ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATINDAĠÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

Matematika fakulteti

Ámeliy matematika kafedrası

“Ámeliy matematika hám informatika”

tálim bağdarın pitkeriwshi 4^{D}-kurs studenti

Ispanova Jarkınaydıń

PITKERIW QÁNIGELIK JUMÍSÍ

Teması:Sızıqlı programmalastırıwdın’ ulıwma ma’selesin geypara ekonomikalıq ma’selelerdi sheshiwge qollanıwları

Ilmiy basshısı: doc. R. Mustafaeva

Kafedra baslıǵı: doc. M. Berdimuratov

Nokis-2019

MAZMUNI

KIRISIW 4

1-§. Sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwmalasqan máselesi 7

2-§. Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiw usılı 20

3-§. Aralas sheklewlerine iye sızıqlı programmalastırıw máselelerin sheshiw 34

4-§. Geypara ekonomikalıq máselelerdi sheshiwde sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesiniń qollanıwları 36

JUWMAQLAW 46

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi 48

KIRISIW

Házirgi waqıtta matematikalıq teoriyalar hám usılları barlıq basqa ilim tarawlarına kirip keldi hám matematikalıq izertlew usılları qollanbaytuǵın adamzattıń ámeliy hám ruxıy tarawların kórsetiw múmkin emes. Egerde burıńǵı waqıtları matematikalıq apparatınan tiykarında esaplaw úskenesi retinde paydalanatuǵın bolsaq, al házirgi waqıtları qoyılǵan mashqalanı ádewir nátiyjeli(optimal) sheshiw variantların tańlaw máselesi qoyıladı. Bunday túrdegi máseleleri jańa matematikalıq tarawlardıń payda bolıwına alıp keldi, yaǵnıy anıqlap aytqanda sızıqlı hám sızıqlı emes programmalastırıw, massalıq xızmet kórsetiw teoriyası, oyınlar teoriyasınıń, gezekler teoriyasınıń hám t.b.[4,5].

Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń qoyılıwı birinshi márte orıs ekonomistı A.N.Tolstoydıń miynetlerinde, yaǵnıy bunda punktler arasında transporttıń ulıwma jolda bolıw waqtı az(minimal) bolatuǵın juk tasıw jobasın dúziwde kórsetildi. Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiw ushın matematikalıq tiykarları 1939-jılı akademik L.V.Kantorovich hám onıń shákirtleri menen jaratıldı. Sonlıqtan,sızıqlı programmalastırıwdıń usılları ekonomikalıq máselelerde, ónim islep shıǵarıwdı jobalastırıwda, awıl-xojalıǵında, áskeriy xızmetlerdi sheshiwde keń engizildi hám tarqaldı. Olardıń áhmiyetligi sonnan ibarat, bul máselelerdi ámeliy kompyuter programmalarında(MS Excel) iske asırıwǵa boladı.

Sızıqlı programmalastırıw máselesin eki usıl menen sheshiwge boladı: grafikalıq, egerde qoyılǵan máselesi eki belgisizine iye bolsa hám simleks usılı menen, egerde qoyılǵan máselede belgisizler sanı ekewden kóp bolsa. Tiykarınan, kópshilik ámeliy máselelerde belgisizler sanı kóp boladı, sonlıqtan bul jerde simpleks usılı ádewir áhmiyetli bolıp esaplanadı [11].

Eń bir áhmiyetli hám quramalı basqıshı bolıp,ekonomikalıq máselelerdiń matematikalıq modellerin jaratıw bolıp esaplanadı. Bunda qoyılǵan mashqalası, tiyisli tarawdıń terminlerin, jańa ekonomikalıq túsinikleri menen tanısıw hám úyreniw zárúrligi payda boladı. Qoyılǵan ekonomikalıq máseleniń matematikalıq modeli belgisiz shamalarına qoyılatuǵın sheklewler sisteması kórinisinde boladı.

Bunda sheklewler sisteması teńlemelerden hám(yamasa) teńsizliklerden ibarat boladı hám olar bul belgisizleri arasındağı baylanıslardı kórsetedi. Sonıń menen birge maqset funktsiyası da beriledi – bunda optimallastırılıp atırǵan parametrdiń belgisizlerden ǵárezligin kórsetedi hám bul funktsiyanı maksimum(eń úlken) mánisine yamasa minimal(eń kishi) mánisine jetkeriw zárúrligi payda boladı.

Simpleks usılı úsh basqıshta ámelge asadı:

- 1-basqıshı – qoyılǵan máseleni kestege jazıw;
- 2-basqıshı – múmkin bolǵan sheshimdi anıqlaw;
- 3- basqıshı optimal sheshimdi anıqlaw.

Qoyılǵan sızıqlı programmalastırıw máselesin simpleks usılı menen sheshiw ushın sheklewler sisteması hám maqset funktsiyası anıq túrde kestege jazıladı, al bunnan soń sheshiwshi elementine iye kesteni túrlendiriw usılı boyınsha belgisizler saltan aǵzaları arqalı ańlatıladı. Bunday usıl esaplawlardı ádewir ratsionalizatsiyalawǵa, sheshiw protsessin formallastırıwǵa hám aytarlıqtay jazıwlı muǵdarın azaytıwǵa imkaniyat beredi. Úshinshi basqıshında optimal sheshimin tabıw ushın anıq bir qaǵıydalar boyınsha kestede juwmaqlawshi túrlendiriwler alıp barıladı[8-11].

Bul pitkeriw qánigelik jumısında sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesin geypara ekonomikalıq máselelerdi sheshiwde qollanıwları qaraldı.

Pitkeriw qánigelik jumısın kirisiw bóliminen, tórt paragraftan, juwmaqlaw bóliminen, paydalanǵan ádebiyatlar diziminen hám qosımshadan turadı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń birinshi paragrafında sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwmalasqan máselesiniń qoyılıwı qaraldı hám bul máseleni jazıwdıń bir neshe formaları kórsetildi hám bir qatar anıqlamalar berildi. Sızıqlı programmalastırıw máselelerdiń sheshiminiń qásiyetleri dóńes kópliklerdiń qásiyetleri menen tıǵız baylanısta boladı, sonlıqtan bul jerde dónes kóplikler haqqında kerekli maǵlıwmatlar keltirildi. SP máselesiniń geometriyalıq interpretatsiyası, onıń sheshimleriniń qásiyetleri haqqında záru'rli maǵlıwmatlar berildi.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń ekinshinshi paragrafında SP máselesin sheshiw usılı qaraladı. Bunda baslanǵısh jobanı anıqlaw máselesi qaraladı hám tabılǵan jobanıń optimallıǵın tekseriw shártleri keltirildi. Simpleks usılınıń hám jasalma simpleks usılları qaraldı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń úshinshi paragrafında aralas sheklewlerine iye SP máselesi qaraldı hám bul usıldıń geometriyalıq maǵanası haqqında maǵlıwmatlar berildi[4.5].

Pitkeriw qánigelik jumısınıń tórtinshi paragrafında SP máselesin bazı bir ekonomikalıq máselelerde qollanıwlarına mısallar keltirildi[4].

1-§. Sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwmalasqan máselesi

Máseleniń qoylıwı. Meyli tómendegi (1.1) sızıqlı funktsiyası

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \min \tag{1.1}$$

hám tómendegi sızıqlı sheklewler sisteması

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . ... . \quad . \quad . ... . \quad . \quad . \quad . ., \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_j, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . ... . \quad . \quad . ... . \quad . \quad . \quad . ., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (i = \overline{1,n}), \tag{1.3}$$

berilgen bolsın, bunda a_{ij}, b_i hám C_j - berilgen turaqlı shamalar.

(1.2) sheklewler sistemasın qanaatlandıratuǵın hám (1.1) sızıqlı funktsiyasına eń kishi(minimum) mánisin jetkeretuǵın $x_1, x_2, ..., x_n$ ózgeriwshilerdiń teris emes mánislerin tabıw máselesi qoyıladı.

(1.2) sheklewler sistemasında barlıq b_j , $j = \overline{1,m}$ teris emes dep esaplawǵa boladı. Sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesi bir neshe jazıw formalarına iye.

Vektorlıq jazılıw forması. $Z = C\,X$ sızıqlı funktsiyanıń eń kishi(minimum) mánisin tómende berilgen sheklewler sistemasında

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0, \; X \geq 0, \tag{1.4}$$

tabıw, bunda $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. $C\,X$ -eki vektordıń skalyar kóbeymesi

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektorları ózgeriwshilerdegi hám saltan aǵzalardaǵı sáykes koeffitsientleri.

Matritsalıq jazılıw forması. $AX=A_0,\ X\geq 0$ sheklewler sistemasın qanaatlandıratuǵın $Z=C\,X$ funktsiyanıń minimum mánisin tabıw, bunda $C=(c_1,c_2,...,c_n)$ - qatar-matritsası, $A=(a_{ij})$ - sistemanıń matritsası,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$ - baǵana-matritsası, $A_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ - baǵana-matritsası.

Qosındı belgisi járdeminde jazılıwı. $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j$ sızıqlı funktsiyanıń minimum mánisin tómendegi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_j,\quad i=\overline{1,m},\quad x_j\geq 0,\ j=\overline{1,\mathrm{n}}.$$

sheklewler sistemasında tabıw.

1-anıqlama. (1.2) hám (1.3) shártlerin qanaatlandıratuǵın qálegen $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektorı (1.1)-(1.3) sızıqlı programmalastırıw máselesiniń jobası yamasa múmkin bolǵan sheshimi dep ataydı.

2-anıqlama. Egerde (1.4) jikleniwindegi oń anıqlanǵan x_i koeffitsientleri menen qatnasqan $A_i,\ i=\overline{1,m}$ vektorları sızıqlı baylanıssız bolsa, onda $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ jobası tayanısh sheshimi dep ataladı.

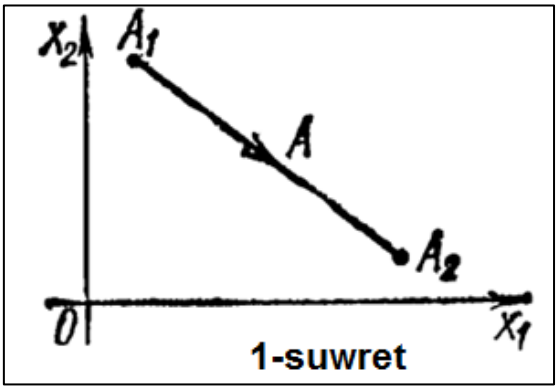
A_i vektorları m-ólshemli bolǵanlıǵı sebepli,onda tayanısh jobaǵa berilgen anıqlamadan, onıń oń anıqlanǵan komponentler sanı m nen kóp bolmaydı.

3-anıqlama. Egerde máseleniń tayanısh jobası m ge teń ha'm oń komponentlerına iye bolsa, onda tayanısh joba aynımaǵan , al keri jaǵdayda tayanısh joba aynıǵan dep ataladı.

4-anıqlama. Sızıqlı funktsiyasına eń kishi(eń úlken) mánisin jetkeriwshi jobanı sızıqlı programmalastırıw máselesiniń optimal jobası yamasa optimal sheshimi dep ataydı.

Aldağı waqıtta, sızıqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıw menen baylanıslı bolǵan sızıqlı programmalastırıw máseleleri qaraladı. Egerde sızıqlı funktsiyanıń eń úlken(maksimum) mánisin tabıw zárúr bolsa, onda sızıqlı funktsiyanı qarama-qarsı belgige almastırıp hám eń keyingi funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıw jetkilikli boladı. Alınǵan eń kishi mánisti qarama-qarsı belgige almastırıp, dáslepki sızıqlı funktsiyanıń eń úlken mánisine iye bolamız. Sızıqlı programmalastırıw máselelerdiń sheshiminiń qásiyetleri dóńes kópliklerdiń qásiyetleri menen tıǵız baylanısta boladı.

Dóńes kóplikler. Meyli x_1Ox_2 tegisliginde eki noqatı berilgen bolsın: $A_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ hám $A_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Bul noqatları tuwrı sızıqlı baǵdarlanǵan $\overline{A_1A_2}$ kesindisin anıqlaydı(1-súwret).



1-suwret

Berilgen kesindiniń qálegen bir $A(x_1, x_2)$ ishki noqatınıń koordinataların, onıń shetki noqatlarınıń koordinataları arqalı tabamız.

$\overline{A_1A} = (x_1 - x_1^{(1)}, x_2 - x_2^{(1)})$ hám $\overline{A_1A_2} = \left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)$ vektorları parallel boladı hám birdey baǵdarlanǵan, sonlıqtan $\overline{A_1A} = t \cdot \left(\overline{A_1A_2}\right)$,bul jerde $0 \le t \le 1$, yamasa $x_1 - x_1^{(1)} = t(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})$, $x_2 - x_2^{(1)} = t(x_2^{(2)} - x_2^{(1)})$.

Bunnan $x_1 = (1-t)x_1^{(1)} + tx_1^{(1)}$, $x_2 = (1-t)x_2^{(1)} + tx_2^{(2)}$.

Endi $1-t = \lambda_1$, bunda $t = 1$ dep esaplaymız hám tómendegi formulaǵa iye bolamız.

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)}, \\ x_2 = \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)}, \end{cases} \qquad (1.5)$$

$$\lambda_1 \ge 0, \ \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

A noqatınıń (1.5) koordinatları bul λ_1 hám λ_2 sanlarına sáykes túrde kóbeytilgen A_1 hám A_2 noqatlarınıń koordinatalarınıń qosındısı bolatuǵınlıǵın esapqa alıp

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A \tag{1.6}$$

iye bolamız, bunda

$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \tag{1.7}$$

(1.6) hám (1.7) shártleri orınlanatuǵın A noqatın A_1 hám A_2 noqatlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası dep ataladı. $\lambda_1 = 1$ hám $\lambda_2 = 0$ bolǵanda A noqatı A_1 kesindiniń aqırǵı noqatı menen teńlesedi, $\lambda_1 = 0$ hám $\lambda_2 = 1$ bolǵanda A_2 kesindisiniń aqırǵı noqatı menen teńlesedi. Demek, egerde 0 den 1 shekemgi barlıq mánislerin t dep qabıllasa, onda A noqatı $\overline{A_1 A_2}$ kesindini táripleydi. A_1 hám A_2 noqatların múyeshlik yamasa $\overline{A_1 A_2}$ kesindiniń shetki noqatları dep ataydı.

Noqatlardıń dóńes sızıqlı kombinatsiyasınıń anıqlamasınan, múyeshlik noqatı usı kesindiniń eki basqa noqatlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası túrinde kórsetiw múmkin emesligi málim. (1.6) hám (1.7) qatnasları keńisliktiń ólshemlerine ǵárezsiz barlıq waqıtta durıs boladı.

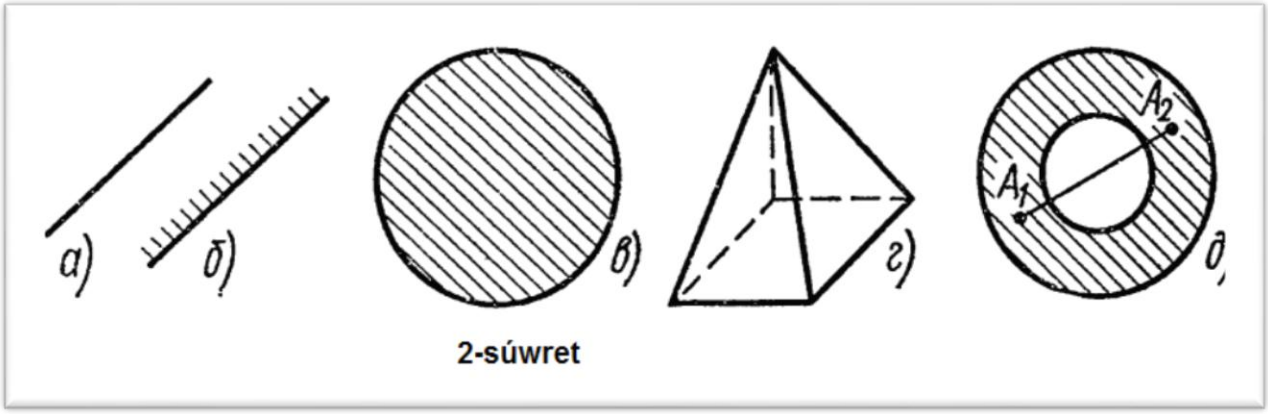
Meyli $A_1, A_2, ..., A_n$ n-sanlı noqatları bar bolsın. A noqatı bul berilgen noqatlardıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı, egerde tómendegi shártleri orınlanatuǵın bolsa

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n,$$

$$\lambda_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Noqatlar kópligi dóńes dep ataladı, egerde ol ózine tiyisli bolǵan qálegen bir eki noqatı menen birgeliginde olardıń qálegen bir dóńes sızıqlı kombinatsiyasın óz ishine alatuǵın bolsa. Bul anıqlamanıń geometriyalıq maǵanası boyınsha, noqatlar kópligine qálegen bir eki noqatı menen birgelikte olardı

tutastırıwshı tuwrı sızıqlı kesindi de tiyisli boladı. Dóńes kópliklerine mısal retinde tuwrı sızıqlı kesindi, tuwrı, yarım tegisligi , dóngelek, shar, kub, yarım keńisligi, h.t.b. keltiriwge boladı.

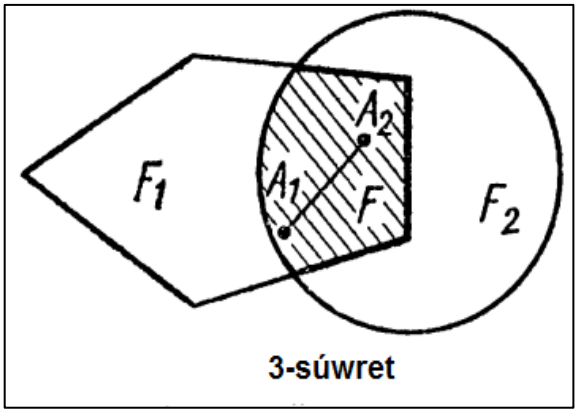


2-súwret

2-súwretindegi а), б), в), г) kóplikleri – dóńes bolıp esaplanadı, al д) kópligi dóńes bolmaydı, sebebi qálegen bir $\overline{A_1A_2}$ kesindisi usı kópligine tolıq tiyisli emes.

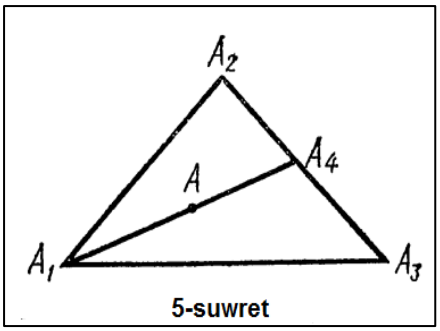
Kópliktiń noqatın shegaralıq dep ataladı, egerde orayı usı noqatında jaylasqan hám qálegenshe kishi radiusına iye shar, usı kópligine tiyisli hám usı kópligine tiyisli bolmaǵan noqatların óz ishine alatuǵın bolsa. Kópliktiń shegaralıq noqatları onıń shegarasın payda etedi. Kóplik tuyıq dep ataladı, egerde bul kóplik óziniń barlıq shegaralıq noqatların óz ishine alsa. Tuyıq kóplikler shegaralanǵan hám shegaralanbaǵan bolıw múmkin. Kóplik shegaralanǵan dep ataladı, egerde orayı kópliktiń qálegen bir noqatında jaylasqan hám sheklengen radiusına iye shar bolıp, hám bul shar berilgen kópligin tolıǵı menen óz ishine alsa, al keri jaǵdayda shegaralanbaǵan dep ataladı. Berilgen eki kópliginiń ulıwma bólegin óz ishine alatuǵın kópligin eki (yamasa onnanda kóp) kópliktiń kesilisiwi dep ataladı.

Meyli, F_1 hám F_2 eki dóńes kópliklerdiń kesilisiwinde payda bolǵan kópligi F bolsın(3-súwret). F kópliginde eki A_1 hám A_2 qálegen bir noqatların alıp hám olardı tuwrı sızıqlı kesindisi menen tutastıramız. $\overline{A_1A_2}$ kesindisi F_1 hám F_2 kópliklerine tiyisli boladı, sebebi olar



3-súwret

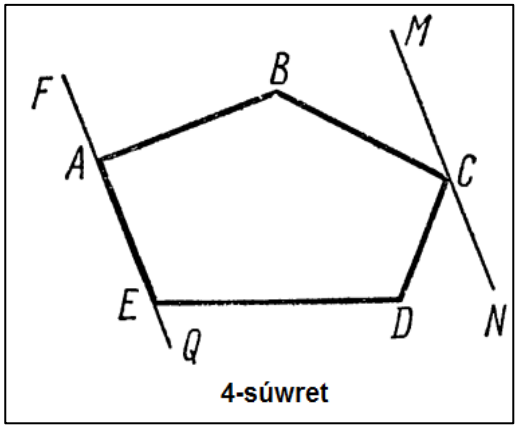
dóńes kóplikler boladı. Bul kesindisi F kópligine de tiyisli boladı, sebebi bul F kópligi F_1 hám F_2 dóńes kópliklerdiń ulıwma bólegi boladı. Demek, F dóńes kópligi boladı.



5-suwret

Kópliktiń eki qálegen bir noqatlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası bolmaǵan noqatların dóńes kópliktiń múyeshlik noqatı dep ataydı. Mısalı, úshmúyeshliktiń tóbeleri múyeshlik noqatı boladı, sheńberdiń noqatları dóńgelektiń múyeshlik noqatları boladı, sebebi bul noqatlar sheklengen hám sheklenbegen sandaǵı múyeshlik noqatlarında iye boladı. Tuwrı, tegislik, yarım tegislik, keńislik, yarım keńislikler múyeshlik noqatlarına iye bolmaydı.

Sheklengen sandaǵı múyesh noqatlarına iye, tegisliktegi dóńes tuyıq sheklengen kópligi dóńes kópmúyeshligi dep ataladı. Kópmúyeshliktiń múyesh noqatları onıń tóbeleri dep ataladı, al eki tóbeni tutastırıwshi hám onıń shegarasın payda etiwshi kesindileri kópmúyeshliktiń tárepleri dep ataladı. Dóńes kópmúyeshliktiń tayanısh tuwrısı dep onıń bir tárepinde jatırǵan kópmúyeshligi menen eń keminde bir ulıwma noqatına iye tuwrısına aytıladı.



4-súwret

4-súwrette MN hám FQ tuwrıları $ABCDE$ kópmúyeshligine tayanısh boladı.

Sheklengen sandaǵı múyesh noqatlarına iye, úsh ólshemli tuyıq, sheklengen dóńes kópmúyeshligin dóńes kópjaqlı dep ataydı. Kópmúyeshliktiń múyesh noqatların onıń tóbeleri dep ataydı. Kópjaqlını shegaralawshi kópmúyeshliklerin onıń jaqları dep ataydı, al olar kesilesetuǵın kesindilerdi qabırǵaları dep ataydı. Kópjaqlınıń tayanısh tegisligi dep, onıń bir tárepinde jaylasqan hám kópjaqlı menen eń keminde bir ulıwma noqatına iye tegisligine aytıladı.

1-teorema. Tuyıq, sheklengen, dóńes kópjaqlı óziniń múyesh noqatlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı.

Dálillew. n tóbesine iye bolǵan kópmúyeshlikti qaraymız. Dáslep úshmúyeshliktiń qálegen noqatı teoremanı qanaatlandıradı dep dálilleymiz.

$A_1A_2A_3$ úshmúyeshliginde (5-súwret) qálegen bir A noqatın alamız hám ol arqalı $\overline{A_1A_4}$ kesindisin júrgizemiz. A noqatı $\overline{A_1A_4}$ kesindisine tiyisli bolǵanı sebepli, ol bul kesindiniń ushlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı, yaǵnıy

$$A = t_1A_1 + t_4A_4, \quad t_1 \geq 0, t_4 \geq 0, \quad t_1 + t_4 = 1. \tag{1.8}$$

A_4 noqatı $\overline{A_2A_3}$ kesindisine tiyisli boladı. Demek, ol bul kesindiniń ushlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı, yaǵnıy

$$A_4 = t_2A_2 + t_3A_3, \quad t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, \quad t_2 + t_3 = 1. \tag{1.9}$$

(1.8) di (1.9) ga aparıp qoysaq, nátiyjede iye bolamız.

$$A = t_1A_1 + t_4(t_2A_2 + t_3A_3) = t_1A_1 + t_2t_4A_2 + t_3t_4A_3.$$

$t_1 = \lambda_1\, t_2t_4 = \lambda_2,\ t_3t_4 = \lambda_3$ dep esaplaymız hám nátiyjede

$$A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3,$$

$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

yaǵnıy A noqatı - A_1, A_2, A_3 tóbeleriniń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı. Eger, $\lambda_1 = 0$ dep esaplasaq, onda ol A noqatı A_4 noqatı menen betlesetuǵınlıǵın ańlatadı hám $\overline{A_2A_3}$ tárepinde jatatuǵınlıǵın ańlatadı. Bul jaǵdayda noqat ushın dóńes sızıqlı kombinatsiyası tómendegishe túrine iye boladı:

$$A = 0 \cdot A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 = \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3,$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

n $(n > 3)$ tóbelerine iye dóńes kópmúyeshliginiń qálegen bir A noqatın alamız. Bir tóbeden júrgizilgen diagonalları járdeminde, kópmúyeshlikti $n-2$ sanlı úshmúyeshliklerine bólemiz. Onda A noqatı usı úshmúyeshliklerdiń biriniń ishinde boladı. Meyli, A noqatı $A_1A_2A_3$ úshmúyeshliktiń ishinde boladı dep esaplaymız. Onda, A noqatı bul úshmúyeshliktiń úsh tóbesiniń dóńes sızıqlı kombinatsiyası bolatuǵınlıǵı joqarıda dálillendi. Demek, bul qatnastıń oń qaptal tárepine qalǵan $n-3$ tóbelerin nol sanına kóbeytip tirkeymiz hám nátiyjede tómendegige iye bolamız:

$$A = \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 = \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + 0 \cdot A_4 + \ldots + 0 \cdot A_n,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

Demek, A noqatı – kópmúyeshliktiń múyesh noqatlarınıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı.

Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń geometriyalıq interpretatsiyası. Sheklewler sisteması teńsizlikler túrinde berilgen sızıqlı programmalastırıw máselesin qaraymız.

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n \tag{1.10}$$

sızıqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tómendegi sheklewler sistemasında tabıń:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \tag{1.11}$$

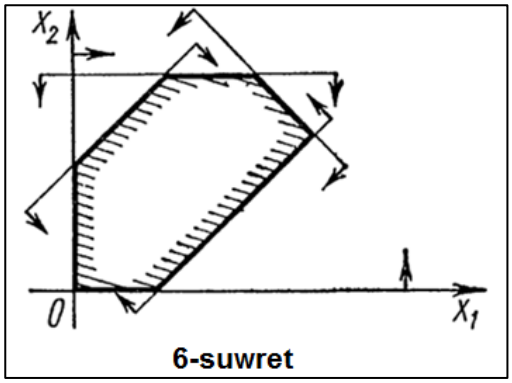
$$x_j \geq 0, \qquad j=\overline{1,n}. \tag{1.12}$$

(1.11) hám (1.12) sheklewlerin qanaatlandıratuǵın $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sanlar jıyındısınıń sheshimi dep ataydı. Egerde (1.11) teńsizlikler sisteması (1.12) shártinde eń keminde bir sheshimge iye bolsa, onda bul sistemanı birgelikli dep, al keri jaǵdayda birgelikli emes sistema dep ataydı.

$x_1 O x_2$ tegisliginde birgelikli sızıqlı teńsizlikler sistemasın qaraymız:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bul (1.11) - (1.12) sistemasınıń $n=2$ jaǵdayı bolıp esaplanadı. Geometriyalıq jaqtan bul sistemanıń hár bir teńsizligi $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i,\ i=\overline{1,m}$ sheklewshi tuwrısına iye yarım tegisligin anıqlaydı. x_1 hám x_2 ózgeriwshileriniń teris emes shártleri sáykes $x_1=0,\ x_2=0$ sheklewshi tuwrılarına iye yarım tegisligin anıqlaydı. Sistema birgelikli bolıp esaplanadı, sonlıqtan yarım tegislikler dóńes kóplikler retinde, kesilisip, ulıwma bólegin payda etedi hám ol dóńes kóplik bolıp hám noqatlar jıyındısı kórinisinde boladı. Bul noqatlardıń hár bir koordinatları berilgen sistemanıń sheshimi bolıp esaplanadı (6-súwret). Bul noqatlar (sheshimler) dıń jıyındısın sheshimler kópmúyeshligi dep ataydı. Ol noqat, kesindi, nur, kópmúyeshlik, sheklenbegen kópmúyeshli oblastları bolıwı múmkin.



6-suwret

Eger (1.11) - (1.12) sheklewler sistemasında $n=3$ bolsa, onda geometriyalıq jaqtan hár bir teńsizligi úsh ólshemli keńisliginiń $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i,\ i=\overline{1,m}$ sheklewshi tegislikleri menen payda bolatuǵın yarım keńisligi boladı, al ózgeriwshilerdiń teris emes shártleri sáykes $x_j=0,\ j=\overline{1,3},$ sheklewshi tegisliklerine iye yarım keńisligin anıqlaydı. Eger sheklewler sisteması birgelikli bolsa, onda bul yarım keńislikleri dóńes kóplikler retinde kesilisip, úsh ólshemli keńisliginde ulıwma bólegin payda etedi hám ol sheshimler kópjaqlısı dep ataladı. Sheshimler kópjaqlısı noqat, kesindi, nur, kópmúyeshlik, kópjaqlı, sheklenbegen kópjaqlı oblastları bolıwı múmkin.

Meyli, (1.11) - (1.12) sheklewler sistemasında $n>3$ bolsın. Onda hár bir teńsizligi $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i,\ i=\overline{1,m}$ shegaralıq gipertegisligine iye, al teris emes shártleri - $x_j=0,\ j=\overline{1,n}$ shegarlıq gipertegisligine iye n-ólshemli keńisliginiń yarım keńisligin payda etedi.

Eger sheklewler sisteması birgelikli bolsa, onda úsh ólshemli keńisligine uqsas, olar sheshimler kópjaqlısı dep atalatuǵın n-ólshemli keńisliginiń ulıwma bólegin payda etedi, sebebi onıń hár bir noqatınıń koordinatası sheshim boladı.

Demek, sızıqlı programmalastırıwdıń geometriyalıq máselesiniń kórinisi boyınsha, sheshimler kópjaqlısınıń sonday bir noqatın tabıw kerek boladı, onıń koordinatları sızıqlı funktsiyasına eń kishi(minimal) mánisin jetkeriw kerek hám bunda múmkin bolatuǵın sheshimleri bolıp, sheshimler kópjaqlısınıń barlıq noqatları xızmet etedi.

Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sheshimleriniń qásiyetleri.

2-teorema. Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń barlıq jobalar kópligi dóńes boladı.

Dálillew. Eger X_1 hám X_2 (1.1)-(1.3) sızıqlı programmalastırıw máseleleriniń jobaları bolsa, onda olardıń $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ dóńes sızıqlı kombinatsiyası da máseleniń jobası boladı.

X_1 hám X_2 máseleniń jobası bolǵanı sebepli, onda tómendegi qatnasları da orınlanadı.

$$AX_1 = A_0, \quad X_1 \geq 0, \quad AX_2 = A_0, \quad X_2 \geq 0.$$

Óz-ara kóbeytemiz.

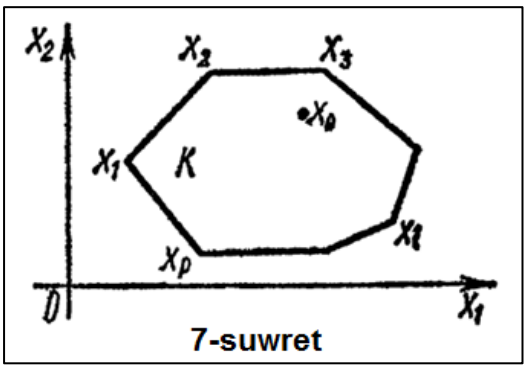
$$AX = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 =$$
$$= \lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_0 = (\lambda_1 + \lambda_2) A_0 = A_0,$$

hám nátiyjede X shaması (1.2) sistemasın qanaatlandıratuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Biraq, $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ bolǵanı ushın, onda $X \geq 0$ boladı, yaǵnıy (1.3) shártinde qanaatlandıradı. Demek, X -sızıqlı programmalastırıw máselesiniń jobası boladı.

3-teorema. Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sızıqlı funktsiyası sheshimler kópjaqlısınıń múyesh noqatında óziniń eń kishi(minimal) mánisine jetedi. Eger sızıqlı funktsiyası bir múyesh noqatında emes, al onnan kóbirek bolǵan noqatlarında eń kishi mánisine iye bolatuǵın bolsa, onda bul noqatlardıń dóńes

sızıqlı kombinatsiyası bolǵan qálegen bir noqatında da tap sol mánisine sızıqlı funktsiyası jetedi.

Dálillew. Meyli, sheshimler kópjaqlısı shegaranlanǵan bolsın, yaǵnıy ol sheklengen sandaǵı múyesh noqatlarına iye dep boljaymız. Onı K arqalı belgileymiz. Eki ólshemli keńisliginde K 7-súwrette kórsetilgen kópmúyeshlik túrinde boladı.



7-suwret

K kópmúyeshliginiń múyesh noqatların $X_1, X_2, \ldots, X_p$ dep,al X_0 dep optimal jobasın belgileymiz.

Onda

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p,$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1, p}, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

$Z(X)$-sızıqlı funktsiya bolǵanı sebepli, iye bolamız.

$$Z(X_0) = Z(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p) = \lambda_1 Z(X_1) + \\ + \lambda_2 Z(X_2) + \ldots + \lambda_p Z(X_p). \qquad (1.13)$$

Bul jikleniwinde $Z(X_i), i = \overline{1, p}$ mánislerdiń ishinen eń kishi mánisin tańlap alamız, meyli bul mánisi X_k múyesh noqatına sáykes kelsin, bunda $1 \leq k \leq p$ hám onı m dep belgileymiz, yaǵnıy $Z(X_k) = m$. Endi (1.13) ańlatpasında $Z(X_i)$ hár bir mánisin usı eń kishi mánisi menen almastıramız.

$$\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1, p}, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

bolǵanı sebepli, onda

$$Z(X_0) \geq \lambda_1 m + \lambda_2 m + \ldots + \lambda_p m = m \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = m.$$

islengen boljawlar boyınsha, X_0-optimal jobası, sonlıqtan, birinshi tárepten $Z(X_0) \leq m$, biraq, ekinshi jaqtan, $Z(X_0) \geq m$ bolatuǵınlıǵı dálillengen. Demek,

$Z(X_0) = m = Z(X_k)$ boladı, bunda X_k - múyesh noqatı. Demek, X_k múyesh noqatı bar bolıp hám bul noqatında sızıqlı funktsiyası eń kishi mánisin qabıl etedi.

Teoremanıń ekinshi bólegin dálillew ushın, $Z(X)$ sızıqlı funktsiyası bir emes, al onnan kóp bolǵan múyesh noqatlarında eń kishi mánisin qabıllaydı dep boljaymız,máselen, $X_1, X_2, \ldots, X_q, 1 \le q \le p$ .Onda $Z(X_1) = Z(X_2) = \ldots = Z(X_q) = m$ boladı. Egerde, X - bul múyesh noqatlardıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası bolsa:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q,$$

$$\lambda_i \ge 0,\ i = \overline{1,q}, \qquad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1,$$

onda

$$Z(X) = Z(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q) =$$
$$= \lambda_1 Z(X_1) + \lambda_2 Z(X_2) + \ldots + \lambda_q Z(X_q) =$$
$$= \lambda_1 m + \lambda_2 m + \ldots + \lambda_q m = m \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = m,$$

.

yaǵnıy Z sızıqlı funktsiyası, $X_1, X_2, \ldots, X_q$ múyesh noqatlardıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası bolǵan qálegen X noqatında eń kishi mánisin qabıllaydı.

4-teorema. Egerde, (1.4) jikleniwindegi $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \le n$ vektorlar sisteması sızıqlı ǵárezsiz bolatuǵınlıǵı málim bolıp hám olar tómendegishe bolsa

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_k x_k = A_0,$$

bunda barlıq $x_j \ge 0$, onda $X = (x_1 x_2, \ldots, x_k, 0, ..., 0)$ noqatı sheshimler kópjaqlınıń múyesh noqatı boladı.

Bul jerde, X - eń keyigi $n-k$ komponentleri nolge teń bolǵan n -ólshemli vektor.

5-teorema. Egerde, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sheshimler kópjaqlınıń múyesh noqatı bolsa, onda oń mánisli x_i sáykes keliwshi (1.4) jikleniwindegi vektorları sızıqlı baylanıssız boladı.

Dálillew. Meyli X vektordıń birinshi komponentleri nolge teń emes dep esaplaymız, yaǵnıy

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x_i = A_0 .$$

Dálillewdi keriden baslaymız. Meyli, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ vektorlar sisteması sızıqlı baylanıslı bolsın dep boljaymız. Onda, barlıǵı nolge teń emes sonday bir $l_1, l_2, \ldots, l_k$ sanları bar bolıp, olar ushın tómendegi qatnası orınlanadı:

$$A_1 l_1 + A_2 l_2 + \ldots + A_k l_k = 0 . \qquad (1.14)$$

Qoyılǵan shárti boyınsha

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_k A_k = A_0 . \qquad (1.15)$$

Bazı bir $\varepsilon > 0$ sanın kiritemiz hám bul sanına (1.14) teńlikti kóbeytemiz, qosamız hám nátiyjeni (1.15) alıp taslaymız, Nátiyjede iye bolamız:

$$(x_1 + \varepsilon \cdot l_1) A_1 + (x_2 + \varepsilon \cdot l_2) A_2 + \ldots + (x_k + \varepsilon \cdot l_k) A_k = A_0 ,$$

$$(x_1 - \varepsilon \cdot l_1 A_1) + (x_2 - \varepsilon \cdot l_2) A_2 + \ldots + (x_k + \varepsilon \cdot l_k) A_k = A_0 .$$

Demek, (1.4) teńlemeler sisteması eki sheshimge iye boladı hám olar máseleniń jobası bolmawda múmkin:

$$X_1 = (x_1 + \varepsilon \cdot l_1;\ x_2 + \varepsilon \cdot l_2;\ \ldots\ x_k + \varepsilon \cdot l_k; 0, ..., 0) ,$$

$$X_2 = (x_1 - \varepsilon \cdot l_1;\ x_2 - \varepsilon \cdot l_2;\ \ldots\ x_k - \varepsilon \cdot l_k; 0, ..., 0) .$$

Barlıq $x_i > 0$, sonlıqtan ε sanın sonshelli kishi qılıp saylawǵa boladı, bunda X_1 hám X_2 vektorlardıń barlıq birinshi k komponentleri oń mánislerin qabıl etedi, onda X_1 hám X_2 joba boladı. Bunda $1/2 \cdot X_1 + 1/2 \cdot X_2 = X$, yaǵnıy X - bul X_1 hám X_2 noqatlardıń dóńes sızıqlı kombinatsiyası boladı. Al, bul X -múyesh noqatı boladı degen teoremanıń shártine qarsı keledi.

Demek, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ vektorlar sisteması sızıqlı baylanıslı boladı degen boljawlar qarama qarsılıqqa alıp keldi. Bunnan, islengen boljawlar durıs emesligi kelip shıǵadı hám vektorlar sisteması sızıqlı baylanıssız boladı.

1-saldar. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektorları m-ólshemine iye bolǵanı sebepli, onda sheshimler kópjaqlınıń múyesh noqatı m-nen kóp bolmaǵan $x_i > 0,\ i = \overline{1, m}$ komponentlerıne iye boladı.

2-saldar. Sheshimler kópjaqlınıń hár bir múyesh noqatına $k \le m$ sanlı $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sızıqlı baylanıssız vektorlar sisteması sáykes keledi.

Ulıwma jaǵdayın joytpay, (1.1)-(1.3) sızıqlı programmalastırıwdıń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektorlar sisteması barlıq waqıtta m sızıqlı baylanıssız vektorların óz ishine aladı. Egerde, dara máseleni sheshiwde, bul qásiyeti anıq bolmasa, onda dáslepki máseleni m sızıqlı baylanıssız vektorlar sisteması menen tolıqtıradı hám bunnan soń keńeytirilgen máseleniń sheshimin tabadı.

Demek, egerde sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sızıqlı funktsiyası sheshimler kópjaqlısında sheklengen bolsa, onda: 1) sheshimler kópjaqlısınıń sonday bir múyesh noqatı bar bolıp hám bul noqatında sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sızıqlı funktsiyası óziniń optimal mánisine jetedi; 2) sheshimler kópjaqlısınıń múyesh noqatına hár bir tayanısh jobası sáykes keledi. Sonlıqtan, sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiw ushın, tek ǵana sheshimler kópjaqlısınıń múyesh noqatların, yaǵnıy tayanısh jobaların izertlew zárúr boladı.

2-§. Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiw usılı

a)Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiwdıń simpleks usılı.

Birinshi paragrafta qaralǵan materialları tiykarında juwmaqlaw islewge boladı.

Demek, sheshimler kópjaqlısınıń sonday bir múyesh noqatı bar bolıp hám onda sızıqlı funktsiyası óziniń eń kishi(eń úlken) mánisine jetisedi. Sheshimler kópjaqlısınıń hár bir múyesh noqatın tayanısh jobası sáykes keledi. Hár bir tayanısh jobası m-sızıqlı baylanıssız bolǵan vektorlar sisteması menen anıqlanadı hám óz ishine $A_1, A_2, ..., A_n$ - n-sanlı vektorlarınan ibarat boladı. Optimal jobanı tabıw ushın tek ǵana tayanısh jobaların izertlew zárúr boladı. Berilgen máselede bar bolǵan tayanısh jobalar sanınıń joqarǵı shegarası C_n^m birikpeler sanı menen anıqlanadı. m hám n sanları úlken bolǵanda, biriniń-izinen birin máseleniń barlıq tayanısh jobaların tańlap alıwlar ádewir quramalı boladı. Sonlıqtan, bir tayanısh jobadan ekinshi bir tayanısh jobaǵa tártiplesken ótiwdı ámelge asırıwshi

sxemasına iye bolıw zárúr boladı. Bunday sxeması bolıp, simpleks-usılı esaplanadı. Bul usılı boyınsha máseleniń belgili bir tayanısh jobasınan baslap, sheklengen adımlar sanınan soń onıń optimal sheshimin alıwǵa boladı. Hár bir adımda aldıngı jobaǵa qaraǵanda sızıqlı funktsiyanıń mánisi sáykes azlaw bolatuǵın jańa joba tabıwdan ibarat boladı. Bul protsessi optimal joba tabılǵansha dawam etiledi. Egerde qoyılǵan máselesi jobaǵa iye bolmasa yamasa onıń sızıqlı funktsiyası sheshimler kópjaqlısında sheklenbegen bolsa, onda simpleks usıllı usı fakıttı sheshiw protsessinde anıqlawǵa imkaniyat beredı.

1.SP máselesiniń tayanısh jobasın jasaw. Meyli bizge sızıqlı programmalastırıw máselesi qoyılǵan bolsın.

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n \tag{2.1}$$

sızıqlı funktsiyanıń tómendegi sheklewler sistemasında

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

bunda $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$.

Dáslep máseleniń sheklewler sisteması cbirlik vektorlarına iye dep hám olar dáslepki m vektorları boladı dep uyǵaramız. Onda

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n \tag{2.4}$$

sızıqlı funktsiyanıń tómendegi sheklewler sistemasında

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.6}$$

eń kishi(minimum) mánisin tabıw zárúr boladı.

(2.5) sistemasın vektorlıq formasında jazamız:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + ... + x_nA_n = A_0, \qquad (2.7)$$

bunda

$$A_1 = (1,0,...,0)', \; A_2 = (0,1,...,0)', \ldots, \; A_m = (0,0,...,1)',$$

$$A_{m+1} = (a_{1,m+1}, a_{2,m+1}, ..., a_{m,m+1})', \; \ldots, \; A_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})', \quad A_0 = (b_1, b_2, ..., b_m)'$$

$A_1, A_2, ..., A_m$ vektorları m-ólshemli keńisliktiń sızıqlı baylanıssız birlik vektorları boladı hám olar bul keńisliktiń bazisın payda etedi.Sonlıqtan (2.7) jiklewindegi $x_1, x_2, ..., x_m$ belgisizlerin bazislıq dep, al $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ belgisizlerin erkli(bazislıq emes) belgisizler dep,olardı nolge teńep, hám $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$ esapqa alıp, al $A_1, A_2, ..., A_m$ vektorları birlik vektorları bolǵanı ushın, qoyılǵan máseleniń dáslepki jobasına iye bolamız

$$X_0 = (x_1 = b_1, \; x_2 = b_2, ..., \; x_m = b_m, \; x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0) \qquad (2.8)$$

(2.8) jobasına tómendegi jikleniw sáykes keledi

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0 \qquad (2.9)$$

bunda $A_1, A_2, ..., A_m$ vektorları sızıqlı baylanıssız, demek dúzilgen baslanǵısh jobası tayanısh bolıp esaplanadı..

Endi (2.8) baslanǵısh jobasınan paydalanıp, máseleniń ekinshi tayanısh jobasın dúziw múmkinshiligin qaraymız. $A_1, A_2, ..., A_m$ vektorları m ólshemli keńisliktiń bazisın payda etedi, sonlıqtan (2.7) teńliktegi n vektorlardıń hár birin bazis vektorları boyınsha tek ǵana bir usıl menen jayıp(jiklew) jazıwǵa boladı:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i \; , \; j = \overline{1,n}.$$

Meyli , baziske kirmeytuǵın bazı bir vektorı ushın, mısalı A_{m+1} vektorı ushın $x_{i,m+1}$ jikleniwindegi koeffitsientleriniń eń keminde biri oń bolsın dep boljaymız.

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + ... + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \qquad (2.10)$$

Qálegen bir $\theta > 0$ (házirshe belgisiz) shamasın saylap alıp, oǵan (2.10) teńliktiń eki jaǵın kóbeytemiz hám kelip shıqqan nátiyjeni (2.9) teńliginen aǵzama-aǵza alamız. Nátiyjede iye bolamız

$$\left(x_1-\theta x_{1m+1}\right)A_1+\left(x_2-\theta x_{2m+1}\right)A_2+...+\left(x_m-\theta x_{mm+1}\right)A_m+\theta A_{m+1}=A_0 \qquad (2.11)$$

Solay etip, egerde (2.11) komponentleri teris emes bolsa, onda

$$X_1=\left(x_1-\theta x_{1,m+1}, x_2-\theta x_{2,\partial m+1}, \ldots, x_m-\theta x_{m,m+1}, \theta, 0,...,0\right)$$

vektorı máseleniń jobası boladı.

Uyǵarıwmız boyınsha $\theta>0$ bolǵanlıqtan, onda teris emes $x_{i,m+1}$ tiyisli bolǵan X_1 vektordıń barlıq komponentları teris emes boladı. Sonlıqtan bul vektordıń oń koeffitsientleri bar komponentların ǵana tekseriw kerek, yaǵnıy barlıq $x_{i,m+1}>0$ ushın

$$x_i-\theta x_{i,m+1}\geq 0. \qquad (2.12)$$

teńsizligi orınlanatuǵınday etip $\theta>0$ shamasın saylap alıw kerek boladı.

(2.12) teńsizliginen $\theta\leq\dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ iye bolamız. Demek,

$$0<\theta\leq\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \qquad (2.13)$$

shártin qanaatlandıratuǵın qálegen θ ushın X_1- máseleniń jobası boladı, bunda minimum mánisi $x_{i,m+1}>0$ ushın i boyınsha alınadı.

Biraq tayanısh jobası $m+1$ oń komponentlarına iye bolıwı múmkin emes, sonlıqtan X_1- jobasında eń keminde bir komponentasın nolge aylandırıw zárúr boladı. Sonlıqtan (2.13) teńsizliginde

$$\theta=\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \qquad (2.14)$$

dep esaplap, onda minimum mánisine jetisetuǵın X_1 komponentası nolge aylanadı. Meyli bul komponentası birinshi orında tursın, yaǵnıy

$$\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{i,m+1}}=\frac{x_1}{x_{1,m+1}}$$

θ_0 mánisin (2.11) aparıp qoyamız hám tómendegi nátiyjege iye bolamız:

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,\,m+1}} x_{1,\,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,\,m+1}\right) A_2 + \ldots +$$

$$+ \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,\,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

bunnan

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \ldots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0$$

jikleniwine iye bolıp hám oǵan tómendegi jańa tayanısh jobası sáykes keledi

$$X_1 = (0, x'_2, x'_3, \ldots x'_m, x'_{m+1}, 0, \ldots, 0)$$

bunda $x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,\,m+1},\ \ i = 2,3,\ldots,m \quad x'_{m+1} = \theta_0$ belgilewleri kirgizilgen. Bazisten bir vektordı shıǵarıp taslaw hám onıń ornına θ_0 járdeminde ekinshi bir vektorın kiritiw ámeli Jordan-Gauss usılı menen bir bazisten ekinshi bir baziske ótiwge sáykes keledi. Sonlıqtan $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ vektorlar sisteması sızıqlı baylanıssız boladı hám jańa bazis bolıp esaplanadı.

Kelesi tayanısh jobasın anıqlaw ushın $A_2, A_3, \ldots, A_m, A_{m+1}$ bazisine kiritilmeytuǵın qálegen bir vektordı usı bazistıń vektorları boyınsha jiklep, onnan soń bul bazistıń vektorlarınıń birewin bazisten shıqqanday etip $\theta > 0$ shamasin aniqlaw zarur bolsın.

Demek, qoyılǵan máseleniń jańa tayanısh jobalarına ótiw protsessi baziske kirgiziletuǵın hám bazisten shıǵarılatuǵın vektorlardı anıqlawdan ibarat boladı. Baziske kirgiziletuǵın vektordı anıqlaw ushın paydalanatuǵın kriteriyası, simpleks usılınıń eń tiykarǵı elementleriniń biri boladı.

Egerde A_{m+1} vektorın baziske kirgiziliwi kerek bolsa, al onıń jiklewinde barlıq $x_{i,m+1} \le 0$ bolsa, onda (2.11) jikleniwindegi vektorlardıń birewi bazisten shıǵarılatuǵınday etip $\theta > 0$ saylap alıw múmkin emes boladı. Bul jaǵdayda X_1 jobası $m+1$ oń komponentalarına iye bolıp, al $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ vektorlar sisteması sızıqlı baylanıslı bolıp hám sheshimler kópjaqlısınıń múyesh noqatın emes, al sızıqlı funktsiyası minimal mániske jetispeytuǵın ishki noqatın anıqlaydı. Bul sızıqlı funktsiyaǵa sáykes keletuǵın gipertegisligi N vektorınıń baǵıtında qanshelli

uzaq jılıstırsaq ta, ol sheshimler kópjaqlısına tayanısh gipertegislik bola almaydı, yaǵnıy sızıqlı funktsiyası sheshimler kópjaqlısında shegaralanbaǵan boladı.

Solay etip, egerde SP máselesiniń sheklewler sisteması, saltan aǵzalardıń teris emes mánislerinde birlik bazisine iye bolsa, onda qosımsha esaplawlardı orınlamay, máseleniń dáslepki tayanısh jobasına iye bolıwmız múmkin, sonıń menen birge sáykes vektorlardıń bazis vektorları boyınsha jikleniwiniń koeffitsientlerin anıqlawǵa boladı.

2. SP máselesiniń optimal jobasın anıqlaw. Optimallıq shártleri.

Meyli (2.4)-(2.6) SP máselesi jobaǵa iye bolıp hám onıń hár bir tayanısh jobası aynımaǵan bolsın. Bul jaǵdayda (2.8) tayanısh jobası ushın iye bolamız:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0 \tag{2.15}$$

$$x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_mC_m = Z(X_0) \tag{2.16}$$

bunda barlıq $x_i > 0$, al $Z(X_0)$ – bul (2.8) jobaǵa sáykes keliwshi sızıqlı funktsiyanıń mánisi.

Qálegen A_j vektorınıń $A_1, A_2, ..., A_m$ bazis vektorları boyınsha tek ǵana bir usıl menen jiklenedi:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + ... + x_{mj}A_m = A_j, \ \ j = \overline{1,n} \tag{2.17}$$

Sonlıqtan baziste A_j vektorınıń jikleniwine sızıqlı funktsiyanıń tek bir

$$x_{1j}C_1 + x_{2j}C_2 + ... + x_{mj}C_m = Z_j, \ \ j = \overline{1,n} \tag{2.18}$$

mánisi sáykes keledi, bunda Z_j – sızıqlı funktsiyanıń belgisizleriniń ornına mánisi j-vektorınıń jikleniwindegi sáykes koeffitsientlerin aparıp qoyǵandaǵı onıń mánisi.

A_j vektorına sáykes keliwshi sızıqlı funktsiyanıń koeffitsientleri C_j dep belgileymiz. Sonda tómendegi teorema durıs boladı.

1-teorema. Egerde bazi bir A_j vektorı ushın $Z_j - C_j > 0$ shárti orınlansa, onda X_0 optimal jobası bolmaydı hám $Z(X) < Z(X_0)$ orınlanatuǵın X jobasın dúziwge boladı.

Dálillew. Dáslep (2.17) hám (2.18) teńliklerin $\theta > 0$ shamasına kóbeytip, kelip shıqqan nátiyjelerdi sáykes (2.15) hám (2.16) teńliklerinen alamız. Sonda mına teńlikler kelip shıǵadı:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0, \qquad (2.19)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j) \qquad (2.20)$$

Bundaǵı (2.20) teńliginiń eki jaǵına barlıq $j = 1,2,\ldots,n$ ushın θC_j shaması qosılǵan, al (2.19) teńliginde $x_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$. Sonlıqtan $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_j$ vektorlarınıń barlıq koeffitsientleri teris bolmaytuǵınday etip, $\theta > 0$ shamasın saylap alıwǵa boladı. Basqasha aytqanda, jańa $X = (x_1 - \theta x_{1j},\ x_2 - \theta x_{2j}, \ldots, x_m - \theta x_{mj}, 0, 0, \ldots, 0)$ tayanısh sheshimin jasawǵa boladı. Sonda (2.20) teńligi tiykarında, máseleniń bul sheshimine maqset funktsiyasınıń mına mánisi sáykes keledi:

$$Z(X) = Z(X_0) - \theta(Z_j - C_j) \qquad (2.21)$$

Teoremanıń shárti boyınsha $Z_j - C_j > 0$ hám $\theta > 0$ bolǵanlıqtan, bunnan $Z(X) > Z(X_0)$ teńsizligi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

Saldar. Egerde (2.4) - (2.6) máselesiniń bazı bir X_0 sheshimi ushın barlıq A_j $(j = \overline{1,n})$ vektorlarınıń berilgen bazis boyınsha jikleniwleri

$$Z_j - C_j \le 0 \qquad (2.22)$$

shártin qanaatlandırsa, onda X_0 vektorı bul máseleniń optimal sheshimi boladı.

Solay etip, (2.22) teńsizligi (2.4)-(2.6) máselesiniń X_0 tayanısh sheshiminiń optimallıq shárti boladı, al $Z_j - C_j$ mánisleri jobanıń bahaları dep ataladı. Demek, sızıqlı funktsiyanıń minimum mánisi izlenip atırǵan máseleniń tayanısh sheshimi, onıń optimal sheshimi bolıwı ushın, bul sheshimniń bahalarınıń oń emes bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Maqset funktsiyanıń maksimum(eń úlken) mánisi izlenip atırǵan (2.4) - (2.6) sızıqlı programmalastırıw máselesi ushın tómendegi teorema durıs boladı.

2-teorema. Egerde bazı bir A_j vektorı ushın $Z_j - C_j < 0$ shárti orınlansa, onda X_0 sheshimi, onıń optimal sheshimi bolmaydı hám $Z(X) > Z(X_0)$ shárti orınlanatuǵın X sheshimin jasawǵa boladı.

Bul teoremanı dálilleniwin keltirmeymiz.

Saldar. Egerde bazı bir X_0 sheshimi ushın A_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ vektorlarınıń berilgen bazis boyınsha jikleniwleri

$$Z_j - C_j \geq 0 \tag{2.23}$$

teńsizligin qanaatlandırsa, onda máseleniń X_0 tayanısh sheshimi onıń optimal sheshimi boladı.

Solay etip, maqset funktsiyasınıń minimum mánisi izlenip atırǵan (2.4) - (2.6) máselesiniń tayanısh jobası, onıń optimal sheshimi bolıwı ushın (2.22) teńsizliginiń orınlanıwı, zárúrli hám jetkilikli boladı. Sonlıqtan (2.23) teńsizligi maqset funktsiyasınıń maksimum mánisi izleniwshi (2.4)-(2.6) máselesiniń tayanısh sheshiminiń optimallıq shárti boladı.

3.Simpleks usılınıń algoritmi.

Meyli sızıqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıwdıń (2.4)-(2.6) sızıqlı programmalastırıw máselesi qoyılǵan bolsın.

Bul máseleniń tayanısh jobası $X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m;$ $x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0)$ m ólshemli $A_1, A_2, ..., A_m$ birlik vektorlar sisteması menen anıqlanadı Bul tayanısh jobasın optimallıqqa izertlew ushın (2.5) sistemanıń A_j vektorların $A_1, A_2, ..., A_m$ bazis vektorları boyınsha jiklew hám $Z_j - C_j$ bahalardıń mánislerin esaplap shıǵıw jetkilikli boladı. Bazis birlik bolıp, sonlıqtan bazis boyınsha A_j vektordıń jikleniwiniń koeffitsientleri bolıp onıń komponentları esaplanadı, yaǵnıy $x_i = a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Bunnan keyingi esaplawlardı simpleks-keste dep atalatuǵın arnawlı kestege jazıw durıs boladı, sebebi onda onıń tayanısh sheshimin optimallıqqa tekseriw hám esaplaw jumısların orınlaw ádewir jeńillesedi (1-keste).

Kesteniń **Bazis** baǵanasına tayanısh sheshimniń bazisine kirgen vektorlar, al $C_Б$ baǵanasına, berilgen bazistiń vektorları qanday indekslerge iye bolsa, maqset funktsiyasınıń belgisizlerinen tap sonday indekslerge iye bolǵan koeffitsientleri jazıladı. A_0 baǵanasına X_0 baslanǵısh tayanısh sheshimi jazıladı: Usı baǵanaǵa esaplawlardı orınlawdıń nátiyjesinde kelip shıqqan, máseleniń optimal jobası jazıladı. Al, A_j vektorlarınıń baǵanaları bul vektorlardı bazis vektorları boyınsha jiklewdiń koeffitsientlerin ańlatadı.

1-keste

i	Bazis	$C_Б$	A_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	A_2	C_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_l	C_l	b_l	0	0	…	1	…	0	a_{lm+1}	…	a_{ln}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$	$Z_j - C_j$		Z_0	0	0	…	0	…	0	$Z_{m+1} - C_{m+1}$	…	$Z_k - C_k$	…	$Z_n - C_n$

$C_Б$ baǵanasında bazislıq vektorlarına sáykes keletuǵın sızıqlı funktsiyanıń sáykes koeffitsientleri jazıladı. A_0 vektorınıń baǵanasınıń $(m+1)$ qatarına dáslepki tayanısh jobasına sáykes maqset funktsiyasınıń mánisi Z_0, al A_j vektorınıń baǵanasına $Z_j - C_j$ bahasınıń mánisi jazıladı. Bundaǵı Z_j mánisi A_j, $j = \overline{1,n}$ vektorınıń $C_Б = (C_1, C_2, ..., C_m)$ vektorına skalyar kóbeymesi esabında anıqlanadı:

$$Z(X_0) = C_Б X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i$$

Al, Z_0 mánisi A_0 vektorınıń $C_Б$ vektorına skalyar kóbeymesine teń:

$$Z_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij},\ j = \overline{1,n}$$

Bul 1-simpleks-kesteni toltırıp bolǵannan soń, baslanǵısh tayanısh sheshimdi optimallıqqa tekseredi. Bunıń ushın kesteniń $(m+1)$-qatarın korip shıǵamız. Egerde barlıq $j=1,2,...,n$ ushın $Z_j - C_j \le 0$ bolsa, onda X_0 tayanısh jobası optimal boladı hám sızıqlı funktsiyanıń minimal mánisi $Z(X_0)$ teń boladı.

Meyli bahalardıń biri $Z_j - C_j > 0$ bolsın dep boljaymız. Onda X_0 tayanısh jobası optimal bolmaydı hám baziske usı bahaǵa sáykes keletuǵın vektordı kiritip, sızıqlı funktsiyaǵa kishi mánisi sáykes keletuǵın ekinshi tayanısh jobasın dúziwge boladı.

Egerde $Z_j - C_j > 0$ bahalardıń sanı bir neshe bolsa, onda baziske $\max[\theta_{0j}(Z_j - C_j)]$ sáykes keletuǵın vektorın kiritemiz, bunda masimum mánisi $Z_j - C_j > 0$ sáykes keletuǵın j boyınsha alınadı hám θ_{0j} hár bir j ushın anıqlanadı. Bul hár bir adımda sızıqlı funktsiyanıń kemiyiwine baylanıslı bolǵan sheshimler kópjaqlınıń tóbesine ótiwge múmkinshilik beredı hám kópshilik jaǵdaylarda iteratsiyanıń sanı azayıwına alıp keledı. Egerde $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ bir neshe teń bolǵan maksimal mánisleri bar bolsa, onda bul vektorlardıń ishinen $\min C_j$ sáykes keletuǵın vektordı baziske aldın ala kiritemiz. Egerde eń keminde bir $Z_j - C_j > 0$ oń bahası ushın sáykes vektordıń X_{ij} jiklew koeffitsientleri oń emes bolsa, onda sızıqlı funktsiya sheshimler kópjaqlıǵında sheklenbegen boladı hám θ tańlaw arqalı, onıń mánisin qálegenshe kishi qılıwǵa boladı. Bul jaǵdayda sheshimler kópjaqlısı sheklenbegen kópjaqlı oblasti kórinisinde boladı.

Meyli $\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) = \theta_{0k}(Z_k - C_k)$ bolsın, yaǵnıy k vektorı ushın maksimal mániske jetisetuǵın bolsın, bunda $m < k \le n$. Onda baziske A_k vektorın kiritemiz hám $\theta_{0k} = \min(x_i / x_{ik}),\ (x_{ik} > 0)$ sáykes keletuǵın vektordı shıǵarıp taslaymız.

Meyli $\theta_{0k} = \min(x_i / x_{ik}) = x_l / x_{lk}$ mánisi l-shi qatarında turǵan bazistıń vektorı ushın jetisetuǵın bolsın. Sonda A_l vektorı bazistan shıǵarıladı. x_{lk} elementin

sheshiwshi element dep ataydı. Sheshiwshi element kesilispesinde jaylasqan baǵana hám qatar baǵdarlawshı baǵana hám baǵdarlawshı qatar dep ataladı. Jańa tayanısh jobasına sáykes keletuǵın bazis $A_1,...,A_{l-1},A_k,A_{l+1},...,A_m$ vektorlarınan dúzilgen boladı.

Jańa tayanısh jobasın esaplaw ushın hám onı optimalllıqqa tekseriw ushın, barlıq A_0, A_j, $j=\overline{1,n}$ vektorların bazistıń vektorları boyınsha jiklew zárúr boladı. Dáslepki bazis - birlik bazis edi, yaǵnıy $(A_1, A_2,...,A_m)=E$, sonlıqtan

$$A_0 = x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_lA_l + ... + x_mA_m \tag{2.24}$$

$$A_k = x_{1k}A_1 + x_{2k}A_2 + ... + x_{lk}A_l + ... + x_{mk}A_m \tag{2.25}$$

$$A_j = x_{1j}A_1 + ... + x_{lj}A_l + ... + x_{mj}A_m \tag{2.26}$$

(2.25) iye bolamız:

$$A_l = 1/x_{lk}(A_k - x_{1k}A_1 - ... - x_{mk}A_m) \tag{2.27}$$

A_l dıń mánisin (2.24) aparıp qoyıp, iye bolamız:

$$A_0 = x_1A_1 + ... + x_l[\frac{1}{x_{lk}}(A_k - x_{1k}A_1 - ... - x_{mk}A_m)] + ... + x_mA_m$$

yamasa

$$A_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{1k}\right)A_1 + ... + \frac{x_l}{x_{lk}}A_k + ... + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{mk}\right)A_m.$$

Demek, $X_0 = (x_1', x_2', ..., x_k', ..., x_m')$ jana tayanısh jobası tómendegi formulalar boyınsha esaplanadı.

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}}x_{ik} \ \ eger \ \ i \neq l \ \ bolsa, \\ x_k' = \dfrac{x_l}{x_{lk}}, \qquad eger \ \ i = l \ bolsa. \end{cases} \tag{2.28}$$

(2.27) qatnasın (2.26) aparıp qoyıp, taza bazis boyınsha A_j vektordıń jayılmasına iye bolamız.

$$A_j = x_{1j}'A_1 + ... + x_{kj}'A_l + ... + x_{mj}'A_m,$$

bunda

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad eger \quad i \neq l \quad bolsa, \\ x'_{kj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, \qquad eger \quad i = l \; bolsa. \end{cases} \tag{2.29}$$

(2.28) hám (2.29) biriktirip, jańadan tayanısh jobasın tabamız hám $j = 0,1,2,...,n$ vektorlardıń jańa bazistaǵı jayılması tómendegi formulası boyınsha anıqlanadı:

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad eger \quad i \neq l \quad bolsa, \\ x'_{lj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, \qquad eger \quad i = l \; bolsa. \end{cases} \tag{2.30}$$

Bul formulalar Jordan-Gauss formulaları bolıp esaplanadı. Haqıyqattanam, $j = k$ dep iye bolamız.

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0, \; (i \neq l), \\ x'_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1, \qquad (i = l). \end{cases}$$

yaǵnıy baziske kiritilgen barlıq vektorlardıń ishinen bir vektordan basqa qalǵan vektorlardıń koeffitsientleriniń jiklewi nolge aylanadı, al sheshiwshi elementi retinde alınǵan koeffitsientı 1-ge teń boladı.Bazislik vektorina nolge teń baha saykes boladı,sonlıqtan (m+1) qatardıń mánislerin esaplaw ushın (2.30) formulalarınan paydalanamız.

Tómendegi formulalar

$$Z(X_0) = C_Á X_0; \;\; Z_j - C_j = C_Á X_j - C_j \tag{2.31}$$

orınlanǵan esaplawlardıń durıslıǵın qadaǵalaw ushın paydalanadı.

Egerde 1-kesteniń $(m+1)$ qatarındaǵı barlıq bahalar $Z_j - C_j \leq 0$ bolsa, onda X_0 jobası optimal boladı. Egerde oń mánisli bahalar bar bolsa, onda kelesi tayanısh jobası izlenedi. Esaplaw protsessi optimal joba alınǵansha yamasa qoyılǵan máseleniń sızıqlı funktsiyası sheklenbenligin ornatqansha dawam etiledi. Egerde optimal jobanıń bahaları ishinde tek bazislık vektorlarına nol mánisi sáykes

keletuǵın bolsa, onda bul joba jalǵız boladı. Egerde baziske kirmegen vektorǵa nol bahası sáykes kelse, onda optimal joba jalǵız emes bolatuǵınlıǵın ańlatadı.

Sızıqlı funktsiyanıń eń úlken(maksimum) mánisin tabıwǵa SP máselesin sheshemiz. Egerde $Z_j - C_j \geq 0$ shárti orınlanbasa, onda baziske 1-shi gezekte $Z_j - C_j < 0$ bahaları ushın $\min \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ mánisi sáykes keliwshi vektordı kiritemiz. Egerde bir neshe minimal bahalar bar bolsa, onda baziske aldın ala $\max C_j$ sáykes keliwshi vektordı kiritemiz.

b) Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiwdıń jasalma simpleks usılı

Egerde sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sheklewleri m-tártipli birlik matritsasın óz ishine alsa, onda teńlemelerdiń teris emes oń qaptal bóleklerinde dáslepki tayanısh jobası anıqlanǵan bolıp hám onnan simpleks usılı járdeminde optimal jobasın anıqlawǵa boladı.

Egerde sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sheklewlerin $A_0 \geq 0$ da $AX \leq A_0$ túrine ózgertiw múmkin bolsa, onda sheklewler sisteması barlıq waqıtta birlik matritsasına iye boladı. Sheshimge iye kóplegen sızıqlı programmalastırıw máseleleri birlik matritsasına iye emes bolıp hám joqarıda kórsetilgen túrine keltiriw múmkin emes boladı. Bul jaǵdayda máseleni sheshiw ushın jasalma bazis usılınan paydalanadı. Sızıqlı programmalastırıw ulıwma máselesin qaraymız.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad ..... \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

sheklewlerinde $Z(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ siziqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıw, bunda $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$ hám sheklewler sisteması birlik matritsasına iye emes. Birlik matritsasına iye bolıw ushın hám bir teńlemege $x_{n+i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$ bir ózgeriwshiden qosıp shıǵamız hám olardı jasalma ózgeriwshiler dep ataydı hám keńeytirilgen máselensin qaraymız. Bunda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ... \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, n+m},$$

sheklewlerinde $\bar{Z}(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n + Mx_{n+1} + ... + Mx_{n+m}$ sızıqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıw.

Bunda M shaması jetkilikli úlken oń sanı dep uyǵaramız, egerde sızıqlı funktsiyanıń eń kishi mánisin tabıwǵa másele sheshiletuǵın bolsa hám jetkilikli kishi teris san boladı dep uyǵaramız, egerde sızıqlı funktsiyanıń eń úlken mánisin tabıwǵa másele sheshiletuǵın bolsa. Jasalma ózgeriwshilerine sáykes keletuǵın $A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m}$ birlik vektorları jasalma bazisın payda etedi.

Dáslepki qoyılǵan máseleniń optimal jobasın tabıw ushın tómende keltirilgen teoremadan paydalanadı.

Teorema. Egerde keńeytilgen máselesiniń $\bar{X} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ optimal jobasında jasalma ózgeriwshilerdiń mánisleri $x_{n+i} = 0, i = \overline{1, m}$ bolsa, onda $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ jobası dáslepki máseleniń optimal jobası boladı.

Dálillew. Egerde $\bar{X}$ keńeytilgen máseleniń optimal jobası bolsa, onda X-dáslepki berilgen máseleniń sheshimi hám bunda $\bar{Z}(\bar{X}) = Z(X)$ boladı. Óytkeni $\bar{X}$ jobası X jobasınan nolge teń bolǵan keyingi m komponentları menen ǵana parq qılatuǵın bolǵanı sebepli funktsiyalardıń mánisleriniń teńligi kelip shıǵadı.

X-jobası dáslepki berilgen máseleniń sheshimi bolatuǵınlıǵın dálilleymiz. Meyli X - bul máseleniń optimal sheshimi bolmasın. Bul jaǵdayda $Z(X^*) < Z(X)$ teńsizligi orınlanatuǵın $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ optimal jobası bar boladı. Bunnan, máseleniń jobası bolatuǵın $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$ vektorı ushın tómendegi qatnaslardı alıwǵa boladı

$$\bar{Z}(\bar{X}^*) = Z(X^*) < Z(X) = \bar{Z}(\bar{X}),$$

yaǵnıy

$$\bar{Z}(\bar{X}^*)<\bar{Z}(\bar{X})\ .$$

Demek, keńeytirilgen máseleniń $\bar{X}$ jobası optimal joba bolmaydı. Bul teoremanıń shártine qarsı keledi. Teorema dálillendi.

Keńeytirilgen máselesin sheshiwge simpleks usılın paydalanǵanda hár bir jasalma ózgeriwshileri $x_{n+i}=0,\ i=\overline{1,m}$ bolatuǵın jobanı dúziwdi táminleydi. Egerde dáslepki máselesi jobaǵa iye bolmasa, onda keńeytirilgen máseleniń optimal sheshimi eń keminde bir $x_{n+i}>0$ jasalma ózgeriwshisine iye boladı.

Keńeytirilgen máseleniń optimal jobasın tabıw ushın, egerde aldın ala M sheması berilgen bolmaǵan jaǵday ushın ádettegi simpleks kestesinen bir qatarı kóbirek bolǵan simpleks kestelerin jasaw menen simpleks usılı qollanıladı.

3-§. Aralas sheklewlerine iye sızıqlı programmalastırıw máselelerin sheshiw

Meyli

$$Z=C_1x_1+C_2x_2+...+C_nx_n\to\min \tag{3.1}$$

sızıqlı funktsiyanıń tómendegi sheklewler sistemasında

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1j}x_j+...+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2j}x_j+...+a_{2n}x_n\le b_2, \\ \ .\quad .\quad .\quad .\ ...\ .\quad .\quad .\ ...\ .\quad .\quad .\quad .\ ., \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+...+a_{kj}x_j+...+a_{kn}x_n\le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1+a_{k+1,2}x_2+...+a_{k+1,j}x_j+...+a_{k+1,n}x_n=b_{k+1,}, \\ \ .\quad .\quad .\quad .\ ...\ .\quad .\quad .\ ...\ .\quad .\quad .\quad .\ ., \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mj}x_j+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j\ge 0,\quad i=\overline{1,n}\ . \tag{3.3}$$

Bul jerde sheklewler sisteması k teńsizliklerinen hám $m-k$ teńlemelerden ibarat boladı hám birlik matritsasına iye emes, bunda $1\le k<m$. (3.1) – (3.3) máselesin

aralas sheklewlerine iye máselesi dep ataydı. Onıń bazisı qosımsha hám jasalma vektorlardan ibarat boladı.

Meyli aralas sheklewler sisteması d teńlemesine iye bolsın. Onda baslanǵısh tayanısh jobasına iye bolıw ushın oǵan d dan kóp bolmaǵan jasalma ózgeriwshilerdi kiritiw arqalı túrlendiriwge boladı. Haqıyqattanam, eger sistema $AX \le A_0,\ A_0 \ge 0$ túrdegi k teńsizliklerine iye bolsa, onda bul tastıyqlawlar orınlı boladı. Meyli Sistema $AX \le A_0,\ A_0 \ge 0$ túrindegi k teńsizliklerin óz ishine alsın. Bul jaǵdayda teńsizliklerge qosımsha ózgeriwshi kiritiw arqalı, olardı teńliklerge túrlendiremiz:

$$AX - X' = A_0,$$

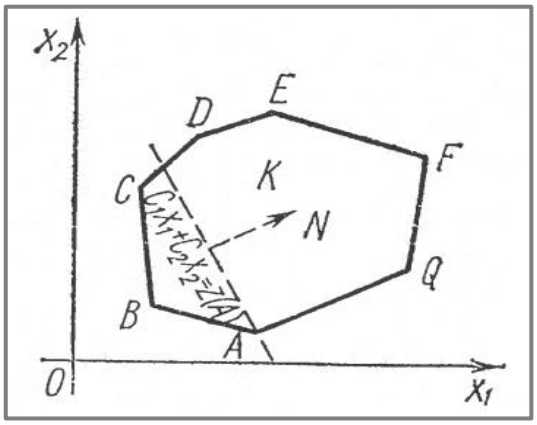
bunda, $X' = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k})$ yaǵnıy sheklewler sisteması k teń bolǵan teris birlik vektorlarına iye boladı. Quramalı emes túrlendiriwler júrgiziw arqalı k sanlı oń mánisli birlik vektorların alıwǵa boladı. Ol ushın $b_i > 0, i = \overline{k+1, m}$ saltan aǵzasına iye i teńlemesin alamız, sistemanıń hár bir teńsizligin, onıń saltan aǵzası b_i kishi bolatuǵınday etin qálegen bir oń mánisli sanına bólemiz. Bunnan soń teńsizliklerinen teńliklerge ótip hám aǵzama aǵza olardı i teńlemeden ayırıp alamız. Kelip shıqqan teńlemeler óz ishinde «+» belgili qosımsha ózgeriwshisine iye boladı.

Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiwdiń simpleks usılınıń geometriyalıq kórinisi

Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiwdiń simpleks protsessin eń ápiwayı jaǵdayda sızıqlı funktsiyanıń mánisi kemeyiwi (kóbeyiwi) menen baylanıslı bolǵan sheshimler kópjaqlısınıń qońsılas múyesh noqatları boyınsha qozǵalısı dep interpretatsiya beriwge boladı.

Eki múyesh noqatı qońsılas dep ataladı, eger olar sheshimler kópjaqlınıń bir qabırǵasında jaylasqan bolsa.

Meyli $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ sızıqlı funktsiyanıń eń úlken mánisin tabıw máselesi qoyılǵan bolsın hám súwrette onıń sheshimler kópmúyeshligi K kórsetilgen. Meyli sheklewler sistemasın túrlendiriw protsessinde A múyesh noqatına sáykes keliwshi dáslepki tayanısh jobası dúzilgen bolsın. Onda $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ tuwrısı A noqatı arqalı ótedi hám Z funktsiyası $Z(A)$ mánisine iye boladı.



Vektordı baziske $\min\theta_{0j}(Z_j - C_j)$ boyınsha kiritiw ámeli $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ tuwrınıń Q noqatı arqalı ótiwine hám Z funktsiyası $Z(Q)$ mánisin qabıl qılıwına alıp keledi, bunda $Z(Q) > Z(A)$ boladı. Kelesi iteratsiyanı orınlaw nátiyjesinde F noqatına ótemiz hám bunda sızıqlı funktsiyası eń úlken mánisine jetedi. Egerde dáslepki tayanısh jobası nátiyjesinde C noqatı qabıllansa, onda simpleks usılınıń algoritmi E, D, F noqatlarına alıp keledi hám optimal jobasına iye bolıwı ushın tórt iteratsiyanı orınlaw talap qılınadı.

Demek, simpleks protsessinde iteratsiyalar sanı dáslepki tayanısh jobası hám $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ tuwrınıń dáslepki jobadan onıń optimal jobasına jetiwdegi qozǵalıs jolında dus keletuǵın múyesh noqatlardıń sanı menen anıqlanadı.

4-§. Geypara ekonomikalıq máselelerdi sheshiwde sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesiniń qollanıwları

Sızıqlı programmalastırıw máselesi ámeliy zárúrlikten payda boladı, sonlıqtan hár qıylı ekonomikalıq máselelerdiń keń toparın sheshiwde onnan qollanıladı.

1.Resurslardan paydalanıw máselesi. Kárxana resurslardıń $m-$túrlerine iye bolıp, olardıń muǵdarları sáykes b_i, $i = \overline{1,m}$ birliklerine teń hám olardan $n-$túrli ónim islep shıǵarıladı. Kárxana ónimniń hár bir túrinen d_j, $j = \overline{1,n}$ birlikten kóp

bolmaǵan muǵdarda islep shıǵarıwı múmkin. j -túrli ónimniń bir birligin satıwdan kóretuǵın payda C_j birlikti quraydı. Barlıq islep shıǵarılǵan ónimdi satıwdan kóretuǵın payda maksimal bolıwdı támiyinleytuǵın ónim islep shıǵarıw jobasın dúziw zárúr boladı.

Eger, islep shıǵarıw zárúr bolǵan j -túrli ónimniń bir birlik muǵdarın x_j, $j=\overline{1,n}$ dep belgilesek, onda qoyılǵan máselesi tómendegi matematikalıq modeline iye boladı:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{4.1}$$

sızıqlı funktsiyanıń tómende berilgen sheklewler sistemasında

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \quad 0 \le x_j \le d_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{4.2}$$

eń úlken(maksimal) mánisin tabıw.

Shiyki zattan paydalanıw máselesi bul túr máselesine tiyisli boladı hám onı grafikalıq usılı menen de sheshimin tabıwǵa boladı. Bul topar máselesine tóginlerdi optimal paydalanıw máseleside tiyisli boladı.

Meyli bazı bir egin túrin ósiriw ushın m - tógin túrlerinen sáykes $b_i, i=\overline{1,m}$ birlik muǵdarda paydalanadı. Barlıq egis maydanları d_j, $j=\overline{1,n}$ birligine teń bolǵan n zonalarına bólingen. Meyli, a_{ij} - j -zonasınıń bir birlik maydanına berilgen i -tóginniń muǵdarı, al C_j - j -zonanıń bir birlik maydanınan alınǵan ortasha zúráátlilik.

Egis maydanları arasında tóginlerdi sonday bir bólistiriw zárúr boladı, bunda egin túrleriniń zúráátliliklerиniń ósiwi eń kóp bolatuǵınlıǵın támiyinlewshi jobasın dúziw kerek boladı.

x_j, $j=\overline{1,n}$ dep tóginlew zárúr bolǵan j -zonaıń maydanın belgileymiz. Onda qoyılǵan máseleniń matematikalıq modeli (4.1)-(4.2) túrinde boladı.

Bul máseleniń sheshimin konkret mısalda qarap shıǵamız.

1-mısal. Máseleniń shártleri 1-kestede berilgen.

1-keste

Zonaları	Egis maydanları, ga	1 ga jumsalatuǵın tógin (centnerde)			1 ga jerden alınatugın zúráátlik(ts)
		Fosfor	Azot	Kaliy	
I	100000	2	1	1	12
II	150000	1	2	5/4	14
III	200000	1	½	0	10
Bar tógin (ts)		400000	300000	100000	-

Sheshimi. I-zonadaǵı tóginlew zárúr bolǵan maydanın - x_1 dep, II-zonadaǵı tóginlew zárúr bolǵan maydanın - x_2 dep, III- zonadaǵı tóginlew zárúr bolǵan maydanın - x_3 dep belgileymiz. Onda qoyılǵan máseleniń matematikalıq modeli tómendegishe boladı.

$$Z = 12x_1 + 14x_2 + 10x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 400000, \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \le 300000, \\ x_1 + \frac{5}{4}x_2 \le 100000, \qquad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \\ x_1 \le 100000, \\ x_2 \le 150000, \\ x_3 \le 200000, \end{cases}$$

Sheklewler sistemasındaǵı teńsizliklerdiń shep qaptal tárepine $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ teris emes qosımsha ózgeriwshilerin kiritiw arqalı teńliklerge ótemiz.

Sistemanı vektorlıq formada jazamız:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 + A_7x_7 + A_8x_8 + A_9x_9 = A_0,$$

bunda $A_1' = (2;1;1;1;0;0)$, $A_2' = (1;2;5/4;0;0;0)$, $A_3' = (1;1/2;0;0;0;1)$,

$A_4' = (1;0;0;0;0;0)$, $A_5' = (0;1;0;0;0;0)$, $A_6' = (0;0;1;0;0;0)$,

$A_7' = (0;0;0;1;0;0)$, $A_8' = (0;0;0;0;1;0)$, $A_9' = (0;0;0;0;0;1)$.

$A_4', A_5', A_6', A_7', A_8', A_9'$ birlik vektorların baslanǵısh tayanısh jobanıń bazisı retinde saylap alamız. Nátiyjede dáslepki tayanısh joba tómendegishe boladı:

$$X_0 = (0;\ 0; 0; 400000; 300000; 100000; 100000; 150000; 200000).$$

X_0 jobanı optimallıq shártlerin tekseriw ushın 1-simpleks kestesin jasaymız hám $Z(X_0)$ hám $Z_j - C_j$ bahaların esaplaymız.

1-simpleks-kestesi.

i	Базис	$C_Б$	A_0	12	14	10	0	0	0	0	0	0	
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	
1	A_4	0	400000	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1-iteraciya
2	A_5	0	300000	1	2	1/2	0	1	0	0	0	0	
3	A_6	0	100000	1	5/4	0	0	0	1	0	0	0	
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
5	A_8	0	150000	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
6	A_9	0	200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-12	-14	-10	0	0	0	0	0	0	
1	A_4	0	320000	6/5	0	1	1	0	-4/5	0	0	0	2-iteraciya
2	A_5	0	140000	-3/2	0	1/2	0	1	-8/5	0	0	0	
3	A_2	14	80000	4/5	1	0	0	0	4/5	0	0	0	
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
5	A_8	0	70000	-4/5	1	0	0	0	0	0	1	0	
6	A_9	0	200000	0	0	1	0	0	-4/5	0	1	0	
$m+1$	$Z_j - C_j$		112000	-4/5	0	-10	0	0	56/5	0	0	1	
1	A_4	0	120000	6/5	0	0	1	0	-4/5	0	0	0	3-iteraciya
2	A_5	0	40000	-3/2	0	1/2	0	1	-8/5	0	0	0	
3	A_2	14	80000	4/5	1	0	0	0	4/5	0	0	0	
4	A_7	0	100000	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
5	A_8	0	70000	-4/5	1	0	0	0	0	-4/5	1	0	
6	A_3	10	200000	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		321000	-4/5	0	0	0	0	56/5	0	0	0	
1	A_1	12	100000	1	0	0	6/5	0	-2/3	0	0	0	
2	A_5	0	100000	0	0	0	½	1	-2	0	0	0	

3	A_2	14	0	1	0	-2/3	0	4/3	0	0	0	0	
4	A_7	0	0	0		0	-5/6	0	2/3	1	0	0	
5	A_8	0	150000	0	0	0	-2/3	0	-4/3	0	1	0	
6	A_3	10	200000	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		3200000	0	0	0	76/5	0	32/3	0	0	0	

Kesteniń 4-iteratsiyasinda qoyılǵan máseleniń optimal jobasına iye bolamız.Sebebi, $(m+1)$-qatarında barlıq $Z_j - C_j \geq 0$.

Demek, $X_{opt} = (100000; 0; 200000)$ hám $Z_{\max} = 3200000$.

Berilgen egin túrlerinen 3200000 ts maxsimal zúráát alıw ushın bar tóginlerdi tómendegishe bólıstırıw zárúr boladı.

I-zonanı tóginlew ushın 200000 ts fosfor,100000 ts azot hám 100000 ts kaliy tóginlerin ajıratıw kerek.

II-zona x =0 bolǵanı ushın tógin jumsalmaydı.

III-zona ushın 200000 ts fosfor hám 100000 ts azot tóginlerin ajıratıw kerek.

Bunda 100000 ts azot jumsalmay awısıp qaladı.

2. Dieta dúziw máselesi. Bir kúnlik dietası $m-$hár túrli júǵımlı zatlardıń $b_i,\ i=\overline{1,m}$ dan kóp bolmaǵan muǵdarda óz ishine alıwı kerek.Azıq-awqatlardıń hár qıylı $n-$túrleri $d_j,\ j=\overline{1,n}$ muǵdarda bar bolıp esaplanadı.

Meyli, bir birlik j túrdegi azıq-awqattaǵı i paydalı zatlardıń bir birlik muǵdarın a_{ij} belgileymiz. $C_j -$ j túrdegi azıq-awqattıń bir birliginiń bahası.

Hár bir paydalı zatlar boyınsha kúndelik talabın eń az(minimal) muǵdarda qanaatlandıratuǵın hám paydalanǵan azıq-awqatlardıń ulıwma bahası eń arzan bolatuǵın dietaǵa azıq-awqatlardıń qanday túrlerinen hám qansha muǵdarda kiritiwdi anıqlaw zárúr boladı.

$x_j,\ j=\overline{1,n}$ dep dietaǵa kiritilgen j -túr azıq-awqattıń bir birlik muǵdarın belgileymiz.

Bunda máselesi tómendegishe bolıp qoyıladı: $Z=\sum_{j=1}^{n}C_j x_j$ sızıqlı funktsiniń eń kishi(minimal) mánisin tómende berilgen

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \geq b_i,\ \ i=\overline{1,m},\qquad 0\leq x_j \leq d_j,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{4.3}$$

sheklewler sistemasında tabıw.

Bir kúnlik ratsion dúziw máseleside bunday túrdegi máselelerine tiyisli boladı. Sonıń menen birge aralaspalar jaratıw máselesi, ónim shıǵarıw protsessin jobalastırıwdıń bazı bir máseleleri de tiyisli boladı.

Detallardı islep shıǵarıwdıń berilgen jobası orınlanadı yamasa artıǵı menen orınlanıw shártinde materiallardan optimal paydalanıw máselesin qaraymız.

Sáykes keliwshi $b_i,\ i=\overline{1,m}$ birlik muǵdardan az bolmaǵan m-túrli detallardı islep shıǵarıw ushın, $d_j,\ j=\overline{1,n}$ birlik muǵdarda bar n-túrli materiallardan paydalanadı.Meyli a_{ij} - bul qabıllanǵan normaǵa(talapqa) muwapıq j-túrli materiallardıń bir birliginen islep shıǵarıw múmkin bolǵan i -túrdegi detallardıń muǵdarı. C_j - j-túrdegi bir birlik materiallardıń bahası. Islep shıǵarıwdı jobalastırılǵan muǵdardan kem bolmaytuǵın hám jumsalǵan materiallar túrleriniń bahalarınıń qosındısı eń arzan bolatuǵın materiallardıń qanday túrlerinen hám qansha muǵdarda paydalanıw kerekligin anıqlaw zárúr boladı. Endi $x_j,\ j=\overline{1,n}$ dep j -túrdegi jumsalǵan materialdı belgileymiz. Onda bul máseleniń matematikalıq modeli bolıp (4.3) esaplanadı.

2-mısal. Ayaq kiyim islep shıǵarıwda qattı teri túrlerinen paydalanadı. Olardı cheprak, vorot dep ataydı. Olar teriniń bir bólekleri bolıp hám olar qalıń teri bolıp esaplanadı. Óz gezeginde teriniń bul túrleri ortasha qalıńlıǵı boyınsha jáne de bir neshe kategoriyalarına bólinedi. Qabıllanǵan standart boyınsha ayaq kiyim detalları teriniń anıq bir túrlerinen tayarlaw názerde tutıladı.

Dáslepki berilgen maǵlıwmatlar keste túrinde berilgen.

Detaldıń qalınlıǵı, mm.	Jobalastırılǵan detallar sanı, mıń dana	1000 m^2 teriden tayarlaw múmkin bolǵan detallar sanı, mıń dana			
		Chepraktıń qalınlıǵı, mm.		Vorottıń qalınlıǵı, mm.	
		4,01–4,5	4,51–5,0	3,5–4,0	4,51–5,0
3,9	21	26,5	7,8	-	-
3,0	30	51,0	26	45,7	-
2,5	500	-	-	5,0	72,5
Bar materiallar muǵdarı, 1000 m^2		0,9	0,8	5,0	6,0
1000 m^2 bahası, mıń summ		14,4	16	12,8	10,5

Sheshimi. Belgilewler kiritemiz: x_1-bul 4,01–4,5 qalınlıǵına iye 1000 m^2 chepraktıń zárúrli muǵdarı, x_2-bul 4,51–5,0 qalınlıǵına iye 1000 m^2 chepraktıń muǵdarı, x_3-bul 3,5–4,0 qalınlıǵına iye 1000 m^2 vorottıń muǵdarı, x_4-bul 4,51–5,0 qalınlıǵına iye 1000 m^2 vorottıń muǵdarı. Onda máseleniń matematikalıq modeli tómendegishe boladı:

$Z=14,4x_1+16x_2+12,8x_3+10,5x_4$ sızıqlı funktsiyanıń tómende berilgen sheklewler sistemasında eń kishi mánisin tabıw

$$\begin{cases} 26,5x_1+7,8x_2 \geq 21, \\ 51x_1+26x_2+45,7x_3 \geq 30, \\ 5x_3+71,5x_4 \geq 500, \\ x_1 \leq 0,9, \\ x_2 \leq 0,8, \\ x_3 \leq 5, \\ x_4 \leq 6, \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

Sheklewler sistemasındaǵı teńsizliklerden qosımsha ózgeriwshilerin kiritiw arqalı teńliklerge ótemiz:

$$\begin{cases} 26,5x_1+7,8x_2-x_5 = 21, \\ 51x_1+26x_2+45,7x_3-x_6 = 30, \\ 5x_3+71,5x_4-x_7 = 500, \\ x_1+x_8 = 0,9, \\ x_2+x_9 = 0,8, \\ x_3+x_{10} = 5, \\ x_4+x_{11} = 6, \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,11}. \end{cases}$$

Úshinshi teńlemeden birinshi hám ekinshi teńlemelerin ayırıp alamız, nátiyjede tek ǵana bir jasalma ózgeriwshi kiritiw zárúr bolatuǵın sheklewler sistemasına iye bolamız:

$$\begin{cases} -26,5x_1-7,8x_2+50x_3+72,5x_4+x_5-x_7=479, \\ -51x_1-26x_2+4,3x_3+72,5x_4+x_6-x_7=470, \\ 50x_3+72,5x_4-x_7+x_8=500, \\ 10x_1+x_9=9, \\ 10x_2+x_{10}=8, \\ x_3+x_{11}=5, \\ x_4+x_{12}=6, \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,12}. \end{cases}$$

Bazısı retinde $A_5, A_6, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{12}$ birlik vektorlar sistemasın tańlap alamız. Onda dáslepki tayanısh jobası

$$X_0 = (x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 479, x_6 = 470, x_7 = 0,$$
$$x_8 = 500,\ x_9 = 9,\ x_{10} = 8,\ x_{11} = 5, x_{12} = 6).$$

2- kesteni jasaymız.

2-keste

	Базис	$C_Б$	A_0	14,4	16	12,8	10,5	0	0	0	M	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	A_5	0	479	-26,5	-7,8	50	72,5	1	0	-1	0	0	0	0	0
2	A_6	0	470	-51	-26	4,3	72,5	0	1	-1	0	0	0	0	0
3	A_8	M	500	0	0	50	72,5	0	0	-1	1	0	0	0	0
4	A_9	0	9	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_{10}	0	8	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	A_{11}	0	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	A_{12}	0	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-14,4	-16	-12,8	-10,5	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			500	0	0	50	72,5	0	0	-1	0	0	0	0	0
1	A_5	0	44	-26,5	-7,8	50	0	1	0	-1	0	0	0	0	-72,5
2	A_6	0	35	-51	-26	4,3	0	0	1	-1	0	0	0	0	-72,5
3	A_8	M	65	0	0	50	0	0	0	-1	1	0	0	0	-72,5
4	A_9	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_{10}	0	8	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	A_{11}	0	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	A_4	10,5	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		63	-14,4	-16	-12,3	0	0	0	0	0	0	0	0	-10,5
$m+2$			65	0	0	50	0	0	0	-1	0	0	0	0	-72.5
1	A_3	12,8	0,9	-0,5	-0,2	1	0	0,02	0	-0,02	0	0	0	0	-1,5
2	A_6	0	31,2	- 48,7	-0,7	0	0	-0,1	1	-0,9	0	0	0	0	-64,3
3	A_8	M	21	26,5	7,8	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
4	A_9	0	9	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	A_{10}	0	8	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	A_{11}	0	4,1	0,5	0,2	1	0	-0,02	0	0	0	0	0	1	1,5

7	A_4	10,5	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		74,3	-21.2	-18	0	0	0,3	0	-0,26	0	0	0	0	-8,7
$m+2$			21	26,5	7,8	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1	A_3	12,8	1,3	0	-0,05	1	0	0,02	0	-0,02	0,02	0	0	0	-1,5
2	A_6	0	39	0	-13,9	0	0	-2	1	-0,9	1,9	0	0	0	-64,3
3	A_1	14,4	0,8	1	0,3	0	0	-0,04	0	0	0,04	0	0	0	0
4	A_9	0	1	0	-3	0	0	0,4	0	0	-0,4	1	0	0	0
5	A_{10}	0	8	0	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	A_{11}	0	3,7	0	0,05	1	0	-0,02	0	0	-0,02	0	0	1	1,5
7	A_4	10,5	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		91,2	0	-12,3	0	0	0,3	0	-0,26	0,8	0	0	0	-8,7
$m+2$															

3-iteratsiya orınlanǵannan soń, qoyılǵan máseleniń optimal jobasına iye bolamız.

$$X_0^{(3)} = (x_1 = 0.8, x_2 = 0, x_3 = 1.3, x_4 = 6).$$

Bunda $Z_{\min} = 91.2$

Demek, materialdin' 91.200 swm eń az bahasında ayaq kiyimnin' detalların tayarlaw jobasın orınlawdı táminlew ushın 4.01-4.5 mm qalıńlıqtaǵı shepraktıń 800 kv metr, 3.5-4.0 mm qalıńlıqtaǵı vorottıń 1300 kv metr hám 4.51-5.0 mm qalıńlıqtaǵı vorottıń 6000 kv metr zárúr boladı.

JUWMAQLAW

Bul pitkeriw qánigelik jumısında sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesin geypara ekonomikalıq máselelerdi sheshiwde qollanıwları qaraldı. Sebebi, sızıqlı programmalastırıw máselesi ámeliy zárúrlikten payda bolıp hám sonlıqtan hár qıylı ekonomikalıq máselelerdiń keń toparın sheshiwde onnan qollanıladı.

Egerde qoyılǵan sızıqlı programmalastırıw máselesinde belgisizler sanı ekewden kóp bolsa, onda bunday máselelerdiń sheshimin simpleks usılı menen tabamız. Tiykarınan, kópshilik ámeliy máselelerde belgisizler sanı kóp boladı, sonlıqtan bul jerde simpleks usılı ádewir áhmiyetli bolıp esaplanadı.

Pitkeriw qánigelik jumısında sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwmalasqan máselesiniń qoyılıwı qaraldı hám onıń bir neshe jazıw formaları: vektorlıq, matritsalıq hám qosındı belgisi járdeminde jazılıwı kórsetildi, sonıń menen birge bir qatar kerekli anıqlamalar berildi.

Sızıqlı programmalastırıw máselelerdiń sheshimleriniń qásiyetleri dóńes kópliklerdiń qásiyetleri menen tıǵız baylanısta boladı, sonlıqtan olar haqqında zárúrli bolǵan túsinikleri de keltirildi.

Sızıqlı programmalastırıw máselesiniń geometriyalıq interpretatsiyası, sızıqlı programmalastırıw máselesiniń sheshimleriniń qásiyetleri qaraldı hám SP máselesin sheshiwdıń simpleks usılı hám jasalma simpleks usılları qaraldı.

Egerde SP máselesiniń sheklewler sisteması aralas sheklewlerine iye jaǵdayları da qaraldı. Bul jerde sheklewler sisteması k sanlı teńsizliklerinen hám $m-k$ teńlemelerden ibarat boladı hám birlik matritsasına iye emes boladı, bunda $1 \le k < m$. Bunday máseleniń bazisı qosımsha hám jasalma vektorlardan ibarat boladı.

Sızıqlı programmalastırıw máselesin sheshiwdiń simpleks usılınıń geometriyalıq kórinisi qaraldı. Bunda sızıqlı programmalastırıw máselesi ámeliy zárúrlikten payda bolǵanı sebepli, bul máselesin sheshiwdiń simpleks protsessin eń ápiwayı jaǵdayda sızıqlı funktsiyanıń mánisi kemeyiwi(kóbeyiwi) menen

baylanıslı bolǵan sheshimler kópjaqlınıń qońsılas múyesh noqatları boyınsha qozǵalısı dep interpretatsiya beriwge boladı.

Pitkeriw qánigelik jumısında hár qıylı ekonomikalıq máseleniń keń toparın sheshiwde sızıqlı programmalastırıwdıń ulıwma máselesin qollanıwlarına mısallar keltirildi. 1-mısalda resurslardan paydalanıw máselesi qaraldı. Bunda kárxana resurslardıń bazı bir $m-$túrlerine iye bolıp hám olardıń muǵdarları sheklengen, yaǵnıy b_i, $i=\overline{1,m}$ birliklerine teń hám olardan bir neshe $n-$túrli ónim islep shıǵarı kerek boladı. Kárxana ónimniń hár bir túrinen d_j, $j=\overline{1,n}$ birlikten kóp bolmaǵan muǵdarda islep shıǵarıwı múmkin. j-túrli ónimniń bir birligin satıwdan kóretuǵın payda C_j birlikti quraydı. Barlıq islep shıǵarılǵan ónim túrlerin satıwdan kóretuǵın payda maksimal bolatuǵın ónim islep shıǵarıw jobasın dúziw zárúr boladı.

Bul topar máselelerine tóginnen optimal paydalanıw máselesi tiyisli boladı.

Qoyılǵan máseleniń matematikalıq modelleri SP máselesiniń ulıwma túrine keltirildi hám bul máseleniń optimal sheshimin simpleks usılı menen tabıldı, al 2-mısalda dieta dúziw máselesi qaraldı, bunda hár bir paydalı zatlar boyınsha kúndelik talaptı eń az(minimal) muǵdarda qanaatlandıratuǵın hám paydalanǵan azıq-awqatlardıń ulıwma bahası eń arzan bolatuǵın dietaǵa azıq-awqatlardıń qanday túrlerinen hám qansha muǵdarda kiritiwdi anıqlaw ushın, bul qoyılǵan másele SP máselesine keltirildi hám bul bir kúnlik optimal dietanıń variantı simpleks usılı menen tabıldı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб.пособие для студентов эконом.спец.вузов.М.:Высш.школа, 1986.– 319 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. Главная редакция физико-математической литературы. – М.: Наука, 1971.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., М.Н.Фридман. Исследование операций в экономике: Учеб.пособие для вузов. -М. : ЮНИТИ, 2002.– 407 с.
4. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование:Учебное пособие.-2-е изд., перераб. и доп.–М.: Высш.школа, 1980. – 300 с.
5. Отаров А.О. Жумамуратов Р.Т. Отаров А.А. Сызықлы программаластырыўдың санлы усыллары Оқыу қолланба-Нөкис-2006, 108 б.
6. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
7. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций: Сборник задач. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Выща шк., 1990.-239 с. : ил.

Internet derekleri

8. https://economy-ru.info/info/54496/
9. https://scienceforum.ru/2014/article/2014006907
10. https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=13074
11. https://ru.wikipedia.org/wiki/
12. https://lektsii.com/1-32914.html