Bunda matritsalarining xos qiymatlarini va ularga mos xos vektorlariga ketma – ket yaqinlashuvlar bir vaqtda hisoblanadi.

Proeksion – differensial usuning diplom ishida keltirilgan (2.1) – (2.3) yangi hisoblash sxemasi berilgan matritsaning [17] xos qiymatlarining to`liq masalasini yechishga qo`llaniladi. EHM da bajarilgan hisoblashlarning natijalarining boshqa yaqinlashuvchi usullar bilan olingan natijalari bilan [17] solishtirilishi, proeksion – diffrensial usulning bitiruv malakaviy ishida keltirilgan algoritimini ixtiyoriy simmertik emas matritsaning xos qiymatlarining xususiy masalasini yechish uchun yuqori natijali usul ekan ko`rsatib o`tildi.

Foydalangan adabiyotlar.

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
2. Березин И.С. Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1. - М.:Наука,1966.
3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986.
4. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М.: - Наука, 1966.
5. Воеводин В.В. Решение полной проблемы собственных значений обобщенным методом вращений // Вычислительные методы и программирование № 3, 1965, стр 89-105
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. –М.: Наука, 1984.
7. Галанов Б.А О сходимости одного непрерывного метода и его аппроксимации // Математические методы в кибернетической технике, вып .7.- Киев: Изд-во ИК АН У ССР, 1970.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы .- М.: -Наука, 1978.
9. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. – Вычислительные методы. т.1. –М.:Наука, 1976.
10. Кублановская В.Н. Решение проблемы собственных значений для произвольной матрицы // Труды ЛОМИ им.Стеклова, т.29, 1962, стр.113-115.

11. Отаров А.О Численная реализация одного метода дифференциального спуска при решении нелинейных уравнений // “Вестник” КК ФАН УзССР №2, Нукус 1983.
- 12.Отаров А.О. Таджиев Т.М., Абдукодирова И., Олламбергганов Ф., Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений неявными разностными методами// Журнал «Вестник Каракалпакского госуниверситета», Нукус, 2019, №1.
13. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. .- М.: -Наука, 1986.
14. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы.– М.: МИР, 1983.
15. Уилкнсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука. 1970.
16. Уилкнсон Дж. , Райнш Н. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебраю – М.: Машинностроение, 1976.
17. Фадеев Д. К. , Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М. – Л. : Физматгиз. 1963.

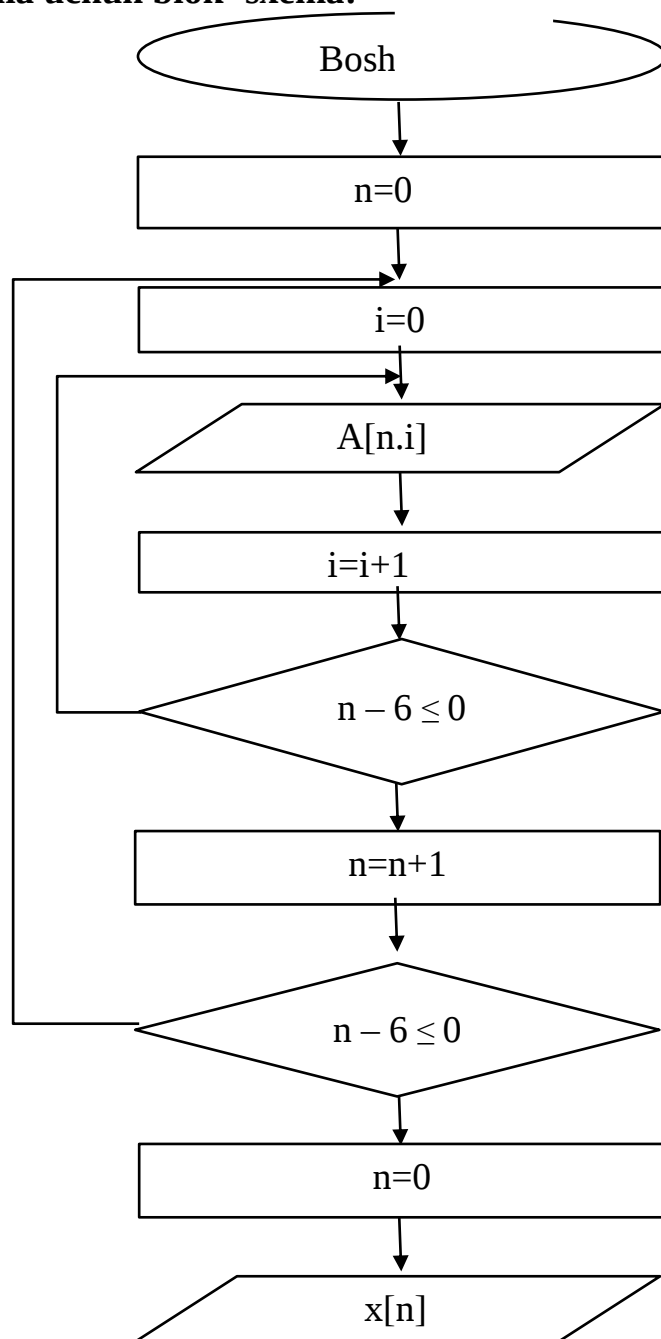
Internet saytlari.

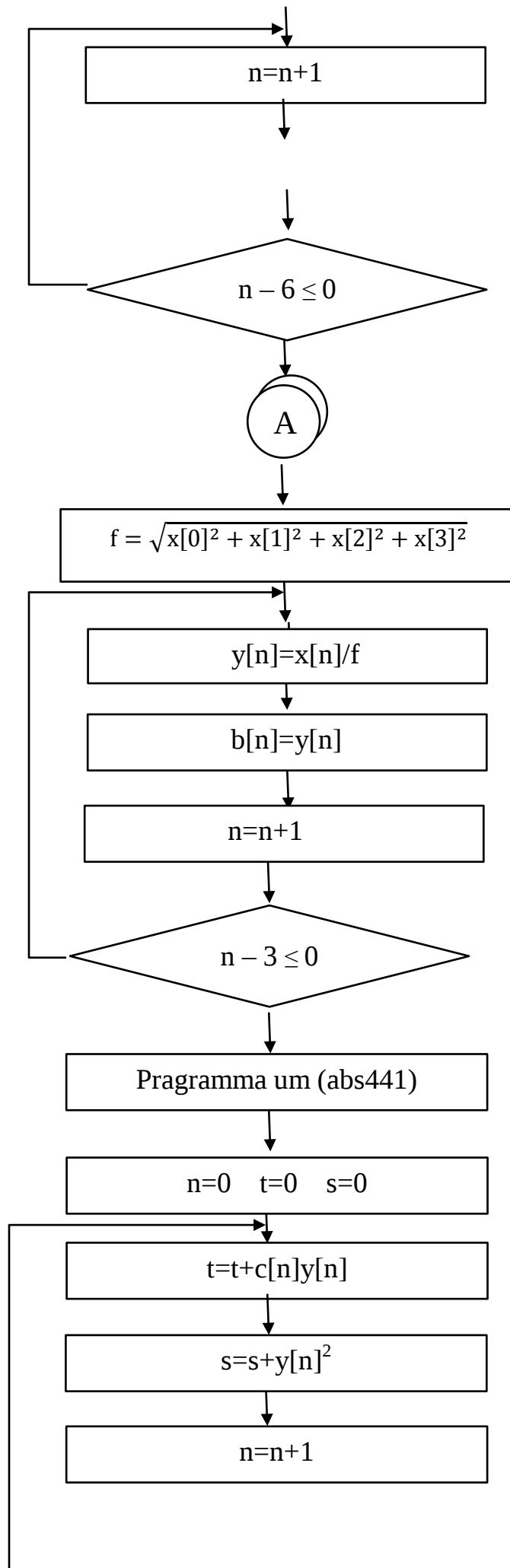
1. [http:// www.arxiv.uz](http://www.arxiv.uz) (Matritsaning xos qiymati va xos vektori bo'yicha tushuncha).
2. [http:// www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz) (Simmetrik va simmertik emas matritsalar haqida tushuncha).
3. [http:// www.tdiu.uz](http://www.tdiu.uz) (Matritsa haqida umumiy tushunchalar).
4. [http:// www.intuit.uz](http://www.intuit.uz) (Матрицы вычисления).
5. [http:// www.ozon.uz](http://www.ozon.uz) (Симметричная проблема собственных значений).

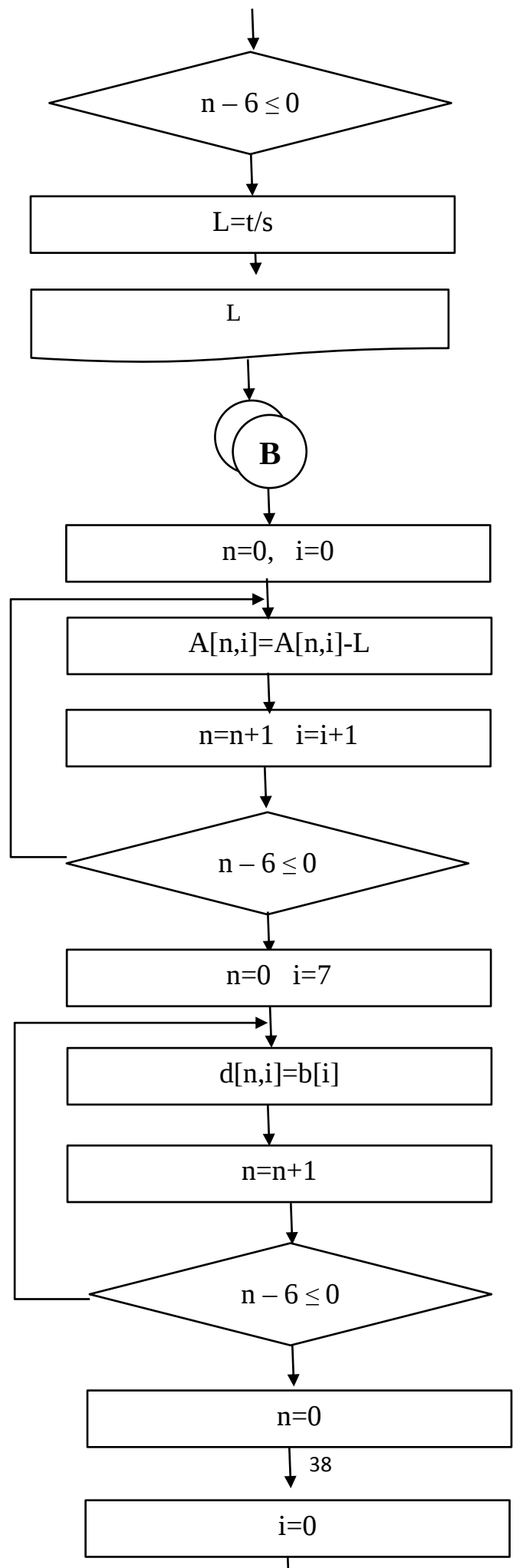
Qo`shimchalar

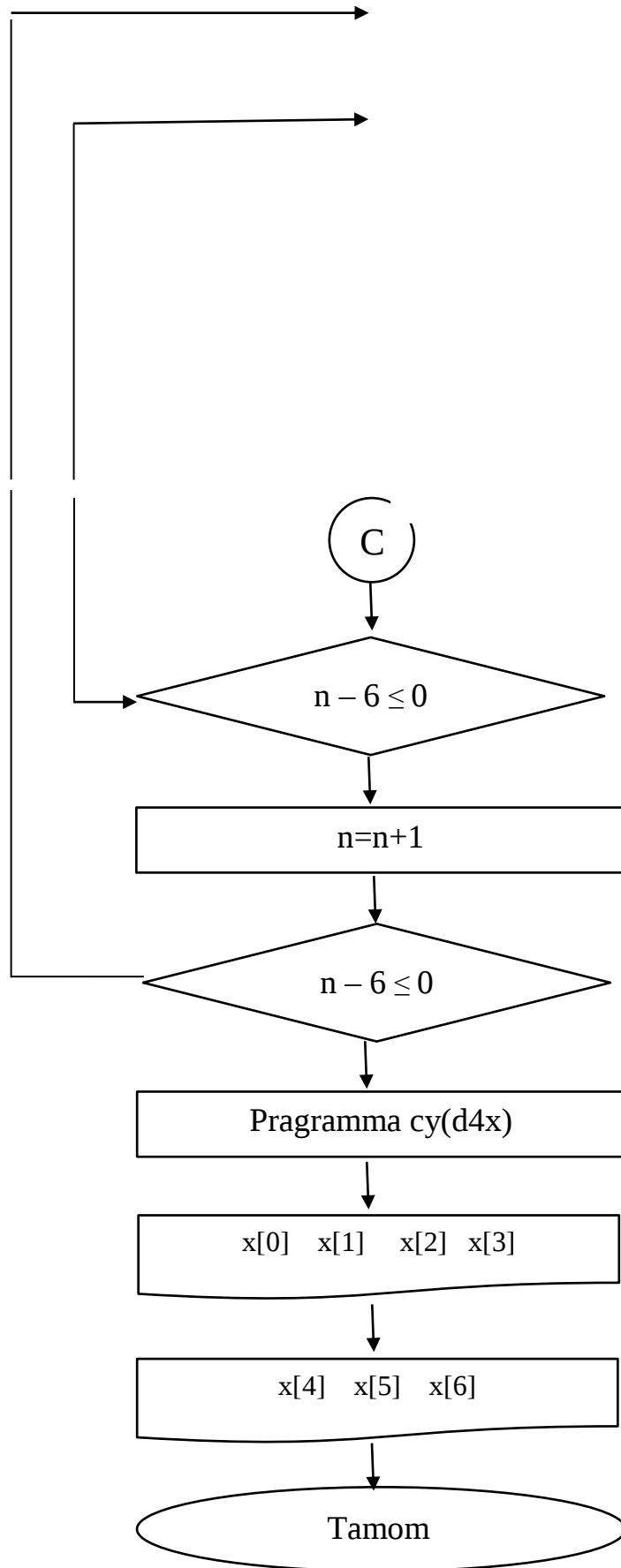
(EHM uchun tuzilgan programmlarning va ularning bajarishdan
olingan sonli natijalarning bosib chiqarilgan nusxalari
hamda blok sxemalari)

Berilgan masala uchun blok- sxema:









EHM uchun tuzilgan programma:

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
using namespace std;
int main(){
    char d=187, ss=188;
    double
x[100][100],y[100][100],lb[100],a[100][100],f[100][100],Ax[100],m=0,l=0,k1,l1,m
1=0,m2=0,m3=0,m4=0,m5=0,k3,k4,k5,k6,l3,l4,l5;
    double
l6,k2,l2,k7,k8,k9,l7,l8,l9,l10,l11,l12,l13,l14,k10,k11,k12,k13,k14,k15,k16,k17,k18,
k19,k20, l15,l16,l17,l18,l19,l20,k17n;
    double k,e;
    double A [7][7]={
        {2,0.8,1.7,0.3,1.5,0.2,-1.4 },
        {0.8,1.2,0.5,1.3,0.7,0.8,1.4},
        {1.7,0.5,2.1,0.9,1.8,-2.2,-1.7},
        {0.3,1.3,0.9,1.7,0.3,1.5,2.3},
        {1.5,0.7,1.8,0.3,-1.4,0.5,1.6},
```

```
x[0][0]=1;  x[0][1]=1;   x[0][2]=0;   x[0][3]=0;  x[0][4]=-1; x[0][5]=-1;
x[0][6]=-1;  y[0][1]=0;   y[0][2]=1;   y[0][3]=0;   y[0][4]=1;   y[0][5]=-1;
y[0][6]=1;y[0][7]=1; k=0.1; e=0.000001; l=0;
```

```
cout<<"*** DIFFERENSIALLASH USULI BILAN  
HISOBLASH ***"<<endl<<endl;
```

```
cout<<" k €      x1   €      x2   €      x3   €      x4   €      x5   €      x6   €
x7   € lambda   € epsilon €\n";
```

```
while(k>e){          int      i;      if(i==0){          cout<<"          e
"<<i<<setprecision(10)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<"          e
"<<x[0][0]<<"e "<<x[0][1]<<"e "<<x[0][2]<<"e "<<x[0][3]<<"e "<<x[0][4]<<"e
"<<x[0][5]<<"e "<<x[0][6]<<"e "<<lb[0]<<"e"<<k<<"e";}
```

41

```

cout<<endl;
lb[0]=0;
for(int i=0;i<7;i++) {lb[0]+=Ax[i]*x[0][i];}
for(int i=0;i<7;i++){
for(int j=0;j<7;j++){
    if(i==j) a[i][j]=A[i][j]-lb[0];
    else a[i][j]=A[i][j];
cout<< a[i][j]<<" ";} cout<<endl;}

for(int i=0; i<7; i++){
    n+=a[0][i]*a[1][i];
    l+=a[0][i]*a[0][i];}
for(int i=0;i<7;i++){ a[7][i]=a[1][i]-n*a[0][i]/l; }
for(int i=0; i<7; i++){
    k1+=a[2][i]*a[0][i];
    l1+=a[0][i]*a[0][i];}
for(int i=0;i<7;i++){a[8][i]=a[2][i]-k1*a[0][i]/l1;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k2+=a[1][i]*a[8][i];
    l2=a[1][i]*a[7][i];}
for(int i=0;i<7;i++){a[9][i]=a[8][i]-k2*a[7][i]/l2; }
for(int i=0; i<7; i++){
    k3+=a[0][i]*a[4][i];
    l3+=a[0][i]*a[0][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){a[10][i]=a[3][i]-k3*a[0][i]/l3;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k4+=a[1][i]*a[10][i];
    l4+=a[1][i]*a[7][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){a[11][i]=a[10][i]-k4*a[7][i]/l4; }
for(int i=0; i<7; i++){

```

```

    k5+=a[2][i]*a[11][i];
    l5+=a[2][i]*a[9][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){a[12][i]=a[11][i]-k5*a[9][i]/l5;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k6+=a[0][i]*a[4][i];
    l6=a[0][i]*a[0][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){ a[12][i]=a[4][i]-k6*a[0][i]/l6;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k7+=a[1][i]*a[13][i];
    l7+=a[1][i]*a[7][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){ a[14][i]=a[13][i]-k7*a[7][i]/l7; }
for(int i=0; i<7; i++){
    k8+=a[2][i]*a[14][i];
    l8+=a[2][i]*a[9][i];
for(int i=0;i<7;i++){a[15][i]=a[14][i]-k8*a[9][i]/l8;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k9+=a[3][i]*a[15][i];
    l9+=a[3][i]*a[12][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){a[16][i]=a[15][i]-k9*a[12][i]/l9; }
for(int i=0; i<7; i++){
    k10+=a[0][i]*a[5][i];
    l10+=a[0][i]*a[0][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){ a[17][i]=a[5][i]-k10*a[0][i]/l10;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k11+=a[1][i]*a[17][i];
    l11+=a[1][i]*a[7][i];}
    for(int i=0;i<7;i++){ a[18][i]=a[17][i]-k11*a[7][i]/l11;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k12+=a[2][i]*a[18][i];
    l12+=a[2][i]*a[9][i];}

```

```

        for(int i=0;i<7;i++){a[19][i]=a[18][i]-k12*a[9][i]/l12;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k13+=a[3][i]*a[19][i];
    l13+=a[3][i]*a[12][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){a[20][i]=a[19][i]-k13*a[12][i]/l13;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k14+=a[4][i]*a[20][i];
    l14+=a[4][i]*a[16][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){a[21][i]=a[20][i]-k14*a[16][i]/l14;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k15+=a[0][i]*a[6][i];
    l15+=a[0][i]*a[0][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){ a[22][i]=a[6][i]-k15*a[0][i]/l15;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k16+=a[1][i]*a[22][i];
    l16+=a[1][i]*a[7][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){ a[23][i]=a[22][i]-k16*a[7][i]/l16;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k17+=a[2][i]*a[23][i];
    l17+=a[2][i]*a[9][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){a[24][i]=a[23][i]-k17*a[9][i]/l17;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k18+=a[3][i]*a[24][i];
    l18+=a[3][i]*a[12][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){a[25][i]=a[24][i]-k18*a[12][i]/l18;}
for(int i=0; i<7; i++){
    k19+=a[4][i]*a[25][i];
    l19+=a[4][i]*a[16][i];}
        for(int i=0;i<7;i++){a[26][i]=a[25][i]-k19*a[16][i]/l19;}
for(int i=0; i<7; i++){

```

```

k20+=a[5][i]*a[26][i];
l20+=a[5][i]*a[21][i];}

for(int i=0;i<7;i++){a[27][i]=a[26][i]-k20*a[21][i]/l20;}

double    kl0,kl1,kl2,kl3,kl4,kl5,kl6,    y1[100][100],y2[100][100],y3[100][100],
y4[100][100],y5[100][100],y6[100][100],y7[100][100];

for(int i=0; i<7; i++){

    y[1][i]=y[0][i]-((1.9-
lb[0])*y[0][1]+0.5*y[0][2]+1.2*y[0][3]+0.6*y[0][4]+0.7*y[0][5]+1.6*y[0][6]-
x[0][0])*a[0][i]/(a[0][0]*a[0][0]+a[0][1]*a[0][1]+a[0][2]*a[0][2]+a[0][3]*a[0][3]+a
[0][4]*a[0][4]+a[0][5]*a[0][5]));

    y[0][1]=y[1][1]; y[0][2]=y[1][2]; y[0][3]=y[1][3]; y[0][4]=y[1][4];
y[0][5]=y[1][5]; y[0][6]=y[1][6];

    for(int i=0; i<7; i++){

        y[2][i]=y[0][i]-(0.5*y[0][1]+(1.3-
lb[0])*y[0][2]+0.9*y[0][3]+1.8*y[0][4]+1.2*y[0][5]+0.4*y[0][6]-
x[0][1])*a[6][i]/(a[1][0]*a[6][0]+a[1][1]*a[6][1]+a[1][2]*a[6][2]+a[1][3]*a[6][3]+a
[1][4]*a[6][4]+a[1][5]*a[6][5]));

        y[0][1]=y[2][1];          y[0][2]=y[2][2];          y[0][3]=y[2][3];
y[0][4]=y[2][4]; y[0][5]=y[2][5]; y[0][6]=y[2][6];

        for(int i=0; i<7; i++){

            y[3][i]=y[0][i]-(1.2*y[0][1]+0.9*y[0][2]+(1.8-
lb[0])*y[0][3]+0.4*y[0][4]+0.6*y[0][5]+1.4*y[0][6]-
x[0][2])*a[8][i]/(a[2][0]*a[8][0]+a[2][1]*a[8][1]+a[2][2]*a[8][2]+a[2][3]*a[8][3]+a
[2][4]*a[8][4]+a[2][5]*a[8][5]));

            y[0][1]=y[3][1];          y[0][2]=y[3][2];          y[0][3]=y[3][3];
y[0][4]=y[3][4]; y[0][5]=y[3][5]; y[0][6]=y[3][6];

            for(int i=0; i<7; i++){

                y[4][i]=y[0][i]-(0.6*y[0][1]+1.8*y[0][2]+0.4*y[0][3]+(1.9-
lb[0])*y[0][4]+0.2*y[0][5]+1.6*y[0][6]-

```

```

x[0][3])*a[11][i]/(a[3][0]*a[11][0]+a[3][1]*a[11][1]+a[3][2]*a[11][2]+a[3][3]*a[11][3]+a[3][4]*a[11][4]+a[3][5]*a[11][5]);
    y[0][1]=y[4][1];    y[0][2]=y[4][2];    y[0][3]=y[4][3];    y[0][4]=y[4][4];
y[0][5]=y[4][5]; y[0][6]=y[4][6];
    for(int i=0; i<7; i++){
        y[5][i]=y[0][i]-
(0.7*y[0][1]+1.2*y[0][2]+0.6*y[0][3]+0.2*y[0][4]+(0.5-
lb[0])*y[0][5]+1.5*y[0][6]-
x[0][4])*a[15][i]/(a[4][0]*a[15][0]+a[4][1]*a[15][1]+a[4][2]*a[15][2]+a[4][3]*a[15][3]+a[4][4]*a[15][4]+a[4][5]*a[15][5]);
        y[0][1]=y[5][1]; y[0][2]=y[5][2]; y[0][3]=y[5][3]; y[0][4]=y[5][4];
y[0][5]=y[5][5]; y[0][6]=y[5][6];
    for(int i=0; i<7; i++){
        y[6][i]=y[0][i]-
(1.6*y[0][1]+0.4*y[0][2]+1.4*y[0][3]+1.6*y[0][4]+1.5*y[0][5]+(1.3-
lb[0])*y[0][6]-
x[0][5])*a[20][i]/(a[5][0]*a[20][0]+a[5][1]*a[20][1]+a[5][2]*a[20][2]+a[5][3]*a[20][3]+a[5][4]*a[20][4]+a[5][5]*a[20][5]);
        y[0][1]=y[6][1]; y[0][2]=y[6][2]; y[0][3]=y[6][3]; y[0][4]=y[6][4];
y[0][5]=y[6][5]; y[0][6]=y[6][6];
    for(int i=0; i<7; i++){
        y[7][i]=y[0][i]-
(1.6*y[0][1]+0.4*y[0][2]+1.4*y[0][3]+1.6*y[0][4]+1.5*y[0][5]+(1.3-
lb[0])*y[0][6]-
x[0][5])*a[20][i]/(a[5][0]*a[20][0]+a[5][1]*a[20][1]+a[5][2]*a[20][2]+a[5][3]*a[20][3]+a[5][4]*a[20][4]+a[5][5]*a[20][5]);
        y[0][1]=y[6][1]; y[0][2]=y[6][2]; y[0][3]=y[6][3]; y[0][4]=y[6][4];
y[0][5]=y[6][5]; y[0][6]=y[6][6];
    for(int i=0; i<7; i++){

```



```
return 0;  
}
```