

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**BERDAQ NOMIDAGI QORAQALPOQ DAVLAT
UNIVERSITETI**

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

Amaliy matematika kafedrası

«Amaliy matematika va informatika»

ta'lim yo'nalishi IV kurs talabasi

Nurullayeva Dilbarning

BITIRUV

MALAKAVIY ISHI

**Mavzu: Chiziqli emas algebraik va transedent
tenglamalarni interpolatsion usul bilan yechish**

Ilmiy rahbar:

prof. A. O. Otarov

Kafedra mudiri:

dots. M.Q.Berdimuratov

Nukus_2019

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1-§. Tenglamalarni yeching interpoliyatsiyalik usullarini yasash masalasi.....	10
2-§. Funktsiyalarni interpoliyatsiyalshga asoslangan usul.....	13
3-§. Teskari funktsiyani interpoliyatsiyalashga asoslangan usul.....	19
4-§. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarni interpoliyatsiyalash formulalarini chiziqli emas tenglamalar sistemalarini yechishga foydalanish.....	21
5-§. Sonli misollar.....	27
Xulosa.....	35
Foydalangan adabiyotlar.....	39
Qo'shimchalar.....	40

Kirish

Hozirgi zamonda amaliy matematikasining eng ahamiyatli va keng tarqalgan masalalarning biri algebraik yoki transendent tenglamalarning va ularning sistemalarining ildizlarini aniqlash masalasi bo'ladi. Bu masala hozirgi vaqtlari haqiqiy yoki kompleks koeffitsientli bir tenglama va ikki tenglamalarining sistemalari uchun yetarli aniqlik bilan yechilgan. Ko'p sonidagi bunday tenglamalar sistemalarini yechish masalasi shu vaqtgacha matematika adabiyotlarida yetarlicha tasvirlanmagan [1,2,3,10].

Hozirgi kungacha chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini yechishga ega bo'lishni va bu yechimni birdan-bir bo'lishini aniqlashga imkoniyat beradigan nazariya ishlab chiqilmagan. Faqat algebraik tenglamalarning sistemalari berilgan holatda ularning yechimlarini umumiy soninigina baholash mumkin [4,5,11].

Chiziqli emas tenglamalarning va ularning sistemalarining ko'pchiligini analitik akslantirishlarni bajarish orqali yechish mumkin bo'lmaganidan, ish davomida bunday tenglamalarni sonli usullar bilan yechadi. Chiziqli emas tenglamalarni haqiqiy ildizlarini aniqlash masalasi odatda ikki bosqichdan iborat: ildizlarini ajratish, ya'ni har birida faqat bir ildiz joylashgan kichik kesmalarning guruhini yasash va ajratilgan ildizlarning har birini oldindan berilgan aniqlik bilan aniqlash.

Biz dastlab chiziqli emas tenglamalarni haqiqiy ildizlarini aniqlashning sonli usullarini ko'ramiz. Bunday tenglamalarni va ularning sistemalarini yechish uchun avvaldan kelayotgan sonli usullarga oddiy iteratsiya usuli, Nyuton usuli, eng tez pastga tushish usuli va ularning bazi bir o'zgartirilgan turlari kiradi [5,6,12]. Berilgan chiziqli emas tenglamalarni yechishga u yoki bu sonli usulni foydalanish tenglamani ildizlari soniga, ildizga boshlangich yaqinlashuvni saylab olishga va tenglamani aniqlaydigan funksiyaning sifatiga bog'liq bo'lmaydi.

Bu ishda qaralayotgan masala

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (0.1)$$

ko'rinishida yoziladi, chiziqli emas tenglamalar sistemalarini yechishdan iborat.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: x orqali $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -n o'lchamli vektorni va $F(x)$ orqali $F(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ vektor funksiyasini belgilaymiz. Shunda (1) sistema quyidagi bir vektor tenglamasi ko'rinishida yoziladi:

$$F(x) = 0 \quad (0.2)$$

Berilgan (1) sistemasining oddiy iteratsiya usuli bilan yechish, uni

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (0.3)$$

ko'rinishida yozishga bo'ladi degan solishtirishga asoslangan va bu sistema $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fazosining bazi bir sohasida faqat bitta $x_i = \alpha_i (i = \overline{1, n})$ yechimiga ega bo'ladi deb hisoblanadi. Oddiy iteratsiya usulini qandaydir bir usul bilan yechimga boshlang'ich yaqinlashish $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ vektori saylab olingan, kelgusi yaqinlashuvlar (3) ko'rsatilishi asosida

$$x_i^{(k+1)} = (\varphi_1^{(k+1)}, \varphi_2^{(k+1)}, \dots, \varphi_n^{(k+1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (0.4)$$

formulasi bilan aniqlanadi.

Agarda $k \rightarrow \infty$ intilganda $x_i \rightarrow \alpha_i (i = \overline{1, n})$ ga intilsa, unda bu (4) iteratsion jarayon izlanilayotgan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ildiziga ega bo'lishini bildiradi. (1) yoki (2) sistemasining yechimini avvaldan berilgan aniqlik bilan aniqlash uchun (4) formula bo'yicha iteratsiyalarni ketma-ket kelgan yoki yaqinlashuvchi berilgan aniqlik bilan mos kelgunicha davom etadi.

Avval berilgan (1) sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan yechishning aniqligi yechimga boshlang'ich yaqinlashuvni qulay qilib saylab olishga bog'liq bo'ladi: va sistemaning $x = \alpha$ yechimiga yetarlicha yaqin bo'lishi kerak. Sababi, teskari holatda, (4) iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Nyuton usuli chiziqli emas tenglamalarni yechishning ko'p tarqalgan usuli bo'ladi. Sababi bu usul boshqa sonli usullar bilan solishtirganda, yechimga tez yaqinlashuvchi bo'ladi [3,4,6].

Mayli, (1) sistemaning yechimi $x = \alpha$ joylashgan, bazi bir yopiq G sohasida $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n}$ funksiyalari uzliksiz bo'lib, birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega va $x = \alpha$ nuqtasida

$$F'_i(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{pmatrix} \quad (0.5)$$

Yakobi matritsasi aynimagan matritsa bo'lsin, shunda $x = \alpha$ yechimining atrofida $F'_x(x)$ matritsasi $(F'_x(x))^{-1}$ teskari matritsaga ega bo'ladi. Shunda (1) sistemaning $x = \alpha$ yechimi

$$x = \varphi(x) = x - (F'_x(x))^{-1} F(x) \quad (0.6)$$

vektorli tenglamasining ham yechimi bo'ladi.

Agarda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - x = \alpha$ yechimiga ba'zi bir boshlang'ich yaqinlashuvchi bo'lsa, unda (1) sistemasi yechimi kerakli aniqlik bilan aniqlash uchun quyidagi iteratsion jarayonni yasash mumkin.

$$x^{(k+1)} \equiv \varphi(x^{(k)}) \equiv x^{(k)} - (F'_x(x^{(k)}))^{-1} F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots, \quad (0.7)$$

bunda $x_i^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ $x = \alpha$ yechimiga k -yaqinlashuvchi.

Bu vektor tenglamani

$$F'_x(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.8)$$

yoki

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = -f_i(x^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.9)$$

ko'rinishida yozishga bo'ladi.

Berigan (1) sistemaning yechimiga ketma-ket yaqinlashuvlari (7) formulasi yoki (8),(9) sistemalaridan aniqlanadigan usul, bu sistemani yechishning Nyuton usuli deb ataladi. Agarda ketma-ket yaqinlashuvlarni hisoblash uchun (7) formulasi foydalanilsa, unda itaeratsion jarayonni har bir qadamida $(F'_x(x^{(k)}))^{-1}$

teskari matritsasini topish kerak. Agarda (8) sistemasi foydalanilsa, unda iteratsion jarayon har bir qadamda $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ qo'shimchasini aniqlash uchun $F'_x(x^{(k)})$ matritsali (8) chiziqli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

Nyuton usuli qat'iy shartlar bajarilganda yaqinlashuvchi bo'ladi. Agarda $f(x)$ funksiyasi $x = \alpha$ yechimi atrofida ikki marta differensiallanadigan bo'lsa va $F'_x(x)$ matritsasi $x = \alpha$ nuqtasi atrofida aynimagan bo'lsa, unda $x^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashuvi $x = \alpha$ yechimiga yaqin olingan holda (7) iteratsion jarayon α ga yaqinlashuvchi bo'ladi va kvadrat yaqinlashish tezligiga ega bo'ladi:

$$\|x^{(k+1)} - x^k\| \leq c \|x^{(k)} - \alpha\|^2, c = \text{const} > 0 \quad (0.10)$$

Yuqorida aytib o'tilganidek, oddiy iteratsiya va Nyuton usuli yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $x = \alpha$ yechimiga yaqin $x^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashuvi saylab olish talab qilinadi. Lekin chiziqli emas tenglamalar yechimi avvaldan ma'lum bo'lmaganligidan va har doim yechim ichida yotgan kichik diametrli sohani ko'rsatish mumkin bo'lmaganidan, bu usulning yaqinlashuvchi bo'lishini ta'minlaydigan, yechimiga boshlang'ich yaqinlashuvini saylab olish masalasi asosiy masala bo'ladi. Pastga tushish usulida bu masala yuqori darajada yechilgan bo'lib, ular chiziqli emas tenglamalarni yechish uchun oddiy iteratsiya va Nyuton usullaridan natijali foydalanish imkoniyatini beradi. Pastga tushish usullari tenglamalarni yechishning variatsion usullar guruhida kiradi. Bu usullarda (2) sistemasini yechish masalasi bazi bir $\Phi(x) \geq 0$ funksionalining minimum (eng kichik) qiymatini aniqlash masalasiga keltiladi. Oxirgi masalasi yechish uchun biri qadamdan ikkinchisiga o'tganda $\Phi(x)$ funksional qiymati so'zsiz kamayib boradigan, ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalaniladi, ya'ni

$$\Phi(x^{(k+1)}) \leq \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.11)$$

shartlari bajariladi. Bunday xossalarga ega bo'lgan usullar pastga tushish usullari deb ataladi.

Minimum qiymatiga (2) sistemasining yechimiga ega bo'ladigan, $\Phi(x)$ funksionalining ko'p usullari bilan yasashga bo'ladi. Masalan,

$$\Phi(x) = \|F(x)\|^2 \quad (0.12)$$

ko'rinishida olishga bo'ladi. (12) da ixtiyoriy normani foydalanish mumkin, lekin ko'p holatda Evklid normasini oladi. Agar $x = \alpha$ (2) sistemasining yechimi bo'lsa, unda (12) ko'rinishida aniqlangan $\Phi(x)$ funksionali $x = \alpha$ nuqtasida nolga teng minimum qiymatga ega bo'ladi. Teskari tasdiqlash ham tog'ri: (12) funksionalining nollik minimum qiymati (2) sistemasining yechmi bo'ladi. Shunday qilib, (2) sistemasini yechish masalasi (12) funksionalining minimum qiymatini topishga teng kuchli bo'ladi.

Bu so'ngi masalani yechish uchun (12) ni differensiallaymiz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} f_k(x) \quad (k = \overline{1, n}) \quad \text{yoki} \quad \text{grad} \Phi(x) = J^*(x) F(x),$$

bunda $J^*(x) F(x)$ -vektor funksiyasining transpollangan Yakobi matritsasi. $\text{grad} \Phi(x)$ $\Phi(x)$ funksiyasining daraja yuzining tekisligiga, ya'ni

$$\|F(x)\|^2 = c = \text{const}$$

yuzasiga ortogonal bo'lganidan, gradient vektorining yo'nalishi x nuqtasiga $\Phi(x)$ funksiyasining tez o'sish, unga teskari yo'nalishi tez kamayish yo'nalishini aniqlaydi. Shu sababli $\text{grad} \Phi(x)$ vektor bilan o'tkir burchak tashkil qiladigan, hohlagan y vektori, $\Phi(x)$ funksiyasining kamayish tomonga yo'nalgan. Bu shart analitik usul bilan quyidagicha yoziladi: $(y, \text{grad} \Phi(x)) < 0$. Xususiyl holatda, $y = -\text{grad} \Phi(x)$ deb olishga bo'ladi.

Pastga tushish usullarining ma'nosi quyidagidan iborat: ba'zi bir $x^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashuvini saylab olib, bu nuqtadan $\Phi(x)$ funksionalining kamayish tarafiga qarab ba'zi bir egri chiziq yoki sinq chiziq bo'yicha yurish boshlanadi. Bunday yurish $\Phi(x)$ funksiyasining minimum nuqtasiga yetgunicha davom ettiriladi.

Pastga tushish chiziqlarini yasash har turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Pastga tushish chiziqlarini yasashning bir usuli quyidagicha: $x^{(0)}$ nuqtasi orqali $x = x^{(0)} - \lambda J^*(x^{(0)})F(x^{(0)})$ to'g'ri chizig'i yurgizadi va $x^{(0)}$ nuqtasiga yaqin joylashgan $\Phi(x)$ funksiyasining lokal minimumin topadi:

$$\min_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda) = \min_{\lambda \geq 0} \Phi(x^{(0)} - \lambda J^*(x^{(0)})F(x^{(0)}))$$

Mayli, λ_0 bundan minimum qiymatga erishiladigan λ parametrining qiymati bo'lsin. Shunda keyingi $x^{(1)}$ boshlang'ich nuqtasi

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \lambda J^*(x^{(0)})F(x^{(0)})$$

tengligidan aniqlanadi. Umumiy olganda, bunday nuqtalar ketma-ketligi

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k J^*(x^{(k)})F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.13)$$

formulasi bilan topiladi. Bundagi $x^{(k)}$ yaqinlashuvlari pastga tushish sinig chiziqlarining chet nuqtalari bo'ladi. Har turli pastga tushish usullari bir-biridan; a) $\Phi(x)$ funksiyasini saylab olish usuli bilan; b) λ parametrining qiymatlarini aniqlash usuli bilan; c) pastga tushish yo'nalishini saylab olish bilan farq qiladi.

Bu bitiruv malakaviy ishida chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning interpolyatsion usullarini yasashning umumiy prinsiplari va yo'llari, ularning xatoliklarini baholash, bu guruhga kiradigan aniq interpolyatsion usullarni yasash, keltirilib chiqarilgan usullarni murakkab chiziqli emas tenglamalarni yechishga qo'llash masalalari bayon qilinadi.

Ish kirish bo'limidan, besh paragrafdan, xulosa bo'limidan, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan va qo'shimchalardan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining kirish bo'limida chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechish masalasining qo'llanilishi, hisoblash amaliyotida keng foydalaniladigan sonli usullar oddiy iteratsiya usuli, Nyuton usuli, tez pastga tushish usullarining manosi va mazmuni bayon qilinadi. Hisoblash algoritmlarining yutug'i va kamchiliklariga qisqacha to'xtaladi.

Birinchi paragrafida, chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning interpolyatsiyalik usullari haqida umumiy ma'lumotlar beriladi, bu usulning Nyuton usuli bilan bog'liqligi ko'rsatiladi. 2- paragrafda, tenglamani aniqlaydigan funksiyani interpolyatsiyalash yo'li bilan bunday usullarning hisoblash algoritimi yasaladi, ularning aniq hususiy holatlari ko'riladi va usulning xatoligini baholash masalasi talqin qilinadi. 3-paragrafda, teskari funksiyani interpolyatsiyalashga asoslangan usulni yasash masalasi qaraladi, uning aniq hisoblash algoritimi keltirib chiqariladi va uning xatoligining taqribiy formulasi berilib, bu usulning tez yaqinlashuvchi bo'lishi aytib o'tiladi. 4-paragrafda, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni interpolyatsiyalash formulalarini chiziqli emas tenglamalar sistemalarini yechishga qo'llash haqida so'z bo'ladi. Bunda chiziqli interpolyatsiyalash holati uchun hisoblash formulalari yasaladi va ularning qiymatlari grafik usul bilan tushuntiriladi. 5-paragrafda, ishning 2,3,4-paragrafda yasalgan interpolyatsion algoritmlar aniq chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechish uchun qo'llaniladi va yasalgan usullarning natijaligi haqida so'z bo'ladi.

Xulosa bo'limida bitiruv malakaviy ishining asosiy natijalari va yasalgan interpolyatsion usullarning chiziqli emas tenglamalarni yechishdagi qulayliklari (algoritmlari, oddiy, tez yaqinlashuvchi bo'ladi v.h.k) aytib o'tiladi. Ishga qo'shimcha, EHM uchun C++ tilida tuzilgan yo'nalishlarning matni va uning uning ishlash natijasida olgan sonli natijalarining bosib chiqarilgan nusxalari tikilgan.

Bitiruv malakaviy ishida formulalar quyidagicha tartibda raqamlangan: 1- tamg'a paragrafning nomerini, 2- tamg'a paragrafdagi formulaning nomerini anglatadi. Paragrafning ichida formulaga asaolanganda faqat formulaning tartib raqami ko'rsatiladi, boshqa paragrafdagi formulaga asaolanganda paragrafning tartib raqami va undagi formulaning tartib raqami ko'rsatiladi. Masalan, (3.5) formulasi yani 3-paragrafning 5-formulasiga asoslanishini anglatadi.

1-§. Tenglamalarni yechishning interpolatsion usullarini yasash masalasi

Bunday usullarga, Nyuton va itaratsiya usullarining umumiyashtirilishi sifatida qarashga bo'ladi. Bu yerda, funksiyalarni interpolatsiyalashning, tenglamalarni yechishning Nyuton usuli bilan bog'liqligiga kengroq to'xtab o'tamiz. Sababi tenglamalarni yechishning interpolatsion usulining manosini tushintirish uchun shu holatni ko'rish yetarli bo'ladi.

Nyutonning asosiy usulida $x_n, f(x_n), f'(x_n)$ uch miqdorlarining qiymatlari hisoblanadi. Nyuton usuli bir qadamli va jadvalning $x_{n+1}, f(x_{n+1}), f'(x_{n+1})$ larni o'z ichiga oladigan kelgusi qatorini hisoblash uchun uning oldingi $x_n, f(x_n), f'(x_n)$ qatori foydalaniladi. Shunga kelgusi x_{n+1} ni aniqlash uchun $f(x)$ funksiyasini $f(x_n), f'(x_n)$ qiymatlari bo'yicha chiziqli interpolatsiyalaydi va x_{n+1} uchun chiziqli interpolatsiyalovchi funksiyaning noli qabul qilinadi.

Interpolatsiyalik ko'p handing darajasini orttirib, kelasi x_{n+1} yaqinlashuvining aniqligini orttirishga bo'ladi.

Birinchidan, topilgan $x_n, x_{n-1}, \dots$ yaqinlashuvlari bo'yicha faqatgina f va f' larni hisoblabgina emas, ularning yuqori tartibli f', f'' hosilalarining qiymatlarinida hisoblab, ularni $f(x)$ ni interpolatsiyalash uchun foydalanishga bo'ladi. Ikkinchidan, $f(x)$ ni interpolatsiyalash uchun bu qiymatlarni faqatgina x_n nuqtasida emas, shu kabi, uning oldidagi nuqtalardagi qiymatlaridan ham foydalanish mumkin.

Mayli, $f(x)$ funksiyasini interpolatsiyalash uchun interpolatsiyalashning bazi bir formulasi saylab olinib, $m > 1$ darajali $P_m(x)$ interpolatsiyalovchi ko'p hadi tuzilgan bo'lsin. Shunda kelgusi x_{n+1} qiymatini aniqlash uchun berilgan $f(x) = 0$ tenglamasi taqribiy turda

$$P_m(x) = 0 \quad (1.1)$$

tenglamasi bilan almashtiriladi. Bunday almashtirish bir qancha tushuntirishlarni talab qiladi: $m > 1$ bo'lganidan (1) tenglama birdan ortiq yechimga ega bo'ladi.

Hisoblash amalyotida x_n yaqinlashuvi qandaydir bir o'rindan boshlab, x_n^* yechimi o'z ichiga oladigan bazi kichik $[\alpha; \beta]$ kesmasiga kiradigani ko'proq uchrashadi. Bu holatda $P_m(x)$ interpolyatsiyalik ko'p hadi, aniq qiymatda, $f(x)$ funksiyasiga yaqin bo'ladi va ularning grafiklari sal farq qiladi. Ko'pchilik holatlarda, $f(x)$ $[\alpha; \beta]$ kichik kesma bir oddiy ildizga ega bo'ladigan holat tez-tez uchrashadi. $P_m(x)$ ning bor bo'lgan boshqa ildizlari $[\alpha; \beta]$ kesmaning tashqarisida joylashadi va izlanayotgan ildizni aniqlash uchun foydalanilmaydi. Bizda faqat x_n ga yaqin bo'lgan $P_m(x)$ ko'phadining ildizi qiziqtiradi.

Taqribiy (1) tenglama chiziqli emas tenglama bo'lganligidan, uning bunday xossaga ega bo'lgan ildizini topish qiyinlashadi. Bu masala $P_m(x)$ ko'p hadining izlanayotgan ildiziga ketma-ket yaqinlashishlarni yasash orqali yechiladi. U x_n ga yaqin bo'lganligidan, x_n qiymati unga boshlang'ich yaqinlashish sifatida olish mumkin. Keyingi yaqinlashuvlar $P_m(x)$ dan boshlanadigan chiziqli qismini ajratib olishdan kelib chiqqan, chiziqli tenglamalarni yechish orqali aniqlanadi. Buni tushuntirish uchun quyidagi holatni ko'ramiz: $f(x)$ ni interpolyatsiyalash uchun faqat ikki $f(x_n)$ va $f'(x_n)$ nomalumlari qaralayotgan bo'lsin. Shunda $P_m(x)$ ning x ning yonidagi x_n ga yaqin boshli chiziqli qism $f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n)$ ko'rinishida yoziladi. Bu holatda (1) tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} P_m(x) &= f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + F_m(x) = 0, \\ F_m(x) &= P_m(x) - f(x_n) - (x - x_n)f'(x_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Agarda (2) tenglamani, uning ajratilgan chiziqli qismidagi x nisbatan yechsak, unda bu tenglama itaratsiyani bajarish uchun qulay quyidagi kanonikalik

ko'rinishga ega bo'ladi: $x = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} [f(x_n) + F_m(x)] = \varphi(x)$. Bu oxirgi

tenglamani odatda bazi bir itaratsiyalik usul bilan yechadi. x ning bu tenglamadan topilgan qiymatini x_{n+1} uchun qabul qilib, $f(x_{n+1})$ va $f'(x_{n+1})$ qiymatlarini hisoblab, keying x_{n+2} yaqinlashuvlarini topishga otadi.

Endi teskari funktsiyani interpolatsiyalashga asoslangan usulga to'xtab o'tamiz. Bayonlashdan ko'rinib turgandek, u yaqinlashuvlarni topish uchun tenglamalarni yechishni talab qilmaydi. Uning, $f(x)$ ni interpolatsiyalashga asoslangan usuldan farqi shundan iborat. Usulning manosini oddiy misol bilan tushintiramiz. Mayli, $f(x) = 0$ tenglamasini yechish talab qilinsin. Hisoblashlarni bajarish natijasida x_n yaqinlashuvlarining, $y = f(x)$ va uning tuginlarining quyijagi jadvalini yasash kerak bo'lsin:

$$\begin{aligned} & x_0, x_1, \dots, x_n; \\ & y_0, y_1, \dots, y_n; \quad y_k = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, n \\ & y'_0, y'_1, \dots, y'_n; \end{aligned} \quad (1.3)$$

Odatda x^* yechimiga yaqin, bazi bir kichik kesmada $f(x)$ funksiyasi monoton o'zgaradi va $y = f(x)$ bog'liqligining teskarisini topish mumkin bo'ladi. Teskari funktsiyani $x = F(y)$ deb belgilaymiz. Shunda $f(x) = 0$ tenglamasi bu teskari funksiya uchun $y = 0$ qiymatiga mos $x = F(y)$ ning qiymatini topishni anglatadi. Buni (3) jadvalda bor sonlar yordamida interpolatsiyalash usuli bilan amalga oshirishga bo'ladi. Bizning holatimizda, bu $x^* = F(0)$ tengligini $F(x)$ funksiyasining va uning tuginlarining $y_n, y_{n-1}, \dots$ nuqtalaridagi qiymatlari bo'yicha interpolatsiyalash masalasi bo'ladi. Mayli, bazi bir interpolatsiyalash formulasi saylab olinib, uning yordamida m -darajali $\Pi_m(y)$ interpolatsiyalik

ko'phadi yasalgan bo'lsin. Bu ko'phadda $y = 0$ deb olib, $F(0) \approx \Pi_m(0)$ taqribiy tengligiga ega bo'lamiz. Bundan, o'z navbatida, keying x_{n+1} yaqinlashuvini $x_{n+1} = \Pi_m(0)$ tengligi bilan aniqlashga bo'ladi. Bundan so'ng $f(x)$ ning va uning hosilasining x_{n+1} nuqtasidagi kerakli qiymatlarini hisoblab, (3) jadvalni $(n+1)$ -nomeri bilan to'ldiramiz va masala x_{n+2} yaqinlashuvini aniqlashga o'tamiz. Endi yuqorida ko'rsatilgan har bir usuldan foydalanganda kelib chiqadigan ayrim masalalarni kengroq qaraymiz.

2-§. Funktsiyalarni interpolyatsiyalashga asoslangan usul

Berilgan $f(x)$ funksiyasini interpolyatsiyalash uchun faqatgina shu funksiyaning o'zining qiymatlarigina foydalaniladigan, bu usulning eng oddiy ko'rinishini ko'ramiz. Mayli hisoblashlar n - qadamgacha bajarilib, yechimga x_k yaqinlashuvlarining va $f(x)$ ning mos qiymatlarining jadvali yasalgan bo'lsin. Bu $f(x)$ funksiyasini, uning $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ $k+1$ tugunlaridagi qiymatlari bo'yicha, k - darajali algebralik ko'p hadi bilan interpolyatsiyalaymiz:

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + R(x), \\ P(x) &= \sum_{j=0}^k \frac{\omega(x)}{(x - x_{n-j})\omega'(x_{n-j})} f(x_{n-j}), \\ R(x) &= \frac{\omega(x)}{(k+1)} f^{(k+1)}(\xi), \\ \omega(x) &= (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-k}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Bu yerda ξ nuqtasi $x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ tugunlarini o'z ichiga oladigan, eng kichik kesmaga tegishli bo'ladi deb faraz qilinadi. $R(x)$ qoldiq hadini tashlab ketib, $f(x) = 0$ tenglamasini

$$P(x) = 0 \quad (2.2)$$

tenglamasi bilan taqribiy turda almashtiramiz. Keyingi bayonlashimizda ko'rsatmalilikni taminlash uchun, $P(x)$ interpolyatsiyalik ko'p hadini (1) da gikabi Logranj ko'rinishida emas, Nyuton ko'rinishida yozamiz:

$$P(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\dots(x - x_{n-k+1})f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (2.3)$$

Bu holatda x va $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ yaqinlashuvlari x^* yechimiga yaqin bo'lganda, $x - x_n, x - x_{n-1}, \dots, x - x_{n-k}$ ayirmalari kichik miqdorlari bo'lib, (3) ning o'ng tarafidagi qo'shiliuvchilar kamayish tartibida joylashadi. Shundan (3) ko'rsatishi (1) Logranj ko'rsatilishiga solishtirganda katta farqga ega bo'ladi.

Ikkinchidan (3) ning boshidagi chiziqli qismini ajaratib olish oson uni quyidagicha olishga bo'ladi:

$$f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) = \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} f(x_{n-1}) + \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} f(x_n)$$

Uning grafigi $M_n[x_n, f(x_n)]$ va $M_{n-1}[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ nuqtalari orqali otadigan va $f(x)$ funksiyasining grafigiga kesuvchi bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

Shunday qilib, (2) tenglamani quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) + F(x) = 0, \quad (2.4)$$

$$F(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots,$$

yoki uni chiziqli qismiga kiradigan x ga nisbatan yechsak,

$$x = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} [f(x_n) + F(x)] \quad (2.5)$$

bo'ladi. Bu (5) tenglamani odatda boshlang'ich yaqinlashishi sifatida $x_{n+1}^{(0)} = x_n$ qiymatini qabul qilib, bir qadamli interpolatsiyalash usuli bilan yechadi. (5) ning o'ng tarafida $x = x_{n+1}^{(0)}$ deb hisoblab, kelib chiqqan natijani birinchi yaqinlashuv $x_{n+1}^{(1)}$ deb qabul qiladi. Bundan so'ng $F(x)$ ning birinchi qo'shiluvchisi $(x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ azosini saqlab qolib, chiqqan natijani $x_{n+1}^{(2)}$ uchun qabul qiladi v.h.k. Ko'pchilik holatlarda itaratsiyalarni (5) tenglamaning aniqligini ortirish bilan biriktiradi: (5) ning o'ng tarafidagi $F(x)$ qo'shiluvchisini tashlab ketib, x ga bog'liq bo'lmagan birinchi qo'shiluvchining natijasini $x_{n+1}^{(1)}$ deb qabul

qiladi. Bundan keyin (5) ning o'ng tarafida $F(x)$ ning dastlabki ikki azosini saqlab qoladi va $x = x_{n+1}^{(2)}$ deb olib, kelib chiqqan natijani $x = x_{n+1}^3$ deb oladi v.h.k.

Shunday yo'l bilan x_{n+1} qiymati topilgandan keyin, $f(x_{n+1})$ qiymatini hisoblaydi, $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$ tugunlari uchun (1) turdagi interpolatsiyalik ko'p hadi yasaladi va x_{n+1} ni hisoblashga kirishiladi v.h.k. Endi x_n yaqinlashuvi x^* ga yaqin bo'lganida bunda kelib chiqadigan $\varepsilon_n = x_n - x^*$ xatoligining o'zgarish qonunini aniqlaymiz. Yasashimiz bo'yicha $P(x_{n+1}) = 0$ bo'lganidan,

$$f(x_{n+1}) = P(x_{n+1}) + R(x_{n+1}),$$

$$R(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_n) \dots (x_{n+1} - x_{n-k})}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi),$$

bunda $\xi \in x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$ nuqtalari ichida joylashadigan kichik kesmaga tegishli bo'ladi. Ikkinchi tarafdan

$$R_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x^*) = \varepsilon_{n+1} f'(x^* + \theta \varepsilon_{n+1}), \quad 0 < \theta < 1$$

Demak,

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{f'(x^* + \theta \varepsilon_{n+1})} R_{n+1}(x_{n+1})$$

bo'ladi. Agarda $R(x_{n+1})$ ning yuqorida keltirilgan aniqlamasidan foydalanib, $x_{n+1} - x_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ tengligini hisobga olsak, ε_{n+1} uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)! f'(x^* + \theta \varepsilon_{n+1})} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \dots (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n-k})$$

Bu tenglik quyidagini ko'rsatadi: ε_{n+1} xatoligining har bir keying qiymati $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_{n-k}$ xatoliklarining har biri bilan solishtirganda, yaxshigina yuqori tartibli kichik chama bo'lishini anglatadi. Shu sababdan $(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \dots (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n-k})$

qavslarining har biri taqribiy turda $-\varepsilon_n, -\varepsilon_{n-1}, \dots, -\varepsilon_{n-k}$ belgilashlari bilan almashtirishga bo'ladi. Yakunida, $f^{(k+1)}(\xi)$ va $f'(x^* + \theta\varepsilon_{n+1})$ belgilashlari, kichik xatoliklarga yo'l qo'yib, mos $f^{(k+1)}(x^*)$ va $f'(x^*)$ qiymatlari bilan almashtirish mumkin. Bunday barcha almashtirishlarni bajarib bo'lgandan keyin, x_n, x^* ga yaqin bo'lganda ε_n xatoligining o'zgarish qonunini yetarli aniqlik bilan sifatlaydigan, quyidagi taqribiy tenglikka ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{(-1)^{(k+1)} f^{(k+1)}(x^*)}{(k+1)! f'(x^*)} \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_{n-k} \quad (2.6)$$

Bu usulni tenglamalarni yechish uchun qo'llash $x_0, x_1, \dots, x_k$ nuqtalarini, bu nuqtalardagi $f(x)$ funksiyasining va uning tuginlarining qiymatlarini o'z ichiga oladigan, boshlang'ch jadvali yasash talab qilinadi. Endi bu usulning xususiy holatlarini qaraymiz.

1) $f(x)$ funksiyasini chiziqli interpolyatsiyalash

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + F(x) = 0,$$

$$F(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$$

Bundan, keying yaqinlashuvini aniqlash uchun

$$f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) = 0$$

deb faraz qilamiz. Shunda bundan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

formulasiga ega bo'lamiz. Bu formula bir nomalumli chiziqli emas tenglamani yechish uchun yozilgan vatarlar (kesuvchilar) usulining formulasi bilan mos keladi.

2) Kvadratlik (parabolalik) interpolyatsiyalashdan foydalanish. Mayli

$$f(x) = 0 \quad (2.8)$$

tenglamasining bazi bir yechimiga x_n, x_{n-1}, x_{n-2} uch har turli yaqinlashuvlar berilgan bo'lsin. Bu tugunlar bo'yicha $f(x)$ funksiyasi uchun Nyutonning interpolyatsiyalik formulasini yasaymiz:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_n; x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}) + \frac{f''(\xi)}{3!}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \quad (2.9)$$

Parabolalar usuli bo'yicha keyingi x_{n+1} yaqinlashuvi

$$f(x_n) + (x - x_n)f(x_n; x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}) = 0 \quad (2.10)$$

kvadrat tenglamasining x_n ga yaqin ildizi hisobida aniqlanadi. Bunda $f(x_n; x_{n-1}), f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})$ $f(x)$ funksiyasining mos birinchi, ikkinchi tartibli bo'lingan ayirmalari

$$f(x_n; x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

$$f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}) = \frac{f(x_n; x_{n-1}) - f(x_{n-1}; x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}}$$

Parabolalar usuli uch qadamli usullarning guruhiga kiradi. Hisoblashlarni boshlash uchun uch boshlangich yaqinlashuvlarni bilish talab qilinadi: x_0, x_{-1}, x_{-2} , Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$z = x - x_n, \quad a = f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}),$$

$$b_n = a_n(x_n - x_{n-1}) + f(x_n; x_{n-1}), \quad c_n = f(x_n),$$

unda (10) tenglamani

$$a_n z_n^2 + b_n z_n + c_n = 0 \quad (2.11)$$

ko'rinishida yozishga bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlari

$$z_n^{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n}}{2a_n}$$

formulasi bilan aniqlanadi. $z_n^{(1)}$ va $z_n^{(2)}$ ildizlarining moduli bo'yicha kichigining $\bar{z}_n$ deb belgilasak, unda

$$x_{n+1} = x_n + \bar{z}_n \quad (2.12)$$

deb yozishga bo'ladi. Bo'lingan ayirmalarni hisoblaganda ildizning atrofida manoli sifrlarning yoyilishi kelib chiqadi. Bu yo'nalish xatoliklarning o'sishiga olib keladi.

Shu sababdan parabolalar usulidan foydalanganda yetarli sondagi manoli sifrlar talab etiladi. Masalan, (11) kvadrat tenglamani yechishga keltirish uchun bu usulni uning har bir qadamida chiziqli tenglama yechiladigandek qilib, o'zgartirishga bo'ladi. Buning uchun dastlab

$f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_{n-1}) = 0$ chi-ziqli tenglamasini yechamiz:

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n; x_{n-1})}, \quad f(x_n; x_{n-1}) \neq 0 \quad (2.13)$$

Bundan so'ng (13) deb foydalanib, (10) ni quyidagicha o'zgartirib yozamiz:

$$f(x_n) + (\bar{x} - x_n)f(x_n, x_{n-1}) + (\bar{x}_n - x_n)(\bar{x}_n - x_{n-1})f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}) = 0 \quad (2.14)$$

Bunda $\bar{x}_n$ (13) formula bilan aniqlanadi. Shunda (14) tenglamasining ildizi berilgan tenglamasining ildiziga keying x_{n+1} yaqinlashuvini aniqlaydi:

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})}{f(x_n; x_{n-1})}(\bar{x}_n - x_n)(\bar{x}_n - x_{n-1}) \quad (2.15)$$

Shunday yasalgan (13), (14), (15) usulining yaqinlashish tartibi parabolalarning (11), (12) usulining yaqinlashish tartibidan past bo'lmaydi. Lekin haqiqiy koeffitsientli tenglamaning haqiqiy ildizlarini aniqlaganda, parabolalar usulidan o'zgacha, kompleks ildizlarini aniqlashga imkon bermaydi.

Bu usulni qo'llanib (8) tenglamaning haqiqiy ildizlarini (13), (14), (15) formulalari bilan aniqlanganda hisoblashlarni quyidagi jadval bo'yicha bajarish qulay bo'ladi.

n	x_0	$f(x_n) = f_n$	$f(x_n, x_{n-1})$	$f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = f_n$	x_n	$\bar{x}_n - x_n$	$\bar{x}_n - x_{n-1}$
0	x_0	f_0					
1	x_1	f_1	$f(x_1, x_0)$				
2	x_2	f_2	$f(x_2, x_1)$	$f(x_2, x_1, x_0)$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2 - x_1$	$\bar{x}_2 - x_1$
3	x_3	f_3	$f(x_3, x_2)$	$f(x_3, x_2, x_1)$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 - x_2$	$\bar{x}_3 - x_2$
	...	...	...	...	...	...	...

3-§. Teskari funksiyani interpolyatsiyalashga asoslangan usul

Berilgan $f(x) = 0$ tenglamasini yechish davomida, yechimga x_n yaqinlashuvchilarining va $f(x)$ funksiyasining ularga mos $y_n = f(x_n)$ qiymatlarining jadvali yasaladi deb qaraladi. Bundan tashqari, $y = f(x)$ funksiyasi x_n yaqinlashuvining va x^* yechimi ichida yotgan, kichik kesmada teskari funksiyaga ega bo'ladi deb hisoblanadi. Teskari $x = F(y)$ funksiyasini qaraymiz va uni $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ nuqtalaridagi mos $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$ qiymatlari bo'yicha interpolyatsiyalaymiz:

$$F(y) \approx \Pi(y) = \sum_{j=0}^k \frac{\Omega(y)}{(y - y_{n-1})\Omega'(y_{n-1})} x_{n-j},$$

$$\Omega(y) = \prod_{j=0}^k (y - y_{n-j}) \quad (3.1)$$

Keyingi x_{n+1} yaqinlashuvi uchun $\Pi(y)$ ko'p hadining $y = 0$ bo'lgandagi qiymati qabul qilinadi:

$$x_{n+1} = \Pi(0) = - \sum_{j=0}^k \frac{\Omega(y)}{y_{n-j}\Omega'(y_{n-1})} x_{n-j} \quad (3.2)$$

Bu usulda x_{n+1} uchun hisoblashlarni amalga oshirganda juda qulayli, aniq ifoda kelib chiqishini takidlab o'tamiz.

Endi x_n yaqinlashuvlari x^* yechimiga yaqin bo'lganda, $\varepsilon_n = x_n - x^*$ xatoliklarining o'zgarish qonunini aniqlaymi. Buning uchun $F(y)$ ni interpolyatsiyalashning xatoligini foydalanamiz:

$$r(y) = F(y) - \Pi(y) = \frac{\Omega(y)}{(k+1)} F^{(k+1)}(\eta)$$

Bu yerda $\eta \in Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_{n-k}$ va y ni o'z ichiga oladigan, eng kichik kesmaga tegishli bazi bir nuqta. $x^* = F(0)$ va $x_{n+1} = \Pi(0)$ bo'lganidan,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = \Pi(0) - F(0) = -r(0) = \frac{\Omega(0)}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\eta_0) = \\ &= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\eta_0) = \prod_{j=0}^k y_{n-j} = -\frac{(-1)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\eta_0) \prod_{j=0}^k f^{(k)}(x_{n-j}) \end{aligned}$$

Bunda η_0 belgisi bilan $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$ ni o'z ichiga oladigan kesmaning bazi bir nuqtasi belgilandi. $f(x^*) = 0$ va

$$f(x_n) = f(x^* + \varepsilon_n) - f(x^*) = \varepsilon_n f'(x^* + \theta \varepsilon_n), 0 < \theta < 1$$

bo'lganligidan

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\eta_0) \prod_{j=0}^k \varepsilon_{n-j} f'(x^* + \theta \varepsilon_{n-j})$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tarafida $F^{(k+1)}(\eta_0) \approx F^{(k+1)}(0)$ va $f'(x^* + \theta \varepsilon_{n-j}) \approx f'(x^*)$ o'rniga qo'yishlarni bajarib, uning bosh ulushini ajratamiz. Bundan keyin xatolikning o'zgarishidan unga ham oddiy va qulayli qonunni o'zida mujassamlashtiradigan, quyidagi taqribiy formulaga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} [f'(x^*)]^{(k+1)} F^{(k+1)}(0) \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_{n-k} \quad (3.3)$$

Bu formuladan quyidagi xulosaga kelamiz: agarda $x = F(y)$ teskari funksiyasi x^* bu yechimning atrofida $(k+1)$ tartibgacha uzliksiz hosilalarga ega va $x_0, x_1, \dots, x_n$ yaqinlashuvchilari x^* yechimiga yetarli yaqin bo'lsa, unda (3) formulasi bilan aniqlangan itaratsiyalik jarayon tez yaqinlashuvchi bo'ladi [1,2,6,7].

4-§. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni interpolatsiyalash formulalarin chiziqli emas tenglamalarning sistemalarin yechishga qo'llanish

Umumiy holatda chiziqli emas tenglamalarning sistemasi quyidagicha
vozilishi malum:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

bunda $x_1, x_2, \dots, x_n$ erkli o'zgaruvchilar; $f_1, f_2, \dots, f_m - n$ o'zgaruvchilaring berilgan funksiylari.

Sistemaning yechimi deb (yoki uning ildizlari deb), nomalum $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning o'rinlariga oborib qo'yganda, (1) sistemasining har bir tenglamasini birxillikka aylantiradigan $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ sonlarining to'plamiga aytiladi.

Oldingi vaqtlari $f_1, f_2, \dots, f_m$ funksiyalarini haqiqiy funksiyalar deb faraz qilamiz, yani argumentlarning haqiqiy qiymatlarida bu funksiyalarning har biri haqiqiy qiymatga ega deb hisoblanadi. Biz bu yerda (1) sistemasining faqat haqiqiy yechimlarini aniqlash masalasi bilan shug'illanamiz.

Tenglamalarning soni bilan nomalumlar soni mos keladigan sistema normal sistema deb ataladi. Agarda tenglamalarning soni nomalumlar sonidan ortiq bo'lsa, unda umumiy holatda, Sistema yechimga ega bo'lmaydi. Agarda tenglamalarning soni nomalumlar sonidan kam bo'lsa, unda sistema odatda cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Bunday yechimlarning bittasini topish uchun ortiq nomalumlar hohlagan son qiymatlarin berib, bundan kelib chiqqan normal sistemani yechish yetarli. Oldingi vaqtlari faqat normal sistemalarni yechish bilan chegaralangan. Endi sistemaning tenglamalarining bog'liqsiz shartini keltiramiz.

Ikki nomalumli $f(x; y) = 0$, $\varphi(x; y) = 0$ tenglamalari ularning Yakobi matritsasi

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial \varphi / \partial x & \partial \varphi / \partial y \end{vmatrix}$$

noldan farqli bo'lgan holatdagina erkli bo'ladi, teskari holatda, bir tenglama ikkinchisining aniqlamasi bo'ladi va bu tenglamalardan tuzilgan Sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi [1,2,4,6,7].

Uch nomalumli uch tenglama uchun ularning bog'liqsiz bo'lish sharti, huddi shu kabi aniqlanadi:

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0$$

Bu shartlar algebralik va shu kabi transendentlik tenglamalar sistemasiga ham tegishli bo'ladi.

Agarda (1) sistemasining qandaydir bir tenglamasidan nomalumlarining birini boshqalari orqali keltirish mumkin bo'lsa, masalan, x_n ni boshqalari orqali keltirsak, unda bu keltirilgan tenglikni sistemaning boshqa tenglamalariga oborib qo'yib, $n-1$ nomalumli $n-1$ tenglamalarning sistemasiga ega bo'lamiz. Agarda bu yangi sistemaning tenglamalaridan yana bir nomalumni olib tashlash mumkin bo'lsa, unda $n-2$ nomalumli $n-2$ tenglamalarning sistemasiga kelamiz v.h.k. Lekin, ish davomida, bazi bir nomalumlarini chiqarib tashlashga bo'ladigan tenglamalarning sistemasi kamdan kam uchraydi. Chiziqli emas tenglamalar sistemalarini yechish masalalari adabiyotlarda yetarli bo'lmagan darajada ishlab chiqarilgan. Ko'pincha faqatgina ikki nomalumli ikki tenglamalar sistemalari o'rganiladi. Bunday tenglamalar sistemalarini yechish uchun keng tarqalgan usullar itaratsiya usuli, Nyuton usuli, eng tez pastga tushish usuli va ularning ayrim o'zgartirilgan turlari bo'ladi. Shundan grafiklik usul bilan qisqacha tanishgandan keyin, interpoliyatsiyalik ko'p hadlar bilan yaqinlashtirish usuli bilan to'liqroq tanishamiz. Oldindan shakllangan dastur bo'yicha ikki tenglama sistemasiga bog'laymiz. Ikki nomalumli ikki tenglamalar

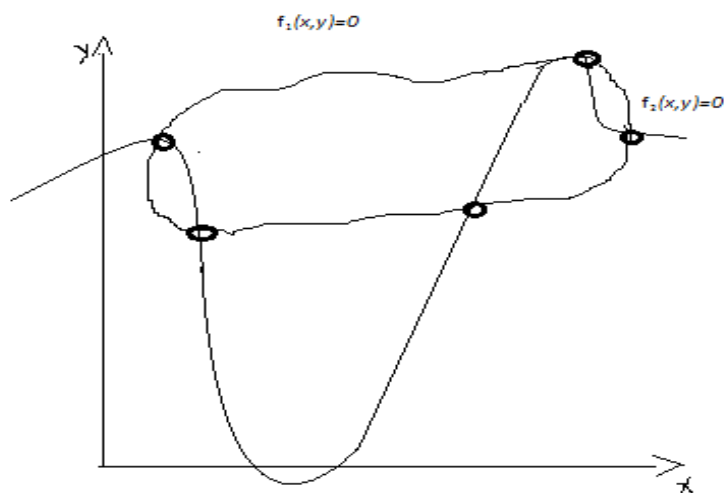
$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y) = 0, \\ v &= f_2(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

sistemasini barcha grafik usullari bilan yechishga bo'ladi. Buning uchun (x, y) tekisligida qandaydir bir koordinatalar sistemasi saylab olinadi. Ko'pincha to'g'ri burchakli dekart sistemasidan foydalaniladi, lekin koordinatalarning polyar, logarifmlik va hohlagan boshqa sistemasidan foydalanishga bo'ladi. Saylab olingan koordinatalar sistemasida $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ egri chiziqlari yasaladi.

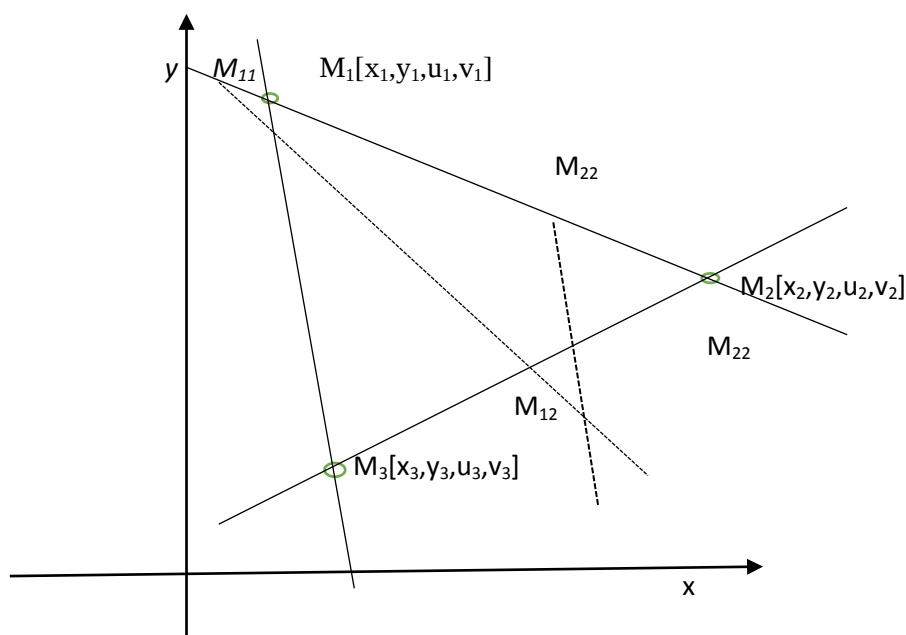
Buni ko'pincha nuqtalar bo'yicha amalga oshirishga bo'ladi: $y = a$ deb belgilab, x ning mos qiymatlarini $f_1(x, a) = 0$, $f_2(x, a) = 0$, tenglamalarning ildizlari hisobida aniqlaydi. Bunday nuqtalarning yetarli sonini aniqlab, (2) sistemasining ildizlarini yasalgan egri chiziqlarning kesisish yoki urinish nuqtalari hisobida topiladi (1-rasm).

Grafiklik usul o'zining murakkabligi sabab keng foydalanilmaydi. Agarda berilgan sistemaning yechimini yuqori aniqlik bilan aniqlash talab etilsa, unda bu usulning murakkabligi yanada ko'payadi. Shu sababli bu holatda, izlanayotgan ildizlarining atrofida funksiyalarning grafiklarini yuqori aniqlik bilan yasash kerak.

Algebralik va transendent tenglamalarning sistemalarin yechish uchun interpolyatsiyalik ko'p hadlar bilan yaqinlashtirish usulidan foydalanish, grafiklik usulning ko'rsatilgan kamchiligidan halos bo'lishga imkon beradi.



1-rasm



2-rasm

Endi $u_j(x_j, y_j)$ orqali (x, y) tekisligidagi hohlagan j nuqtani belgilaymiz. Agarda bu nuqtada (12) formulasi bo'yicha, izlanayotgan funksiyalarning mos qiymatlari $u_j = f_1(x_j; y_j), v_j = f_2(x_j; y_j)$ hisoblangan bo'lsa, unda u_j, v_j, x_j, y_j to'rt sonining to'plamini sinab ko'rish deb atab, $M_j[u_j, v_j, x_j, y_j]$ belgisi bilan belgilaymiz. Qisqartirish uchun $\langle\langle M_j \text{ nuqtasi} \rangle\rangle$, yoki $\langle\langle M_j \text{ sinashi} \rangle\rangle$ deb ataymiz. Birinchi holatda bu (x_j, y_j) ikki koordinatalarining to'plami, ikkinchi holatda $[u_j, v_j, x_j, y_j]$ sonlarining to'plamini ifodalaydi.

Atamalarni aniqlab bo'lib, oddiylik uchun interpolatsiyalash usulin bayon qilishga o'tamiz. Buning uchun (x, y) dekart koordinatalar sistemasida ildizining yetarli kichik atrofida M_1, M_2, M_3 uch sinab ko'rish nuqtalarin olamiz va M_1, M_2, M_3 nuqtalarini tutashtiradigan uchta to'g'ri chiziq o'tkazamiz (2-rasm).

Birinchi yaqinlashtirishda, bu to'g'ri chiziqlarning hohlaganining bo'yida $u = f_1(x; y), v = f_2(x; y)$ funksiyalari chiziqli funksiyalar bo'ladi. Shundan,

$$\frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} = \frac{x_u - x_j}{x_{j+1} - x_{j-y_j}} = \frac{y_u - y_j}{y_{j+1} - y_j} \quad (4.3)$$

bo'ladi va huddi shu kabi

$$\frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j} = \frac{x_v - x_j}{x_{j+1} - x_{j-y_j}} = \frac{y_v - y_j}{y_{j+1} - y_j} \quad (4.4)$$

tengliklari bajariladi. Bunda (x_j, y_j) , (x_{j+1}, y_{j+1}) , $j = 1, 2, 3$, $j + 3 = j$ bu to'g'ri chiziqlarning bo'yida olingan, ikki tayanch nuqtalari bo'ladi.

Bundan so'ng (3) va (4) ga $u = 0, v = 0$ qiymatlarini qo'yib, chiziqli yaqinlashtirishda bu to'g'ri chiziqlarning ikkisining bo'yida izlanayotgan egri chiziqlarning ikki nuqtasini aniqlaymiz: $u = f_1(x; y)$, $v = f_2(x; y)$. Bu nuqtalarni mos holda quyidagicha belgilaymiz: $u = 0$ uchun M_{11}, M_{12} deb, $v = 0$ uchun M_{21}, M_{22} deb belgilaymiz. Shunda ko'rsatilgan nuqtalarning koordinatalari (3),(4) formulalariga muvofiq, $u = 0$ uchun quyidagich aniqlanadi:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{u_2 - u_1}; & y_{11} &= \frac{y_1 u_2 - y_2 u_1}{u_2 - u_1}; \\ x_{12} &= \frac{x_2 u_3 - x_3 u_2}{u_3 - u_2}; & y_{12} &= \frac{y_2 u_3 - y_3 u_2}{u_3 - u_2}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

va $v = 0$ uchun quyidagi qiymatlarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{v_2 - v_1}; & y_{21} &= \frac{y_1 v_2 - y_2 v_1}{v_2 - v_1}; \\ x_{22} &= \frac{x_2 v_3 - x_3 v_2}{v_3 - v_2}; & y_{22} &= \frac{y_2 v_3 - y_3 v_2}{v_3 - v_2}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agarda dastlabki bazislik to'grichiziqlarining biri koordinatalar o'qining biriga parallel bo'lsa, unda (5), (6) formulalari bir qancha osonlashadi. Masalan, agarda $x = x_1$ yoki $y = y_2$ bo'lsa, unda mos $x_{11} = x_{21} = x_1$ yoki $y_{11} = y_{21} = y_1$ bo'ladi.

Boshlang'ich $M_1(x_1, y_1, u_1, v_1), M_2(x_2, y_2, u_2, v_2), M_3(x_3, y_3, u_3, v_3)$ uch sinab ko'rish-lari bo'yicha to'liq aniqlanadigan, x_n va y_n qiymatlari bo'yicha, M_{11}, M_{12} va M_{21}, M_{22} to'g'ri chiziqlarini yasaymiz.

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2 \quad (4.7)$$

Bu to'g'ri chiziqlar izlanayotgan $u = f_1(x, y) = 0, v = f_2(x, y) = 0$ egri chiziqlarini yaqinlashtiradi. Bundan keyin, (7) to'g'ri chiziqlarining kesishish nuqtasi hisobida to'rtinchi $M_4(x_4, y_4)$ nuqtasi topiladi:

$$x_4 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}; \quad y_4 = k_1 x_4 + b_1; \quad (4.8)$$

$$k_1 = \frac{y_{12} - y_{11}}{x_{12} - x_{11}}; \quad k_2 = \frac{y_{22} - y_{21}}{x_{22} - x_{21}}; \quad (4.9)$$

$$b_1 = \frac{y_{11}x_{12} - x_{11}y_{12}}{x_{12} - x_{11}}; \quad b_2 = \frac{y_{21}x_{22} - x_{21}y_{22}}{x_{22} - x_{21}}; \quad (4.10)$$

$M_4(x_4, y_4)$ nuqtasini aniqlab, qaralayotgan jarayonning birinchi qadamini tugatamiz.

Ikkinchi qadamida x_4, y_4 ni dastlabki (2) tenglamasiga oborib qo'yib va ularga mos u_4, v_4 ni hisoblab, yaxshilangan $M_4(x_4, y_4, u_4, v_4)$ sinashiga ega bo'lamiz. Boshlang'ich sinashlarning aniqligi eng pastini, masalan M_2 ni, undan keyin, M_1, M_3, M_4 sinashlari bo'yicha, yuqoridagi kabi $M_5(x_5, y_5)$ nuqtasini aniqlaymiz. Bu protsesstni davom etib, qadama qadam M_n, M_{n+1}, M_{n+2} , $n = 1, 2, 3, \dots$ uchburchagini nuqtaga aylanguncha kichiklashtirib boramiz. Bu nuqta (2) sistemasining izlanayotgan $x^{(0)}, y^{(0)}$ yechimini aniqlaydi. Agarda (5), (6) va (9), (10) formulalaridan barcha x_{rj}, y_{rj} lar chiqarilib tashlansa, unda hisoblash formulalari yaxshigina osonlashadi. Bu holatda oddiy akslantirishlarni bajarib, quyidagi natijalarga kelamiz:

$$k_v = \frac{\sigma_y^{(v)}}{\sigma_x^{(v)}}, \quad b_v = \frac{\sigma_{xy}^{(v)}}{\sigma_x^{(v)}}, \quad v=1;2;$$

$$\sigma_{xy}^v = \sum_{j=1}^3 f_{vj}(xy)_j; \quad (xy)_j = x_{j+1}y_{j+1} - x_{j+2}y_{j+2}; \quad (4.11)$$

$$f_{1j} = u_j; \quad f_{2j} = v_j; \quad j+3 = j$$

Shunday qilib, eng so'ngi hisoblash formulalari sifatida (3) va (11) formulalarini olishga bo'ladi. Bu formulalar dastlabki berilgan M_1, M_2, M_3 uch sinashi bo'yicha x_4, y_4 ni hisoblashga imkoniyat beradi. (5), (6) va (9),(10) formulalarini yakunlovchi qadamni yakunlash uchun foydalanish kerak, yoki hisoblashlarni bu formulalar bo'yicha bajarib, so'ngi natijani(11) formulasi bilan yakunlash mumkin. Yuqorida keltirilgan natijalarni ko'p nomalumli chiziqli emas tenglamalarning sistemalari uchun oson umumiylashtirishga bo'ladi. [4,10].

5-§. Sonli misollar

Diplom ishining bu paragrafidan chekli o'lchamli chiziqli emas tenglamalarni va algebraik sistemalarni yechishning intepolyatsion usullarining yuqorida keltirib chiqarilgan hisoblash algoritmlari berilgan aniq tenglamalarni yechishga qo'llaniladi. Bitiruv malakaviy ishini yozish davomida kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko'p sonli hisoblash tajribalarining orasidan, bu usulni yetarli murakkab chiziqli emas tenglamalarning yechimlarini nisbatan kam sondagi itaratsiyalarni o'rinlab, yuqori aniqlik bilan aniqlashga imkoniyat berishini tasdiqlash turi, ikki tenglamaning yechimini keltiramiz. Barcha hisoblashlar C++ algoritmlash tilida dasturlar tuzilib, kompyuterdan foydalanib bajariladi. Hisoblashlarning natijalari quyidagi N1, N2 jadvallarida keltirilgan.

1-misol. Quyidagi transendent tenglamasining mavjud musbat ildizini $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblang:

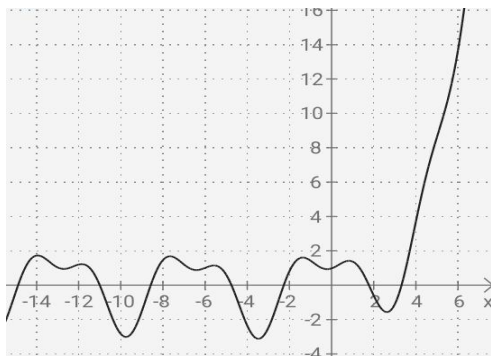
$$f(x) = \ell^{x/2} - \ell^{x/3} + 2 * \sin(x + 2) + \sin(2 * x - 1) = 0 \quad (5.1)$$

Yechilishi. Bu tenglamaning musbat ildizlarining barligini yoki yo'qligini aniqlash uchun, dastlab quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0.9771	1.3768	-0.0019	-1.1134	3.6936

Jadvaldan $[1,2]$ va $[3,4]$ kesmalarining uchlarida $y = f(x)$ funksiyasi har turli belgilarga ega bo'lganidan, bu kesmalarining har birida berilgan tenglamaning eng kamida bir ildizi bor bo'ladi, yani berilgan tenglama eng kamida ikki musbat ildizga ega bo'ladi.

Haqiqatdan ham, berilgan $y = f(x)$ funksiyasining grafigi (1) tenglamasining cheksiz ko'p manfiy ildizlarga ega va uning barcha musbat ildizlarining $[0,4]$ kesmasiga tegishli, $[1,2]$ va $[3,4]$ kesmalarida faqat bir musbat ildizlari bor bo'lishini ko'rsatadi.



1-rasm

Dastlab (1) tenglamaning $[1,2]$ kesmasida joylashgan musbat ildizini ko'rsatilgan aniqlik bilan aniqlaymiz. Buning uchun boshlang'ich nuqtalar hisobida $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$ qiymatlarini qabul qilib, hisoblashlarni (2.15) formulasidan foydalanib bajaramiz.

Kompyuterdan foydalanib bajarilgan hisoblashlarning natijalari 1-jadvalga joylashtirilgan. Bu jadval bo'yicha (1) tenglamaning $[1,2]$ kesmasida joylashgan musbat ildizini $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan aniqlash uchun (2.15) formulasi bo'yicha hammasi bo'lib $k = 4$ sondagi itaratsiyalarni bajarish yetarli bo'ldi. Shunda (1) tenglamaning ko'rsatilgan aniqlik bilan aniqlab musbat ildizi hisobida $x_4 = 1.773475797755$ sonini qabul qilishga bo'ladi. Bu taqribiy yechimning mos emas soni $f(x_4) = 10^{-12}$ teng bo'ladi (hisoblashlar ikki ortiq o'nlik belgilar saqlanib bajarilgan).

Berilgan (1) transendent tenglamasining $[3,4]$ kesmasida joylashgan ikkinchi musbat ildizini aniqlash uchun boshlang'ich nuqtalari hisobida $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3.5$ sonlari qabul qilinib, hisoblashlar yana (2.15) formulasidan foydalanib aniqlandi. Kompyuter yordamida aniqlangan hisoblashlarning natijalari 2-jadvalda

keltirilgan. Bu jadvalda ham $k = 4$ sondagi itaratsiyalarni bajarib, (1) tenglamaning ikkinchi musbat ildizi kerakli aniqlik bilan topildi: $x_4 = 3.321539894793$, $f(x_4) = 0$ (hisoblashlar ikki ortiq o'nlik belgilar saqlanib bajarilgan).

Ikki holatda ham itaratsiyalarni bajarish $|f(x_k)| \leq \varepsilon = 10^{-12}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sharti bajarilganda to'xtatildi.

1-jadval

Berilgan (1) tenglamasining [1,2] kesmasidagi musbat ildizini (2.15) interpolatsiyalik formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-12}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1.000000000000 1.500000000000 2.500000000000	1.376819846542 0.676009717359 -1.522495664069	1.807486041685	1.858941430509	-0.228737461660
1	1.500000000000 1.858941430509 2.500000000000	0.676009717359 -0.228737461660 -1.522495664069	1.745601774236	1.766888589107	0.017500542932
2	1.766888589107 1.858941430509 2.500000000000	0.017500542932 -0.228737461660 -1.522495664069	1.773430937050	1.773243566505	0.000617475884
3	1.766888589107 1.773243566505 1.858941430509	0.017500542932 0.000617475884 -0.228737461660	1.773475991412	1.773475868376	-0.000000187778
4	1.766888589107 1.773243566505 1.773475868376	0.017500542932 0.000617475884 -0.000000187778	1.773475797753	1.773475797755	-0.000000000001

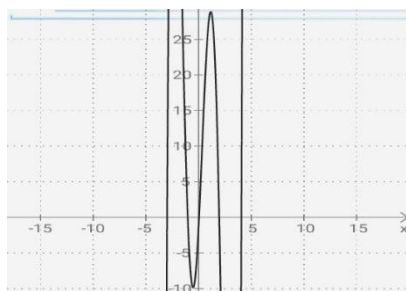
Berilgan (1) tenglamaning [3,4] kesmasidagi musbat ildizini (2.15) interpolyatsiyalik formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-12}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2.000000000000	-0.601937195152	3.14096130139	3.413296869307	0.421266646461
	2.500000000000	-1.522495664069			
	3.500000000000	0.852835983512			
1	2.500000000000	-1.522495664069	3.328663569466	3.320363011636	-0.005141255684
	3.413296869307	0.421266646461			
	3.500000000000	0.852835983512			
2	3.320363011636	-0.005141255684	3.321483527278	3.321532113561	-0.000034015386
	3.413296869307	0.421266646461			
	3.500000000000	0.852835983512			
3	3.320363011636	-0.005141255684	3.321539900046	3.321539895022	0.000000001001
	3.321532113561	-0.000034015386			
	3.413296869307	0.421266646461			
4	3.320363011636	-0.005141255684	3.321539894793	3.321539894793	-0.000000000001
	3.321532113561	-0.000034015386			
	3.321539895022	0.000000001001			

2-misol. Quyidagi algebraik tenglamaning barcha ildizlarini interpolyatsion usuldan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblang:

$$f(x) = 1.23 * x^5 - 2.52 * x^4 - 1.61 * x^3 + 17.3 * x^2 + 29.4 * x - 1.34 = 0 \quad (5.2)$$

Yechilishi. Berilgan $y = f(x)$ funksiyasining grafigini yasash yo'li bilan (2)



tenglamaning haqiqiy ildizlari ajratiladi: bu tenglama $[-3, -2]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[4, 5]$ kesmalarida joylashgan besh haqiqiy ildizga ega bo'lishi aniqlandi.

Bundan keyin (2) tenglamaning har bir haqiqiy ildizini $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan aniqlash uchun hisoblashlar (2.15)

2-rasm

itaratsion formulasi bilan bajariladi. Barcha holatda hisoblashlar

$|f(x_k)| \leq \varepsilon = 10^{-12}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sharti bajarilganda to'xtatildi. Kompyuterdan foydalanib bajarilgan hisoblashlarning natijalari quyidagi 3-7 kesmalarida joylashtirilgan (hisoblashlar ikki ortiq o'nlik belgilarni saqlab bajarilgan).

3-jadval

Berilgan (2) tenglamasining $\alpha_1 \in [-3, -2]$ kesmasidagi manfiy ildizini (2.15) interpolatsion formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	-3.500000000000	-226.204062500000	-2.984293456672	-3.001587731722	-2.565503245498
	-3.000000000000	-2.150000000000			
	-2.500000000000	66.292812500000			
1	-3.001587731722	-2.565503245498	-2.982899720845	-2.999257139661	-1.956126252036
	-3.000000000000	-2.150000000000			
	-2.500000000000	66.292812500000			
2	-3.001587731722	-2.565503245498	-2.991775839311	-2.991706005523	-0.004503044477
	-2.999257139661	-1.956126252036			
	-2.500000000000	66.292812500000			
3	-3.001587731722	-2.565503245498	-2.991688582543	-2.991688426902	-0.000000196190
	-2.999257139661	-1.956126252036			
	-2.991706005523	-0.004503044477			
4	-2.999257139661	-1.956126252036	-2.991688426136	-2.991688426136	0.000000000002
	-2.991706005523	-0.004503044477			
	-2.991688426902	-0.000000196190			

4-jadval

Berilgan (2) tenglamasining $\alpha_2 \in [-2, -1]$ kesmasida joylashgan haqiqiy ildizini (2.15) interpolatsion formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
---	---------------------------	---	-------------	-----------	--------------

0	-1.500000000000	25.724687500000	-1.061872494412	-0.990806834049	-1.429397721590
	-1.000000000000	-1.090000000000			
	-0.500000000000	-9.898437500000			
1	-1.000000000000	-1.090000000000	-1.073644816711	-0.965343968230	-2.335525626975
	-0.990806834049	-1.429397721590			
	-0.500000000000	-9.898437500000			
2	-0.990806834049	-1.429397721590	-1.030973969583	-1.028055864435	-0.014449329180
	-0.965343968230	-2.335525626975			
	-0.500000000000	-9.898437500000			
3	-1.028055864435	-0.014449329180	-1.028446262990	-1.028420791014	-0.000067400975
	-0.990806834049	-1.429397721590			
	-0.965343968230	-2.335525626975			
4	-1.028420791014	-0.000067400975	-1.028422501244	-1.028422500639	-0.000000000274
	-1.028055864435	-0.014449329180			
	-0.965343968230	-2.335525626975			
5	-1.028422500639	-0.000000000274	-1.028422500646	-1.028422500646	0.000000000001
	-1.028420791014	-0.000067400975			
	-1.028055864435	-0.014449329180			

5-jadval

Berilgan (2) tenglamasining $\alpha_3 \in [0,1]$ kesmasidagi haqiqiy ildizini (2.15)

interpolyatsion formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan

hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	-0.500000000000	-9.898437500000	-0.126318173810	-0.114600303588	-4.458271359610
	0.500000000000	15.553437500000			
	1.000000000000	27.970000000000			
1	-0.114600303588	-4.458271359610	0.038636067102	0.003531848881	-1.235948553141
	0.500000000000	15.553437500000			
	1.000000000000	27.970000000000			
2	-0.114600303588	-4.458271359610	0.048842412624	0.048347407125	0.120019115143
	0.003531848881	-1.235948553141			
	1.000000000000	27.970000000000			
3	-0.114600303588	-4.458271359610	0.044380702188	0.044478620387	0.000470499072
	0.003531848881	-1.235948553141			
	0.048347407125	0.120019115143			

4	0.003531848881	-1.235948553141	0.044463394275	0.044463364167	0.000000038024
	0.044478620387	0.000470499072			
	0.048347407125	0.120019115143			
5	0.044463364167	-0.000000038024	0.044463365400	0.044463365400	0.000000000002
	0.044478620387	0.000470499072			
	0.048347407125	0.120019115143			

6-jadval

Berilgan (2) tenglamasining $\alpha_4 \in [1,2]$ kesmasidagi haqiqiy ildizini (2.15) interpolatsion formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1.500000000000	23.930312500000	1.966665098493	1.959221604492	-0.036248511839
	2.000000000000	-3.100000000000			
	2.500000000000	-49.597812500000			
1	1.959221604492	-0.036248511839	1.958826088078	1.958748938693	-0.001562878067
	2.000000000000	-3.100000000000			
	2.500000000000	-49.597812500000			
2	1.958748938693	-0.001562878067	1.958727641143	1.958727636305	-0.000000096160
	1.959221604492	-0.036248511839			
	2.500000000000	-49.597812500000			
3	1.958727636305	-0.000000096160	1.958727634995	1.958727634995	0.000000000001
	1.958748938693	-0.001562878067			
	1.959221604492	-0.036248511839			

7-jadval

Berilgan (2) tenglamasining $\alpha_5 \in [4,5]$ kesmasidagi haqiqiy ildizini (2.15) interpolatsion formulasidan foydalanib, $\varepsilon = 10^{-10}$ aniqligi bilan hisoblashning natijalari

k	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolatsion tuginlaridagi qiymatlari	$\bar{x}_k$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
---	---------------------------	---	-------------	-----------	--------------

0	3.500000000000	-108.940937500000	4.109919544428	4.087818186697	8.482745626481
	4.200000000000	57.849961600000			
	4.500000000000	250.510937500000			
1	4.087818186697	8.482745626481	4.073371797427	4.068224339120	0.948148682175
	4.200000000000	57.849961600000			
	4.500000000000	250.510937500000			
2	4.068224339120	0.948148682175	4.065758662337	4.065692276053	-0.003049007751
	4.087818186697	8.482745626481			
	4.500000000000	250.510937500000			
3	4.065692276053	-0.003049007751	4.065700392431	4.065700414311	0.000000044601
	4.068224339120	0.948148682175			
	4.087818186697	8.482745626481			
4	4.065692276053	-0.003049007751	4.065700414192	4.065700414192	0.000000000001
	4.065700414311	0.000000044601			
	4.068224339120	0.948148682175			

Bakalavr bitiruv malakaviy ishini tayyorlashning davomida kompyuterdan foydalanib bajarilgan ko'p sonli hisoblash ishlarining asosida quyidagi xulosalarga kelamiz:

1) Chiziqli emas tenglamalarni yechishning funksionallarni interpolyatsiyalash formulalariga asoslanib yasalgan itaratsiyalik usullarni qo'llash uchun qulayli va tez yaqinlashuvchi usullari bo'ladi;

2) Bunday usullar chiziqli emas tenglamalarning sistemalarini yechishga oson umumiyashtiriladi. Shundan interpolyatsiyalik-itaratsiyalik usullar chekli o'lchamdagi chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning yuqori natijali usullarining guruhiga kiradi.

Xulosa

Ko'pchilik holatlarda, boshqalariga nisbatan oddiy chiziqli emas tenglamalarning va ularning sistemalarining analitikalik yechimlarini topish mumkin bo'lavermaydi. Shu holatga bog'liq, so'ngi yarim asrda sonli usullar kata tezlik bilan rivojlandi: oldindan malum usullar takomillashtirilib, ko'plab yangi algoritmlar yaratildi [3,5,8,12]. Taqribiy usullarning asosiy o'zgachaliklari quyidagilardan iborat: ular ko'pincha har taraflama va yuqorinatijali bo'lib, keng guruhdagi chiziqli emas tenglamalarning va ularning sistemalarining taqribiy yechimlarini oldindan berilgan aniqlik bilan aniqlashga imkoniyat beradi, algoritmlari oddiy va kompyuterlarda ishlash uchun qulay [1,2,4,6].

Yuqorida aytib o'tilganidek, chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechish uchun hisoblash amalyotida keng foydalaniladigan usullarga oddiy itaratsiya usuli, Nyuton usuli, tez pastga tushish usuli va ularning bazi bir o'zgartirilgan turlari kiradi. Ularning ichida yaqinlashish atrofining kengligiga bog'liq, eng tez pastga tushish usuli, bunday tenglamalarni yechishning umumiydagi usuli bo'ladi. Bu usulni, oddiy itaratsiya va Nyuton usullari yaqinlashuvchi bo'lmaydigan holatlarda foydalanish maqsadga muvofiq keladi. Uni oddiy itaratsiya va Nyuton usullari uchun yechishga yaqin joylashgan boshlang'ich yaqinlashishni aniqlash maqsadida foydalaniladi.

Chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning, boshqa usullarga nisbatan keyinroq paydo bo'lgan usullarning biri interpolatsiyalash usuli hisoblanadi. Bu usul 1956-yili nemis matematigi Д.Мюллер tarafidan yaratilgan [2,4]. Uning hisoblash algoritmi oddiy va hisoblashlarni bajarish uchun qulay bo'lib, berilgan chiziqli emas tenglamaning yechimini hohlagan aniqlik bilan aniqlashga imkoniyat beradi. Bundan tashqari, u tenglamaning haqiqiy ildizlari bilan bir qatorda, kompleks ildizlarini ham aniqlashni taminlaydi.

Bu usul funksiyalarni teskari interpolatsiyalash masalasi bilan o'zaro bog'liq. Haqiqatdan ham, funksiyalarni interpolatsiyalash masalasida argumentning jadvalda ko'rsatilgan $\bar{x}$ qiymatiga mos funksiyaning $\bar{y} = f(\bar{x})$

qiymatini aniqlash talab etiladi. Bunga teskari masalani qaraymiz: mayli, $y = f(x)$ funksiyasining jadvaldagi $\bar{y}$ qiymati malum bo'lsin va argumentining unga mos qiymatini topish kerak bo'lsin. Bu masalani yechish $f(x) = \bar{y}$ tenglamasini yachishga keltiriladi. Bunda $f(x)$ funksiyasi jadval usulida berilgani sababli (analitikalik ko'rinishi nomalum), x ning izlanayotgan qiymatini topish uchun x, y larning jadvalda bor qiymatlaridagina foydalana olamiz.

Bu sonli masalani ikki usul bilan yechish mumkin. Birinchi usulda $y = f(x)$ funksiyalik bog'liqligi bir qiymatli deb qaraladi. $f(x)$ monoton kamayuvchi yoki o'suvchi funksiya bo'lgan holatda bus hart bajariladi. Shundan $y = f(x)$ ni monoton funksiya deb hisoblaymiz. Shunda bir qiymatli $x = F(y)$ teskari bor bo'ladi. Shu $F(y)$ funksiyasini n -darajali $\Pi(y)$ ko'p hadi bilan interpolatsiyalaymiz: $F(y) \approx \Pi(y)$. Bunda $y = \bar{y}$ deb qaralib, quyidagi taqribiy tenglikga ega bo'lamiz: $\bar{x} = F(\bar{y}) \approx \Pi(\bar{y})$.

Ikkinchi usulli ancha murakkabroq bo'lib, hohlagan $y = f(x)$ funksiyasi uchun kerakli bo'ladi. Bu usulda $y = f(x)$ funksiyasi faqat n -darajali $P(x)$ ko'p hadi bilan interpolatsiyalanadi: $f(x) \approx P(x)$. Bundan so'ng $f(x) = \bar{y}$ tenglamasi yangi $P(x) \approx \bar{y}$ tenglamasi bilan almashtiriladi. Odatda argumentning $x_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ qiymatlari kichik kesmaga tegishli bo'ladi va bu kesmada $f(x)$ funksiyasi yetarlicha tekis o'zgaradi. Shundan funksiyaning jadvaldagi y_k qiymatlariga $\bar{y}$ qiymati yaqin bo'ladi. Shu sababli $P(x) \approx \bar{y}$ tenglamasi $f(x) = \bar{y}$ tenglamasidan salgina farq qiladi. Shundan yangi $P(x) \approx \bar{y}$ tenglamasining yechimining berilgan $f(x) = \bar{y}$ tenglamasining yechimiga yaqin bo'lishi kutiladi.

Endi bu funksiyalarni teskari interpolatsiyalashning chiziqli emas tenglamalarni yechish bilan bog'liqligini ko'rsatamiz. Bu holatda $f(x) = 0$ tenglamasini yechish talab qilinadi. Bunda funksiyaning oldindan berilgan qiymati

$\bar{y} = 0$ bo'ladi. Shu sababli, bu tenglamani yechish masalasi yuqoridagi funksiyani teskari interpolatsiyalash masalasi bilan o'xshash bo'ladi. Berilgan tenglamaning yechimiga keyingi x_{n+1} yaqinlashishi hisobida teskari interpolatsiyalash usuli bilan topilgan x ning qiymatini qabul qilishga bo'ladi. Shunday qilib, teskari interpolatsiyalashning yuqorida ko'rsatilgan ikki usuliga mos x_{n+1} yaqinlashishin ikki usul bilan aniqlash imkoniyati kelib chiqadi. Bu imkoniyatlardan foydalanish chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning interpolatsiyalik usulining asosiy mazmunini tashkil qiladi. Bu bitiruv malakaviy ishida chiziqli emas tenglamalarni va ularning sistemalarini yechishning interpolatsiyalik usulining har turli hisoblash algoritmlarini keltirib chiqarishga va ularni tatqiq qilishga asoslangan bo'lib, uning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

1. Chiziqli emas tenglamalarni yechish masalasi bilan funksiyalarni teskari interpolatsiyalash masalasining orasida bog'liqlik o'rnatiladi. Teskari interpolatsiyalash masalasini yechishning ikki usuliga mos tenglamalarni interpolatsiyalik usul bilan yechishning ikki turli algoritmlari keltirilib chiqariladi.

2. Tenglamani tuzuvchi funksiyani, Nyutonning n -darajali orqaga qarab interpolatsiyalash ko'p hadidan foydalanib, yaqinlashtirish yo'li bilan interpolatsiyalik usulning umumiy (2.5) algoritmi yasaladi. Bu algoritmdan foydalanib, ketma-ket yaqinlashtirishni yasash masalasi talqin qilinadi.

3. Usulning bu algoritmidan foydalanganda, interpolatsiyalik protsesstning bir qadamidan ikkinchisiga o'tganda $\varepsilon_n = x_n - x^*$ xatoligining o'zgarish qonunini aniqlaydigan formula keltirib chiqariladi. Bu formula usulning har bir keying yaqinlashuvining uning oldingi yaqinlashuviga solishtirganda, tenglamaning yechimiga yaqin bo'lishini ko'rsatadi.

4. Teskari funksiyani Logranjning interpolatsiyalik ko'p hadi bilan yaqinlashtirish yo'li bilan interpolatsiyalik usulning hisoblash maqsadlari uchun

unga ham qulay yangi algoritm yasaladi. $\bar{x}_n$ yaqinlashuvi x^* yechimiga yaqin bo'lganda $\varepsilon_n \approx x_n - x^*$ xatoligining o'zgarish qonuni aniqlanadi va uning asosida bu algoritmning yechimiga tez yaqinlashishini ko'rsatadi.

5. Ikki argumentli funksiyalarni interpolatsiyalash formulalarin foydalanish orqali chiziqli emas tenglamalarning sistemalarini yechish uchun interpolatsiyalik usul umumiyashtiriladi. Ikki nomalumli tenglamani yechish misolida usulning har turli hisoblash algoritmlari keltirib chiqariladi va ularning geometryalik qiymatlari chizmalar yordamida tushintiriladi.

6. Yetarlicha murakkab aniq transcendent tenglamalarni va ularning sistemalarini kompyuterdan foydalanib interpolatsiyalik usul bilan yechish, bu usulning yuqori natijali usul ekanligin isbotlaydi, yani u bunday tenglamalarning yechimlarin oldindan berilgan hohlagan aniqlik bilan aniqlashga imkoniyat beradi.

7. Bu usul, ayniqsa yuqori darajali algebralik tenglamalarning barcha ildizlarini topish uchun yuqori natijali usul bo'ladi. Sababi u bunday tenglamaning qandaydir bir ildiziga tez yaqinlashuvchi bo'ladi. Shu sababli bu ildizni $f_1(x) = f(x)/(x - x_1)$ formulasi bilan ajratib, keyingi ildizni aniqlash uchun $f_1(x) = 0$ tenglamasi yechiladi. Shunday yo'l bilan $f(x)$ ko'p hadining topilgan ildizlarini ketma-ket ajratish usuli bilan uning barcha ildizlarini aniqlashga bo'ladi.

Yakunida quyidagilarni aytib o'tamiz. Hozirda bor o'qish va ilmiy adabiyotlarda tenglamalarni yechishning interpolatsiyalik usuli haqida faqat qisqacha malumotlar berilgan. Bu usul shu vaqtgacha nazariy tarafdin hali asoslanmagan. Masalan, uning hohlagan boshlang'ich yaqinlashuvidan yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlanmagan. Lekin, bu usulni tenglamalarni yechishga qo'llashning ko'p yillik tajribalari, uning hamisha yaqinlashuvchi bo'lishini va yechimni oldindan berilgan hohlagan aniqlik bilan topishga imkoniyat berishini ko'rsatadi [2,4].

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.-М.: Наука,1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1.-М.: Наука, 1966.
3. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения уравнений.-М.: Мир, 1988.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики, т.1.-Минск: Высшая школа, 1972.
5. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач.-Киев: Наукова думка, 1987.
6. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений.-Санкт-Петербург: Изд-во университета, 1998.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.-М.: Наука,1989.
8. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений.-М.: Мир, 1985.
9. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987.
10. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики.-Киев: Наукова думка, 1970.
11. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике.-Киев: Наукова думка, 1974.
12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моултер К. Машинные методы математических вычислений.-М.: Мир, 1980.

Internet saytlari

1. [http:// www.aim.uz](http://www.aim.uz) (Tenglama haqida tushuncha va ularning turlari).
2. [http:// www.tdiu.uz](http://www.tdiu.uz) (Algebraik tenglamarni interpolatsion usul bilan yechish haqida tushuncha).
3. [http:// www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz) (Transendent tenglamalar haqida tushunchalar).
4. [http:// www.arxiv.uz](http://www.arxiv.uz) (Chiziqli emas tenglamalarni interpolatsion usul bilan yechish haqida tushuncha).
5. [http:// www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru). (Вычислительные методы высшей математики).

Qo'shimchalar

(EHM uchun tuzilgan pragrammalarning va ularning bajarishdan
olingan sonli natijalarning bosib chiqarilgan nusxalari)

1.1-misol. C++ tilidagi dasturi va natijasi

```
#include <iostream>
#include<string.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
using namespace std;
double F(double x){return exp(x/2)-exp(x/3)+2*sin(x/2)+sin(2*x-1);}
int main(){
double
x[100][1000],f[10][1000],F1[10][10],F2[10][10],F3[10][10],k=0.1,m,l,e=0.0000000001;
char d=187,ss=188;
int i=0;
x[i][0]=1;
x[i][1]=1.5;
x[i][2]=2.5;

cout<<"***CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI***"
"<<"\n";
cout<<"    INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH    "<<"\n";
cout<<"ЙHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛ
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHH"
<<d<<"\n";
cout<<"e n einterpolyatsionef(x)ning interpolatsione    x^n    e    x^n+1    e f(x^n+1)
e"<<endl;
cout<<"e n e    tuginlari    etuginlaridagi qiymatlarie    e    e
e"<<endl;
cout<<"MHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHO
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHH
№"<<"\n";
while(k>e){
for(int j=0;j<3;j++) f[i][j]=F(x[i][j]);
F1[i][1]=(f[i][1]-f[i][0])/(x[i][1]-x[i][0]);

F1[i][2]=(f[i][2]-f[i][1])/(x[i][2]-x[i][1]);

F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);

x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

f[i][3]=F(x[3][3]);
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"    e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e    "<<x[5][2]<<"    e    "<<x[3][3]<<"    e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<"    e"<<x[i][1]<<"e
"<<f[i][1]<<"e    "<<"    e    e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<"    e"<<x[i][2]<<"e
"<<f[i][2]<<"e    e    e";
cout<<"\n";
```

```
cout<<"IIHHKKHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHK  
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH"  
<<ss<<"\n\n";  
k=fabs(F(x[3][3]));  
x[i+1][0]=x[i][1];  
x[i+1][1]=x[i][2];  
x[i+1][2]=x[3][3];  
//cout<<"x0= "<<x[i+1][0]<<" x1= "<<x[i+1][1]<<" x2= "<<x[i+1][2]<<endl;  
i++;  
}  
cout<<"x'4= "<<x[2][2]<<endl<<"x5= "<<x[3][3]<<endl;  
cout<<"f(x5)= "<<F(x[3][3])<<endl;  
    getch();  
    return 0;  
}
```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	interpolyatsion tuginlari	f(x)ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	1.000000000000 1.500000000000 2.500000000000	1.376819846542 0.676009717359 -1.522495664069	1.807486041685	1.858941430509	-0.228737461660
1	1.500000000000 1.858941430509 2.500000000000	0.676009717359 -0.228737461660 -1.522495664069	1.745601774236	1.766888589107	0.017500542932
2	1.766888589107 1.858941430509 2.500000000000	0.017500542932 -0.228737461660 -1.522495664069	1.773430937050	1.773243566505	0.000617475884
3	1.766888589107 1.773243566505 1.858941430509	0.017500542932 0.000617475884 -0.228737461660	1.773475991412	1.773475868376	-0.000000187778
4	1.766888589107 1.773243566505 1.773475868376	0.017500542932 0.000617475884 -0.000000187778	1.773475797753	1.773475797755	-0.000000000001

1.2-misol. C++ tilidagi dasturi va natijasi

```
#include <iostream>
#include<string.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
using namespace std;
double F(double x){return exp(x/2)-exp(x/3)+2*sin(x/2)+sin(2*x-1);}
int main(){
double
x[100][1000],f[10][1000],F1[10][10],F2[10][10],F3[10][10],k=0.1,m,l,e=0.0000000001;
char d=187,ss=188;
int i=0;
x[i][0]=2;
x[i][1]=2.5;
x[i][2]=3.5;

cout<<"***CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI***"
"<<"\n";
cout<<"      INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH      "<<"\n";
cout<<"ЙHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛ
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHHHHHHH"
<<d<<"\n";
cout<<"e n einterpolyatsionef(x)ning interpolyatsione      x^n      e      x^n+1      e f(x^n+1)
e"<<endl;
cout<<"e n e      tuginlari      etuginlaridagi qiymatlarie      e      e
e"<<endl;
cout<<"MHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHO
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHH
№"<<"\n";
while(k>e){
for(int j=0;j<3;j++) f[i][j]=F(x[i][j]);
F1[i][1]=(f[i][1]-f[i][0])/(x[i][1]-x[i][0]);

F1[i][2]=(f[i][2]-f[i][1])/(x[i][2]-x[i][1]);

F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);

x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

f[i][3]=F(x[3][3]);
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"      e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e      "<<x[5][2]<<"      e      "<<x[3][3]<<"      e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<"      e"<<x[i][1]<<"e
"<<f[i][1]<<"e      "<<"      e      e";
```

```
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<"\ne"<<" e"<<x[i][2]<<"e"
"<<f[i][2]<<"e      e      e";
cout<<"\n";
cout<<"ИHHHKKHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHK
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHHHHHHHH"
<<ss<<"\n\n";
k=fabs(F(x[3][3]));
x[i+1][0]=x[i][1];
x[i+1][1]=x[i][2];
x[i+1][2]=x[3][3];
//cout<<"x0= "<<x[i+1][0]<<" x1= "<<x[i+1][1]<<" x2= "<<x[i+1][2]<<endl;
i++;
}
cout<<"x'4= "<<x[2][2]<<endl<<"x5= "<<x[3][3]<<endl;
cout<<"f(x5)= "<<F(x[3][3])<<endl;
    getch();
    return 0;
}
```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	interpolyatsion tuginlari	f(x)ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	2.000000000000 2.500000000000 3.500000000000	-0.601937195152 -1.522495664069 0.852835983512	3.14096130139	3.413296869307	0.421266646461
1	2.500000000000 3.413296869307 3.500000000000	-1.522495664069 0.421266646461 0.852835983512	3.328663569466	3.320363011636	-0.005141255684
2	3.320363011636 3.413296869307 3.500000000000	-0.005141255684 0.421266646461 0.852835983512	3.321483527278	3.321532113561	-0.000034015386
3	3.320363011636 3.321532113561 3.413296869307	-0.005141255684 -0.000034015386 0.421266646461	3.321539900046	3.321539895022	0.000000001001
4	3.320363011636 3.321532113561 3.321539895022	-0.005141255684 -0.000034015386 0.000000001001	3.321539894793	3.321539894793	-0.000000000001

2.1-misol. C++ tilidagi dasturi va natijasi

```
#include <iostream>
#include<string.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
using namespace std;
double F(double x){return 1.23*pow(x,5)-2.52*pow(x,4)-
16.1*pow(x,3)+17.3*pow(x,2)+29.4*x-1.34;}

int main(){
    double
x[100][1000],f[10][1000],F1[10][10],F2[10][10],F3[10][10],k=0.1,m,l,e=0.0000000000001;
    char d=187,ss=188;
    int i=0;
    x[i][0]=-3.5;
    x[i][1]=-3;
    x[i][2]=-2.5;
        cout<<"      ***CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT
TENGLAMALARNI***      "<<"\n";
    cout<<"      INTERPOLYATION USULI BILAN YECHISH      "<<"\n";
    cout<<"ЙHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJ
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHH"<<d<
<"\n";
    cout<<"e i einterpolyatsione f(x)ning interpolyatsione      x^n      e      x^n+1      e f(x^n+1)
e"<<endl;
    cout<<"e i e tuginlari etuginlaridagi qiymatlarie      e      e      e"<<endl;
    cout<<"MHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHO
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHH№"<<"
\n";

    while(k>e){
        for(int j=0;j<3;j++) f[i][j]=F(x[i][j]);

        F1[i][1]=(f[i][1]-f[i][0])/(x[i][1]-x[i][0]);

        F1[i][2]=(f[i][2]-f[i][1])/(x[i][2]-x[i][1]);

        F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);

        x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
        x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

        f[i][3]=F(x[3][3]);
        cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"      e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e "<<x[5][2]<<" e "<<x[3][3]<<" e "<<F(x[3][3])<<" e";
        cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<" e"<<x[i][1]<<"e
"<<f[i][1]<<"e "<<" e      e";
```

```

cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<" e"<<x[i][2]<<"e
"<<f[i][2]<<"e      e      e";
cout<<"\n";
cout<<"ИHKHHHHHHHKHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHH"<<ss<<"\
n\n";
cout<<"ЙHHJTHHHHHHHJTHHHHHHHHHJTHHHHHHHHHHHJTHHHHHHHHHHH"<<d<<"\
n";
k=fabs(F(x[3][3]));
x[i+1][0]=x[i][1];
x[i+1][1]=x[i][2];
x[i+1][2]=x[3][3];
//cout<<"x0= "<<x[i+1][0]<<" x1= "<<x[i+1][1]<<" x2= "<<x[i+1][2]<<endl;
i++;
}
cout<<"x'4= "<<x[2][2]<<endl<<"x5= "<<x[3][3]<<endl;
cout<<"f(x5)= "<<F(x[3][3])<<endl;

    getch();
    return 0;
}

```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	-3.500000000000 -3.000000000000 -2.500000000000	-226.2040625000 -2.150000000000 66.292812500000	-2.9842934566	-3.0015877317	-2.56550324549
1	-3.001587731722 -3.000000000000 -2.500000000000	-2.565503245498 -2.150000000000 66.292812500000	-2.9828997208	-2.9992571396	-1.95612625203
2	-3.001587731722 -2.999257139661 -2.500000000000	-2.565503245498 -1.956126252036 66.292812500000	-2.9917758393	-2.9917060055	-0.00450304447
3	-3.001587731722 -2.999257139661 -2.991706005523	-2.565503245498 -1.956126252036 -0.004503044477	-2.9916885825	-2.9916884269	-0.00000019619
4	-2.999257139661 -2.991706005523 -2.991688426902	-1.956126252036 -0.004503044477 -0.000000196190	-2.9916884261	-2.9916884261	0.000000000002

2.2-misol. C++ tilidagi dasturi va natijasi

```
#include <iostream>
#include<string.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
using namespace std;

doubleF(double x){return 1.23*pow(x,5)-2.52*pow(x,4)-16.1*pow(x,3)+17.3*pow(x,2)+
29.4*x-1.34;}

int main(){
    double
    x[100][1000],f[10][1000],F1[10][10],F2[10][10],F3[10][10],k=0.1,m,l,e=0.0000000000001;
    char d=187,ss=188;
    int i=0;
    x[i][0]=-1.5;
    x[i][1]=-1;
    x[i][2]=-0.5;
    cout<<"          ***CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSENDENT
TENGLAMALARNI***          "<<"\n";
    cout<<"          INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH          "<<"\n";
    cout<<"ЙHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJ
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH"<<d<
<"\n";
    cout<<"e i einterpolyatsione f(x)ning interpolyatsione      x^n      e      x^n+1      e f(x^n+1)
e"<<endl;
    cout<<"e i e tuginlari etuginlaridagi qiymatlarie      e      e      e"<<endl;
    cout<<"MHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHO
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHH№"<<"
\n";

    while(k>e){
        for(int j=0;j<3;j++) f[i][j]=F(x[i][j]);

        F1[i][1]=(f[i][1]-f[i][0])/(x[i][1]-x[i][0]);

        F1[i][2]=(f[i][2]-f[i][1])/(x[i][2]-x[i][1]);

        F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);

        x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
        x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

        f[i][3]=F(x[3][3]);
        cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"      e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e "<<x[5][2]<<" e "<<x[3][3]<<" e "<<F(x[3][3])<<" e";
```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	-1.500000000000 -1.000000000000 -0.500000000000	25.724687500000 -1.090000000000 -9.898437500000	-1.06187249441	-0.99080683405	-1.42939772159
1	-1.000000000000 -0.990806834049 -0.500000000000	-1.090000000000 -1.429397721590 -9.898437500000	-1.07364481671	-0.96534396823	-2.33552562697
2	-0.990806834049 -0.965343968230 -0.500000000000	-1.429397721590 -2.335525626975 -9.898437500000	-1.03097396958	-1.02805586443	-0.01444932918
3	-1.028055864435 -0.990806834049 -0.965343968230	-0.014449329180 -1.429397721590 -2.335525626975	-1.02844626299	-1.02842079101	-0.00006740097
4	-1.028420791014 -1.028055864435 -0.965343968230	-0.000067400975 -0.014449329180 -2.335525626975	-1.02842250124	-1.02842250064	-0.00000000027


```

x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

f[i][3]=F(x[3][3]);
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"  e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e "<<x[5][2]<<" e "<<x[3][3]<<" e "<<F(x[3][3])<<" e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<" e"<<x[i][1]<<"e
"<<f[i][1]<<"e "<<" e      e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"\ne"<<" e"<<x[i][2]<<"e
"<<f[i][2]<<"e      e      e";
cout<<"\n";
cout<<"ИHKHHHHHHHKHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHH"<<ss<<"\
n\n";
cout<<"ЙHHЛHHHHHHHЛHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHH"<<d<<"\
n";
k=fabs(F(x[3][3]));
x[i+1][0]=x[i][1];
x[i+1][1]=x[i][2];
x[i+1][2]=x[3][3];
//cout<<"x0= "<<x[i+1][0]<<" x1= "<<x[i+1][1]<<" x2= "<<x[i+1][2]<<endl;
i++;
}
cout<<"x'4= "<<x[2][2]<<endl<<"x5= "<<x[3][3]<<endl;
cout<<"f(x5)= "<<F(x[3][3])<<endl;

getch();
return 0;
}

```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	-0.500000000000 0.500000000000 1.000000000000	-9.898437500000 15.553437500000 27.970000000000	-0.12631817381	-0.11460030358	-4.45827135961
1	-0.114600303588 0.500000000000 1.000000000000	-4.458271359610 15.553437500000 27.970000000000	0.038636067102	0.003531848881	-1.23594855314
2	-0.114600303588 0.003531848881 1.000000000000	-4.458271359610 -1.235948553141 27.970000000000	0.048842412624	0.048347407125	0.120019115143
3	-0.114600303588 0.003531848881 0.048347407125	-4.458271359610 -1.235948553141 0.120019115143	0.044380702188	0.044478620387	0.000470499072


```

F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);

x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];

f[i][3]=F(x[3][3]);
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"e"<<"  e"<<x[i][0]<<"e
"<<f[i][0]<<"e  "<<x[5][2]<<"  e  "<<x[3][3]<<"  e  "<<F(x[3][3])<<"  e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"ne"<<"  e"<<x[i][1]<<"e
"<<f[i][1]<<"e  "<<"  e  e";
cout<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<setprecision(12)<<"ne"<<"  e"<<x[i][2]<<"e
"<<f[i][2]<<"e  e  e";
cout<<"\n";
cout<<"ИHKHHHHHHHKHHHHHHHHHKHHHHHHHHHHHKHHHHHHHHHH"<<ss<<"\
n\n";
cout<<"ЙHHЛHHHHHHHЛHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHHHЛHHHHHHHHHH"<<d<<"\
n";
k=fabs(F(x[3][3]));
x[i+1][0]=x[i][1];
x[i+1][1]=x[i][2];
x[i+1][2]=x[3][3];
//cout<<"x0= "<<x[i+1][0]<<" x1= "<<x[i+1][1]<<" x2= "<<x[i+1][2]<<endl;
i++;
}
cout<<"x'4= "<<x[2][2]<<endl<<"x5= "<<x[3][3]<<endl;
cout<<"f(x5)= "<<F(x[3][3])<<endl;

getch();
return 0;
}

```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	1.500000000000 2.000000000000 2.500000000000	23.930312500000 -3.100000000000 -49.59781250000	1.966665098493	1.959221604492	-0.03624851184
1	1.959221604492 2.000000000000 2.500000000000	-0.036248511839 -3.100000000000 -49.59781250000	1.958826088078	1.958748938693	-0.00156287806
2	1.958748938693 1.959221604492 2.500000000000	-0.001562878067 -0.036248511839 -49.59781250000	1.958727641143	1.958727636305	-0.00000009616

3	1.958727636305	-0.000000096160	1.958727634995	1.958727634995	0.000000000001
	1.958748938693	-0.001562878067			
	1.959221604492	-0.036248511839			

2.5-misol. C++ tilidagi dasturi va natijasi

```
#include <iostream>
```

```
#include<string.h>
```

```
#include<stdio.h>
```

```
#include<math.h>
```

```
#include<iomanip>
```

```
#include<conio.h>
```

```
using namespace std;
```

```
doubleF(double x){return 1.23*pow(x,5)-2.52*pow(x,4)-16.1*pow(x,3)+17.3*pow(x,2)+
29.4*x-1.34;}
```

```
int main(){
```

```
double
```

```
x[100][1000],f[10][1000],F1[10][10],F2[10][10],F3[10][10],k=0.1,m,l,e=0.000000000001;
```

```
char d=187,ss=188;
```

```
int i=0;
```

```
x[i][0]= 3.5;
```

```
x[i][1]=4.2;
```

```
x[i][2]=4.5;
```

```
cout<<"          ***CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT
TENGLAMALARNI***          "<<"\n";
```

```
cout<<"      INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH          "<<"\n";
```

```
cout<<"ЙHHHJLHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJLHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJL
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJLHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHJLHHHHHHHHHHHHHHHHHH"<<d<
<"\n";
```

```
cout<<"e i einterpolyatsionef(x)ning interpolyatsione      x^n      e      x^n+1      e f(x^n+1)
e"<<endl;
```

```
cout<<"e i e tuginlari etuginlaridagi qiymatlarie      e      e      e"<<endl;
```

```
cout<<"MHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHO
HHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHHOHHHHHHHHHHHHHHHHHH№9"<<"
\n";
```

```
while(k>e){
```

```
for(int j=0;j<3;j++) f[i][j]=F(x[i][j]);
```

```
F1[i][1]=(f[i][1]-f[i][0])/(x[i][1]-x[i][0]);
```

```
F1[i][2]=(f[i][2]-f[i][1])/(x[i][2]-x[i][1]);
```

```
F2[i][1]=(F1[i][2]-F1[i][1])/(x[i][2]-x[i][0]);
```

```
x[5][2]=x[i][2]-f[i][2]/F1[i][2];
```

```
x[3][3]=x[5][2]-F2[i][1]*(x[5][2]-x[i][2])*(x[5][2]-x[i][1])/F1[i][2];
```

CHIZIQLI EMAS ALGEBRAIK VA TRANSCENDENT TENGLAMALARNI
INTERPOLYATSION USULI BILAN YECHISH

n	Interpolyatsion tuginlari	$f(x)$ ning interpolyatsion tuginlaridagi qiymatlari	x^n	x^{n+1}	$f(x^{n+1})$
0	3.5000000000000 4.2000000000000 4.5000000000000	- 108.940937500000 57.849961600000 250.510937500000	4.109919544428	4.087818186697	8.482745626481
1	4.087818186697 4.2000000000000 4.5000000000000	8.482745626481 57.849961600000 250.510937500000	4.073371797427	4.068224339120	0.948148682175
2	4.068224339120 4.087818186697 4.5000000000000	0.948148682175 8.482745626481 250.510937500000	4.065758662337	4.065692276053	-0.00304900775

3	4.065692276053	-0.003049007751	4.065700392431	4.065700414311	0.000000044601
	4.068224339120	0.948148682175			
	4.087818186697	8.482745626481			
4	4.065692276053	-0.003049007751	4.065700414192	4.065700414192	0.000000000001
	4.065700414311	0.000000044601			
	4.068224339120	0.948148682175			