

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

Matematika fakulteti

"Differencialliq teńlemeler" kafedrası

Matematika tálim baǵdarınıń pitkeriwshisi

D. Serimbetovanıń

Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń Fure usılı

teması boyınsha

PİTKERİW QÁNİGELİK JUMISI

Kafedra baslıǵı:

doc. Elgondiev Q.

İlimiy basshı:

doc. Qurbanbaev Ó.

Nókis-2019

Mazmunı

Kirisiw.....	3
1-BAP. Tuwrı múyeshli hám polyar koordinatalar sistemasında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler	6
§1. Tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler.....	7
§2. Dóngelek oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler.....	15
§3. Dóngelek saqıyna hám dóngelek sektorında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler.....	24
2-Bap. Tuwrı múyeshli parallelepiped, shar hám cilindrlık oblastlarda Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler.....	31
§1. Tuwrı múyeshli parallelepipedtegi Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler	32
§2. Shardağı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi.....	37
§3. Dóngelek cilindrde Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler.....	48
Juwmaqlaw.....	53
Ádebiyatlar.....	54

Kirisiw

Fizikalıq tábiyattıń hár qıylı (terbelis, jıllılıq ótkizgishlik, diffuziya h.t.b.) ornıqlı qubılısların izertlew processı elliptikalıq tiptegi teńlemelerge alıp kelinedi. Bunday tiptegi teńlemeler arasınan eń kóp tarqalǵan, úyrenilgen

teńlemelerdiń biri eki ólshemli $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ hám úsh ólshemli

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Laplas teńlemesi bolıp tabıladı, bul jerde u – ǵárezsiz

x, y hám z ózgeriwshilerdiń funkciyası bolıp, ol 1782 jılları óz jumıslarında qollanǵan Francuz matematigi P. Laplas atı menen atalǵan. Laplas teńlemesine fizikalıq shamalar tek noqat koordinatalarınıń funkciyası bolǵan fizika hám mexanikanıń kóplegen máseleleri alıp kelinedi. Solay etip, Laplas teńlemesi óz ishine tartıwshı massanı almaǵan oblasta tartılıw kúshiniń potencialın, zaryadqa iye bolmaǵan oblastta elektrostatikalıq maydanniń potencialın, jıllılıqtıń ornıqlı taralıw processlerindegi temperaturanı hám taǵı basqa usınday qubılıslardı súwretleydi [3,5,7,8,11-13,17-21].

Laplas teńlemesiniń sheshimi bolıp tabılatuǵın ekinshi tártipli tuwındısına shekem úzliksiz bolǵan hár qanday funkciya garmonikalıq dep ataladı. Garmonikalıq funkciyalardı úyrenip shıǵıwda hár túrli matematikalıq usıllar islep shıǵarılǵan bolıp, bul usıllardı giperbolalıq tiptegi teńlemelerge (tardıń terbelis teńlemelerine), parabolalıq tiptegi teńlemelerge (mısal ushın jıllılıq ótkizgishlik teńlemelerine) qollanıw jaqsı nátiyje bergen. Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máselelerdi bazı-bir ápiwayı oblastlarda (mısal ushın tuwrı múyeshli, dóńgelek, shar, cilindr hám taǵı basqa oblastlarda yamasa usınday oblastlardıń bir bóleginde) usınday usıllardıń biri bolǵan Fure usılı, yaǵnıy ózgeriwshilerdi ajratıw usılı menen jeńil sheshiwge boladı [1,2,4,6,9,10,14-16].

Úsh ólshemli Laplas teńlemesi kóbinese jıllılıqtıń taralıwında, aeromexanikada, serippelilik teoriyasında, elektrostatikada hám fizika-mexanikanıń basqada kópshilik tarawlarında ushırasadı. Jıllılıqtıń taralıw

teoriyasında, qarastırılıp atırğan oblastta jıllılıq deregi bolmağan jaǵday ushın jıllılıqtıń ornıqlı bólistiriliwin súwretlydi.

Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máselelerdi sheshiw metodlarınıń rawajlanıw dáwiri XIX ásirlerden baslanadı. Sebebi, usı dáwirleri ullı francuz matematikleri J.Furenıń «Jıllılıqtıń analitikalıq teoriyası» (1822 j.) atlı áhmiyetli ilimiy miyneti jarıqqa shıǵıp, ol usı miynetinde sheshimdi ózgeriwshilerge ajratıw jolı menen qatar kóriniste alıwǵa erisken edi. Ol óziniń bul metodın jıllılıqtıń taralıw teoriyasında qollanadı. Keyinshelik bul metod hár qıylı máselelerdi, sonıń ishinde terbeliske, tolqınǵa arnalǵan máselelerdi matematikalıq izertlewde qúdretili quralǵa aylandı.

Bul pitkeriw qánigelik jumısı tiykarınan altı paragraftan ibarat eki bap kóleminde jazılǵan. Pitkeriw qánigelik jumısınıń sońında juwmaqlaw bólimi menen paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi keltirilgen.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń «Tuwrı múyeshli hám polyar koordinatalar sistemasında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler» dep atalatuǵın birinshi babınıń birinshi paragrafı „Tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler” dep atalıp, onda tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi qarastırıladı hám ózgeriwshilerdi ayratıw usılı járdeminde bul máseleniń sheshimi qatar kóriniste anıqlanadı. Sońınan bir qatar mısallar beriledi.

Bul baptıń ekinshi paragrafı „Dóngelek oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler” dep atalıp, onda dóngelek oblastta Laplas teńlemesi ushın ishki hám sırtqı Dirixle máseleleri qarastırıladı.

Bul baptıń úshinshi paragrafı „Dóngelek saqıyna hám dóngelek sektorında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler” dep atalıp, onda saqıyna hám dóngelek sektori sıyaqlı oblastlarda Laplas teńlemesi ushın ishki hám sırtqı Dirixle máseleleri qarastırıladı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń «Tuwrı múyeshli parallelepiped, shar hám cilindrlik oblastlarda Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler» dep atalatuǵın ekinshi babınıń birinshi paragrafı „Tuwrı múyeshli

parallelepipedtegi Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler” dep atalıp, onda tuwrı múyeshli parallelepipedte Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi qarastırıladı.

Bul baptın ekinshi paragrafi „Shardağı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi” dep atalıp, onda Laplas teńlemesi sferalıq koordinatalar sistemasında beriledi hám sońınan Lejandr funkciyası járdeminde shardağı Laplas teńlemesi ushın ishki, sırtqı Dirixle máselesiniń, sonday-aq shar qatlamındağı Dirixle máselesiniń sheshimi alınadı.

Bul baptın sońğı úshinshi paragrafi „Dóngelek cilindrde Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler” dep atalıp, onda Laplas teńlemesi cilindrlik koordinatalar sistemasında beriledi hám sońınan Bessel funkciyası járdeminde cilindrdegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń sheshimi alınadı.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń sońında juwmaqlaw bólimi hám paydalanılğan ádebiyatlar dizimi keltiriledi.

1-Bap. Tuvrı múyeshli hám polyar koordinatar sistemasında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Denedegi jıllılıqtıń taralıwı stacionar dep ataladı, egerde deneniń hár bir tochkasındaǵı temperetura waqıttan ǵárezsiz bolsa. Bul jaǵdayda jıllılıq ótkizgishlik teńlemesindegi temperaturadan waqıt boyınsha alınǵan tuwındı nolge teń boladı, yaǵnıy $u_t = 0$ hám $u_t = \Delta u$ jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesine aylanadı. Bul sońǵı teńlemede waqıt qatnaspaytuǵın bolǵanlıqtan buǵan baslanǵısh shárt berilmeydi. Eger V deneniń σ shegarasında berilgen f temperatura uslap turılsa, onda deneniń ishki tochkalarında anıq temperatura bar boladı. Bul jaǵdayda másele Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi yamasa Laplas teńlemesi ushın birinshi shegaralıq másele dep ataladı, hám bunday máseleniń matematikalıq modeli $\Delta u = 0, u|_{\sigma} = f$ kóriniske iye boladı. Bunday máseleler házirgi dáwirde jaqsı úyrenilip, onıń kóp sanlı sheshiw metodları islep shıǵılǵan.

Eger V deneniń σ betinde temperatura belgisiz bolıp, biraq onıń hár bir tochkasında normal boyınsha alınǵan tuwındıǵa proporcional bolǵan jıllılıq aǵımı berilgen bolsa, onda másele Laplas teńlemesi ushın Neyman máselesi yamasa Laplas teńlemesi ushın ekinshi shegaralıq másele dep atalatuǵın másele payda boladı hám bunday máseleniń matematikalıq modeli $\Delta u = 0, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma} = g$ kóriniske iye boladı.

Bul bapta tuwrı múyeshli, dóńgelek, dóńgelek saqıynası hám dóńgelek sektori sıyaqlı oblastlarda berilgen Laplas operatorı menen baylanıslı bolǵan tiykargı shegaralıq máseleler qarastırıladı hám bunday máselelerdi sheshiw usılları úyreniledi.

§1. Tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Meyli $D = \{(x, y), x \in [0, p], y \in [0, q]\}$ tuwrı múyeshlikte

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

Laplas teńlemesiniń

$$u(0, y) = \xi(y), \quad u(p, y) = \eta(y), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, q) = \psi(x) \quad (3)$$

shegaralıq shártin qanaatlantıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırıw kerek bolsın. Meyli φ, ψ, ξ, η funkciyaları úzliksiz hám tuwrı múyeshliktiń tóbelerinde olardıń mánisleri bir-birine teń bolsın, yaǵnıy

$$\varphi(0) = \xi(0), \quad \varphi(p) = \eta(0), \quad \psi(0) = \xi(q), \quad \psi(p) = \eta(q).$$

Sheshimdi

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) \quad (4)$$

qosındısı túrinde izleybiz. (4) ni (1)-(3) lerge qoyıp v funkciyasın

$$\Delta v \equiv v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad (5)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, q) = \psi(x),$$

$$v(0, y) = 0, \quad v(p, y) = 0$$

máselesiniń, al $w(x, y)$ funkciyasın bolsa

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad (6)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, q) = 0,$$

$$w(0, y) = \xi(y), \quad w(p, y) = \eta(y)$$

máselesiniń sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alamız. (5) shegaralıq máseleiniń sheshimin

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleybiz hám

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(p) = 0 \quad (7)$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad (8)$$

$X(x)$ funkciyası ushın (7) túrindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız.

Onıń menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{p}, \quad X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{p} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

boladı. (8) niń ulıwma sheshimi

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{p} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{p} y$$

bolıp, bulardı (5) degi orınlarına qoyıp, superpoziciya principin qollansaq (5) máseleniń

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{p} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{p} y \right) \sin \frac{\pi k}{p} x \quad (9)$$

túrindegi A_k, B_k parametrlerine baylanıslı sheshimine iye bolamız. (7) shártten

$$v(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{p} x,$$

$$v(x, q) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{p} q + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{p} q \right) \sin \frac{\pi k}{p} x$$

bolıp, bunnan

$$A_k = \frac{2}{p} \int_0^p \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{p} x dx,$$

$$A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{p} q + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{p} q = \frac{2}{p} \int_0^p \psi(x) \sin \frac{\pi k}{p} x dx$$

boladı. Bul sistemadan A_k hám B_k lardı anıqlap, olardı (9) dağı orınlarına qoysaq, (5) shegaralıq máseleniń sheshimine iye bolamız. Bul sxemanı (6) shegaralıq másele ushın qaytalasaq, onda $w(x, y)$ tiń

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{q} x + D_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} x \right) \sin \frac{\pi k}{q} y \quad (10)$$

túrindegi mánisine iye bolamız, bul jerde

$$\begin{cases} \tilde{N}_k = \frac{2}{q} \int_0^q \xi(y) \sin \frac{\pi k}{q} y dy, \\ C_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{q} p + D_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} p = \frac{2}{q} \int_0^q \eta(y) \sin \frac{\pi k}{q} y dy. \end{cases}$$

(9) formula járdeminde tabılǵan $v(x, y)$ tıń hám (10) formula járdeminde tabılǵan $w(x, y)$ lerdiń mánislerin (4) degi orınlarına qoyıp, (1)-(3) shegaralıq máseleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq q\}$ tuwrı múyeshliginde temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlań, egerde oblasttıń shegarasındaǵı temperatura tómendegishe berilgen bolsa:

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (11)$$

$$u(0, y) = y(q - y), \quad u(p, y) = \sin \frac{3\pi y}{q}, \quad 0 < y < q. \quad (12)$$

Sheshiliwi. Temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlaw, berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (13)$$

Laplas teńlemesin sheshiwge alıp klinedi.

Sheshimdi

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleyviz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $Y(y)$ ke qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{q}, \quad Y_k(y) = \sin \frac{\pi k}{q} y, \quad k = 1, 2, \dots$$

bolatuǵın

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(q) = 0$$

Shturm-Liuvill máselesine, al $X(x)$ qa qarata

$$X_k''(x) - \left(\frac{\pi k}{q}\right)^2 X_k(x) = 0$$

teńlemesine iye bolamız.

Sońǵı teńlemenıń sheshimi

$$X_k(x) = A_k e^{\frac{\pi k}{q}x} + B_k e^{-\frac{\pi k}{q}x}$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimniń $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{\pi k}{q}x} + B_k e^{-\frac{\pi k}{q}x} \right) \sin \frac{\pi k}{q} y$$

túrindegi (11) shegaralıq shártti qanaatlandıratuǵın (13) teńlemenıń sheshimine iye bolamız. Bul sheshim (12) shegaralıq shártti qanaatlandırıw ushın

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{\pi k}{q} y = y(q - y),$$

$$u(p, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{\pi k}{q}p} + B_k e^{-\frac{\pi k}{q}p} \right) \sin \frac{\pi k}{q} y = \sin \frac{3\pi y}{q}$$

sisteması orınlı bolıwı kerek. Bul sistemadan

$$\begin{cases} A_k + B_k = \alpha_k, \\ A_k e^{\frac{\pi k}{q}p} + B_k e^{-\frac{\pi k}{q}p} = \beta_k \end{cases}$$

sisteması kelip shıǵadı, bul jerde

$$\alpha_k = \frac{2}{q} \int_0^q y(q - y) \sin \frac{\pi k}{q} y dy = \frac{4q^2}{\pi^3 k^3} (1 - (-1)^k), \quad b_3 = 1; \quad b_k = 0, \quad k \neq 3.$$

Sońǵı sistemanı A_k hám B_k larǵa qarata sheshsek

$$A_k = \frac{\beta_k - \alpha_k e^{-\frac{\pi k}{q}p}}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} p}, \quad B_k = \frac{\alpha_k e^{\frac{\pi k}{q}p} - \beta_k}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} p}$$

hám bulardı orınlarına qoysaq, sheshim

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} x - \alpha_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} (x - p) \right) \frac{\sin \frac{\pi k}{q} y}{\sin \frac{\pi k}{q} p}$$

yamasa

$$u(x, y) = \frac{\operatorname{sh} \frac{3\pi}{q} x}{\operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} p} \sin \frac{3\pi}{q} y - \frac{8q^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{q} y}{(2k+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} (x-p)}{\operatorname{sh} \frac{\pi k}{q} p}$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 2. $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y < \infty\}$ yarım jolağındağı temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlań, egerde oblasttıń shegarasındağı temperatura tómendegishe berilgen bolsa:

$$u(0, y) = u(p, y) = 0, \quad 0 < x < p,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{p^2} x(p-x), \quad u(x, \infty) = 0, \quad 0 < y < \infty.$$

Sheshiliwi. Temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlaw, berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuğın

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplas teńlemesin sheshiwge alıp klinedi. Sheshimdi

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleyviz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $X(x)$ qa qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{p}, \quad X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{p} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

bolatuğın $X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(p) = 0$ Shturm-Liuvill máselesine, al $Y(y)$ qa qarata

$$Y_k''(y) - \left(\frac{\pi k}{p} \right)^2 Y_k(y) = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemenıń sheshimi

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{\pi k}{p} y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{p} y}$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimniń $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{\pi k}{p} y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{p} y} \right) \sin \frac{\pi k}{p} x$$

túrindegi berilgen teńlemeniniń x boyınsha shegaralıq shártlerin qanaatlандıratuǵın sheshimine iye bolamız. Bul sheshim $y \rightarrow \infty$ daǵı shártti qanaatlандırıw ushın $A_k = 0, k = 1, 2, \dots$ bolıwı kerek. Al $y = 0$ shegaralıq shártinen

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi k}{p} x = \frac{1}{p^2} x(p - x)$$

bolıp, bunnan

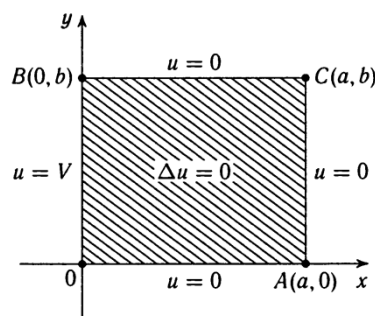
$$B_k = \frac{2}{p^3} \int_0^p x(p - x) \sin \frac{\pi k}{p} x dx = \frac{-8}{\pi^3 (2k + 1)^3}$$

boladı hám izlenip atırǵan sheshim

$$u(x, y) = \frac{-8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^3} e^{-\frac{\pi(2k+1)}{p} y} \sin \frac{\pi(2k + 1)}{p} x$$

kóriniske iye boladı.

Мисал 3. Eger OB tárepi boyında potencial V ǵa teń bolıp, al qalǵan úsh tárepi jerge tutastırılǵan bolsa, onda $OACB$ tuwrı múyeshliginde $u(x, y)$ elektr maydanı potencialınıń taralıwın anıqlań. Tuwrı múyeshliktiń ishki oblastı elektr zaryadına iye emes.



Sheshiliwi. Berilgen máseleni sheshiw tuwrı múyeshlikte

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$u(0, y) = V, \quad u(a, y) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0$$

túrindegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiwge alıp klinedi. Sheshimdi

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleyviz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $Y(y)$ ke qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{b}, \quad Y_k(y) = \sin \frac{\pi k}{b} y, \quad k = 1, 2, \dots$$

bolatuǵın

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

Shturm-Liuvill máselesine, al $X(x)$ qa qarata

$$X_k''(x) - \left(\frac{\pi k}{b} \right)^2 X_k(x) = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Sońǵı teńlemenin sheshimi

$$X_k(x) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} x + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} x$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimniń $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} x + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} x \right) \sin \frac{\pi k}{b} y$$

túrindegi berilgen máseleniń A_k hám B_k parametrlerine ǵárezli sheshimine iye bolamız. Bul turaqlılardı anıqlaw ushın sheshimniń sońǵı kórinisin $u(0, y) = V, \quad u(a, y) = 0$ shegaralıq shártine aparıp qoyamız:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{b} y = V,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} a + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} a \right) \sin \frac{\pi k}{b} y = 0$$

Bunnan

$$A_k = \frac{2V}{b} \int_0^b \sin \frac{\pi k}{b} y dy = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4V}{\pi k}, & k = 2n + 1, \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\frac{4V}{\pi k} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} a}, & k = 2n + 1 \end{cases}$$

bolip, sheshim

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{(2n+1)(a-x)\pi}{b} \right)}{(2n+1) \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{b}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{b} y$$

kóriniske iye boladı.

§2. Dóńgelek oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Meyli tegisliktegi

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Laplas teńlemesin qarastırayıq.

Meyli bizge orayları koordinata basında jaylasqan eki R_1 hám R_2 radiuslı sheńberler menen shegaralangán saqıyna tárizli K oblastı berilgen bolsın. Meyli anıqlıq ushın $R_1 < R_2$ dep esaplap, usı saqıynada (1) Laplas teńlemesin qanaatlandıratuǵın $u(x, y)$ funkciyanı tabıw máselesin qarastırayıq. Bul máseleni sheshiw ushın $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ belgilewleri járdeminde polyar koordinatalar sistemasına ótemiz. Bul jaǵdayda K saqıynası jańa koordinatalar sistemasında $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ túrindegi ápiwayı qatnas penen súwretlenedi. Al Laplas operatorı jańa koordinatalar sistemasında

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2)$$

kóriniske iye boladı.

Qarastırılıp atırǵan máseleni sheshiw ushın ózgeriwshilerdi ayırıw usılın qollanamız, yaǵnıy sheshimdi $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ kóbeymesi túrinde izleybiz. Bunı (2) teńlemedegi orınlarına qoyıp

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r} R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

teńligine iye bolamız.

Sońǵı teńliktiń eki tárepini $\frac{1}{r^2} R(r)\Phi(\varphi)$ ańlatpasına bólip, nátiyjeni

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}, \quad (= \lambda^2) \quad (3)$$

kóriniste jazamız.

(3) teńlemenin shep tárepini tek r argumentke, al oń jaǵı tek φ argumentke ǵárezli bolǵanlıqtan teńliktiń eki tárepide turaqlı teńlemede kórsetilgen turaqlı

λ^2 sanına teń boladı. (3) qatnastan

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi); \quad (4)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R(r) = 0, \quad (\lambda \geq 0) \quad (5)$$

túrindegi eki ápiwayı differenciallıq teńlemelerge iye bolamız.

(4) teńlemedegi qosımsha shárt $\Phi(\varphi)$ funkciya mánisiniń hár bir 2π den keyin qaytalanatuǵınlıǵın ańlatıp, sheshimniń φ boyınsha periodlı bolatuǵınlıǵın kórsetedi. (4) máseleni bizge málim sxema boyınsha sheshemiz. Dáslep λ parametrin oń dep esaplaymız. Onda $k^2 + \lambda^2 = 0$ xarakteristikalıq teńlemenin korenleri $k = \pm i\lambda$ bolıp, (4) teńlemenin ulıwma sheshimi $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi$ boladı. Bul ulıwma sheshimdi shegaralıq shártlerge aparıp qoyıp C_1, C_2 lerge qarata

$$\begin{cases} C_1(\cos 2\pi\lambda - 1) + C_2 \sin 2\pi\lambda = 0, \\ -C_1 \sin 2\pi\lambda + C_2(\cos 2\pi\lambda - 1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

túrindegi algebralıq teńlemeler sistemasına iye bolamız.

Bul sistema birtekli bolǵanlıqtan, nollik emes sheshimge iye bolıw maqsetinde sistemanıń anıqlawshısın nolge teńlestiremiz

$$\begin{vmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Anıqlawshını esaplap, $\cos 2\pi\lambda = 1$ teńlemesine iye boamız, bunnan $\lambda_n = n$, bul jerde $n = 1, 2, \dots$ di C_1 hám C_2 lerdı anıqlaw ushın tabılǵan $\lambda_n = n$ di (6) sistemadaǵı orınlarına qoyamız hám $0 = 0$ túrindegi birdeylikke iye bolamız. Bunnan C_1 hám C_2 lerdin qálegen mánisinde (6) sistemanıń orınlı bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Sonı aytıp ótken maqul, $\lambda_n = n$ niń ózgeriwi menen C_1 hám C_2 turaqlıları hám ózgeredi, sonlıqtan (4) niń sheshimin

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

kóriniste jaza alamız.

$\lambda = 0$ jaǵdaydı óz aldına ayrıqsha qarastıramız. Bul jaǵdayda (4) másele

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

kóriniske iye boladı. Bul teńlemenıń ulıwma sheshimi $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$ kóriniske iye bolıp, buni shegaralıq shártke aparıp qoysaq $B_0 = 0$ boladı, nátiyjede sheshim $\Phi_0(\varphi) = A_0$ túrinde turaqlı bolıp qaladı. Alınğan nátiyje jiyi qollanıladı, sonlıqtan buni tómendegi jeke uyǵarıw menen juwmaqlaymız.

Teorema 1. (4) periodlı shegaralıq másele sanaqlı sandaǵı $\lambda_n^2 = n^2$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) menshikli mánislerge hám sanaqlı sandaǵı

$$\Phi_0(\varphi) = A_0, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

menshikli funkciyalargá iye boladı.

Endi (5) mäseleni sheshiwge ótemiz. Bul teńleme Eyler teńlemesi bolıp tabıladı, sebebi hár bir qosılıwshıdaǵı tuwındınıń tártibi r kóbeytiwshiniń dárejesi menen sáykes keledi. Eyler teńlemesiniń sheshimi $\lambda > 0$ ushın $R(r) = r^\alpha$ kóriniste izlenedi. Buni (5) degi orınlarına qoyıp, keyinshelik r^α ge qısqartıw arqalı jeńil sheshiletuǵın

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda^2 = 0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul α ǵa qarata kvadrat teńleme bolıp, onıń korenleri $\alpha = \pm\lambda$ boladı. Bunnan Eyler teńlemesiniń r^λ hám $r^{-\lambda}$ túrindegi dara sheshimlerine hám $R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}$, ($\lambda > 0$) ulıwma sheshimine iye bolamız. Endi jáne $\lambda = 0$ jaǵdaydı óz aldına ayırıqsha qarastıramız. Bul jaǵdayda (5) másele $r^2 R''(r) + rR'(r) = 0$ kóriniske iye bolıp, onıń ulıwma sheshimi $R(r) = C \ln r + D$ boladı. Alınğan nátiyje jáne tómendegi jeke uyǵarıw menen juwmaqlaymız.

Teorema 2. (5) Eyler teńlemesiniń ulıwma sheshimi

$$R(r) = C \ln r + D, \quad (\lambda = 0),$$

$$R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}, \quad (\lambda > 0)$$

kóriniske iye boladı.

(4) hám (5) teńlemeler λ niń birdey mánislerinde sheshiliwi kerek. (4) periodlı shegaralıq mäseleniń sheshimi $\lambda_n = n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) ushın alınğan,

sonlıqtan (5) máseleńiń sheshimide λ niń usınday mánislerinde alınıwı kerek, yaǵnıy

$$R_0(r) = C_0 \ln r + D_0, \quad (n=0), \quad (8)$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

(7) hám (8) formulalar menen kórsetilgen (4) hám (5) máselelerdiń sheshimin hár bir $n=0, 1, 2, \dots$ ushın jubı menen jazsaq

$$n=0: R_0(r) = C_0 \ln r + D_0, \quad \Phi_0(\varphi) = A_0,$$

$$n>0: R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

bul funkciyalardıń jubı menen

$$n=0: u_0(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r, \quad (9)$$

$$n>0: u_n(r, \varphi) = (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

kóbeymesi Laplas teńlemesiniń saqıynadaǵı dara sheshimi bolatuǵınlıǵın tikkeley esaplaw arqalı kóriwge boladı.

Superpoziciya principı boyınsha (9) daǵı barlıq dara sheshimlerdiń qosındısı Laplas teńlemesiniń saqıynadaǵı ulıwma sheshimi boladı:

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi] . \quad (10)$$

Bul formula járdeminde saqıynadaǵı Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleńiń sheshimin alıwǵa boladı.

(10) qatardıń jıyınalıqlıǵı haqqındaǵı sorawǵa juwap retinde hár bir konkret jaǵdayında qosımsha máseleńi sheshiw zárúr boladı. Bul qatardıń bazı-bir úzliksiz funkciyaǵa jıyınalıqlıǵı onıń differenciallanıwshılıǵına juwap bermeydi, sonıń ushın Laplas teńlemesine qosımsha shártlerdiń qoyılıw zárúrligi payda boadı. Sonlıqtanda (10) sheshim berilgen máseleńiń ulıwmalasqan sheshimi bolıp tabıladı. Egerde (9) túrindegi dara sheshimlerdiń shekli qosındısı menen shegaralanatuǵın bolsaq, onda bul sheshim Laplas teńlemesiniń shekli $K = \{0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ saqıynasında klassikalıq sheshim boladı. Mısal ushın

$$u(r, \varphi) = \ln r + 4r^3 \cos 3\varphi - \frac{2}{r^5} \sin 5\varphi \text{ funkciyası klassikalıq sheshim bola aladı.}$$

Dóńgelekтегі Laplas теńлемесі ushın Dirixle máselesі. Aldıńǵı paragrafta qarastırılǵan saqıynanıń dóńgelek halında, yaǵnıy ishki radius $R_1 = 0$ bolǵan dara jaǵdayındaǵı máseleni qarastırayıq. Bul jaǵdayda sırtqı radiustı $R = R_2$ dep belgilewge boladı. $f(\varphi)$ funkciyasın belgili hám periodı 2π bolǵan periodlı funkciya dep esaplap $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesin $u|_{r=R} = f(\varphi)$ shegaralıq shárti menen tolıqtıramız. Laplas teńlemesi hám oǵan qoyılǵan shegaralıq shártlerden turatuǵın sistema Laplas teńlemesi ushın dóńgelekтегі Dirixle máselesі dep ataladı. Polyar koordinatalar sistemasında bul másele

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (0 < r < R), \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$$

kóriniske iye boladı.

Bizge málim, Laplas teńlemesiniń saqıynadaǵı ulıwma sheshimi

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi]$$

kóriniske iye. Bul ulıwma sheshimдегі $\ln r$ hám r^{-n} ($n=1, 2, \dots$) funkciyaları dóńgelek orayında shegaralanbaǵan. Sonlıqtan bul ulıwma sheshimдегі bul funkciyalardıń aldında turǵan koefficientlerdi nolge teń dep alamız. Nátiyjede Laplas teńlemesiniń dóńgelekтегі ulıwma sheshimi

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n r^n \cos n\varphi + c_n r^n \sin n\varphi] \quad (11)$$

boladı.

(11) дегі a_n hám c_n koefficientlerdi anıqlaw ushın onı $u|_{r=R} = f(\varphi)$ shegaralıq shártke aparıp qoyamız, Nátiyjede

$$u(R, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n R^n \cos n\varphi + c_n R^n \sin n\varphi] = f(\varphi) \quad (12)$$

teńligine aparıp qoyamız hám parallel $f(\varphi)$ funkciyasın $[0, 2\pi]$ intervalında Fure qatarına jayamız:

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi].$$

Funkciyanıń Fure qatarına jayılasınıń birden-bir ekenligin esapqa alǵan halda sońǵı qatnastan $a_0 = f_0$, $a_n R^n = f_n^c$, $c_n R^n = f_n^s$, ($n=1,2,\dots$) teńliklerine iye bolamız. Bunnan $a_n = \frac{1}{R^n} f_n^c$, $c_n = \frac{1}{R^n} f_n^s$, ($n=1,2,\dots$) bolıp, bulardı ulıwma sheshimdegı orınlarına qoysaq

$$u(r, \varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi]$$

teńligine iye bolamız, bul jerde f_0 , f_n^c , f_n^s koefficientleri Fure qatarınıń teoriyasınan belgili

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (13)$$

formulaları menen anıqlanadı.

Mısal 3. Tómendegi Laplas teńlemesi ushın ishki Dirixle máselesin sheshiw talap etilsin:

$$\Delta u = 0, \quad (0 \leq r < 3), \quad u|_{r=3} = \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Sheshiliwi. $[0, 2\pi]$ aralıqta shegaralanǵan $f(\varphi) = \varphi^2$ funkciyasınıń Fure koefficientlerin esaplaymız. $n=0$ ushın

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3} \pi^2$$

Eger $n=1,2,3,\dots$ ushın bóleklep integrallaw arqalı tómendegilerdi esaplaymız

$$f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{n^2}, \quad f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin n\varphi d\varphi = -\frac{4\pi}{n}.$$

Onda berilgen máseleniń sheshimi $r < 3$ ushın

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3} \right)^n \left[\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right] \quad (14)$$

kóriniske iye boladı.

Endi alıńǵan bul qatardıń jıyınalılıq shártin anıqlaymız. Bul

$A + B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n$ túrindegi kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń sheksiz

sandaǵı aǵzalarınń qosındısınan ibarat qatar menen majorantlanadı hám sonlıqtan ol φ boyınsha hár bir $r < 3$ diń mánisi ushın teń ólshemli jıynaqlı boladı. $u(r, \varphi)$ funkciyasınıń dara tuwındıları ushın payda bolatuǵın qatarlar

$A + B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{r}\right)^n$ qatarın differenciallawdan payda bolatuǵın qatar menen

majorantlanadı. Al bul óz gezeginde sheshimdi anıqlaytuǵın qatardıń $r \leq r_0 < 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ oblastında teń ólshewli jıynaqlı bolatuǵınlıǵın támiyinleydi. Bunnan $u(r, \varphi)$ funkciyasınıń barlıq dara tuwındıları $r < 3$ dóńgeleginiń hár bir tochkasında anıqlanǵanlıǵın, yaǵnıy bul funkciya r hám φ ózgeriwshileri boyınsha qarastırılıp atırǵan dóńgelekte sheksiz differenciallanıwshı funkciya bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. φ argumentin fiksirleymiz hám $r \rightarrow 3-0$ shegin esaplaymız. Nátiyjede

$$u(3, \varphi) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right]$$

túrindegi $[0, 2\pi]$ aralıqta anıqlanǵan hám barlıq san kósherinde periodlı dawam etetuǵın φ^2 funkciyasınıń Fure qatarına jayılmısına iye bolamız. Bul funkciya 2π ge eseli tochkalarda úziliske ushırıp, qalǵan tochkalarda úzliksiz boladı. Basqasha sóz benen aytqanda qarastırılıp atırǵan funkciya Dirixle shártin qanaatlandıradı hám sonlıqtan onıń Fure qatarı ózine $(0, 2\pi)$ intervaldıń hár bir tochkasında jıynaqlı bolıp, al 0 hám 2π tochkalarda $\frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2$ mánisine ortasha jıynaqlı boladı. Tap usınday jollar menen $r = 3$ sheńberinde hám usınday shek mánislerin alıwǵa boladı:

$$u|_{r=3} = \begin{cases} \varphi^2, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ 2\pi^2, & \varphi = 0, \varphi = 2\pi. \end{cases}$$

Juwmaqlap aytqanda (14) kóriniske iye $u(r, \varphi)$ funkciyası úziliske iye

bolatuǵın $(r, \varphi) = (3, 0)$ tochkasın óz ishine almaytuǵın $r \leq 3$ tuyıq oblastta úzliksiz boladı. Bul tochkanıń qálegen dógergende $u(r, \varphi)$ funkciyası $(0, 4\pi^2)$ intervaldaǵı qálegen mánisti qabıl etedi. $r < 3$ dóńgeleginiń hár bir tochkasında r hám φ ózgeriwshileri boyınsha sheksiz differenciallanıp, Laplas teńlemesin qanaatlandıradı.

Dóńgelekte Laplas teńlemesi ushın sırtqı Dirixle máselesi. Bul paragrafta saqıynanıń dóńgelek sırtındaǵı halında, yaǵnıy sırtqı radius $R_2 = +\infty$ bolǵan dara jaǵdayındaǵı máseleni qarastırayıq. Bul jaǵdayda ishki radiustı $R = R_1$ dep belgilewge boladı. $f(\varphi)$ funkciyasın belgili hám periodı 2π bolǵan periodlı funkciya dep esaplap $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesin $u|_{r=R} = f(\varphi)$ shegaralıq shárti menen tolıqtıramız. Laplas teńlemesi hám oǵan qoyılǵan shegaralıq shártlerden turatuǵın sistema Laplas teńlemesi ushın dóńgelekтегі sırtqı Dirixle máselesi dep ataladı. Polyar koordinatalar sistemasında bul másele

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (R < r), \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$$

kóriniske iye boladı. Bizge málim, Laplas teńlemesiniń saqıynadaǵı

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi]$$

ulıwma sheshimge $\ln r$ hám r^n ($n=1, 2, \dots$) funkciyaları qatnasadı hám olar $r \rightarrow \infty$ da sheksiz ósedı. Sonlıqtan ulıwma sheshimdegi bul funkciyalardıń aldında turǵan koefficientlerdi nolge teń dep alamız. Nátiyjede Laplas teńlemesiniń dóńgelekтегі ulıwma sheshimi

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n r^{-n} \cos n\varphi + d_n r^{-n} \sin n\varphi] \quad (15)$$

boladı. (15) degi b_n hám d_n koefficientlerdi anıqlaw ushın onı $u|_{r=R} = f(\varphi)$ shegaralıq shártke aparıp qoyamız, Nátiyjede

$$u(R, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n R^{-n} \cos n\varphi + d_n R^{-n} \sin n\varphi] = f(\varphi)$$

teńligine aparıp qoyamız hám onı $f(\varphi)$ funkciyasın (12) daǵı qatar menen

salıstıramız:

$$a_0 = f_0, \quad b_n R^{-n} = f_n^c, \quad d_n R^{-n} = f_n^s, \quad (n=1, 2, \dots)$$

Bunnan $b_n = R^n f_n^c$, $d_n = R^n f_n^s$, $(n=1, 2, \dots)$ bolıp, bulardı ulıwma sheshimdegi orınlarına qoysaq

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n r^{-n} \cos n\varphi + d_n r^{-n} \sin n\varphi] \quad (16)$$

teńligine iye bolamız, bul jerde f_0 , f_n^c , f_n^s koefficientleri (13) formula menen esaplanadı.

Mısal 4. Tómendegi Laplas teńlemesi ushın sırtqı Dirixle máselesin sheshiw talap etilsin:

$$\Delta u = 0, \quad (3 < r), \quad u|_{r=3} = \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Sheshiliwi. $[0, 2\pi]$ aralıqta shegaralanğan $f(\varphi) = \varphi^2$ funkciyasınıń Fure koefficientleri ekinshi mısalda esaplanılğan, sonlıqtan $r > 3$ dep esaplap, (16) formula boyınsha bul máseleń sheshimin birden

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{r} \right)^n \left[\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right]$$

kóriniste jaza alamız.

Hár bir $r > 3$ ushın alınğan qatar $A + B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{r} \right)^n$ túrindegi kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń sheksiz sandaǵı aǵzalarınń qosındısı menen majorantlanadı hám sonlıqtan ol r hám φ ózgeriwshileri boyınsha sheksiz differenciallanıwshı funkciya bolıp tabıladı. $r = 3$ ushın qaytadan jáne φ^2 funkciyasınıń Fure qatarına iye bolamız. Eger $r \rightarrow \infty$ da, onda $u(r, \varphi) = \frac{4}{3} \pi^2$ Bunnan úziliske iye bolatuǵın $(r, \varphi) = (3, 0)$ tochkasın óz ishine almaytuǵın $r \geq 3$ tuyıq oblastta $u(r, \varphi)$ funkciyası úzliksiz boladı. $r > 3$ bolatuǵın dóńgelek sırtında bul funkciya $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesin qanaatlandıradı.

§3. Dóńgelek saqıyna hám dóńgelek sektorında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Saqıynaǵı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi. Laplas teńlemesin óz ishine alatuǵın elliptikalıq tiptegi teńlemeler ushın oblasttıń shegarasında sheshimniń mánisi belgili dep esaplap, kóbinese birinshi shegaralıq másele qoyıladı. Laplas teńlemesinen hám birinshi shegaralıq shártten ibarat payda bolǵan sistema Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi dep ataladı. Eger sheshim izlenip atırǵan oblast saqıyna bolsa, onda bul oblasttıń shegarası eki sheńberden ibarat boladı. Bul sheńberlerdiń radiusların R_1 hám R_2 arqalı belgileymiz. Sonda Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi tómendegishe kóriniske:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \quad (1)$$

$$u|_{r=R_1} = f(\varphi), \quad u|_{r=R_2} = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Bizge málim (1) teńlemeniniń ulıwma sheshimi

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi \right] \quad (2)$$

bolıp, bul (2) den $r = R_1$ ushın

$$f(\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}) \sin n\varphi \right]$$

teńligine iye bolamız. Sońǵı teńlikti $f(\varphi)$ funkciyasınıń

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi)$$

Fure qatarına jayılası menen salıstırsaq hám hár qanday funkciyanıń Fure qatarına jayılasınıń birden-bir ekenligin esapqa alsaq, onda $f(\varphi)$ funkciyasınıń bul eki jayılasınan onıń koefficienlerin salıstırıw arqalı

$$a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

$$a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (3)$$

$$c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n=1, 2, \dots$$

sistemasına iye bolamız.

Endi (2) den $r = R_2$ ushın orınlı bolatugın

$$g(\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}) \sin n\varphi \right]$$

teńligin, joqarıdağıday $g(\varphi)$ funkciyasınıń

$$g(\varphi) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi)$$

Fure qatarına jayılmısı menen salıstırsaq

$$a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi,$$

$$a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (4)$$

$$c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n=1, 2, \dots$$

sistemasına iye bolamız.

(3) hám (4) sistemalar birgelikte sheshiliwi kerek. Sonlıqtan olardı tómendegishe biriktirgen qolaylı boladı:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^s, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^s \end{cases} \quad (7)$$

Payda bolǵan sistemalardıń (5) si a_0 hám b_0 ǵa qarata, (6) sı a_n hám b_n ge qarata hám (7) si c_n hám d_n ge qarata sheshiledi.

Bul keltirilgen maǵlıwmatlardı biriktirip, biz tómendegi uyǵarıwǵa iye bolamız.

Uyǵarıw. Saqıynadaǵı Laplas teńlemesi ushın (1) Dirixle máselesin sheshiw ushın $0 \leq \varphi < 2\pi$ ushın anıqlanǵan dep esaplap, $f(\varphi)$ hám $g(\varphi)$ funkciyalarınń Fure qatarına jayılmasındaǵı koefficientlerdi esaplap, sońınan (5)-(7) sıızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın sheshiw kerek hám a_n, b_n, c_n, d_n koefficientleriniń tabılǵan mánislerin (2) degi orınlarına qoyıw kerek.

Mısal 1. Saqıynada berilgen tómendegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiń:

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < e, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u|_{r=1} = 2, \quad u|_{r=e} = 1.$$

Sheshiliwi. Qálegen turaqlı san, birinshi koefficientten basqası nolge teń bolǵan Fure qatarınıń jayılması bolıp tabıladı. Dara jaǵdayda $f(\varphi) \equiv$ funkciyasınıń Fure qatarınıń jayılmasında $f_0 = 2, \quad f_n^c = 0, \quad f_n^s = 0$ bolıp, $g(\varphi) \equiv 1$ funkciyasınıń Fure qatarınıń jayılmasında $g_0 = 1, \quad g_n^c = 0, \quad g_n^s = 0$ boladı. Onda (5)-(7) sisteması

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 2, \\ a_0 + b_0 \ln e = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_n + b_n = 0, \\ a_n e^n + b_n e^{-n} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_n + d_n = 0, \\ c_n e^n + d_n e^{-n} = 0. \end{cases}$$

Bunnan $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. Al birinshi sistemadan $a_0 = 2, \quad b_0 = -1$.

Bul tabılǵanlardı (2) ulıwma sheshimdegı orınlarına qoyıp

$$u(r, \varphi) = 2 \ln r, \quad 1 < r < e$$

túrindegı sheshimge iye bolamız.

Mısal 2. Saqıynada berilgen tómendegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiń:

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u|_{r=1} = 2 \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=2} = 4 \sin^2 \varphi.$$

Sheshiliwi. Berilgen

$$f(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi, \quad g(\varphi) = 4 \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos 2\varphi$$

funkciyalar trigonometriyalıq kópaǵzalı bolıp, olardıń Fure koefficientleri

$$f_0 = 1, \quad f_n^c = 1, \quad f_n^s = 0, \quad (n=1, 2, \dots), \quad g_0 = 2, \quad g_n^c = -2, \quad g_n^s = 0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

bolǵanlıqtan (5)-(7) sisteması boyınsha

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 1, \\ a_0 + b_0 \ln 2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + b_2 = 1, \\ a_n 2^n + b_n e^{-2} = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} c_n + d_n = 0, \\ c_n 2^n + d_n 2^{-n} = 0 \end{cases}$$

bolıp, bunnan $a_0 = 1, b_0 = 1/\ln 2, a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. Tabılǵan belgisiz

koefficientlerdiń bul mánislerin (2) degi ulıwma sheshimge qoyıp, berilgen mäseleniń tómendegi sheshimine iye bolamız

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{5} \left(\frac{8}{r^2} - 3r^2 \right) \cos 2\varphi.$$

Dóńgelek sektorında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq mäseler. Meyli ishki dóńgelek $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \alpha$ sektorınıń $\varphi = 0$ hám $\varphi = \alpha$ nurlarında birtekli shegaralıq shártlerge iye bolǵan Laplas teńlemesi ushın

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha,$$

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad (8)$$

$$P_1(u) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \beta_1 u \Big|_{\varphi=0} = 0,$$

$$P_2(u) = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \beta_2 u \Big|_{\varphi=\alpha} = 0,$$

shegaralıq mäseleni qarastırayıq. Mäseleniń sheshimin $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ kóbeymesi túrinde izlep, ózgeriwshilerin ajratqannan soń $\Phi(\varphi)$ funkciyasına qarata $0 \leq \varphi \leq \alpha$ kesindisinde

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha,$$

$$P_1(\Phi) = \alpha_1 \Phi' - \beta_1 \Phi \Big|_{\varphi=0} = 0,$$

$$P_2(\Phi) = \alpha_2 \Phi' + \beta_2 \Phi \Big|_{\varphi=\alpha} = 0$$

túrindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Al eki ádettegi differenciallıq teńlemege iye bolamız. Al $R(\rho)$ funkciyasına qarata

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad \|R(\rho)\| < \infty \quad (9)$$

teńlemesine iye bolamız.

Al (9) teńlemenin sheshimi bizge tanıs bolıp, onın

$$R(\rho) = C \rho^\lambda$$

túrindegi $\rho = 0$ ushın shegaralanǵan sheshimine iye bolamız. Solay etip Laplas teńlemesinin dóńgelek sektrındaǵı dara sheshimleriniń

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^{\lambda_k} \Phi_k(\varphi), \quad k = 1, 2, \dots$$

túrindegi dara sheshimleri toparına iye bolamız, bul jerde $\Phi_k(\varphi)$ hám

$\lambda_k \geq 0$ –ler (8) máselenin $0 \leq \varphi \leq \alpha$ kesindidegi sáykes menshikli funkciyaları hám menshikli mánisleri. Sonlıqtan Laplas teńlemesinin dóńgelek sektri ishindegi ulıwma sheshimi

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\lambda_k} \Phi_k(\varphi)$$

bolıp, C_k koeficientler (8) shegaralıq shártten

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \Phi_k(\varphi) = f(\varphi)$$

teńliginen

$$C_k = \frac{1}{\|\Phi_k\|^2} \int_0^\alpha f(\varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi$$

formulası menen anıqlanadı.

Mısal 3. Mısal ushın, meyli $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ dóńgelek sektorında

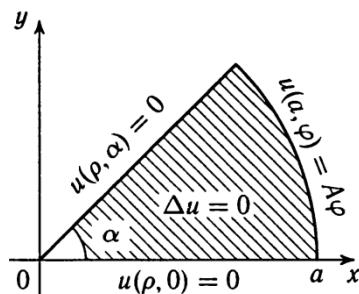
$$u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, \quad u(\rho, \varphi) = A\varphi, \quad (A = \text{const})$$

shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın temperaturanın ornıqlı taralıw nızamın qarastırayıq.

Máselenin shárti boyınsha berilgen temperaturanın ornıqlı taralıwın anıqlaw máselesi

$$\begin{aligned}\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} &= 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho, 0) &= u(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq a, \\ u(a, \varphi) &= A\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha\end{aligned}$$

túrinda berilgen Dirixle máselesin sheshiwge alıp klinedi.



Sheshimdi $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ kóbeymesi túrinde izlep, ózgeriwshilerin ajratqannan soń

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0, \quad \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$$

túrindegi eki ádettegi differenciallıq teńlemege iye bolamız.

$$u(\rho, 0) = R(\rho)\Phi(0) = 0$$

hám

$$u(\rho, \alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha) = 0$$

shártlerinen $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$ teńligi kelip shıǵıp, nátiyjede

$$\begin{aligned}\Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) &= \Phi(\alpha) = 0\end{aligned}$$

túrindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolıp, bunnan $\lambda_k = \frac{\pi k}{\alpha}$ hám

$$\Phi_k(\varphi) = \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{túrindegi bul máseleniń menshikli mánisleri}$$

menen menshikli funkciyalarına iye bolamız.

Endi $R(\rho)$ funkciyasın $R(\rho) = \rho^\mu$ kóriniste izleyemiz. Bunı $\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0$ teńlemesine qoysaq

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2 = 0$$

teńligine iye bolıp, bunnan μ dıń $\mu = \pm \frac{\pi k}{\alpha}$ mánisi kelip shıǵadı.

$R(\rho)$ funkciyasınıń shegaralanǵan funkciya ekenligin paydalansaq

$R_k(\rho) = \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}}$ bolıp, nátiyjede

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

yamasa, sheshimniń

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi$$

erikli c_k turaqlıları $u(a, \varphi) = A\varphi$ shártinen anıqlanatuǵın kórinisi hasıl boladı.

$$u(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi = A\varphi$$

teńliginen

$$c_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} A\varphi \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi d\varphi$$

yamasa

$$c_k = \frac{2A}{\alpha a^{\frac{\pi k}{\alpha}}} \int_0^{\alpha} \varphi \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi d\varphi = (-1)^{k+1} \frac{2\alpha A}{\pi k}.$$

c_k nıń bul mánisin esapqa alsaq, onda sheshim

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2\alpha A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^{\frac{\pi k}{\alpha}} \sin \frac{\pi k}{\alpha} \varphi$$

túrine iye boladı.

2-Bap. Tuwrı múyeshli parallelepiped, shar hám cilindrlik oblastlarda Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Úsh ólshemli Laplas teńlemesi kóbinese jıllılıqtıń taralıwında, gidro hám aeromexanikada, serippelilik teoriyasında, elektrostatikada hám fizika-mexanikanıń basqada kópshilik tarawlarında ushırasadı. Bul teńleme jıllılıqtıń taralıw teoriyasında, qarastırılıp atırǵan oblastta jıllılıq deregi bolmaǵan jaǵday ushın jıllılıqtıń ornıqlı bólistiriliwin súwretleydi.

Bul bapta úsh ólshemli Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máselelerdi

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < h,$$

$$u|_{z=0} = \varphi_1(x, y), \quad u|_{z=h} = \varphi_2(x, y), \quad P[u]|_{\substack{x=0, x=a, \\ y=0, y=b}} = 0$$

tuwrı múyeshli parallelepipedte, Lejandr funkciyası járdeminde sferalıq koordinatalar sistemasında berilgen

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0$$

Laplas teńlemesi ushın shardaǵı ishki hám, sırtqı Dirixle máselelerin, sonday-aq $R_1 < r < R_2$ shar qatlamındaǵı Dirixle máselesin hám sonday-aq cilindrlik koordinatalar sistemasında berilgen

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h,$$

$$u|_{r=a} = f(\varphi, z), \quad u|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \quad u|_{z=h} = f_2(r, \varphi).$$

dóngelek cilindrdegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin ózgeriwshilerdi ajıratıw usılı menen sheshiw máselesi qarastırılǵan.

§1. Tuwrı múyeshli parallelepipedtegi Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Laplas teńlemesi ushın ulıwma shegaralıq másele standart túrdegi úsh kórinistiń birine iye boladı. Tuwrı múyeshli parallelepiped jaǵdayında standart másele dep, birtekli emes shegaralıq shárti eki parallel jaǵında (aytayıq, eki ultanında), al qalǵan jaqlarında shegaralıq shártler birtekli bolǵan (aytayıq, qaptal jaqlarında) máselege aytamız. Mısalı tómendegi standart máseleni qarastırayıq.

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < h, \quad (1)$$

$$u|_{z=0} = \varphi_1(x, y), \quad (2)$$

$$u|_{z=h} = \varphi_2(x, y), \quad (3)$$

$$P[u]|_{\substack{x=0, x=a, \\ y=0, y=b}} = 0 \quad (4)$$

bul jerde $P[u]$ –úshinshi túr shegaralıq shártke sáykes operator.

Bul máseleni sheshiw ushın dáslep

$$u(x, y, z) = \vartheta(x, y)Z(z) \neq 0$$

kórinistegi Laplas teńlemesiniń dara sheshimin dawıp alamız. Bunı Laplas teńlemesine qoyıp ózgeriwshilerin ajıratsaq

$$\frac{\Delta_2 \vartheta}{\vartheta(x, y)} = \frac{Z''}{Z(z)} = -\lambda$$

bolıp, bunnan

$$\begin{aligned} \Delta_2 \vartheta + \lambda \vartheta &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ P[\vartheta]|_{\substack{x=0, x=a, \\ y=0, y=b}} &= 0, \quad \vartheta(x, y) \neq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

hám

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h$$

túrindegi ózgeriwshileri ekige ajıralǵan shegaralıq máselelerge iye bolamız. (5) másele tuwrı múyeshlik ushın Shturm-Liuvill máselesi bolıp tabıladı. Meyli (5) ni tómendegishe jazıp alayıq.

$$\Delta_2 \vartheta + \lambda \vartheta = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (6)$$

$$P_1[\mathcal{G}] = (\alpha_1 \mathcal{G}_x - \beta_1 \mathcal{G})_{x=0} = 0, \quad P_2[\mathcal{G}] = (\alpha_2 \mathcal{G}_x + \beta_2 \mathcal{G})_{x=a} = 0, \quad (7)$$

$$P_3[\mathcal{G}] = (\alpha_3 \mathcal{G}_y - \beta_3 \mathcal{G})_{y=0} = 0, \quad P_4[\mathcal{G}] = (\alpha_4 \mathcal{G}_y + \beta_4 \mathcal{G})_{y=b} = 0, \quad (8)$$

bul jerde α_i, β_i – turaqlı sanlar, sonıń menen birge $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$.

(6)-(8) máseleni ózgeriwshilerdi ajratıw usılı menen sheshemiz. (6) teńlemenin nollık emes sheshimin

$$\mathcal{G}(x, y) = X(x)Y(y)$$

kóriniste izleybiz hám onı teńlemege qoyıp, ózgeriwshilerin ajıracaq

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu$$

bolıp, $X(x)$ hám $Y(y)$ funkciyaları ushın bir ólshemli Shturm-Liuvill máselelerine iye bolamız:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & 0 < x < a, \\ P_1[X]_{x=0} = 0, & P_2[X]_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

hám

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, & 0 < y < b, \\ P_3[Y]_{y=0} = 0, & P_4[Y]_{y=b} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

bul jerde $\nu = \lambda - \mu$. Bul máselelerdin hár birin sheship, (9),(10) máselelerdin sáykes menshikli mánislerine iye bolamız

$$X_n(x) = \frac{\beta_1 \sin \sqrt{\mu_n} x + \alpha_1 \sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n} x}{\sqrt{\mu_n \alpha_1^2 + \beta_1^2}},$$

$$Y_m(y) = \frac{\beta_3 \sin \sqrt{\nu_m} y + \alpha_3 \sqrt{\nu_m} \cos \sqrt{\nu_m} y}{\sqrt{\nu_m \alpha_3^2 + \beta_3^2}},$$

bul jerde $\mu_n, n=1, 2, \dots$, degenimiz

$$(\alpha_1 \alpha_2 \mu - \beta_1 \beta_2) \operatorname{tg} \sqrt{\mu} a = \sqrt{\mu} (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)$$

hám $\nu_m, m=1, 2, \dots$, degenimiz

$$(\alpha_3 \alpha_4 \nu - \beta_3 \beta_4) \operatorname{tg} \sqrt{\nu} b = \sqrt{\nu} (\alpha_3 \beta_4 + \beta_3 \alpha_4)$$

teńlemesinin korenleri hám sonıń menen birge

$$\|X_n\|^2 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)(\mu_n\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{(\mu_n\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\mu_n\alpha_2^2 + \beta_2^2)};$$

$$\|Y_m\|^2 = \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\beta_3\alpha_4 + \alpha_3\beta_4)(\nu_m\alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4)}{(\nu_m\alpha_3^2 + \beta_3^2)(\nu_m\alpha_4^2 + \beta_4^2)}$$

Bulardı esapqa alsaq, onda (6)-(8) Shturm-Liuvill máselesiniń $\mathcal{G}_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y)$ kóbeyme túrinde kórsetiletuǵın menshikli funkciyalarına hám qosındı túrinde kórsetiletuǵın $\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m$ menshikli mánislerine iye bolamız.

Endi $Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$, $0 < z < h$ teńlemenini sheshemiz. Bul teńlemeniniń sheshimin

$$Z(z) = A \frac{sh\sqrt{\lambda}z}{sh\sqrt{\lambda}h} + B \frac{sh\sqrt{\lambda}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda}h}$$

kóriniste jazǵan qolaylı boladı, bul jerde A, B lar erikli turaqlılar.

Solay etip, Laplas teńlemesiniń dara sheshimi

$$u_{nm}(x, y, z) = \mathcal{G}_{nm}(x, y) \left(A_{nm} \frac{sh\sqrt{\lambda_{nm}}z}{sh\sqrt{\lambda_{nm}}h} + B_{nm} \frac{sh\sqrt{\lambda_{nm}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_{nm}}h} \right)$$

kóriniske iye boladı.

Endi qarastırılıp atırǵan (1)-(4) shegaralıq máseleniń sheshimin dara sheshimler boyınsha jayılǵan

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \mathcal{G}_{nm}(x, y) \left(A_{nm} \frac{sh\sqrt{\lambda_{nm}}z}{sh\sqrt{\lambda_{nm}}h} + B_{nm} \frac{sh\sqrt{\lambda_{nm}}(h-z)}{sh\sqrt{\lambda_{nm}}h} \right)$$

qatar kóriniste izleybiz, bul jerde A_{nm} hám B_{nm} koefficientler

$$A_{nm} = \frac{1}{\|u_{nm}\|^2} \int_0^a \int_0^b \varphi_2(x, y) \mathcal{G}_{nm}(x, y) dx dy,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|u_{nm}\|^2} \int_0^a \int_0^b \varphi_1(x, y) \mathcal{G}_{nm}(x, y) dx dy$$

formulalar járdeminde anıqlanadı.

Mısal 1. $x=0$ jaǵındaǵı temperatura Ayz ke teń, al $z=0$ hám $z=c$ jaqlarındaǵı temperatura nolge teń bolǵan, al qalǵan jaqları jıllılıq ótkermeytuǵın halda izolyaciyalanǵan birtekli tuwrımúyeshli $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ parallelepipedte jıllılıqtıń ornıqlı taralıw nızamın anıqlań, bul jerde A turaqlı san.

Sheshiliwi. Ornıqlı $u(x, y, z)$ temperatura tómendegi

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c,$$

$$u|_{x=0} = Ayz, \quad u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0,$$

$$u_x|_{x=a} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=b} = 0$$

shegaralıq máseleniń sheshimi sıpatında anıqlanadı.

Bul máseleniń sheshimin

$$u|_{z=0} = u|_{z=c} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=b} = 0$$

shegaralıq shártke iye $0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ tuwrımúyeshliginde anıqlanǵan menshikli funkciyalar boyınsha jayılgan qatar kóriniste izleybiz.

Bul menshikli funkciyalar

$$g_{nm}(y, z) = \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots,$$

kóriniske iye. x ózgeriwshi boyınsha $x=0$ ushın birinshi túr hám $x=a$ boyınsha ekinshi túr shegaralıq shártler berilgen. Sonlıqtan máseleniń sheshimin

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z \left(A_{nm} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} x}{\sqrt{\lambda_{nm}} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} a} + B_{nm} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} (a-x)}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{nm}} a} \right)$$

kóriniste izleybiz, bul jerde

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c} \right)^2.$$

Al $u_x|_{x=a} = 0$ bolǵanlıqtan barlıq n hám m ler ushın $A_{nm} = 0$ boladı. $x=0$ ushın shegaralıq shártti paydalansaq

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z = Ayz$$

bolip, bunnan B_{nm} koefficientleri

$$B_{nm} = \frac{A}{\left\| \cos \frac{\pi n}{b} y \right\|^2 \left\| \sin \frac{\pi m}{c} z \right\|^2} \int_0^b \int_0^c yz \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z dy dz$$

formulası menen anıqlanadı. Al

$$\int_0^c z \sin \frac{\pi m}{c} z dz = (-1)^{m+1} \frac{c^2}{\pi m},$$

$$\int_0^b y \cos \frac{\pi n}{b} y dy = \begin{cases} \frac{b^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1], & n \neq 0, \\ \frac{b^2}{2}, & n = 0, \end{cases}$$

$$\left\| \sin \frac{\pi m}{c} z \right\|^2 = \frac{c}{2}, \quad \left\| \cos \frac{\pi n}{b} y \right\|^2 = \begin{cases} b, & n = 0, \\ \frac{b}{2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

bolğanlıqtan

$$B_{0m} = (-1)^{m+1} \frac{bc}{\pi m}, \quad B_{nm} = \frac{4bc}{\pi^3 mn^2} (-1)^m [1 - (-1)^n], \quad m = 1, 2, \dots, \quad n \neq 0,$$

bolip, bunnan temperaturanıń ornıqlı bólistiriliwi, yaǵnıy máseleniń sheshiminiń

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{bc}{\pi m} \frac{ch \frac{\pi m}{c} (a-x)}{ch \frac{\pi m}{c} a} \sin \frac{\pi m}{c} z + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [1 - (-1)^n] \frac{4bc}{\pi^3 mn^2} \frac{ch \sqrt{\lambda_{nm}} (a-x)}{ch \sqrt{\lambda_{nm}} a} \cos \frac{\pi n}{b} y \sin \frac{\pi m}{c} z$$

bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı, bul jerde

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c} \right)^2.$$

§2. Shardağı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi

Meyli $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ sferalıq koordinatalar sistemasında $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesin qarastırayıq. Sferalıq koordinatalar sistemasında

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}$$

bolǵanlıqtan Laplas teńlemesi sferalıq koordinatalar sistemasında

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0 \quad (1)$$

kóriniske iye boladı.

(1) teńlemenin sheshimin ózgeriwshilerdi ayırıw usılı menen sheshemiz. Meyli

$$u(r, \theta, \varphi) = X(r)Y(\theta, \varphi)$$

funkciyası (1) teńlemenin sheshimi bolsın. Onda

$$\frac{1}{r^2} (r^2 X'(r))' Y(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta Y_\theta(\theta, \varphi))_\theta X(r) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) X(r) = 0$$

bolıp, teńliktiń eki jaǵın $X(r)Y(\theta, \varphi)$ kóbeymesine bólip, sońınan r^2 qa kóbeytsek

$$\frac{(r^2 X'(r))'}{X(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta(\theta, \varphi))_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}$$

bolıp, teńlik belgisiniń shep jaǵında r ge ǵárezli, al oń jaǵında θ hám φ ge ǵárezli shamalar turǵanlıqtan olar bir birine teń bolıwı ushın ekewide turaqlı bir sannan ibarat bolıwı kerek, yaǵnıy

$$\frac{(r^2 X'(r))'}{X(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta(\theta, \varphi))_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda.$$

Bunnan $X(r)$ ushın

$$r^2 X''(r) + 2rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad (2)$$

al $Y(\theta, \varphi)$ ushın

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_{\theta}(\theta, \varphi))_{\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0 \quad (3)$$

teńlemelerine iye bolamız.

Eger (3) niń sheshimin

$$Y(\theta, \varphi) = \Psi(\theta)\Phi(\varphi) \quad (4)$$

kóriniste izlese, onda

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \Psi'(\theta))' \Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Psi(\theta) \Phi''(\varphi) + \lambda \Psi(\theta) \Phi(\varphi) = 0$$

teńligi orınlı bolıp, teńliktiń eki jaǵın $\frac{\Psi(\theta)\Phi(\varphi)}{\sin^2 \theta}$ shamasına bólsek

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \Psi'(\theta))'}{\Psi(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

bolıp, bul teńlik hám joqarıdaǵıǵa uqsas shep jaǵı tek θ ǵa, al oń jaǵı tek φ ge ǵárezli bolǵanlıqtan eki jaǵın hám bir sanǵa teńlestiremiz:

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \Psi'(\theta))'}{\Psi(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu.$$

Bunnan

$$\begin{aligned} \sin \theta (\sin \theta \Psi'(\theta))' + (\lambda \sin^2 \theta - \mu) \Psi(\theta) &= 0, \\ \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

túrindegi teńlemelerge iye bolamız.

$u(r, \theta, \varphi)$ funkciyası φ boyınsha periodlı funkciya bolǵanlıqtan, $Y(\theta, \varphi)$ funkciyası, demek $\Phi(\varphi)$ funkciyası periodlı funkciya bolıp, (5) teńlemege periodlılıq shártti qosıp jazıw kerek. Onda $\Phi(\varphi)$ funkciyası ushın

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \quad (6)$$

sistemasına iye bolamız.

(6) teńlemenin ulıwma sheshimi

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi), & \mu = -\beta^2 < 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 + c_2\varphi, & \mu = 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi), & \mu = \beta^2 > 0 \end{cases}$$

kórinislerge iye boladı. Al $\Phi(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi)$ kórinistegi sheshim $c_1 = c_2 = 0$ den basqa c_1, c_2 ler ushın periodlılıq $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ shártin qanaatlandırmaydı. Sonıń menen birge $\Phi(\varphi) = c_1 + c_2\varphi$ funkciyasıda $c_2 = 0$ den basqa c_2 ler ushın periodlılıq shártin qanaatlandırmaydı. Al $\Phi(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi)$ funkciyası $\mu = \beta^2 = m^2, m \in \mathbb{Z}$ jaǵdayında periodlılıq shártin qanaatlandıradı. Demek sońǵı sheshim (6) sistemalı tolıǵı menen qanaatlandıradı. Bul jaǵdayda biz m niń tek oń teris emes mánislerin alamız. Teris jaǵdayların alǵan menen μ dıń yamasa $\Phi(\varphi)$ funkciyasınıń jańa mánisleri payda bolmaydı.

Solay etip, (4) funkciyası (3) teńlemenıń sheshimi, yaǵnıy sferalıq funkciya boladı, egerde

$$\Phi_m(\varphi) = c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

bolıp, al $\psi(\theta)$ funkciyası

$$\sin \theta (\sin \theta \Psi'(\theta))' + (\lambda \sin^2 \theta - m) \Psi(\theta) = 0, \quad (8)$$

teńlemesin qanaatlandırırsa.

(8) teńleme ushın $x = \cos \theta$ belgilewin kiritemiz. Sonda

$$P(x) = P(\cos \theta) = \psi(\theta)$$

funkciyası ushın

$$\psi'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \psi''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta)$$

tuwındıların esapqa alsaq

$$\sin^4 \theta P''(x) - 2 \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) P(x) = 0$$

teńlemesin yamasa teńliktiń eki jaǵın $\sin^2 \theta$ ǵa bólip hám $\cos \theta = x$, $\sin^2 \theta = 1 - x^2$ belgilewlerin esapqa alǵan jaǵdayda

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0$$

teńlemesine iye bolamız.

Payda bolǵan teńlemenıń sheshimi tutastırılǵan Lejandr funkciyası bolıp, bul sheshim

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$P(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad m = \overline{0, n}$$

formulası menen anıqlanadı. Sonlıqtan (8) teńlemenıń nollik emes sheshimleri

$$\psi_{mn}(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, n}$$

formulası menen anıqlanadı.

Solay etip, (7) nı esapqa alsaq tómendegi nátiyjege erisemiz:

$$u(r, \theta, \varphi) = X(r)Y(\theta, \varphi)$$

funkciyası Laplas teńlemesiniń sheshimi boladı, egerde $X(r)$ funkciyası

$$r^2 X''(r) + 2rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad (9)$$

teńlemesiniń $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ ushın, al $Y(\theta, \varphi)$ funkciyası

$$Y(\theta, \varphi) = Y_{mn}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta)(c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi)), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, n} \quad (10)$$

kóriniske iye bolsa.

(9) teńleme Eyler teńlemesi bolıp, bul teńleme $r = e^t$ túrinde jańa ózgeriwshi kiritiw arqalı sheshiledi. Bul jaǵdayda

$$X(r) = X(e^t) = y(t), \quad rX'(r) = y'(t), \quad r^2 X''(r) = y''(t) - y'(t)$$

bolıp, $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ jaǵdayında jańa $y(t)$ funkciyası ushın

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńleme ushın xarakteristikalıq teńleme

$$\kappa^2 + \kappa - n(n+1) = 0$$

bolıp, onıń korenleri $\kappa_1 = n$, $\kappa_2 = -n-1$ bolǵanlıqtan, sheshimi

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}$$

boladı. Bunnan $r = e^t$ belgilewdi esapqa alsaq

$$X(r) = Ar^n + Br^{-n(n+1)}$$

boladı. Biz tek shegaralanğan sheshimdi izlep atırǵanlıqtan

a) koordinata basın óz ishine alatuǵın sharda $B = 0$ hám

$$X_n(r) = r^n, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (11)$$

b) koordinata basın óz ishine alatuǵın shardıń sırtında $A = 0$ hám

$$X_n(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (12)$$

v) orayı koordinata basında bolǵan shar qatlamında $A, B \neq 0$ hám

$$X_n(r) = Ar^n + B \frac{1}{r^{n+1}}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Shar ishinde Laplas teńlemesiniń ulıwma sheshimi. Endi (11) formula menen alınǵan $X_n(r)$ jáne (10) formula menen alınǵan $Y_{mn}(\theta, \varphi)$, $n = \overline{0, \infty}$, $m = \overline{0, n}$ funkciyalar boyınsha shardaǵı Laplas teńlemesiniń sheshimin dúzemiz. 0 den ∞ ke shekem ózgeretuǵın hár bir n ushın m indeksi 0 den n ge shekem ózgeretuǵın bolǵanlıqtan sheshimdi n boyınsha dúzilgen qatar kóriniste anıqlaymız.

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(r) \sum_{m=0}^n Y_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) \end{aligned} \quad (13)$$

Shar sırtında Laplas teńlemesiniń ulıwma sheshimi. Endi (12) formula menen alınǵan $X_n(r)$ jáne (10) formula menen alınǵan $Y_{mn}(\theta, \varphi)$, $n = \overline{0, \infty}$, $m = \overline{0, n}$ funkciyalar boyınsha shar sırtındaǵı Laplas teńlemesiniń sheshimin dúzemiz.

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(r) \sum_{m=0}^n Y_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) \end{aligned} \quad (14)$$

Shar qatlamındaǵı Laplas teńlemesiniń ulıwma sheshimi. Shar qatlamında $R_1 < r < R_2$ bolǵanlıqtan shar qatlamında Laplas teńlemesiniń sheshimin

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi))$$

túrinde kórsetiwge bladı.

Laplas teńlemesi ushın ishki Dirixle máselesi. Radiusı R ge teń bolǵan shar ishinde Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, \\ 0 \leq r < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, \\ |u(0, \theta, \varphi)| < \infty, u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

shegaralıq máseleni qanaatlandıratuǵın shegaralanǵan $u(r, \theta, \varphi)$ funkciyasın tabıwdan ibarat.

Bul máseleni sheshiw ushın birinshi adımda shar ishinde Laplas teńlemesiniń (13) formula menen anıqlanatuǵın ulıwma sheshimin tawıp alamız.

$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ shegaralıq shárt ulıwma sheshimdegı A_{mn} hám B_{mn} koefficientlerin tabıwǵa múmkinshilik beredi. $f(\theta, \varphi)$ funkciyasın tómendegishe Fure qatarına jayıp alamız

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right] \quad (15)$$

bul jerde

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (16)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (17)$$

sonıń menen birge (15) qatar $f(\theta, \varphi)$ funkciyasına $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ ushın

absolyut hám teń ólshemli jıynaladı. (13) qatardı $r = R$ ushın (15) qatar menen salıstırsaq

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)) \right] = f(\theta, \varphi)$$

teńliginen $m = 0$ ushın

$$R^n P_n(\cos \theta) (A_{0n} \cos 0 + B_{0n} \sin 0) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta),$$

bunnan

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n}, \quad B_{0n} = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Usıǵan uqsas $m \in N$ ushın

$$R^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)),$$

bunnan

$$A_{mn} = \frac{\alpha_{nm}}{R^n}, \quad B_{mn} = \frac{\beta_{nm}}{R^n}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m \in N$$

Solay etip nátiyjede Laplas teńlemesi ushın ishki Dirixle máselesiniń

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)) \right]$$

túrindegi sheshimine iye bolamız, bul jerde $P_n(x)$ –Lejandr kóp aǵzalı, al α_{mn} hám β_{mn} koefficientleri sáykes (16) hám (17) formulalar menen anıqlanadı.

Laplas teńlemesi ushın sırtqı Dirixle máselesi. Radiusı R ge teń bolǵan shar sırtında Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, \\ R < r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ |u(\infty, \theta, \varphi)| < \infty, \quad u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

shegaralıq másele ni qanaatlandıratuǵın shegaralanǵan $u(r, \theta, \varphi)$ funkciyasın

tabıwdan ibarat.

Bul máseleni sheshiw ushın birinshi adımda shar sırtında Laplas teńlemesiniń (14) formula menen anıqlanatuǵın ulıwma sheshimin tawıp alamız.

$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ shegaralıq shárt ulıwma sheshimdegi A_{mn} hám B_{mn} koefficientlerin tabıwǵa múmkinshilik beredi. (14) qatardı $r = R$ ushın (15) qatar menen salıstırsaq:

$$\begin{aligned} u(R, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)) \right] = f(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

teńliginen $m = 0$ ushın

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) (A_{0n} \cos 0 + B_{0n} \sin 0) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta),$$

bunnan

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2} R^{n+1}, \quad B_{0n} = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Usıǵan uqsas $m \in N$ ushın

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)),$$

bunnan

$$A_{mn} = \alpha_{mn} R^{n+1}, \quad B_{mn} = \beta_{mn} R^{n+1}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m \in N$$

Solay etip nátiyjede Laplas teńlemesi ushın ishki Dirixle máselesiniń

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{mn} \cos(m\varphi) + \beta_{mn} \sin(m\varphi)) \right]$$

túrindegi sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. Radiusı R ge teń bolǵan birtekli shar betindegi temperatura

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi \end{cases}$$

ekenligi málim bolsa, usı sharda temperaturanıń ornıqlı bólistiriliwin anıqlayıq.

Máseleniń shártı boyınsha temperaturanıń ornıqlı bólistiriliwi

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta = 0, \\ 0 \leq r < R, 0 < \theta < \pi, \\ |u(0, \theta)| < \infty, u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha, \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi \end{cases} \end{array} \right.$$

shegaralıq máseleni sheshiw arqalı anıqlanadı.

Sheshim φ ge ġárezsiz bolǵanlıqtan sheshimdi

$$u(r, \theta) = X(r)Y(\theta)$$

kóriniste izleyviz. Bul sheshim

$$\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta)_\theta = 0$$

teńlemenı qanaatlandıradı. Onda

$$\frac{1}{r^2} (r^2 X'(r))' Y(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \cdot Y'(\theta))' X(r) = 0$$

bolıp, bul teńlikti $X(r)Y(\theta)$ kóbeymesine bólip, r^2 qa kóbeycek

$$\frac{(r^2 X'(r))'}{X(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y'(\theta))'}{Y(\theta)}$$

boladı. Joqarıdaǵı keltirilgen boyınsha

$$\frac{(r^2 X'(r))'}{X(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y'(\theta))'}{Y(\theta)} = \lambda$$

teńliginen $X(r)$ ge qarata

$$r^2 X''(r) + 2rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad (18)$$

al $Y(\theta)$ ġa qarata

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y'(\theta))' + \lambda Y(\theta) = 0,$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemenı $\sin^2 \theta$ ġa kóbeytip hasıl bolǵan

$$\sin^2 \theta \cdot Y''(\theta) + \sin \theta \cos \theta \cdot Y'(\theta) + \lambda \sin^2 \theta \cdot Y(\theta) = 0 \quad (19)$$

teńlemede $x = \cos \theta$ belgilew kiricek, onda $P(x) = P(\cos \theta) = Y(\theta)$ funkciya ushın

$$Y'(\theta) = \sin \theta P'(\cos \theta), \quad Y''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta)$$

(19) teńleme

$$\sin^4 \theta \cdot P''(\theta) - \sin^2 \theta \cos \theta \cdot P'(\theta) + \lambda \sin^2 \theta \cdot P(\theta) = 0$$

túrine iye boladı. Bul teńlemenı $\sin^2 \theta$ ğa bólip $x = \cos \theta$, $\sin^2 \theta = 1 - x^2$ teńliklerin esapqa alsaq (19) teńleme

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0$$

túrindegi

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$P(x) = P_n(x)$$

túrindegi shegaralanğan Lejandr kópaǵzalısanı ibarat sheshimge iye boladı. Solay etip, nolık emes barlıq shegaralanğan sheshimler

$$Y_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}$$

kóriniske iye boladı. Eger (18) ni esapqa alsaq φ ge ğárezsiz bolğan $u(r, \theta) = X(r)Y(\theta)$ sheshim Laplas teńlemesiniń sheshimi boladı, egerde $X(r)$ funkciyası $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ushın (18) teńlemenıń sheshimi bolıp, $Y(\theta)$ funkciyası

$$Y(\theta) = Y_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}$$

kóriniske iye bolsa.

(18) teńleme Eyler teńlemesi bolıp, onıń shegaralanğan sheshimi $X_n(r) = r^n$ kóriniske iye boladı. Solay etip, Laplas teńlemesiniń nolık emes shegaralanğan sheshimi

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(r) Y_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad A_n \in R$$

bolıp, belgisiz A_n koefficientlerin anıqlaw ushın $u(R, \theta) = f(\theta)$ shegaralıq shártti paydalanamız.

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n0}}{2} A_n P_n(\cos \theta) = f(\theta)$$

qatarinan

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n} = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Al

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} T_1 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= [x = \cos \theta] = -T_1 \int_1^{\cos \alpha} P_n(x) dx = [(2n+1)P_n(x) = \\ &= P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)] = \frac{T_1}{2n+1} \int_{\cos \alpha}^1 (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx = \\ &= \frac{T_1}{2n+1} (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) \Big|_{x=\cos \alpha}^{x=1} = [P_n(1) = 1, n \geq 1] = \\ &= \frac{T_1}{2n+1} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)), \quad n \geq 1, \\ \int_{\alpha}^{\pi} T_2 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{T_2}{2n+1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \Big|_{x=-1}^{x=\cos \alpha} = [P_n(-1) = (-1)^n, n \geq 1] = \\ &= \frac{T_2}{2n+1} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)), \quad n \geq 1, \\ \int_0^{\alpha} T_1 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= [P_0(x) = 1] = T_1 \int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta = T_1(1 - \cos \alpha), \quad n = 0, \\ \int_{\alpha}^{\pi} T_2 P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= [P_0(x) = 1] = \frac{T_2}{2n+1} (1 + \cos \alpha), \quad n = 0 \end{aligned}$$

bolǵanlıqtan

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2n+1}{2R^n} \cdot \frac{T_2 - T_1}{2n+1} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)), & n \geq 1, \\ \frac{1}{2} (T_1 + T_2 + (T_1 - T_2) \cos \alpha), & n = 0 \end{cases}$$

bolıp, nátiyjede

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} (T_1 + T_2 + (T_1 - T_2) \cos \alpha) + \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta) (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha))$$

kórinistegi izlenip atırǵan sheshimge iye bolamız.

§3. Dóńgelek cilindrde Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler

Tuwrı dóńgelek cilinder ($0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$) ishinde Laplas teńlemesin sheshiw tuwrı múyeshli parallelepipedtegi sxema sıyaqlı alıp barıladı. Meyli dóńgelek cilinder ishinde berilgen tómendegi Dirixle máselesin qarastırayıq

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (1)$$

$$u|_{r=a} = f(\varphi, z), \quad (2)$$

$$u|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \quad (3)$$

$$u|_{z=h} = f_2(r, \varphi). \quad (4)$$

Bul (1)-(4) máseleni tómendegishe eki standar máselege ajıratamız:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (5)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

$$u|_{z=0} = f_1(r, \varphi), \quad (7)$$

$$u|_{z=h} = f_2(r, \varphi), \quad (8)$$

hám

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h, \quad (9)$$

$$u|_{r=a} = f(\varphi, z), \quad (10)$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

Endi bul máselelerdiń hár birin qarap ótemiz. Dáslep (5)-(8) máseleni sheshiwden baslaymız. Bul Laplas teńlemesiniń sheshimin

$$u|_{r=a} = 0$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın etip

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi)Z(z) \quad (12)$$

kóriniste izleyviz. (12) ni Laplas teńlemesine qoyıp, ózgeriwshilerin ajratıw arqalı

$$\frac{\Delta_2 v}{v} \equiv -\frac{Z''}{Z} = -\lambda$$

teńligine iye bolamız. Bunnan parallelepipedtegi sıyaqlı $v(r, \varphi)$ hám $Z(z)$ ushın tómendegi

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (13)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad v(r, \varphi) \neq 0,$$

shegaralıq máselege hám

$$Z'' - \lambda Z = 0, \quad 0 < z < h. \quad (14)$$

teńlemesine iye bolamız. (13) másele dóńgelektegi Shturm-Liuvill máselesi bolıp, onıń menshikli funkciyası

$$v = v_{nk}(r, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

al menshikli mánisi $\lambda_k^{(n)}$ bolıp, ol

$$J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} a) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

teńlemenıń koreni boladı. (14) niń ulıwma sheshimin

$$Z(z) = A \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} + B \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} (h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h}$$

kóriniste izleybiz. Solay etip dara sheshimler sisteması

$$u_{nk}(r, \varphi, z) = v_{nk}(r, \varphi) \left\{ A_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} + B_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} (h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} \right\},$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

túrine iye boladı. (5)-(8) mäseleniń sheshimin usı dara sheshimler boyınsha jayılgan

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \left\{ \left[A_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} + B_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} (h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} \right] \cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \left[C_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} z}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} + D_{nk} \frac{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} (h-z)}{sh\sqrt{\lambda_k^{(n)}} h} \right] \sin n\varphi \right\}$$

bul jerde $A_{nk}, B_{nk}, C_{nk}, D_{nk}$ koefficientler (7),(8) shegaralıq shártlerden tómendegishe anıqlanadı:

$$A_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \cos n\varphi r dr d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \cos n\varphi r dr d\varphi,$$

$$C_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \sin n\varphi r dr d\varphi,$$

$$D_{nk} = \frac{1}{\|J_n\|^2 \|\cos n\varphi\|^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r) \sin n\varphi r dr d\varphi.$$

Eskertiw 1. Dirixle máselesi ushın barlıq menshikli mánisler $\lambda_k^{(n)} > 0$.

Neyman máselesin sheshiw payıtında $\lambda = 0$ menshikli mánisi pyda boladı.

Eger $\lambda = 0$ bolsa, onda (14) teńleme

$$Z'' = 0$$

kóriniske iye boladı hám onıń sheshimi

$$Z(z) = A + Bz$$

túrine iye boladı. Sonlıqtan Neyman máselesin sheshiw payıtında onıń dara sheshimler sistemasında nollik menshikli mániske sáykes keliwshi

$$u_0 = A_0 + B_0 z$$

sheshimine itibar beriw kerek boladı.

Endi (9)-(11) mäseleni qarastıramız. Onıń sheshimi ushın Laplas teńlemesiniń dara sheshimleriniń

$$u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın

$$u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi) Z(z) \quad (15)$$

kórinistegi sistemasın dúziw kerek boladı. (15) ni Laplas teńlemesine qoyıp, ózgeriwshilerin ajratıw arqalı $Z(z)$ hám $v(r, \varphi)$ ushın tómendegi

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda Z &= 0, \quad 0 < z < h, \\ Z(0) = Z(h) &= 0, \quad Z(x) \neq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta_2 v - \lambda v = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (17)$$

máselelerine iye bolamız. (16) másele kesindidegi Shturm-Liuvill máselesi bolıp, onıń menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h} \right)^2, \quad Z = Z_k(z) = \sin \frac{\pi k}{h} z, \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

boladı.

(17) teńlemenıń dara sheshimlerin ózgeriwshilerdi ayırıw usılı menen tabamız. Meyli sheshimdi

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

túrinde izleyik. Bunı (17) ge qoyıp hám ózgeriwshilerinajıracaq

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv - \frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)} = v$$

bolıp, bunnan $\Phi(\varphi)$ funkciyasın qarata

$$\begin{aligned} \Phi'' + v\Phi &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \Phi(\varphi) &\equiv \Phi(\varphi + 2\pi), \end{aligned} \quad (18)$$

al $R(r)$ ge qarata

$$r^2 R'' + rR' - (\lambda r^2 + v)R = 0, \quad 0 < r < a, \quad (19)$$

$$|R(0)| < \infty \quad (20)$$

teńlemesine iye bolamız.

(18) másele periodlı shegaralıq shártke iye kesindidegi Shturm-Liuvill máselesi bolıp, onıń menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları

$$v = v_n = n^2, \quad \Phi = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

boladı.

(19) teńleme Bessel teńlemesi bolıp, o nıń ulıwma sheshimi

$$R(r) = C_1 I_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 K_n(\sqrt{\lambda} r),$$

bul jerde $I_n(x)$ İnfelda funkciyası dep, al $K_n(x)$ Makdonalda funkciyası dep ataladı. (20) shártten $C_2 = 0$ boladı. Sonlıqtan (15) dara sheshimler sisteması

$$u_{nk}(r, \varphi, z) = I_n(\sqrt{\lambda_k} r) \sin \sqrt{\lambda_k} z \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad (21)$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h} \right)^2, \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

kóriniske iye boladı.

(9)-(11) shegaralıq máseleniń sheshimin (21) sistema boyınsha jayılgan

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_n(\sqrt{\lambda_k} r)}{I_n(\sqrt{\lambda_k} a)} \sin(\sqrt{\lambda_k} z) \{ A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi \}$$

qatar kóriniste izleybiz, bul jerde koefficientler

$$A_{nk} = \frac{1}{N_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\varphi, z) \sin \frac{\pi k}{h} z \cos n\varphi dz d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{1}{N_2^2} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\varphi, z) \sin \frac{\pi k}{h} z \sin n\varphi dz d\varphi,$$

formulası menen anıqlanadı, bul jerde

$$N_1 = \left\| \sin \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \cos n\varphi \right\|, \quad N_2 = \left\| \sin \frac{\pi k}{h} z \right\| \left\| \sin n\varphi \right\|.$$

Juwmaqlaw

Laplas teńlemesi kóbinese jıllılıqtıń taralıwında, gidro hám aeromexanikada, serippelilik teoriyasında, elektrostatikada hám fizika menen mexanikanıń basqada kópshilik tarawlarında ushırasadı. Bul teńleme jıllılıqtıń taralıw teoriyasında, qarastırılıp atırǵan oblastta jıllılıq deregi bolmaǵan jaǵday ushın jıllılıqtıń ornıqlı bólistiriliwin súwretleydi.

Pitkeriw qánigelik jumısı eki baptan ibarat bolıp, «Tuwrı múyeshli hám polyar koordinatalar sistemasında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler» dep atalatuǵın birinshi babında tuwrı múyeshli oblastta, dóńgelektiń ishki hám sırtqı oblastlarında, sonday-aq dóńgelek saqıynasında hám dóńgelek sektorında Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler qarastırılǵan hám bul máselelerdiń ózgeriwshilerdi ayırıw, yaǵnıy Fure usılı járdeminde sheshiliw jolları bayan etilgen.

Pitkeriw qánigelik jumısınıń «Tuwrı múyeshli parallelepiped, shar hám cilindrlik oblastlarda Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler» dep atalatuǵın ekinshi babında tuwrı múyeshli parallelepipedtegi, shardaǵı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi qarastırılǵan hám sferalıq koordinatalar sistemasında Lejandr funkciyası járdeminde ishki, sırtqı Dirixle máselesiniń, sonday-aq shar qatlamındaǵı Dirixle máselesiniń sheshimi alınǵan.

Sonday-aq pitkeriw qánigelik jumısınıń sońında dóńgelek cilindrde Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler cilindrlik koordinatalar sistemasında qarastırılıp, sońınan Bessel funkciyası járdeminde cilindrdegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń sheshimi alınǵan.

Pitkeriw qánigelik jumısında qarastırılǵan máseleler óziniń kóp sanlı konkret alınǵan mısalları menen tolıqtırılǵan.

Адебиётлар

1. Бицадзе А.В. , Калининченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. –310 с.
2. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. –288 с.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. –М.: Физико- математическая литература, 2000. –400 с.
4. Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах. Часть 1. Учебное пособие. –М.: МИФИ. 2008. –616 с.
5. Гребенникова И.В. Уравнения математической физики: Учебное пособие. –Екатеринбург: УрФУ, 2016. – 164 с.
6. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач: Учебное пособие. Издательство «Лань», 2008. – 224 с.
7. Жўраев Т.Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, "Университет" , 2003 й. –332 б.
8. Зикиров О.С. Математик физика тенгламалари, Ўқув-услугий кўлланма. Тошкент, "Университет" , 2001 й. –76 б.
9. Колесникова С.И. Методы решения основных задач уравнений математической физики. Учебное пособие. –М.: МФТИ. 2015. –79 с.
10. Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть I- II: Учебное пособие. –М.: МИФИ. 2008. –328 с.
11. Кузнецов А.В. Методы математической физики: . Учебное пособие. –Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2004. –200 с.
12. Марченко В.М., Лыжкова О.Н. Уравнения математической физики: Учебное пособие. –Минск: БГТУ, 2013. – 160 с.
13. Масленников В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. –М.: Изд-во РУДН, 1997. –447 с.
14. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд., –М.: МЦНМО. 2004. –208 с.

15. Пулькина Л.С. Практические решение уравнений с частными производными: Учебное пособие. Издательство «Самарский университет», 2015. – 52 с.
16. Рогов А.А., Семенова Е.Е., Чернецкий В.И., Шеголева Л.В. Уравнения математической физики. Сборник задач и упражнений. ПетрГУ. Петрозаводск, 2001. –220 с.
17. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. –352 с.
18. Салохиддинов М. С. Математик физика тенгламалари. –Т.: "УЗБЕКИСТОН", 2002. –448 б.
19. Салохиддинов М.С., Исломов Б.И. Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами. –Т.: MUMTOZSO'Z, 2010. –372 б.
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
21. Шарма Дж. Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров. М.: 2002. 320 с.