

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий
ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМий
КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ВЕКСЛЕР АЛЕКСАНДР СЕМЕНОВИЧ

**ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЎРИН АЛМАШИНУВЧИ–
ИНВARIANT ФАЗОЛАРИДА ЭРГОДИК ТЕОРЕМАЛАР**

**01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2019 йил

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Векслер Александр Семенович

Ўлчовли функцияларнинг ўрин алмашинувчи-инвариант фазоларида
эргодик теоремалар 3

Векслер Александр Семенович

Эргодические теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах
измеримых функций 25

Veksler Aleksandr Semenovich

Ergodic theorems in rearrangement-invariant spaces of measurable functions 47

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published works..... 51

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМий
ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМий
КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ВЕКСЛЕР АЛЕКСАНДР СЕМЕНОВИЧ

**ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЎРИН АЛМАШИНУВЧИ–
ИНВARIANT ФАЗОЛАРИДА ЭРГОДИК ТЕОРЕМАЛАР**

**01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

Тошкент – 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.DSc/FM144 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «Ziynet» Ахборот таълим тармоғида (<http://www.ziynet.uz/>) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:

Чилин Владимир Иванович

физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар:

Семенов Евгений Михайлович

физика-математика фанлари доктори, профессор
(Воронеж давлат университети, Россия)

Ғаниходжаев Расул Набиевич

физика-математика фанлари доктори, профессор

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович

физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот:

**В.И.Вернадский номидаги Қрим федерал
университети, Россия**

Диссертация химояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.30.09.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашининг 2019 йил «___» _____ соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган.) (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2019 йил «___» _____ куни тарқатилди.
(2019 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.А.Аъзамов

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев

Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

А.С.Садуллаев

Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда классик статистик, индивидуал ва доминант эргодик теоремалари дискрет Чезаро ўрта қийматлари $S_n^T f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i f$ ни тавсифлаш ёки шунга ўхшаш чекли ёки чексиз σ -чекли узлуксиз μ ўлчовга эга бўлган (S, Σ, μ) ўлчовли фазода қаралаётган L_p – ўлчовли функциялар фазосидаги ўрта қийматларни тавсифлаш масалаларига келтирилади, бу ерда T ушбу Банах фазосидаги чизикли қисқартириш оператори. Статистик эргодик теорема (СЭТ) биринчи бўлиб фон Нейман томонидан L_2 фазода таъсир қилувчи изометрик оператор учун исбот қилинган. L_p фазосининг σ -чекли узлуксиз ўлчамли фазосида таъсир қилаётган мусбат қисқартирувчи операторлари учун статистик эргодик теорема, Биркгоф-Хинчиннинг индивидуал эргодик теоремаси, доминант эргодик теоремаларни тадқиқ қилиш операторлар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда юқорида келтирилган эргодик теоремаларни ўрин алмашинувчи инвариант ёки симметрик фазоларда бажарилиши шартларини топиш ва ўрганиш муҳим масалалардан бири ҳисобланади. Бу борада Биркгоф-Хинчиннинг индивидуал эргодик теоремаси аналогини олиш ва у ўрта қийматлар $\{S_n^T f\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f \in L_1$ ни деярли барча ерда яқинлашишини, L_p фазоларидаги доминант эргодик теорема (ДЭТ) аналогини Данфорд-Шварц оператори T ва ўлчамли функция f ёрдамида қурилган мажоранта $M^T f = \sup_{n \geq 1} S_n^T(|f|)$ ни L_p фазога тегишли эканлигини тадқиқ қилиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, квант механиканинг классик моделлари учун индивидуал эргодик теоремаларнинг шартларини тадқиқ қилиш, статистик, индивидуал ва доминант эргодик теоремаларни ўрин алмашинувчи инвариант фазоларда аниқлаш усуллари топишга алоҳида эътибор қаратилди. Доминант эргодик теоремалари ўлчовли функциялар фазолари объектларидан фарқли объектларга умумлаштириш ва кенгайтиришда сезиларли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика, эҳтимоллик назарияси ва динамик тизимлар назарияси» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди¹. Қарор ижросини таъминлашда ўлчовли функцияларнинг ўрин алмашинувчи-инвариант фазоларини тадқиқ қилиш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида» ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги №ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПҚ-2789 “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида” ги, 2017 йил 20 апрелдаги № ПҚ-2909 “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ва 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи². Ўлчовли функцияларнинг ўрин алмашинувчи-инвариант фазоларида эргодик теоремалар бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан: Янги Жанубий Уэлс университети, Математика ва стаистика мактаби (Австралия); Абдус Салам номидаги Халқаро назарий физика маркази (Abdus Salam International Center for Theoretical Physics), Пиза университети (Италия); Париж университети, Тулуза университети (Франция); Москва давлат университети, Крим федерал университети, Новосибирск давлат университети, Россия фанлар академияси Математика институти (Россия); Пенсильвания штати университети, Питсбург университети (АҚШ); Торонто университети (Канада); Упсала университети (Швеция), Хелсинки университети (Финляндия); Сантьяго де Компостелло университети (Испания) ва бошқа жойларда олиб борилмоқда.

Эргодик теоремаларни тадқиқ қилиш бўйича дунёда қатор натижалар олинган, жумладан: Нейман, Биркгоф теоремалари ва доминант эргодик теоремалар каби аввалдан олинган натижалар бошқа, аввал қаралмаган, объектлар учун ишлаб чиқилган (Абдус Салам номидаги Халқаро назарий физика маркази, Италия); чекли ўлчовли фазони чексиз ўлчовли фазога алмаштириб, ўрин алмашинувчи инвариант фазолар ўрнига уларнинг нокоммутатив аналоглари учун эргодик теоремалар исботланган (Пенсильвания штати университети, АҚШ); L_p фазолар учун олинган эргодик теоремалар Орлич фазолари учун умулаштирилган (Крим федерал университети, Россия); В.А.Рохлин томонидан ишлаб чиқилган Лебег қазоларини ўлчовли бўлиш назарияси усуллари ўлчовни сақловчи Лебег фазоларининг

² Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, <http://www.springer.com/mathematics>; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series <https://www.researchgate.net> ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

автоморфизмларини харақитини ўрганилган ва Орлич фазолари умумийроқ бўлган симметрик фазолар синфининг қисм синфи бўлгани учун, мос теоремалар ушбу ҳолат учун ҳам исботланган (РФА Математика институти, Россия); нокоммутатив Лоренц фазолари изометриялари тавсифланган (Янги Жанубий Уэлс университети, Математика ва статистика мактаби, Австралия).

Дунёда бугунги кунда, симметрик фазоларнинг турли синфларида, шу жумладан Лоренц ва Марцинкевич фазоларида, эргодик теоремаларнинг турли кўринишларини олиш бўйича устивор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Диссертация чекли ёки σ -чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосидаги ўлчовли функцияларнинг симметрик фазоларида СЭТ ва ДЭТ ларни бажарилиш муаммосини ўрганишга ва шунга боғлиқ бошқа масалаларни ечишга бағишланган. X симметрик фазода эргодик теоремаларни бажарилиш масаласи қаралади. L_p фазосидаги эргодик теоремалар табиий равишда қуйидаги савол ва масалаларга олиб келади:

Қандай СФларда маълум бир синф операторлари T ва ихтиёрий $f \in X$ учун СЭТ ва ДЭТ ўринли бўлади? Қандай СФларда бу теоремалар ўринли эмас?

Агар СФ X да СЭТ (ёки ДЭТ) ўринли бўлмаса, у ҳолда X нинг қандай максимал қисм-фазоларида бу теоремалар маълум бир синф операторлари T ва ихтиёрий f қисм-фазо элементи учун ўринли бўлади?

Агар СФ X да умумуан олганда СЭТ (ёки ДЭТ) ўринли бўлмаса, у ҳолда X да таъсир қилувчи T чизикли операторлар синфининг шундай қисм-синфини топингки ихтиёрий $f \in X$ учун СЭТ (ёки ДЭТ) ўринли бўлсин.

Диссертацияда биринчи марта операторлар ва оқимлар учун статистик эргодик теорема ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазосидаги симметрик фазолар синфи тўлиқ тавсифланди. Бу чекли ўлчовли Лебег фазоси бўлганда сепарабел СФ ва σ -чекли ўлчовли Лебег фазоси бўлганда $X \not\subseteq L_1$ шарнги қаноатлантирувчи сепарабел СФдир.

Барча элементлари учун доминант эргодик теорема ўринли бўладиган СФ синфи тўлиқ тавсифланди. Бу (HLP) ёки Харди-Литтлвуд хоссасига эга СФдир. Олинган натижаларни Лоренц $L_{p,q}$ ва Орлич L_M фазоларига қўллаш мумкин. СФ $X \neq L_\infty$ бўлганда барча элементлари учун СЭТ ўринли бўладиган X_0 максимал қисм-фазо кўрсатилди. Бунда X_0 чегараланган функциялар тўпламини X даги нормага нисбатан ёпиғи бўлади.

ДЭТ ўринли бўлмаган СФ X учун ДЭТ ўринли бўладиган максимал синф $H(X)$ аниқланди. $H(X)$ синфи диссертациянинг IV бўлимида ёритилган. Шунинг қайд этиш керакки, бу натижа юқорида келтирилган Д.Орстейннинг (3-бетни қаранг) 1971-йилдаги натижасини анча узоққа борадиган умумлашмаси ва кенгайтмаси.

СЭТ ўринли бўлмаган СФ учун элементлари СЭТни бажарадиган автоморфизм ёки оқимлар ёрдамида ҳосил қилинган операторлар синфи аниқланди. Бу синф периодик автоморфизмлар ёрдамида ҳосил қилинган ёки

хар бир нуқтасида даврий бўлган ва нуқталарининг давлари биргаликда чегараланганлик шартини бажарадиган оқимдан ҳосил қилинган операторлар группаси бўлади.

ДЭТ ўринли бўлмаган СФ учун элеменлари ДЭТни қаноатлантирмайдиган эргодик автоморфизмлардан ҳосил қилинган операторлар синфи аниқланди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос»+«Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиклар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага тадбиқлари» (2017-2021 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади: статистик, доминант ва бошқа эргодик теоремалар бажариладиган симметрик фазолар синфини тавсифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари: операторлар ва оқимлар учун статистик эргодик теоремалар ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазоларида қурилган симметрик фазоларни аниқлаш;

статистик эргодик теоремалар ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазолар элементлари учун доминант эргодик теорема бажариладиган симметрик фазолар синфини тўлиқ тавсифлаш;

Данфорд-Шварц операторлари учун сепарабел симметрик фазоларда статистик эргодик талабларнинг бажарилиш теоремасини олиш;

L_∞ дан фарқли бўлган носепарабел симметрик фазолар учун статистик эргодик теоремани бажарилмаслигига шартларини топиш;

статистик эргодик теореманинг бажарилиши учун автоморфизм ва оқимларга мезонларни топиш;

статистик эргодик теореманинг бажариладиган қисм фазосини топиш ва унинг хоссалари аниқлаш;

Харди-Литтлвуд хоссасини қаноатлантиручи ва фақат шу ҳолда симметрик фазоларда доминант эргодик теорема ўринли бўлишини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Чекли ва σ -чекли ўлчовли Лебег фазолари, ушбу Лебег фазоларида берилган симметрик фазолар, симметрик фазоларда таъсир қилувчи Лебег фазосининг автоморфизмлари ёрдамида ҳосил қилинган ёки ҳосил қилинмаган Данфорд-Шварц операторлари тадқиқотнинг объектлари ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети. Чекли ёки σ — чекли ўлчовли Лебег фазосидаги СФларда таъсир қилаётган оператор ва оқимлар учун статистик эргодик теоремалар; СФ учун доминант эргодик теорема ўринли бўлиши мезонлари; СФнинг мусбат чизикли изометриялари тадқиқотнинг предмети ҳисобланади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқотда Лебег фазолари назарияси ва Лебег фазолари бўлиниш усуллари, эргодик ва траектория назарияси

усуллари, ҳамда ўлчовчи функцияларнинг симметрик фазоси усуллари қўлланилади.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

операторлар ва оқимлар учун статистик эргодик теоремалар ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазоларида қурилган симметрик фазолар аниқланган;

статистик эргодик теоремалар ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазолар элементлари учун доминант эргодик теорема бажариладиган симметрик фазолар синфи тўлиқ тавсифланган;

Данфорд-Шварц операторлари учун сепарабел симметрик фазоларда статистик эргодик талабларнинг бажарилиш теоремаси олинган;

L_∞ дан фарқли бўлган носепарабел симметрик фазолар учун статистик эргодик теоремани бажарилмаслигига шартлари топилган;

статистик эргодик теореманинг бажарилиши учун автоморфизм ва оқимларга мезонлар топилган;

статистик эргодик теореманинг бажариладиган қисм фазоси топилган ва унинг хоссалари аниқланган;

Харди-Литтлвуд хоссасини қаноатлантиручи ва фақат шу ҳолда симметрик фазоларда доминант эргодик теорема ўринли бўлиши аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Диссертация назарий характерга эга бўлиб, унинг натижалари эргодик назария ва симметрик фазолар назарияси тадқиқотларида қўлланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги, олинган натижаларнинг қатъий математик исботлари, шунингдек юқори ҳалқаро рейтингга эга бўлган математик журналларда нашр этилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти статистик ва доминант эргодик теоремалар бажариладиган СФлар синфини тўлиқ тавсифланганлиги билан аниқланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган натижалар квант эҳтимоллар назариясидаги кузатувчилар фазосининг стохастик чизиқли акслантиришлари Чезаро ўрта қийматларини яқинлашишини башорат қилишда ёрдам беради.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ўлчовли функцияларнинг ўрин алмашинувчи-инвариант фазоларида эргодик теоремаларга оид олинган натижалар асосида:

статистик эргодик теореманинг бажарилиши учун автоморфизм ва оқимларга мезонлар топилиши DP150100920 рақамли «Шур ёйилмаси ва операторлар назариясининг тегишли масалари» хорижий лойиҳасида Харди-Литтлвуд хоссасини қаноатлантиручи ва фақат шу ҳолда симметрик фазоларда доминант эргодик теорема ўринли бўлиши масаласини ечиш учун қўлланилган (Янги Жанубий Уэлс университетининг 2019 йил 9 июлдаги маълумотномаси, Австралия). Илмий натижанинг қўлланиши Гильберт фазосида аниқланган чегараланмаган операторларнинг нокоммутатив симметрик фазосида Данфорд-Шварц операторларининг эргодик хоссаларини

тавсифлашга имкон берган;

операторлар ва оқимлар учун статистик эргодик теоремалар ўринли бўладиган чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазоларида қурилган симметрик фазолар FL170100052 рақамли «Нокоммутатив анализнинг янги методлари» хорижий лойиҳасида Данфорд-Шварц операторлари учун сепарабел симметрик фазоларда статистик эргодик теоремасини олиш масаласини ечиш учун қўлланилган (Янги Жанубий Уэлс университетининг, 2019 йил 9 июлдаги маълумотномаси, Австралия). Илмий натижанинг қўлланиши L_∞ дан фарқли бўлган носепарабел симметрик фазолар учун статистик эргодик теоремани бажарилмас шартларини топишга имкон берган;

функционал фазоларда таъсир қилаётган Данфорд-Шварц операторларининг аниқланган эргодик хоссаларида 16-11-10 125 рақамли «Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу» лойиҳада Лоренц фазоларнинг изометриялари тавсифлаш масаласини ечиш учун қўлланилган (Крим федерал университетининг 2019 йил 27 августдаги 9-29-286-сон маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланиши статистик эргодик теорема бажарилиши учун автоморфизм ва оқимларга мезонлар топишга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 11 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 8 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 24 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссияси томонидан докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 10 та мақола, жумладан, 6 та мақола хорижий ва 4 та мақола республика журналларида, 2 та монография нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, бешта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар руйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 199 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертация кириш қисм, бешта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар руйхатидан иборат (1 ва 2 қисм).

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «Зарурий маълумотлар» деб номланувчи биринчи боби зарур бўлган таърифлар, маълумотлар ва баъзи маълум натижаларга бағишланган.

Кейинги ўринларда бизга куйидаги тушунчалар керак бўлади.

(S, Σ, μ) - чекли ёки σ -чекли ўлчовли Лебег фазоси бўлсин. S да берилган иккита ўлчовли функциялар f_1 ва f_2 тенгўлчовли дейилади, агар ҳар бир $\tau \in \mathbb{R}$ учун

$$\eta_{f_1}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\{s \in S: f_1(s) > \tau\} = \mu\{s \in S: f_2(s) > \tau\} = \eta_{f_2}(\tau)$$

тенглик ўринли бўлса. Агар $|f_1|$ ва $|f_2|$ функциялар тенгўлчовли бўлса, у ҳолда буни биз $f_1 \sim f_2$ каби белгилаймиз.

S да берилган ҳақиқий ўлчовли функцияларнинг Банах фазоси $(X, \|\cdot\|_X)$ симметрик фазо (СФ) ёки ўрин алмашинувчи инвариант фазо дейилади, агар куйидаги шартлар бажарилса:

- (i) $f_1 \sim f_2 \in X \Rightarrow f_1 \in X$ ва $\|f_1\|_X = \|f_2\|_X$;
- (ii) $|f_1| \leq |f_2|$ и $f_2 \in X \Rightarrow f_1 \in X$ ва $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$.

СФларга мисол сифатида L_p , ($1 \leq p \leq \infty$), L_M Орлич, Λ_φ Лоренц, M_ψ Марцинкевич фазоларини келтириш мумкин.

СФ X учун $L_1 \cap L_\infty \subseteq X \subseteq L_1 + L_\infty$ ўринли бўлади. Хусусан, ўлчов μ чекли бўлганда $L_\infty \subseteq X \subseteq L_1$ ўринли бўлади.

(S, Σ, μ) фазонинг ўлчовни сақловчи *mod 0* автоморфизми деб ўзаро бир қийматли икки томонлама ўлчовли (яъни T ва T^{-1} ўлчовли) ҳар бир $A \in \Sigma$ учун $\mu(T^{-1}A) = \mu A$ шартни қаноатлантирадиган $T: S \rightarrow S$ акслантиришга айтилади.

T — ўлчовни сақловчи автоморфизм бўлсин. Ушбу символ T , баъзида U_T оркали, $Tf(s) = U_T f(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(Ts)$, $s \in S$ каби аниқланган S даги ўлчовли функциялар алгебрасида таъсир қилувчи чизикли операторни белгилаймиз.

Агар T акслантириш S нинг ўлчовни сақловчи автоморфизми бўлса, у ҳолда $U_T f \sim f$ бўлади ва U_T ҳар бир СФ X да изометрия бўлиб таъсир қилади.

L_1 ва L_∞ жуфтликка нисбатан СФ X интерполяцион дейилади, агар L_1 ва L_∞ да таъсир қилувчи ҳар бир чизикли узлуксиз оператор X фазода ҳам узлуксиз таъсир қилса.

DS Данфорд-Шварц операторлари тўплами бўлсин, яъни $T \in DS$, бу шундай L_1 ва L_∞ фазоларида таъсир қилувчи чизикли узлуксиз операторларки, бундай операторлар куйидаги иккита шартни ҳам қаноатлантиради:

- i. $f \in L_1 \Rightarrow Tf \in L_1$ ва $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$;
- ii. $f \in L_\infty \Rightarrow Tf \in L_\infty$ ва $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$.

L_1 ва L_∞ жуфтликка нисбатан интерполяцион СФ X *1* константали интерполяцион ёки аниқ интерполяцион симметрик фазо (а.и.с.ф.) дейилади, агар ҳар бир $T \in DS$ оператор X ни ўзига акслантириб $\|T\|_{X \rightarrow X} \leq 1$ тенгсизликни қаноатлантирса.

S фазонинг бирпараметрли $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ автоморфизмлари *оқим* дейилади,

агар $\psi(s, \tau) = T^\tau s$ каби аниқланган ψ акслантириш $S \times \mathbb{R}$ тўғри кўпайтмада ўлчовли бўлса.

Оқимга мисол. Айлананинг айланиши деб биз $T^\tau s = s + \tau \pmod{1}, s \in [0,1]$, формула ёрдамида аниқланган оқимни тушунамиз, бунда $[0,1]$ сегментда Лебег ўлчови қаралади.

Айланани айланишига изоморф компоненталарга эга бўлмаган оқимни ҳеч қаерда транзитив эмас деймиз. Махсус оқим тушунчаси яхши маълум ва I.4 бўлимда аниқланган. Шунингдек, диссертацияда фаол фойдаланилган куйидаги факт яхши маълум:

Теорема I.4.1 (оқимларни махсус кўриниши ҳақида). *Кўзгалмас нуқталарга эга бўлмаган Лебег фазосидаги ихтиёрий $\{T^\tau\}$ оқим қандайдир махсус оқимга метрик изоморф бўлади.*

(S, Σ, μ) да таъсир қилаётган оқим айлананинг айланишига изоморф бўлса, бундай оқимни биз *транзитив* деб атаймиз.

Айлананинг айланишига изоморф бўлган компонентага эга бўлмаган оқимга биз *ҳеч қаерда транзитив* бўлмаган оқим деймиз.

(S, Σ, μ) чекли ёки σ -чекли узлуксиз μ ўлчовли Лебег фазоси бўлиб, $T \in DS$ Данфорд-Шварц оператори бўлсин (Хусусан, T оператори $Tf(s) = f(Ts)$ тенглик ёрдамида аниқланган бўлиши мумкин, бу ерда T акслантириш S даги ўлчовни сақловчи автоморфизмидир).

Ўрта қийматлар $S_n^T = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$ Чезаро (дискрет) ўрта қийматлари дейилади.

Худди шу каби, Данфорд-Шварц операторлари группасини ҳосил қилувчи оқим $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ учун $R_x f(s) = \frac{1}{x} \int_0^x T^\tau f(s) d\tau = \frac{1}{x} \int_0^x f(T^\tau s) d\tau$, $f \in L_1 + L_\infty$, $(0 < x \in R)$ формула ёрдамида аниқланган ўрта қийматлар R_x Чезаро (узлуксиз) ўрта қийматлари дейилади.

$(X, \|\cdot\|_X)$ Банах фазоси бўлиб, X да таъсир қилувчи барча чизиқли чегераланган операторлар $B(X)$ бўлсин. J — йўналтирилган тўплам учун $\{T_\tau\}_{\tau \in J} \subset B(X)$ операторлар тармоғи берилган бўлсин.

Агар барча $x \in X$ учун $\|T_\tau(x) - T(x)\|_X \rightarrow 0, \tau \in J$ шарт бажарилса, у ҳолда $\{T_\tau\}_{\tau \in J}$ тармоқи $T \in B(X)$ операторига *кучли оператор топологияси* бўйича яқинлашади дейилади.

Барча $x \in X, \tau_0 \in R$ учун $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|T^\tau(x) - T^{\tau_0}(x)\|_X = 0$ шарт бажарилса, у ҳолда оқим $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ кучли узлуксиз (ёки кучли оператор топологиясига нисбатан узлуксиз) дейилади.

Соддалаштирилган ҳолда куйидаги маълум натижаларни келтирамиз:

Теорема I.4.2 (Дж. фон Нейман). *Ихтиёрий оқим L_2 фазодаги кучли оператор топологиясида узлуксиз бўлади.*

Теорема I.5.1 (Биркгоф–Хинчиннинг индивидуал эргодик теоремаси) (S, Σ, μ) нормаланган ($\mu S = 1$) ўлчовли фазо ва $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$ бўлсин. У ҳолда $S_n^T f$ ва $R_x f$ ўрта қийматлар деярли ҳамма ерда яқинлашади.

Теорема I.5.2 (L_p -фазоларда статистик эргодик теоремалар). T Данфорд–Шварц оператори бўлсин. У ҳолда S_n^T Чезаро ўрта қийматлари

(S, Σ, μ) чекли узлуксиз ўлчов фазосидаги L_p , $1 \leq p < \infty$ фазосининг кучли оператор топологиясида яқинлашади.

Диссертациянинг «Чекли ўлчов учун статистик эргодик теорема» деб номланувчи иккинчи боби чекли узлуксиз Лебег фазосида СФ X учун статистик эргодик теоремани бажарилиш шартларини ўрганишга бағишланган. Ушбу теоремаларда Чезаро S_n^T ва R_x ўрта қийматларини мос равишда $n \rightarrow \infty$ ёки $x \rightarrow +\infty$ бўлганда X да кучли оператор топологиясига нисбатан яқинлашиши ўрганилади.

Ушбу боб ўнта бўлимга бўлинган бўлиб, II.11 бўлимда II боб натижаларидан келиб чиқадиган хулосалар баён қилинган.

II.1 ва II.2 бўлимлари автоморфизм ва оқимларнинг махсус тасвирларини ўрганишга бағишланган. Чегараланган ёки чегараланмаган юқори функцияга эга бўлган аperiодик автоморфизм ёки оқимнинг кўплаб махсус тасвирлари мавжуд эканлиги исботланган. Бу тасвирлар асосий натижаларни исботлашда ишлатилади.

II.3 бўлимда носепарабел СФ $X \neq L_\infty$ ўрганилади. Бу ҳолда фундаментал функция $\varphi_X(t) = \|\chi_A\|_X$ учун $\varphi_X(+0) = 0$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $A \subseteq S$ ва $\mu A = t$.

X_0 орқали X даги чегараланган функцияларнинг X нормага нисбатан ёпиғини белгилаймиз. Маълумки, X_0 фазо L_1 ва L_∞ жуфтлигига нисбатан интерполяцион сепарабел симметрик фазо бўлади.

$\rho(f, X_0)$ ифода $f \in X$ элементдан X_0 гача бўлган масофа бўлсин:

$$\rho(f, X_0) = \inf_{g \in X_0} \|f - g\|_X.$$

II.3 бўлимда $\rho(f, X_0)$ функционалнинг ҳисоблаш формуласи, хоссалари ва турли хил баҳолар келтирилади. Ушбу натижалар мустақил ахамиятга эга бўлган ҳолда II.5 ва II.10 бўлимларда ишлатилади.

II.4 бўлим чекли узлуксиз μ ўлчовли Лебег фазосида сепарабел СФга бағишланган. Ушбу бўлимда исбот қилинган II.4.3, II.4.4, II.4.5 теоремаларидан қуйидагилар келиб чиқади:

i. Агар $T \in DS$ бўлса, у ҳолда S_n^T Чезаро ўрта қийматлари $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да кучли оператор топологиясига нисбатан яқинлашади;

ii. Агар $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ тармоқ S да оқим бўлса, у ҳолда $T^\tau f(s) = f(T^\tau s)$ группаси ихтиёрий $\tau_0 \in R$ нуктада кучли узлуксиз бўлади;

iii. Агар $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ тармоқ S да оқим бўлса, у ҳолда R_x Чезаро ўрта қийматлари $x \rightarrow +\infty$ бўлганда X да кучли оператор топологиясига нисбатан яқинлашади.

II.5 бўлимда L_∞ дан фарқли носепарабел СФлар ва Лебег фазосида ўлчовни сақловчи автоморфизмлар ёрдамида ҳосил қилинган T чизиқли операторлар қаралади.

Бундай СФларда СЭТ Лебег фазоси автоморфизми периодик бўлганда ва фақат шу ҳолдагина бажарилиши биринчи марта исботланди.

(S, Σ, μ) чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосида X СФ ($X \neq L_\infty$) берилган бўлиб, T акслантириш S да ўлчовни сақловчи автоморфизм бўлсин. Эслатиб ўтамизки, T автоморфизми периодик дейилади, агар шундай $N > 0$

сони топилсаки $T^N = I$ тенглик ўринли бўлса, бу ерда I айний автоморфизм.

У ҳолда:

а) СФ X да фақат ва фақат $X = X_0$ бўлганда, яъни X сепарабел бўлган ҳолдагина СЭТ бажарилади, яъни $S_n^T f$ ўрта қийматлари S нинг ихтиёрий автоморфизми T учун $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да яқинлашади.

Шунингдек, X носепарабел бўлса, яъни $X \neq X_0$ бўлса, у ҳолда

б) Автоморфизм учун $f \in X$ элементи СЭТни қаноатлантириши, яъни $S_n^T f$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ бўлганда S фазонинг ихтиёрий T автоморфизми учун яқинлашиши $f \in X_0$ шартга эквивалентдир;

с) T автоморфизми S да СЭТни қаноатлантириши, яъни $S_n^T f$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ бўлганда ихтиёрий $f \in X$ учун X да яқинлашиши T нинг даврий бўлишига эквивалентдир.

Юқорида келтирилган натижалар қуйидаги теоремадан келиб чиқади:

Теорема II.5.1 (Носепарабел СФларда СЭТ). Чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосида X ($X \neq L_\infty$) СФ берилган бўлиб, T ўлчовни сақловчи автоморфизм бўлсин. У ҳолда

S_n^T Чезаро ўрта қийматлари $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да кучли оператор топологиясига нисбатан яқинлашиши T нинг периодик эканлигига эквивалентдир. Бундан ташқари, агар T периодик бўлмаса, у ҳолда ҳар бир $f \in X \setminus X_0$ функцияси учун у билан тенгўлчовли $\hat{f}$ топиладики, бунда $S_n^T \hat{f}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да яқинлашмайди.

Қуйидаги тасдиқ II.5.1 теоремада тенгўлчовли функцияга ўтиш муҳим омил эканлигини кўрсатади.

X ($X \neq L_\infty$) фазо S даги носепарабел симметрик фазоси бўлиб, σ эса T ни эргодик компоненталарга ўлчовли тақсимланиши бўлсин.

Тасдиқ II.5.2. Фактор-фазо S/σ узлуксиз ўлчовга эга бўлиб, T автоморфизм периодик бўлмасин. У ҳолда ҳар бир $f \in X \setminus X_0$ функцияси учун у билан тенг ўлчовли $\hat{f}$ функцияси мавжудки, $S_n^T \hat{f}$ ўрта қийматлари X да яқинлашади.

Шундай қилиб, ушбу ҳолатда ҳар бир функция $f \in X \setminus X_0$ учун у билан тенгўлчовли функциялар $\hat{f}$ ва $\hat{\hat{f}}$ топиладики, $S_n^T \hat{f}$ ўрта қийматлари X да яқинлашмайди, $S_n^T \hat{\hat{f}}$ ўрта қийматлари эса, X да яқинлашади.

II.6 бўлимда S/σ фактор фазонинг ўлчови узлуксиз бўлмаганлиги, S/σ ўзи эса битта атомдан ташкил топганлиги билан эътиборли T эргодик автоморфизм ҳолати қаралган (юқоридагидек, σ бу T автоморфизмни эргодик компоненталарга ўлчовли бўлиниши). Эргодик автоморфизм T учун носепарабел СФ X да $S_n^T f$ нинг яқинлашиши ва $\rho(S_n^T f, X_0)$ кетма-кетлик орасидаги боғлиқликни ўрганишга бағишланган.

Теорема II.6.1. T акслантириш S даги эргодик автоморфизм, X ($X \neq L_\infty$) фазо S даги носепарабел СФ ва $f \in X$ бўлсин. У ҳолда, $S_n^T f$ ўрта қийматлари X да яқинлашиши учун $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(S_n^T f, X_0) = 0$ ни бажарилиши зарур ва етарли.

II.7 бўлимда симметрик фазолар ва носепарабел СФ X элементлари учун

DWI ва DBI геометрик хоссалари таърифлари келтирилган.

X ($X \neq L_\infty$) носепарабел СФ Лебег ўлчовли $S = [0,1]$ сегментда берилган бўлсин. D_n орқали S да берилган $f(t)$ функциянинг чўзиш операторини белгилаймиз:

$$D_n f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t/n) = \begin{cases} f(t/n), & \text{если } t \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Қайд этиш лозимки, агар $f \geq 0$ ўсувчи ўлчовли функция бўлса, у ҳолда $m \leq n$ тенгсизликдан $D_m f \leq D_n f$ тенгсизлик келиб чиқади. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ҳам ўринли:

$$\rho(D_m f, X_0) \leq \rho(D_n f, X_0), \text{ агар } m \leq n.$$

f^* функцияси $[0,1]$ сегментда берилган f функциянинг камаювчи ўрин алмашиниши бўлсин. Биз $f \in X$ элемент

- агар $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n} = 0$, бўлса (DWI) — *Distance Weak Increase* шартни,

- агар $\rho(D_n f^*, X_0)$, $n \in \mathbb{N}$, кетма-кетлик чегараланган бўлса, (DBI) — *Distance Bounded Increase* шартни қаноатлантиради деймиз.

СФ X (DWI) (мос равишда (DBI)) шартни қаноатлантиради деймиз, агар ҳар бир $f \in X$ элемент (DWI) (мос равишда (DBI)) шартини қаноатлантирса.

Қайд этиш лозимки, (DBI) шартни бажарилишидан (DWI) шартни ҳам бажарилиши келиб чиқади.

Тасдиқ II.7.2. X ($X \neq L_\infty$) фазо $S = [0,1]$ сегментдаги СФ бўлиб, S нинг T автоморфизми учун, чегараланмаган r юқори функцияли махсустасвири (S_0, μ_0, r, T_0) мавжуд бўлсин (автоморфизм учун махсустасвир тушунчаси I бобда берилган бўлиб II.1 бўлимда ўрганилган).

У ҳолда ихтиёрий $f \in X$ функцияси учун f билан тенгўлчовли $\tilde{f}$ функция мавжудки, ҳар бир натурал сон $n \geq 1$ учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади

$$\rho(S_n^T \tilde{f}, X_0) = \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n}.$$

T даврий бўлмаган ҳолда, II.1.1-теоремага кўра S фазонинг T автоморфизми r чегараланмаган юқори функцияли (S_0, μ_0, r, T_0) махсус кўринишга эга бўлиши мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз. Хусусан, бу қуйидаги ҳолатларда (ёки уларнинг комбинациясида) ўринли:

(1) T даврий эмас, лекин локал даврий бўлади;

(2) T аperiодик бўлади, бу ҳолда T нинг қисқартмаси эргодик бўладиган мусбат ўлчовли T -инвариант қисм тўплам мавжуд эмас;

(3) T эргодик бўлади.

II.6.1 теорема ва II.7.2 тасдиқдан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа II.7.3.

T Лебег ўлчовли $[0,1]$ сегментнинг эргодик автоморфизми бўлсин. Агар X СФси (DWI) шартини қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир $f \in X$ элементи учун у билан тенгўлчовли $\tilde{f}$ функцияси мавжудки, $S_n^T \tilde{f}$ ўрта қийматлари X да яқинлашади.

II.8 ва II.9 бўлимларда юқорида келтирилган (DWI) ва (DBI) шартларини қаноатлантирувчи ва қаноатлантирмайдиган СФларга мисоллар келтирилган. Шунингдек, (DWI) хоссаси билан баъзи экзотик симметрик фазоларнинг геометрик хоссалари орасидаги боғланишлар тавсифланган.

Тасдиқ II.8.1.

(a) Ҳар бир L_M Орлич фазоси (DBI) ва (DWI) шартларини қаноатлантиради;

(b) (DWI) ва шунинг учун (DBI) шартини ҳам қаноатлантирмайдиган M_ψ Марцинкевич фазоси мавжуд.

II.9 бўлимда (DWI) хоссанинг симметрик фазоларнинг геометрик хоссалари билан боғлиқ томонлари тавсифланган. Ҳар бир Орлич фазоси (DWI) хоссасига эгалиги ҳақидаги теореманинг муқобил исботи берилган, шунингдек шу хоссага эга Марцинкевич фазоларининг синфи тўлиқ тавсифланган. Марцинкевич M_ψ фазоси (DWI) шартни қаноатлантириши учун қуйидаги тенгсизликни бажарилиши зарур ва етарли эканлиги исбот қилинган:

$$\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1.$$

II.10 бўлимда $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ оқим, унга қўшма бўлган $\{U^\tau\}_{\tau \in R}$ операторлар группаси ва X да ушбу оқим ёрдамида ҳосил қилинган ўрта қиймат операторлари R_x хоссалари ўрганилади.

Ўлчовли функциялар фазосида таъсир қилувчи оқимга қўшма операторлар группаси сепарабел СФ X да кучли узлуксиз ва носепарабел X да СЭТ бажарилиши биринчи бўлиб исбот қилинди.

Теорема II.10.1 (Оқимга қўшма группанинг узлуксизлиги ҳақида). *Чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосидаги X симметрик фазо бўлсин, $X \neq L_\infty$. Оқимга қўшма операторлар группаси $U^\tau f(s) = f(T^\tau s)$ СФ X да кучли узлуксиз бўлиши учун X ни сепарабел бўлиши зарур ва етарлидир.*

Носепарабел СФ X да оқимлар учун СЭТни бажарилишини ўрганишдан олдин, ҳар бир $x > 0$ да R_x акслантириш X да таъсир қилиш масаласини қараймиз.

$\{U^\tau\}$ группанинг кучли узлуксизлиги R_x ўрта қийматларнинг X да таъсир қилиши учун етарли шарт бўлади, лекин албатта зарурий бўлмайди.

Теорема II.10.2 (Узлуксиз ўрта қийматларнинг СФда таъсир қилиши ҳақида).

(a) Агар X СФси L_1 ва L_∞ жуфтлигида интерполяцион бўлса, у ҳолда барча $x > 0$ учун R_x ўрта қийматлари X да таъсир қилади.

(b) Агар X СФси L_1 ва L_∞ жуфтлигида интерполяцион бўлмаса, у ҳолда ихтиёрий нотривиал ҳеч қаерда транзитив бўлмаган $\{T^\tau\}$ оқими ва ихтиёрий $x_0 > 0$ учун шундай $\hat{f} \in X$ функция мавжудки бунда $R_{x_0} \hat{f} \notin X$ бўлади.

Шундай қилиб, R_x ўрта қийматлари фақат L_1 ва L_∞ жуфтлигида интерполяцион бўлган СФларда ўрганилади.

Узлуксиз ўлчовли (S, Σ, μ) Лебег фазосида $\{T^\tau\}$ оқими берилган бўлсин.

$s \in S$ нуқтани $\{T^\tau\}$ оқимнинг даврий нуқтаси деймиз, агар шундай $\tau > 0$ мавжуд бўлиб, $T^\tau s = s$ тенглик ўринли бўлса.

P орқали нотривиал $\{T^\tau\}$ оқимнинг барча даврий нуқталари тўпламини белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги функция

$$p(s) = \begin{cases} \inf \{ \tau > 0 : T^\tau s = s \}, & s \in P, \\ \infty, & s \in S \setminus P, \end{cases}$$

P ўлчовли ва чекли бўлади.

II.4.5 теоремасига кўра, оқимлар учун сепарабел СФларда СЭТ ўринли.

Теорема II.10.4. X ($X \neq L_\infty$) носепарабел L_1 ва L_∞ жуфтлигида интерполяцион бўлган СФ бўлсин.

(i) Агар оқим $\{T^\tau\}$ ҳар бир нуқтада даврий ва даврлар (mod 0) бўйича биргаликда чегараланган бўлса (яъни $0 \leq p \in L_\infty$), у ҳолда R_x ўрта қийматлари $x \rightarrow +\infty$ бўлганда кучли оператор топологиясига нисбатан X да яқинлашади.

(ii) Агар ҳеч қаерда транзитив бўлмаган нотривиал $\{T^\tau\}$ оқими (i) пунктини шартларини қаноатлантирмаса, у ҳолда ҳар қандай $f \in X \setminus X_0$ функцияси учун у билан тенгўлчовли $\hat{f}$ функция топиладики, $\{R_x \hat{f}\}$ ўрта қийматлари $x \rightarrow +\infty$ бўлганда X да яқинлашмайди.

II бобда исботланган натижалардан қуйидаги ҳулосаларни қилиш мумкин.

Агар X СФ сепарабел бўлса, у ҳолда X да автоморфизмлар ва оқимлар учун статистик эргодик теоремалар бажарилади.

Агарда X СФ носепарабел, X_0 тўплам чегараланган функциялар тўпламининг X да ёпиғи бўлса, у ҳолда X_0 СФ сепарабел бўлади, шунинг учун X_0 да юқорида келтирилган теоремалар ўринли.

S Лебег фазоси автоморфизмлари ва оқимларининг тузилишини ўрганганимизда, биз уларнинг ҳар бири махсус автоморфизм ёки оқим кўринишида тасвирланишини кўришимиз мумкин. Агар автоморфизм даврий бўлмаса, у ҳолда унинг чегараланмаган юқори функцияли махсус тасвири мавжуд, бу ҳолда бундай натижа оқимлар учун ҳам ўринли. Бундай тасдиқларга II.1 ва II.2 бўлимларнинг натижалари асос бўлади. Улар турли хоссаларга эга автоморфизмларнинг махсус тасвирларини олишга имконият беришади.

Энди СЭТ бажарилмайдиган носепарабел $X \neq L_\infty$ СФ ни қараб, биз $f \in X \setminus X_0$ элементни танлашимиз мумкин. Агар T S даги нодаврий автоморфизм бўлса, у ҳолда унинг юқори функцияли махсус кўриниши бор. $f \in X \setminus X_0$ билан турли ўлчовли бўлган ва танланган T автоморфизмнинг махсус кўринишига мос у ёки бу $\hat{f}$ элементларни танлаб, биз ҳам яқинлашмайдиган, ҳам яқинлашадиган $S_n^T \hat{f}$ кетма-кетликларни олишимиз мумкин.

Шуни таъкидлаш керакки, $S_n^T \hat{f}$ кетма-кетликнинг яқинлашиш ёки яқинлашмаслик имконияти симметрик фазоларнинг II-бобнинг II.7-бўлимида аниқланган геометрик хоссалари билан, яъни (DWI) ёки (DBI) тушунчалари билан чамбарчас боғлиқ. Бу шартлар $S_n^T \hat{f}$ ўрта қийматларнинг ўзини тутиши билан ҳеч қандай боғлиқ эмас, балки D_n сиқиш операторларига тегишли.

Ўзидан ўзи (DWI) ёки (DBI) шартлари II.9-бўлимда қисқа айтиб ўтилган чуқур саволлар билан боғлиқ, аниқроғи $\Omega'(f) = \Sigma'(f)$ орбита кучсиз компактлиги ҳақидаги Рифф теоремасининг аналог, ва Крейн–Мильман теоремасига кўра, ўзининг четки нукталар қавариқ қобиғининг ёпиғи бўлади, бу ерда Σ' бистохастик операторлар ярим группаси.

Шунингдек, (DWI) хоссасига эга симметрик фазолар тўплами сингуляр симметрик функционалларга эга анча симметрик фазолар тўплами билан устма-уст тушишини таъкидлашимиз мумкин.

Шундай қилиб, $X \neq L_\infty$ да СЭТ ни бажарилиш ёки бажарилмаслик имконияти ушбу симметрик фазонинг геометрияси билан чамбарчас боғлиқ.

Диссертациянинг «**Чексиз ўлчов учун статистик эргодик теорема**» деб номланувчи учинчи боби σ — чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазоларидаги симметрик фазоларда СЭТни бажарилиш шартлари, ҳамда ушбу фазолардаги чизикли қискартириш операторларини ўрганишга бағишланган. Ушбу боб тўрт бўлимга бўлинган.

III.1 ва III.2 бўлимларда чекли ўлчовли Лебег фазосидагидан фарк қиладиган тушунчалар σ — чекли ўлчовли Лебег фазолари учун келтирилиб, улар ҳақида умумий маълумотлар берилган.

Асосий натижалар **III.3 бўлимида** келтирилган ва исботланган. Ушбу натижалар **III.4 бўлимида** L_M Орлич ва Λ_ψ Лоренц фазолари учун мос равишда $M(t)$ ва ботик $\psi(t)$ функциялари ёрдамида қулланилган.

III бобда (S, Σ, μ) — σ чекли узлуксиз μ ўлчовли Лебег фазоси ва X эса (L_1, L_∞) жуфтлигига нисбатан а.и.с.ф. деб тахмин қилинади. X да таъсир қилувчи Данфорд-Шварц $T \in DS$ операторлари қаралади.

Теорема III.3.1 (чексиз ўлчов учун СЭТ). X ўлчовли фазо (S, Σ, μ) да (L_1, L_∞) жуфтлигига нисбатан а.и.с.ф. бўлсин. Қуйидаги шартлар эквивалентдир:

(i) Барча $T \in DS$ учун S_n^T Чезаро ўрта қийматлари $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да кучли яқинлашади;

(ii) X фазо сепарабел ва $X \not\subseteq L_1(S, \Sigma, \mu)$ муносабат ўринли.

Натижа III.3.9. X ўлчовли фазо (S, Σ, μ) да (L_1, L_∞) жуфтлигига нисбатан а.и.с.ф. бўлсин. Қуйидаги шартлар эквивалентдир:

(i) $X \in (СЭТ)$;

(ii) X фазо сепарабел ва $\alpha(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_X(t)}{t} = 0$ тенглик ўринли.

$M(u)$ — Орлич функцияси ва

$$L_M = \{f \in L_0(\mu): \int_0^\infty M\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu < \infty \text{ бирон бир } \lambda > 0 \text{ учун}\}$$

Люксембург

$$\|f\|_M = \inf \left\{ \lambda > 0: \int_0^\infty M\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\}$$

нормали Орлич фазоси бўлсин.

Маълумки, $(L_M, \|\cdot\|_M)$ а.и.с.ф. бўлиб, бунда L_M фазоси $M(t)$ Орлич

функцияси Δ_2 шартни (барча $t \geq t_0$ лар учун $M(2t) \leq kM(t)$ тенгсизликни қаноатлантирадиган шундай $k > 0$ ва $t_0 \geq 0$ сонлари мавжудлиги) қаноатлантирганда сепарабел бўлади.

Теорема III.4.1. $M(t)$ Орлич фугнкцияси Δ_2 шартни ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$ ни қаноатлантирганда ва фақат шу ҳолдагина $(L_M, \|\cdot\|_M) \in (CЭТ)$ муносабат ўринли бўлади.

$[0, +\infty)$ да нолдан фаркли ўсувчи ботик $\psi(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ψ функцияси берилган бўлиб, $\Lambda_\psi = \{f \in L_0(\mu) : \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty f^*(t) d\psi(t) < \infty\}$ мос *Лоренц фазоси* бўлсин. Бу ерда f^* функцияси f нинг камаювчи ўрин алмашиши, яъни $|f|$ функсия билан тенгўлчовли ўнг тарафдан узлуксиз ўсмайдиган функциядир. Маълумки, $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ а.и.с.ф. бўлиб, $\psi(+0) = 0$ ва $\psi(+\infty) = +\infty$ шартлар бажарилганда ва фақат шу ҳолдагина сепарабел бўлади.

Бундан ташқари, $\varphi_{\Lambda_\psi}(t) = \psi(t)$ тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли.

Теорема III.4.2. $\psi(+0) = 0$, $\psi(+\infty) = +\infty$ ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$ шарлтари бажарилганда ва фақат шу ҳолдагина $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi}) \in (CЭТ)$ муносабат ўринли бўлади.

Диссертациянинг «**Доминант эргодик теорема**» деб номланувчи тўртинчи боби симметрик фазоларда доминант эргодик теорема бажарилиш шартларини ўрганишга бағишланган. Бу боб учта бўлимга бўлинган.

Биринчи бўлимда Харди-Литтлвуд ((HLP)) хоссасига эга бўлган симметрик фазоларнинг тавсифлари берилган.

IV бобнинг иккинчи бўлимда X СФси ((HLP)) хоссага эга бўлганда ва факта шу ҳолда X да ДЭТ ўринли бўлиши кўрсатилади. Бундан ташқари ДЭТ ўринли бўладиган бошқа мезонлар ҳам келтирилади.

IV бобнинг охирги бўлими $L_{p,q}$ Лоренц ва L_M Орлич фазоларида ДЭТни бажарилишига бағишланган. Ушбу фазоларда ДЭТни бажарилиши учун оддий мезонлар берилади.

(S, Σ, μ) чекли ўлчовли Лебег фазоси, $T \in DS$, f функция S даги ўлчовли фунция ва $M^T f = \sup_{n \geq 1} S_n^T(|f|)$ бўлсин.

L_p фазолардаги классик доминант эргодик (ДЭТ) теорема қуйидагича:

Теорема.

1) Агар $1 < p < \infty$ ва $f \in L_p$ бўлса, у ҳолда $M^T f \in L_p$ бўлиб, бунда $\|M^T f\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ тенгсизлик ўринли бўлади.

2) $M^T f \in L_1 \Leftrightarrow f \in L \log L$, яъни $f \cdot \log^+ f \in L_1$.

X — (S, Σ, μ) даги СФ бўлсин. Қуйидагича таърифлар киритамиз.

(i) $f \in X$ элементи ДЭТни қаноатлантиради ($f \in DET$) деймиз, агар ҳар бир $T \in DS$ учун $M^T f \in X$ муносабат бажарилса;

(ii) X СФси ДЭТни қаноатлантиради ($X \in DET$) деймиз, агар X нинг ҳар бир элементи f ДЭТни қаноатлантирса.

(iii) СФ X даги T оператори ДЭТни қаноатлантиради ($T \in DET$) деймиз, агар ҳар бир $f \in X$ учун $M^T f \in X$ муносабат бажарилса.

$L_1(S)$ даги ҳар бир f функцияси учун $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$ муносабат ёрдамида Харди-Литлвуд мажсорант функциясини аниқлаймиз.

Қуйидагича таърифлар киритамиз.

(i) СФ X нинг элементи f Харди-Литлвуд хоссасини ($f \in HLP$) қаноатлантиради деймиз, агар $f^{**} \in X$ бўлса.

(ii) СФ X Харди-Литлвуд хоссасини ($X \in HLP$) қаноатлантиради деймиз, агар X нинг ҳар бир f элементи HLP хоссасини қаноатлантирса.

$H(X)$ тўпламини $H(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_1(S) : f^{**} \in X\}$ каби аниқлаймиз. Маълумки, $H(X) \subseteq X$ муносабат ҳар доим ўринли. Тескариси эса умуман олганда ўринли эмас. Масалан, $X = L_1$ учун

$$H(L_1) = L \log L \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_1 : |f| \log^+ |f| \in L_1\} \subsetneq L_1.$$

$H(X)$ фазоси $\|f\|_{H(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \|f^{**}\|_X$ нормага нисбатан симметрик фазо бўлишини текшириш қийин эмас.

Теорема IV.2.4 (ДЭТ ва HLP). X - а.и.с.ф. бўлсин.

(1) Агар $T \in DS$ ва $f \in H(X)$ бўлса, у ҳолда $M^T f \in X$ ва $\|M^T f\|_X \leq \|f\|_{H(X)}$ бўлади;

(2) Агар T акслантириш S даги эргодик автоморфизм ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $M^T f \in X$ муносабатдан $f \in H(X)$ муносабат келиб чиқади.

X $[0,1]$ сегментдаги а.и.с.ф. бўлиб, $r > 1$ бўлсин.

S даги ўлчовли $f(t)$ функциянинг чўзиш оператори D_r бўлсин:

$$D_r f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(\frac{t}{r}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(t/r), & \text{агар } t \in [0,1]; \\ 0, & \text{агар } t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Натижа IV.2.5 (СФда ДЭТ). Қуйидаги шартлар эквивалентдир:

- 1) $X \in DET$;
- 2) $X \in HLP$;
- 3) $r \rightarrow +\infty$ бўлганда $\|D_r\|_{X \rightarrow X} = o(r)$;
- 4) $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \|D_{\frac{1}{r}}\|_{X \rightarrow X} dr < \infty$.

Агар юқоридаги шартлар бажарилса, у ҳолд барча $f \in X$ учун

$\|M^T f\|_X \leq d_X \|f\|_X$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Лоренц $L_{p,q}$ ($1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$) фазоси $q < \infty$ бўлганда $\|f\|_{p,q} = (\int_0^1 (f^*(t))^q dt)^{\frac{1}{q}}$ $q = \infty$ бўлганда эса $\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$

шартни қаноатлантирувчи S даги ўлчовли f функциялардан иборатдир. Маълумки, $q \leq p$ бўлганда $\|\cdot\|_{p,q}$ функционали норма бўлади.

Теорема IV.3.1 (Лоренц фазоси учун ДЭТ). Агар $p > 1$ бўлса, у ҳолда ҳар бир $1 \leq q \leq p$ учун $L_{p,q} \in DET$ бўлади. Бунда барча $T \in DS$ учун $\|M^T f\|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,q}$ тенгсизлиги бажарилади.

Орлич фазоси L_M Орлич функцияси $M(u)$ ёрдамида қурилган бўлсин.

Теорема IV.3.2 (Орлич фазоси учун ДЭТ). Куйидаги шартлар эквивалент:

- 1) $L_M \in DET$;
- 2) $L_M \in HLP$;
- 3) $\inf_{t,u>1} \frac{M(tu)}{t^p M(u)} > 0$ тенгсизлик бажариладиган $p > 1$ мавжуд;
- 4) $\sup_{u>1} \frac{\int_1^u M(u/s) ds}{M(u)} < \infty$ тенгсизлиги ўринли бўлади;
- 5) $\sup_{u>1} \frac{u \int_1^u \frac{M'(s)}{s} ds}{M(u)} < \infty$ шарт ўринли бўлади.

Теорема IV.3.3 Хар бир Для каждой M Орлич функцияси учун $H(L_M) = L_{M_1}$, бажарилади, бу ерда

$$M_1(u) = \begin{cases} M(u), & 0 \leq u \leq 1, \\ M(1) + u \int_1^u \frac{M'(t)}{t} dt, & u > 1. \end{cases}$$

Теорема IV.3.4

- (1) Агар T мусбат абсолют қисқартириш бўлса, у ҳолда $f \in L_{M_1} \Rightarrow M^T f \in L_M$;
- (2) Агар T S да эргодик автоморфизм ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $M^T f \in L_M \Rightarrow f \in L_{M_1}$.

Диссертациянинг «Регулятор билан яқинлашиш ва изометриялар» деб номланувчи бешинчи боби диссертация устида ишлаш жараёнида олинган кўшимча натижаларни баён қилишга бағишланган. Унинг биричи бўлими Чезаро ўрта қийматлари кетма-кетлигини лимит нуктага регулятор бўйича яқинлашишини ўрганишга бағишланган.

g регулятор ва $\{r_n\} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ тезлик билан билан $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ кетма-кетлик $\bar{f}$ га яқинлашиши хар қандай $n = 1, 2, \dots$ учун $|f_n - \bar{f}| \leq r_n \cdot g$ тенгсизлик (mod 0) бажарилиши назарда тутилади, бу ерда g S да қандайдир ўлчовли функция, $\{r_n\}$ мусбат сонлар кетма-кетлиги, $n \rightarrow \infty$ да $r_n \rightarrow 0$.

Теорема V.1.1 (S, Σ, μ) чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазоси, X фазо S да симметрик фазо бўлсин. Агар T чизиқли оператор S да эргодик автоморфизм билан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда ихтиёрий $f \in L_1$, $f \neq \text{const}$, функция ва ихтиёрий $r_n \rightarrow 0$ тезлик учун шундай f билан тенг ўлчовли бўлган $\hat{f}$ функция топиладики, барча $n \in \mathbb{N}$ учун $|S_n^T \hat{f} - \bar{f}| \leq r_n \cdot g$ тенгсизликларни бажарилиши $g \notin L_1$ бўлишини келтириб чиқаради.

Иккинчи бўлим қаътий монотон нормага эга бўлган ўлчовли функциялар симметрик фазосининг изометриялари тузилишини ўрганишга бағишланган.

Маълумки, $1 \leq p < \infty$ бўлганда $L_p(S)$ даги ихтиёрий мусбат изометрия куйидаги кўринишга эга:

$$Uf = \left(\frac{d\mu \circ \tau^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} f \circ \tau, f \in L_p,$$

бу ерда τ — S нинг бирон носингуляр автоморфизми.

f, g функциялари (S, Σ, μ) Лебег фазосида ўлчовли бўлсин. Биз $|f| < |g|$

тенгсизлик ўринли бўлади деймиз агар, $|f(s)| \leq |g(s)| \pmod{0}$ ва $\mu\{|f(s)| < |g(s)|\} > 0$ муносабатлар ўринли бўлса.

СФ $(X, \|\cdot\|_X)$ нинг нормаси $\|\cdot\|_X$ ни қатъий монотон деймиз, агар $|f| < |g|$ тенгсизликдан $\|f\|_X < \|g\|_X$ тенгсизлиги келиб чиқса.

$1 \leq p < \infty$ бўлгандаги L_p фазолари, N – функцияси M , Δ_2 - шартини қаноатлантирувчи L_M Орлич фазолари (яъни L_M сепарабел бўлганда), ψ функция қатъий усувчи бўлган Λ_ψ Лоренц фазолари қатъий монотон нормага эга.

L_∞ фазоси, ҳамда ψ функция қатъий усувчи бўлмаган Λ_ψ Лоренц фазолари қатъий монотон нормага эга эмас.

X СФси (C) шартини қаноатлантиради деймиз, агар $\{f_n\}_{n \in N} \subset X$ ва $0 \leq f_n \uparrow f \in X$ муносабатлардан $n \rightarrow \infty$ бўлганда $\|f_n\|_X \rightarrow \|f\|_X$ келиб чиқса.

Теорема V.2.4. Чекли ёки σ -чекли ўлчовли (S, Σ, μ) Лебег фазосида қатъий монотон нормали СФ X берилган бўлсин. Агар X СФси (C) шартини қаноатлантирса, у ҳолда X нинг ҳар қандай мусбат изометрияси учун шундай ўлчовли функция $m(s)$ ва носингуляр автоморфизм $\tau: S \rightarrow S \pmod{0}$ топиладики, $Uf(s) = m(s) \cdot f(\tau s)$ тенглик ўринли бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация чекли ёки σ -чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосида берилган ўлчовли функцияларнинг симметрик фазоларида статистик ва доминант эргодик теоремалари ўринли бўлиши учун зарур ва етарли шартларни ўрганишга бағишланган. Бундан ташқари, диссертацияда мусбат абсолют чизиқли сиқиш оператори T ёрдамида ҳосил қилинган S_n^T Чезаро ўрта қийматларини регулятор бўйича яқинлашиши ўрганилган ва (C) шартини қаноатлантирувчи қатъий монотон нормали симметрик фазоларнинг барча чизиқли изометриялари тавсифланган.

Чекли узлуксиз ўлчовли (S, Σ, μ) Лебег фазосида берилган ўлчовли функцияларнинг X ($X \neq L_\infty$) симметрик фазоси берилган бўлсин. Диссертацияда X нинг мусбат абсолют чизиқли сиқиш операторлари учун статистик эргодик теоремани (СЭТ) ўринли бўлишига қуйидаги натижалар олинган (II бобни қаранг).

(a) X СФсида барча автоморфизм ва оқимлар СЭТни қаноатлантириш (яъни X да дискрет Чезаро ўрта қийматлари S_n^T ва узлуксиз ўрта қийматлар R_x статистик эргодик теоремани қаноатлантириши) учун X ни сепарабел бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар X сепарабел бўлмаса ва X_0 тўплам L_∞ ни X даги ёпиғини англатса у ҳолда:

(b) $f \in X$ элементи автоморфизмлар учун СЭТни қаноатлантиради (яъни S нинг ихтиёрий T учун $n \rightarrow \infty$ бўлганда $S_n^T f$ ўрта қийматлари X да яқинлашади) фақат ва фақат $f \in X_0$ шarti бажарилганда;

(c) $f \in X$ элементи оқимлар учун СЭТни қаноатлантиради (яъни S да таъсир қилаётган ихтиёрий $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ оқими учун $x \rightarrow +\infty$ бўлганда $R_x f$ ўрта қийматлари X да яқинлашади) фақат ва фақат $f \in X_0$ шarti бажарилганда;

(d) S нинг T автоморфизми СЭТни қаноатлантириши (яъни ихтиёрий $f \in X$ элементи учун $n \rightarrow \infty$ бўлганда $S_n^T f$ ўрта қийматлари X да яқинлашиши) учун T ни даврий бўлиши зарур ва етарли;

(e) S нинг $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ оқими СЭТни қаноатлантириши (яъни ихтиёрий $f \in X$ элементи учун $x \rightarrow +\infty$ бўлганда $R_x f$ ўрта қийматлари X да яқинлашиши) учун $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ оқимнинг ҳар бир нуктада даврий бўлиши ва ҳар бир нуктанинг даврлари $\text{mod } 0$ бўйича биргаликда чегараланган бўлиши зарур ва етарли;

(f) Агар $f \in X \setminus X_0$ бўлса, у ҳолда СЭТни қаноатлантирмайдиган ҳар бир автоморфизм T ёки оқим $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ учун f билан тенгўлчовли шундай $\hat{f}$ ва $\tilde{f}$ функциялар мавжудки, $S_n^T \hat{f}$ Чезаро ёки $R_x \tilde{f}$ узлуксиз ўрта қийматлари X да яқинлашмайди;

(g) Ҳар бир $f \in X \setminus X_0$ элемент ва мусбат ўлчовли эргодик компонентага эга бўлмаган ихтиёрий T автоморфизми учун f билан тенгўлчовли шундай $\tilde{f}$ функцияси топиладики $S_n^T \tilde{f}$ ўрта қийматлари X да яқинлашади;

(h) Агар T автоморфизми эргодик бўлса, у ҳолда $S_n^T f$ ўрта кийматлари $n \rightarrow \infty$ бўлганда X да яқинлашиши учун $n \rightarrow \infty$ бўлганда $\rho(S_n^T f, X_0) \rightarrow 0$ ни бажарилиши зарур ва етарли;

(i) Агар $f \in X \setminus X_0$ бўлса, у ҳолда f билан тенгўлчовли шундай $\tilde{f}$ функцияси топиладики, бунда $\rho(S_n^T \tilde{f}, X_0) = \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n}$ бўлиб, $S_n^T \tilde{f}$ Чезаро ўрта кийматларини X да $n \rightarrow \infty$ бўлганда яқинлашиши $n^{-1} \rho(D_n f^*, X_0)$ кетма-кетликни нолга интилишига тенг-кучли бўлади, бу ерда D_n мос чўзиш оператори.

X ($X \neq L_\infty$) симметрик фазоси σ — чекли узлуксиз μ ўлчовли (S, Σ, μ) Лебег фазосида берилган бўлсин (III бобни қаранг).

Бу ҳолда ихтиёрий мусбат абсолют чизиқли сиқиш оператори учун СЭТ бажарилади фақат ва фақат X сепарабел фазо бўлиб, $X \subseteq L_1$ муносабат ўринли бўлмаса. Хусусан,

(j) Орлич фазоси $(L_M, \|\cdot\|_M) \in (\text{СЭТ}) \Leftrightarrow M(t)$ учун Δ_2 -шарти ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$ тенглиги бажарилса;

(k) Лоренц фазоси $(A_\psi, \|\cdot\|_{A_\psi}) \in (\text{СЭТ}) \Leftrightarrow \psi(+0) = 0, \psi(+\infty) = +\infty$ шартлари ва $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$ тенглиги бажарилса.

Чекли узлуксиз ўлчовли Лебег фазосидаги СФ X учун доминант эргодик теорема бажарилиши мезонлари IV бобда исботланган бўлиб, улар қуйидагилардан иборатдар:

(l) $X \in DET \Leftrightarrow X \in HLP \Leftrightarrow \|D_r\|_{X \rightarrow X} = o(r) \quad (r \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow d_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \|D_{\frac{1}{r}}\|_{X \rightarrow X} dr < \infty$, бу ерда D_r — чўзиш оператори (таърифи IV.2 бўлимда келтирилган);

(m) Агар T — мусбат абсолют чизиқли сиқиш оператори бўлиб, эргодик автоморфизми ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $X \notin HLP$ муносабатдан $T \notin DET$ муносабати келиб чиқади;

(n) Агар $p > 1$ бўлса, у ҳолда ҳар бир $1 \leq q \leq p < \infty$ учун $L_{p,q} \in DET$ муносабат ўринли, бу ерда $L_{p,q}$ Лоренц фазосидир;

(o) Агар L_M Орличнинг $M(u)$ функцияси ёрдамида ҳосил қилинган Орлич фазоси бўлса, у ҳолда $L_M \in DET \Leftrightarrow L_M \in HLP \Leftrightarrow \inf_{t,u>1} \frac{M(tu)}{t^p M(u)} > 0$ бирон $p > 1 \Leftrightarrow \sup_{u>1} \frac{\int_1^u M(u/s) ds}{M(u)} < \infty$ муносабатлар ўринли бўлади.

Қатъий монотон нормали симметрик фазо X да таъсир қилаётган мусбат изометрияларни тавсифлашда, агар X СФси (C)шартини қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир шундай U изометрия қуйидаги кўринишда бўлиши исбот қилинди:

(p) $Uf(s) = m(s) \cdot f(\tau s) \pmod{0}$, бу ерда $m(s)$ — бирон номанфий бўлган ўлчовли функция, τ эса S фазонинг носингуляр автоморфизми бўлади.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.30.09.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ВЕКСЛЕР АЛЕКСАНДР СЕМЕНОВИЧ

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО–
ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ**

**01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Ташкент – 2019 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2019.3.DSc/FM144.

Диссертация выполнена в Институте математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:

Чилин Владимир Иванович

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Семенов Евгений Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
(Воронежский государственный университет,
Россия)

Ганиходжаев Расул Набиевич

доктор физико-математических наук, профессор

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович

доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация:

**Крымский федеральный университет
имени В.И.Вернадского, Россия**

Защита диссертации состоится «___» _____ 2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2019 года.
(протокол рассылки №_____ от «___» _____ 2019 года).

А.А.Аъзамов

Заместитель председателя Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев

Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

А.С.Садуллаев

Заместитель председателя научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные задачи эргодической теории, отвечающие приоритетным направлениям современной мировой математике, тесно связаны с классическими статистическими, индивидуальными и доминантными эргодическими теоремами, которые описывают поведение дискретных средних Чезаро $S_n^T f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i f$ или аналогичных средних подобного вида в L_p -пространствах измеримых функций, заданных на пространствах (S, Σ, μ) с конечной или σ -конечной бесконечной непрерывной мерой μ , где T — линейное сжатие этого банахова пространства. Статистическая эргодическая теорема (СЭТ) впервые была доказана фон Нейманом для изометрических операторов, действующих в пространствах L_2 . Статистическая эргодическая теорема, доминантная эргодическая теорема для случая положительных линейных сжатий пространств L_p на пространстве с конечной непрерывной мерой были и остаются важными задачами в общей эргодической теории.

В настоящее время вопросы изучения условий для справедливости указанных выше эргодических теорем в перестановочно-инвариантных, т. е. симметричных, пространствах считаются одной из важных задач эргодической теории. Исследования, связанные с получением аналогов индивидуальной эргодической теоремой Биркгофа-Хинчина, устанавливающей сходимость средних $\{S_n^T f\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f \in L_1$, почти всюду, а также аналогов доминантной эргодической теоремой (ДЭТ) в пространствах L_p , изучающей принадлежность мажоранты $M^T f = \sup_{n \geq 1} S_n^T(|f|)$, построенной для оператора Данфорда-Шварца T и измеримой функции f , этому пространству L_p , являются важнейшими научными направлениями.

В нашей стране усиленное внимание уделено актуальным направлениям, которые имеют практические применения, в том числе изучению условий отдельных эргодических теорем для классических моделей квантовой механики, нахождению критериев выполнения статистических, доминантных и иных эргодических теорем в перестановочно инвариантных пространствах. Отметим, что значительный прогресс был достигнут в обобщении и распространении эргодических теорем для пространств измеримых функций на более широкие объекты. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, математическая физика, теория вероятностей и теория динамических систем»³. Исследование перестановочно-инвариантных пространств измеримых функций играет важную роль в обеспечении реализации данного постановления.

³ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года «Об организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, упомянутым в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся развития фундаментальной науки в Узбекистане.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан разд. IV «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации⁴.

Исследования эргодических теорем в перестановочно-инвариантных пространствах измеримых функций проводятся в ведущих исследовательских центрах и высших учебных заведениях зарубежных стран, в том числе: Университет Нового Южного Уэльса, Школа математики и статистики (Австралия); Международный центр теоретической физики им. Абдуса Салама, Пизанский университет (Италия); Парижский университет, Университет Тулузы (Франция); Московский государственный университет, Федеральный университет Крыма, Новосибирский государственный университет, Институт математики РАН (Россия); Университет штата Пенсильвания, Университет Питтсбурга (США); Университет Торонто (Канада); Университет Упсала (Швеция), Университет Хельсинки (Финляндия); Университет Сантьяго - де- Компостелло (Испания) и другие.

Научные исследования по установлению эргодических теорем для различных моделей физики и квантовой механики способствовали решению ряда важных проблем. Первоначально полученные такие научные результаты, как теоремы Неймана, Биркгофа и доминантные эргодические теоремы были распространены на объекты, отличные от тех, для которых они были доказаны первоначально (Международный центр теоретической физики им. Абдуса Салама, Италия). При этом пространство конечной меры заменялось на пространство бесконечной меры и вместо перестановочно-инвариантных пространств функций рассматривался их некоммутативный аналог (Университет штата Пенсильвания, США). Эргодические теоремы для L_p пространств были обобщены для пространств Орлича (Федеральный

⁴ Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Statistical Physics, Queueing Systems, Теоретическая и математическая физика, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Украинский математический журнал, <http://www.springer.com/mathematics>; Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, Journal of Physics: Conference Series <https://www.researchgate.net> также были использованы и другие источники.

университет Крыма, Россия). Далее, поскольку пространства Орлича являются подклассом более общего класса симметричных пространств, соответствующие теоремы доказывались и для этого случая. При изучении действий сохраняющих меру автоморфизмов пространств Лебега активно использовались методы теории измеримых разбиений пространств Лебега, разработанные В. А. Рохлиным (Институт математики РАН, Россия). Были описаны положительные изометрии некоммутативных пространств Лоренца (Университет Нового Южного Уэльса, Австралия, Школа математики и статистики, Австралия).

В настоящее время в мире ведутся исследования по получению различных вариантов эргодических теорем в различных классах симметричных пространств, в том числе для пространств Лоренца и Марцинкевича.

Степень изученности проблемы. Диссертация посвящена изучению проблемы выполнения СЭТ и ДЭТ в симметричных пространствах измеримых функций, заданных на пространстве Лебега с конечной или σ -конечной бесконечной непрерывной мерой, а также решению других сопутствующих задач. Рассматривается вопрос о выполнении эргодических теорем в СП X . Изучение условий действия этих теорем в пространствах L_p приводит к естественным вопросам и задачам:

В каких СП верны СЭТ или ДЭТ для любых T из определенного класса операторов и любых элементов $f \in X$? В каких СП эти теоремы не верны?

Если в СП X не верны СЭТ (или ДЭТ), то в каких максимальных подпространствах X эти теоремы все-таки верны для любых элементов f этих подпространств и любых T из соответствующего класса операторов?

Если в СП X , вообще говоря, не выполнены СЭТ (или ДЭТ), то описать подкласс линейных операторов T , действующих в X , для которого СЭТ (или ДЭТ) верны для любых элементов $f \in X$.

В диссертации впервые полностью описаны классы симметричных пространств X на пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны статистические эргодические теоремы для операторов и потоков. Это сепарабельные СП в случае пространства Лебега с конечной мерой и сепарабельные СП с дополнительным условием $X \not\subseteq L_1$ в случае бесконечной σ -конечной меры.

Полностью описан класс СП, для элементов которых верна доминантная эргодическая теорема. Это так называемые СП, обладающие свойством (HLP) или, иначе, свойством Харди-Литтлвуда. Полученные результаты применены к пространствам Лоренца $L_{p,q}$ и Орлича L_M . Для СП $X \neq L_\infty$ выделено максимальное подпространство X_0 — замыкание в X множества ограниченных функций с наследуемой из X нормой, для элементов которого СЭТ верны.

Для СП X , в которых не верна ДЭТ, выделен максимальный класс $H(X)$, элементы которого удовлетворяют ДЭТ. Класс $H(X)$ описан в главе IV диссертации. Отметим, что это далеко идущее обобщение и развитие

упомянутого результата Д. Орстейна 1971 года.

Для СП, в которых не верна СЭТ, выделены классы операторов, порожденных автоморфизмом или потоками, для элементов которого СЭТ верна. Это операторы, порожденные периодическими автоморфизмами, или группа операторов, порожденная периодическим в каждой точке потоком при условии, что периоды всех точек ограничены в совокупности (mod 0).

Для СП, в которых не верна ДЭТ, выделен класс операторов, порожденных эргодическими автоморфизмами, элементы которого не удовлетворяют ДЭТ.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами организации, в которой выполнялась диссертация. Исследования выполнены в соответствии с планами научных исследований ОТ-Ф4-82 + ОТ-Ф4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и ее приложения в механике», Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана (2017–2021 гг.).

Цель исследования: описание классов симметричных пространств, в которых выполнены статистические, доминантные и другие эргодические теоремы.

Задачи исследования: определение симметрических пространств, построенных в пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны эргодические теоремы для операторов и потоков;

полное описание класса симметрических пространств, построенных в пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны эргодическая теорема и доминантная эргодическая теорема;

установление справедливости статистических эргодических теорем в сепарабельных симметричных пространствах для операторов Данфорда-Шварца;

нахождение критериев для не выполнения статистических эргодических теорем в несепарабельных СП, отличных от L_∞ ;

нахождение критериев для справедливости статистических эргодических теорем при действии автоморфизмов или потока автоморфизмов;

определение подпространства, для элементов которого статистическая эргодическая теорема верна, а также свойств этого подпространства;

доказательство того, что доминантные эргодические теоремы выполняются в симметричных пространствах, удовлетворяющих свойству Харди-Литтлвуда, и только в них.

Объект исследования – пространства Лебега с конечной и σ -конечной бесконечной мерой, симметричные пространства, заданные на этих пространствах Лебега, операторы Данфорда-Шварца, действующие в симметричных пространствах.

Предмет исследования – статистические эргодические теоремы для операторов и потоков, действующих в СП на пространстве Лебега с конечной

или σ -конечной мерой; критерии справедливости доминантных эргодических теорем в СП, положительные линейные изометрии СП.

Методы исследования. Применяются методы теории пространств Лебега и измеримых разбиений этих пространств, методы эргодической и траекторной теории, теории симметричных пространств измеримых функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

определены симметрические пространства, построенные в пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны эргодические теоремы для операторов и потоков;

полностью описан класс симметрических пространств, построенных в пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны эргодическая теорема и доминантная эргодическая теорема;

установлена справедливость статистических эргодических теорем в сепарабельных симметричных пространствах для операторов Данфорда-Шварца;

найлены критерии для не выполнения статистических эргодических теорем в несепарабельных СП, отличных от L_∞ ;

найлены критерии для справедливости статистических эргодических теорем при действии автоморфизмов или потока автоморфизмов;

определены подпространства, для элементов которого статистическая эргодическая теорема верна, а также свойства этого подпространства;

доказано, что доминантные эргодические теоремы выполняются в симметричных пространствах, удовлетворяющих свойству Харди-Литтлвуда, и только в них.

Научная новизна исследования. В исследованиях по теме настоящей диссертации впервые и полностью изучены и описаны классы симметричных пространств на пространстве Лебега с конечной или σ -конечной мерой, в которых верны статистические эргодические теоремы для операторов и потоков, а также класс СП, для элементов которых верна доминантная эргодическая теорема.

Практические результаты исследования. Диссертационная работа носит теоретический характер, и ее результаты могут быть использованы при исследованиях в области эргодической теории и теории симметричных пространств.

Достоверность результатов исследования. Достоверность работы обусловлена строгими математическими доказательствами полученных результатов, а также публикациями в международных высокорейтинговых математических журналах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования определяется полным описанием классов СП, для которых сохраняется справедливость статистических и доминантных эргодических теорем.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты позволяют прогнозировать поведение средних Чезаро для стохастических линейных преобразований пространства наблюдаемых в

квантовой теории вероятностей.

Внедрение результатов исследования. На основании полученных результатов об эргодических теоремах в перестановочно-инвариантных пространствах измеримых функций получены следующие:

Нахождения критериев выполнения статистических эргодических теорем для автоморфизмов и потоков были использованы в гранте под номером DP150100920 «Разложения Шура и смежные вопросы теории операторов» для доказательства того, что доминантная эргодическая теорема выполняется в симметричных пространствах, удовлетворяющих свойству Харди-Литтлвуда, и только в них (Справка от 9 июля 2019 года Университета Нового Южного Уэльса, Австралия). Применение научных результатов дало возможность описания эргодических свойств операторов Данфорда-Шварца, действующих в некоммутативных симметричных пространствах неограниченных операторов, определенных на пространствах Гильберта;

Симметричные пространства построенные на конечном или σ -конечным измеримом пространстве Лебега для которых верна статистическая эргодическая теорема были использованы в гранте под номером FL170100052 «Новейшие методы для некоммутативного анализа» для доказательства выполнения статистических эргодических теорем в сепарабельных симметричных пространствах для операторов Данфорда-Шварца (Справка от 9 июля 2019 года Университета Нового Южного Уэльса, Австралия). Применения научных результатов дало возможность нахождению условий невыполнения статистических эргодических теорем в несепарабельных симметричных пространствах, отличных от L_∞ ;

Эргодические свойства операторов Данфорда-Шварца, действующие в функциональных пространствах были использованы в гранте РФФИ № 16-11-10125 «Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу» для описания изометрии пространств Лореца (Справка № 9-29-286 от 27 августа 2019 года Крымского федерального университета, Россия). Применение научных результатов дало возможность нахождению критериев, которым должен соответствовать автоморфизм или поток для того, чтобы соответствующая статистическая эргодическая теорема выполнялась.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на 11 научных конференциях, в том числе на 8 международных и 3 республиканских научных конференциях.

Публикации. Опубликовано 24 научных работ по теме диссертации, в том числе 10 статей в научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, в том числе 6 статей в зарубежных журналах и 4 статьи в республиканских журналах, 2 монографии.

Объем и структура диссертации. Диссертация объемом 199 страниц основного текста состоит из введения, пяти глав, списка литературы из 81 наименования, а также дополнительного списка тезисов докладов на конференциях из 11 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списков использованной литературы (части 1 и 2).

Во **введении** обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, дан обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, указана связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами организации, в которой выполнялась диссертация, сформулированы цели, задачи, объекты, предмет и методы исследования, раскрыты научная новизна, практическая значимость и достоверность результатов исследования, даны сведения о внедрении результатов, апробации и публикациях, а также об объеме и структуре диссертации.

Первая глава диссертации «**Необходимые сведения**» посвящена необходимым определениям и сведениям, а также в ней формулируются некоторые известные результаты, необходимые для изложения основного текста диссертации.

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие понятия.

Пусть (S, Σ, μ) - пространство Лебега с конечной или бесконечной σ -конечной мерой. Две измеримые на S функции f_1 и f_2 называются равноизмеримыми, если для каждого $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\eta_{f_1}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\{s \in S: f_1(s) > \tau\} = \mu\{s \in S: f_2(s) > \tau\} = \eta_{f_2}(\tau).$$

Мы говорим, что $f_1 \sim f_2$, если равноизмеримы $|f_1|$ и $|f_2|$.

Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ действительных измеримых функций на S называется *симметричным пространством* (СП), иначе — *перестановочно инвариантным пространством*, если

- (i) $f_1 \sim f_2 \in X \Rightarrow f_1 \in X$ и $\|f_1\|_X = \|f_2\|_X$;
- (ii) $|f_1| \leq |f_2|$ и $f_2 \in X \Rightarrow f_1 \in X$ и $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$.

Примерами СП являются пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$, пространства Орлича L_M , Лоренца Λ_φ , Марцинкевича M_ψ .

Верны включения $L_1 \cap L_\infty \subseteq X \subseteq L_1 + L_\infty$. В частности, если мера μ конечна, то $L_\infty \subseteq X \subseteq L_1$.

Под сохраняющим меру *автоморфизмом mod 0* пространства (S, Σ, μ) понимается взаимно однозначное mod 0 измеримое в обе стороны (т. е. измеримы T и T^{-1}) отображение $T: S \rightarrow S$ с условием $\mu(T^{-1}A) = \mu A$ для каждого $A \in \Sigma$.

Пусть T — сохраняющий меру автоморфизм. Тем же символом T , иначе U_T , обозначается линейный оператор, действующий в алгебре измеримых функций на S : $Tf(s) = U_T f(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(Ts), s \in S$.

Если T — сохраняющий меру автоморфизм в S , то $U_T f \sim f$ и U_T действует в каждом СП X , являясь изометрией в X .

СП X называется *интерполяционным* относительно пары L_1 и L_∞ , если

каждый линейный оператор, непрерывно действующий в L_1 и L_∞ , непрерывно действует и X .

Пусть DS — множество операторов Данфорда-Шварца, обозначение $T \in DS$, т. е. таких линейных ограниченных операторов, действующих в L_1 и L_∞ , что

- i. $f \in L_1 \Rightarrow Tf \in L_1$ и $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$;
- ii. $f \in L_\infty \Rightarrow Tf \in L_\infty$ и $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$.

Интерполяционное относительно пары L_1 и L_∞ СП X называется интерполяционным с константой 1 или точным интерполяционным симметричным пространством (т.и.с.п.), если каждый оператор $T \in DS$ отображает X в себя и $\|T\|_{X \rightarrow X} \leq 1$.

Однопараметрическая группа автоморфизмов $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ пространства S называется потоком, если отображение ψ , заданное формулой $\psi(s, \tau) = T^\tau s$, измеримо на прямом произведении $S \times \mathbb{R}$.

Пример потока. Под вращением окружности мы понимаем поток, определённый формулой $T^\tau s = s + \tau \pmod{1}$, $s \in [0,1]$, при этом на отрезке $[0,1]$ рассматривается обычная мера Лебега.

Если поток, действующий в пространстве (S, Σ, μ) , изоморфен вращению окружности, то такой поток мы называем транзитивным.

Поток, не имеющий компонент, изоморфных вращению окружности, мы называем нигде не транзитивным. Понятие специального потока хорошо известно и определено в разделе I.4. Также известен следующий факт, активно используемый в диссертации:

Теорема I.4.1 (о специальном представлении потоков). *Всякий поток $\{T^\tau\}$ на пространстве Лебега, не имеющий неподвижных точек, метрически изоморфен некоторому специальному потоку.*

Пусть (S, Σ, μ) — пространство Лебега с конечной или бесконечной - конечной непрерывной мерой μ и $T \in DS$ — оператор Данфорда Шварца (в частности, T может быть определен равенством $Tf(s) = f(Ts)$, где T — сохраняющий меру автоморфизм в S).

Средние $S_n^T = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$ называются (дискретными) средними Чезаро.

Аналогично, если $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ — поток, порождающий группу операторов Данфорда Шварца, $0 < x \in \mathbb{R}$, и определены средние $R_x f(s) = \frac{1}{x} \int_0^x T^\tau f(s) d\tau = \frac{1}{x} \int_0^x f(T^\tau s) d\tau$, $f \in L_1 + L_\infty$, то операторы R_x называют (непрерывными) средними Чезаро.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $B(X)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в X , J — направленное множество и $\{T_\tau\}_{\tau \in J} \subset B(X)$.

Говорят, что сеть $\{T_\tau\}_{\tau \in J}$ сходится к оператору $T \in B(X)$ в сильной операторной топологии, $\tau \in J$, если

$$\|T_\tau(x) - T(x)\|_X \rightarrow 0, \tau \in J, \text{ для каждого } x \in X.$$

Под сильной непрерывностью (или непрерывностью в сильной операторной топологии) потока $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ понимается выполнение равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|T^\tau(x) - T^{\tau_0}(x)\|_X = 0 \text{ для всех } x \in X, \tau_0 \in R.$$

Приведем в упрощенной формулировке следующие известные результаты:

Теорема I.4.2 (Дж. фон Нейман). *Всякий поток непрерывен в сильной операторной топологии в пространстве L_2 .*

Теорема I.5.1 (Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа – Хинчина) *Пусть (S, Σ, μ) — пространство с нормированной мерой (т.е. $\mu S = 1$) и $f \in L_1(S, \Sigma, \mu)$. Тогда средние $S_n^T f$ и $R_x f$ сходятся почти всюду.*

Теорема I.5.2 (Статистическая эргодическая теорема в L_p -пространствах). *Пусть T — оператор Данфорда – Шварца. Тогда средние Чезаро S_n^T сходятся в сильной операторной топологии в пространстве L_p , $1 \leq p < \infty$ на пространстве конечной непрерывной меры (S, Σ, μ) .*

Вторая глава диссертации «**Статистическая эргодическая теорема для конечной меры**» посвящена исследованию условий выполнения статистических эргодических теорем (СЭТ) в СП X на пространстве Лебега с конечной непрерывной мерой. В этих теоремах изучается сходимость средних Чезаро S_n^T и R_x в сильной операторной топологии в X при $n \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow +\infty$ соответственно.

Данная глава разбита на десять разделов, а в разделе II.11 сформулированы выводы из результатов главы II.

Разделы II.1 и II.2 главы II посвящены изучению специальных представлений автоморфизмов и потоков. Доказывается, что существуют множество специальных представлений апериодического автоморфизма или потока как с неограниченной потолочной функцией, так и с ограниченной. Эти представления используются в дальнейшем для доказательств основных результатов.

В **разделе II.3** изучаются несепарабельные СП $X \neq L_\infty$. В этом случае, фундаментальная функция $\varphi_X(t) = \|\chi_A\|_X$, где $A \subseteq S$ и $\mu A = t$, удовлетворяет равенству $\varphi_X(+0) = 0$.

Через X_0 обозначаем замыкание в X множества ограниченных функций с наследуемой из X нормой. Известно, что X_0 есть сепарабельное симметричное пространство, которое интерполяционно в паре L_1 и L_∞ .

Пусть $\rho(f, X_0)$ — расстояние от элемента $f \in X$ до X_0 :

$$\rho(f, X_0) = \inf_{g \in X_0} \|f - g\|_X.$$

В разделе II.3 выводятся формула расчёта, свойства и различные оценки значений функционала $\rho(f, X_0)$. Эти результаты используются в разделах II.5 и II.10, а также представляют самостоятельный интерес.

Раздел II.4 посвящён сепарабельным СП на пространстве Лебега с конечной непрерывной меры (S, Σ, μ) . Из теорем II.4.3, II.4.4, II.4.5, доказанных в этом разделе, следует:

- i. Если $T \in DS$, то средние Чезаро S_n^T сходятся в X в сильной операторной топологии при $n \rightarrow \infty$;
- ii. Если $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ — поток в S , то группа $T^\tau f(s) = f(T^\tau s)$ сильно

непрерывна в любой точке $\tau_0 \in R$;

iii. Если $\{T^\tau\}_{\tau \in R}$ — поток в S , то непрерывные средние Чезаро R_x сходятся в X в сильной операторной топологии при $x \rightarrow +\infty$.

В разделе II.5 рассматриваются несепарабельные СП, отличные от L_∞ , и линейные операторы, порождённые сохраняющими меру автоморфизмами T пространства Лебега.

Впервые установлено, что СЭТ в таких СП верна только в случае, если автоморфизм T пространства Лебега является периодическим.

Пусть $X \neq L_\infty$ — СП на пространстве Лебега с конечной непрерывной мерой (S, Σ, μ) , T — сохраняющий меру автоморфизм в S .

Напомним, что автоморфизм T периодичен, если найдется такое натуральное число $N > 0$, что $T^N = I$, где I — тождественный автоморфизм. Тогда:

а) СП X удовлетворяет СЭТ, т. е. средние $S_n^T f$ сходятся в X для любого автоморфизма T пространства S при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow X = X_0$, т. е. X сепарабельно.

При этом, если X — несепарабельно, т. е. $X \neq X_0$, то

б) Элемент $f \in X$ удовлетворяет СЭТ для автоморфизмов, т. е. средние $S_n^T f$ сходятся в X для любого автоморфизма T пространства S при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow f \in X_0$;

с) Автоморфизм T в S удовлетворяет СЭТ, т. е. средние $S_n^T f$ сходятся в X для любого элемента $f \in X$ при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow T$ периодичен.

Результаты, указанные выше, вытекают из следующей теоремы:

Теорема II.5.1 (СЭТ в несепарабельных СП). Пусть $X \neq L_\infty$ — несепарабельное СП на пространстве Лебега конечной непрерывной меры, T — сохраняющий меру автоморфизм. Тогда средние Чезаро S_n^T сходятся в X в сильной операторной топологии при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда T периодичен. Более того, если T не периодичен, то для каждой функции $f \in X \setminus X_0$ найдётся такая равноизмеримая с ней функция $\hat{f}$, что средние $S_n^T \hat{f}$ не сходятся в X при $n \rightarrow \infty$.

Следующее предложение показывает, что переход к равноизмеримой функции в теореме II.5.1 является существенным фактором.

Пусть σ — измеримое разбиение на эргодические компоненты T и X — несепарабельное симметричное пространство на S , причём $X \neq L_\infty$.

Предложение II.5.2. Пусть фактор-пространство S/σ имеет непрерывную меру и автоморфизм T не периодичен.

Тогда для каждой функции $f \in X \setminus X_0$ существует такая равноизмеримая с f функция $\hat{f}$, что средние $S_n^T \hat{f}$ сходятся в X .

Таким образом, в данном случае, для каждой функции $f \in X \setminus X_0$ найдутся такие равноизмеримые с f функции $\hat{f}$ и $\hat{\hat{f}}$, что средние $S_n^T \hat{f}$ не сходятся, а $S_n^T \hat{\hat{f}}$ сходятся в X .

В разделе II.6 рассматривается случай эргодического автоморфизма T который характерен тем, что мера факторпространства S/σ не является

непрерывной, а само S/σ состоит из одного атома (как и выше, σ — измеримое разбиение на эргодические компоненты автоморфизма T). Изучается связь сходимости $S_n^T f$ в несепарабельном СП X с поведением последовательности $\rho(S_n^T f, X_0)$ для случая эргодического автоморфизма T .

Теорема II.6.1. Пусть T — эргодический автоморфизм в S , $X \neq L_\infty$ — несепарабельное СП на S и $f \in X$. Для того, чтобы средние $S_n^T f$ сходились в X необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(S_n^T f, X_0) = 0$.

В разделе II.7 вводятся определения геометрические свойств DWI и DBI элементов несепарабельного СП X и самих симметричных пространств.

Пусть $X \neq L_\infty$ — несепарабельное СП на отрезке $S = [0,1]$ с обычной мерой Лебега. Через D_n обозначим оператор растяжения измеримой функции $f(t)$ на S :

$$D_n f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t/n) = \begin{cases} f(t/n), & \text{если } t \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Отметим, что если $f \geq 0$ измеримая невозрастающая функция, то условие $m \leq n$ влечёт неравенство $D_m f \leq D_n f$. Тогда верно и неравенство

$$\rho(D_m f, X_0) \leq \rho(D_n f, X_0), \text{ если } m \leq n.$$

Пусть f^* — убывающая перестановка функции f на отрезке $[0,1]$. Далее мы говорим, что элемент $f \in X$ удовлетворяет:

- условию (DWI) — *Distance Weak Increase*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n} = 0$;
- условию (DBI) — *Distance Bounded Increase*, если последовательность $\rho(D_n f^*, X_0)$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена.

Мы говорим, что СП X удовлетворяет условию (DWI) (соответственно, (DBI)), если каждый элемент $f \in X$ удовлетворяет условию (DWI) (соответственно, (DBI)).

Отметим, что условие (DBI) влечёт (DWI).

Предложение II.7.2. Пусть X — СП на отрезке $S = [0,1]$ и $X \neq L_\infty$, T — такой автоморфизм в S , что существует его спецпредставление (S_0, μ_0, r, T_0) с неограниченной потолочной функцией r (понятие спецпредставления автоморфизма дано в главе I и изучается в разделе II.1).

Тогда для любой функции $f \in X$ существует такая равноизмеримая с f функция $\tilde{f}$, что для каждого натурального числа $n \geq 1$ верно равенство

$$\rho(S_n^T \tilde{f}, X_0) = \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n}.$$

Отметим, что, в соответствии с теоремой II.1.1, автоморфизм T пространства S может быть иметь спецпредставление (S_0, μ_0, r, T_0) с неограниченной потолочной функцией r в случае, если T непериодичен. В частности, это верно в следующих случаях (или их комбинации):

- (1) T непериодичен, но локально периодичен;
- (2) T аperiodичен, при этом не существует T -инвариантного подмножества положительной меры, сужение T на которое эргодично;
- (3) T эргодичен.

Из теоремы II.6.1 и предложения II.7.2 вытекает следующее

Следствие II.7.3. Пусть T — эргодический автоморфизм на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега. Если СП X удовлетворяет условию (DWI) , то для каждого элемента $f \in X$ существует такая равноизмеримая с ней функция $\tilde{f}$, что средние $S_n^T \tilde{f}$ сходятся в X .

В разделах II.8 и II.9 приведены примеры СП как удовлетворяющих, так и не удовлетворяющих упомянутым условиям (DWI) и (DBI) . Также описывается связь свойства (DWI) с некоторыми экзотическими геометрическими свойствами симметричных пространств

Предложение II.8.1.

(a) Каждое пространство Орлича L_M удовлетворяет условиям (DBI) и (DWI) ;

(b) Существует пространство Марцинкевича M_ψ , не удовлетворяющее условию (DWI) , следовательно не удовлетворяющее и условию (DBI) .

В разделе II.9 описывается связь свойства (DWI) с геометрическими свойствами симметричных пространств. Приведено альтернативное доказательство того факта, что каждое пространство Орлича обладает свойством (DWI) , а также полностью описан класс пространств Марцинкевича, обладающих этим свойством. При этом установлено, что пространство Марцинкевича M_ψ удовлетворяет условию (DWI) тогда и только тогда, когда $\liminf_{t \rightarrow +0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$.

В разделе II.10 исследуются свойства потока $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$, сопряжённой к нему группы операторов $\{U^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ и операторов усреднения R_x , порождённых этим потоком, в X .

Впервые получены такие условия, при которых сопряженная потоку группа операторов, действующая в пространстве измеримых функций, сильно непрерывна в СП X , а в несепарабельном X выполнена СЭТ.

Теорема II.10.1 (О непрерывности сопряженной потоку группы). Пусть X — симметричное пространство на пространстве Лебега конечной непрерывной меры, причём $X \neq L_\infty$.

Сопряжённая группа операторов $U^\tau f(s) = f(T^\tau s)$ сильно непрерывна в СП $X \Leftrightarrow X$ сепарабельно.

Прежде чем изучать выполнение СЭТ для потоков в несепарабельных СП X , зададимся вопросом о том, действуют ли средние R_x в X при каждом $x > 0$.

Сильная непрерывность группы $\{U^\tau\}$ является достаточным условием для того, чтобы средние R_x действовали в X , но, конечно, не является необходимым.

Теорема II.10.2 (О действии непрерывных средних в СП).

(a) Если СП X интерполяционно в паре L_1 и L_∞ , то средние R_x действуют в X для любого $x > 0$;

(b) Если СП X не интерполяционно в паре L_1 и L_∞ , то для любого нетривиального нигде не транзитивного потока $\{T^\tau\}$ и каждого $x_0 > 0$ существует такая функция $\hat{f} \in X$, что $R_{x_0} \hat{f} \notin X$.

Таким образом, далее изучается поведение средних R_x только в интерполяционных СП в паре L_1 и L_∞ .

Пусть $\{T^\tau\}$ — поток в пространстве Лебега с конечной непрерывной мерой (S, Σ, μ) .

Точку $s \in S$, будем называть периодической точкой потока $\{T^\tau\}$, если найдётся такое $\tau > 0$, что $T^\tau s = s$.

Обозначим через P множество периодических точек нетривиального потока $\{T^\tau\}$. Тогда функция

$$p(s) = \begin{cases} \inf \{ \tau > 0 : T^\tau s = s \}, & s \in P, \\ \infty, & s \in S \setminus P, \end{cases}$$

измерима и конечна на P .

Согласно теореме II.4.5, СЭТ для потоков верна в сепарабельных СП.

Теорема II.10.4. Пусть X — интерполяционное между L_1 и L_∞ несепарабельное симметричное пространство, причём $X \neq L_\infty$.

(i) Если поток $\{T^\tau\}$ периодичен в каждой точке и периоды ограничены (mod 0) в совокупности (т. е. $0 \leq p \in L_\infty$), то средние R_x сходятся в X в сильной операторной топологии при $x \rightarrow +\infty$.

(ii) Если нетривиальный нигде не транзитивный поток $\{T^\tau\}$ не удовлетворяет условию пункта (i), то для всякой функции $f \in X \setminus X_0$ найдётся такая равноизмеримая с ней функция $\hat{f}$, что средние $\{R_x \hat{f}\}$ не сходятся в X при $x \rightarrow +\infty$.

Из доказанных в главе II результатов можно сделать следующие выводы.

Если СП X сепарабельно, то в X выполняются статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков.

Если же СП X несепарабельно, а X_0 — замыкание в X множества ограниченных функций с наследуемой из X нормой, то СП X_0 сепарабельно, соответственно в X_0 верны указанные выше теоремы.

Изучая структуру автоморфизмов или потоков пространства Лебега S , мы видим, что каждый из них имеет множество представлений в виде специального автоморфизма или потока. Если автоморфизм непериодичен, то существует его спецпредставление с неограниченной потолочной функцией, при этом подобный результат верен и для потоков. Основой для таких утверждений являются результаты разделов II.1 и II.2. Они дают возможность получения специальных представлений автоморфизмов с разнообразными свойствами.

Рассматривая теперь несепарабельные СП $X \neq L_\infty$, в которых СЭТ не выполнена, мы можем выбрать элемент $f \in X \setminus X_0$. Если T — непериодический автоморфизм в S , то имеется его специальное представление с неограниченной потолочной функцией. Выбирая те или иные равноизмеримые с $f \in X \setminus X_0$ элементы $\hat{f}$, соответствующие выбранному спецпредставлению автоморфизма T , мы можем получить как не сходящиеся последовательности $S_n^T \hat{f}$, так и сходящиеся. Аналогичные результаты верны и для потоков.

Также следует отметить, что возможность сходимости или не сходимости

последовательности $S_n^T f$ тесно связана с геометрическими свойствами симметричных пространств, определенными в разделе II.7 главы II, т.е. с понятиями (DWI) или (DBI) . Эти условия никак не связаны с поведением средних $S_n^T \hat{f}$, а касаются операторов сжатия D_n .

Сами по себе условия (DWI) или (DBI) имеют отношение к глубоким вопросам, кратко затронутым в разделе II.9, а именно к аналогу теоремы Риффа о том, орбита $\Omega'(f) = \Sigma'(f)$ слабо компактна и, в соответствии с теоремой Крейна – Мильмана, является замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек, где Σ' — полугруппа *бистохастических* операторов.

Также можно отметить, что множество симметричных пространств, обладающих свойством (DWI) , совпадает с множеством вполне симметричных пространств, обладающих сингулярными симметричными функционалами.

Таким образом, возможность выполнения или невыполнения СЭТ в СП $X \neq L_\infty$ тесно связана с геометрией этого симметричного пространства.

Третья глава диссертации «**Статистическая эргодическая теорема для бесконечной меры**» посвящена условиям выполнения СЭТ для случая симметричных пространств на пространстве Лебега с бесконечной σ -конечной непрерывной мерой и линейных сжатий в этих пространствах. Эта глава разбита на четыре раздела.

В **разделах III.1 и III.2** приводится общая информация и определяются понятия, отличающиеся для случая пространств Лебега с σ -конечной бесконечной непрерывной мерой от аналогичных понятий для пространств с конечной мерой.

Основные результаты формулируются и доказываются в **разделе III.3**. Эти результаты применяются в **разделе III.4** для случая пространств Орлича L_M и Лоренца Λ_ψ в терминах функций Орлича $M(t)$ или, соответственно, вогнутой функции $\psi(t)$.

В **главе III** предполагается, что (S, Σ, μ) — пространство Лебега с бесконечной σ -конечной непрерывной мерой μ , X — т.и.с.п. относительно пары (L_1, L_∞) . Рассматриваются операторы Данфорда-Шварца $T \in DS$, действующие в X .

Теорема III.3.1 (СЭТ для бесконечной меры). Пусть X — т.и.с.п. относительно пары (L_1, L_∞) на пространстве с мерой (S, Σ, μ) . Следующие условия эквивалентны:

(i) Средние Чезаро S_n^T сходятся сильно в X для любых $T \in DS$ при $n \rightarrow \infty$;

(ii) Пространство X сепарабельно и $X \not\subseteq L_1(S, \Sigma, \mu)$.

Следствие III.3.9. Пусть X — т.и.с.п. на (S, Σ, μ) относительно пары (L_1, L_∞) . Следующие условия эквивалентны:

(i) $X \in (CЭТ)$;

(iii) Пространство X сепарабельно и $\alpha(X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_X(t)}{t} = 0$.

Пусть теперь $M(u)$ — функция Орлича и

$$L_M = \left\{ f \in L_0(\mu) : \int_0^\infty M\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu < \infty \text{ для некоторого } \lambda > 0 \right\} -$$

пространство Орлича с нормой Люксембурга

$$\|f\|_M = \inf\{\lambda > 0 : \int_0^\infty M\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\}.$$

Известно, что $(L_M, \|\cdot\|_M)$ есть т.и.с.п., при этом L_M сепарабельно в том и только в том случае, когда функция Орлича $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, т. е. существуют такие числа $k > 0$ и $t_0 \geq 0$, что $M(2t) \leq kM(t)$ при всех $t \geq t_0$.

Теорема III.4.1. $(L_M, \|\cdot\|_M) \in (\text{СЭТ})$ в том и только в том случае, когда $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$.

Пусть теперь ψ возрастающая вогнутая ненулевая функция на $[0, +\infty)$ с $\psi(0) = 0$ и $\Lambda_\psi = \{f \in L_0(\mu) : \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty f^*(t) d\psi(t) < \infty\}$ соответствующее пространство Лоренца. Здесь f^* — убывающая перестановка функции f , т.е. невозрастающая непрерывная справа равноизмеримая с $|f|$ функция. Известно, что $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ есть т.и.с.п., при этом, $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\psi(+0) = 0$ и $\psi(+\infty) = +\infty$.

Кроме того, $\varphi_{\Lambda_\psi}(t) = \psi(t)$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема III.4.2. $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi}) \in (\text{СЭТ})$ в том и только в том случае, когда $\psi(+0) = 0$, $\psi(+\infty) = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$.

Четвертая глава диссертации «Доминантная эргодическая теорема» посвящена условиям выполнения доминантной эргодической теоремы (ДЭТ) в симметричных пространствах. Эта глава разбита на три раздела.

В первом разделе дается описание симметричных пространств, обладающих свойством Харди-Литтлвуда (свойство (HLP)).

Во втором разделе главы IV показывается, что ДЭТ верна в СП X в том и только том случае, когда X имеет свойство (HLP) . Приводятся также и другие критерии выполнения ДЭТ.

Последний раздел посвящен выполнению ДЭТ в пространствах Лоренца $L_{p,q}$ и Орлича L_M . Даются простые критерии выполнения ДЭТ в этих пространствах.

Пусть (S, Σ, μ) — пространство Лебега с конечной мерой, $T \in DS$, f — измеримая функция на S и $M^T f = \sup_{n \geq 1} S_n^T(|f|)$.

Классическая доминантная эргодическая теорема (ДЭТ) в L_p - пространствах утверждает следующее

1) Если $1 < p < \infty$ и $f \in L_p$, то $M^T f \in L_p$, при этом,

$$\|M^T f\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

2) $M^T f \in L_1 \Leftrightarrow f \in L \log L$, т. е. $f \cdot \log^+ f \in L_1$.

Пусть теперь X — СП на (S, Σ, μ) . Будем говорить, что

(i). Элемент $f \in X$ удовлетворяет ДЭТ ($f \in DET$), если $M^T f \in X$ для каждого $T \in DS$;

(ii). СП X удовлетворяет ДЭТ ($X \in DET$), если каждый элемент $f \in X$ удовлетворяет ДЭТ.

(iii). Оператор T в СП X удовлетворяет ДЭТ ($T \in DET$) в X , если $M^T f \in X$ для каждого $f \in X$.

Для каждой функции f из $L_1(S)$ положим $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$ (мажорантная функция Харди-Литлвуда).

Будем говорить, что

(i) Элемент f из СП X удовлетворяет свойству Харди-Литлвуда ($f \in HLP$), если $f^{**} \in X$.

(ii) СП X удовлетворяет свойству Харди-Литлвуда ($X \in HLP$), если каждый элемент $f \in X$ удовлетворяет HLP.

Положим $H(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_1(S) : f^{**} \in X\}$. Известно, что всегда верно включение $H(X) \subseteq X$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, для $X = L_1$ имеем $H(L_1) = L \log L \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_1 : |f| \log^+ |f| \in L_1\} \subsetneq L_1$.

Можно проверить, что $H(X)$ является симметричным пространством относительно нормы $\|f\|_{H(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \|f^{**}\|_X$.

Теорема IV.2.4 (ДЭТ и HLP). Пусть X - т.и.с.п.

(1) Если $T \in DS$ и $f \in H(X)$, то $M^T f \in X$ и $\|M^T f\|_X \leq \|f\|_{H(X)}$;

(2) Если T порожден эргодическим автоморфизмом в S , то $M^T f \in X \Rightarrow f \in H(X)$.

Пусть X — т.и.с.п. на отрезке $[0,1]$, $r > 1$. Пусть D_r — оператор растяжения измеримой функции $f(t)$ на S :

$$D_r f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\left(\frac{t}{r}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(t/r), & \text{если } t \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Следствие IV.2.5 (ДЭТ в СП). Следующие условия эквивалентны:

1) $X \in DET$;

2) $X \in HLP$;

3) $\|D_r\|_{X \rightarrow X} = o(r)$ при $r \rightarrow +\infty$;

4) $d_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \|D_{\frac{1}{r}}\|_{X \rightarrow X} dr < \infty$.

Если эти условия выполнены, то верно неравенство

$\|M^T f\|_X \leq d_X \|f\|_X$ для всех $f \in X$.

Пространство Лоренца $L_{p,q}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, состоит из всех измеримых функций f на S , таких, что

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^1 (f^*(t))^q dt^{q/p} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

для $q < \infty$, и $\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$ для $q = \infty$. Известно, что

функционал $\| \cdot \|_{p,q}$ является нормой при $q \leq p$.

Теорема IV.3.1 (ДЭТ для пространств Лоренца). Если $p > 1$, то $L_{p,q} \in DET$ для каждого $1 \leq q \leq p$. При этом, для всех $T \in DS$ выполнено неравенство $\| M^T f \|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1} \| f \|_{p,q}$.

Пусть L_M пространство Орлича, построенное по функции Орлича $M(u)$.

Теорема IV.3.2 (ДЭТ для пространств Орлича). Следующие условия эквивалентны:

- 1) $L_M \in DET$;
- 2) $L_M \in HLP$;
- 3) Найдется такое $p > 1$, что $\inf_{t,u>1} \frac{M(tu)}{t^p M(u)} > 0$;
- 4) Справедливо неравенство: $\sup_{u>1} \frac{\int_1^u M(\frac{u}{s}) ds}{M(u)} < \infty$;
- 5) Верно условие: $\sup_{u>1} \frac{u \int_1^u \frac{M'(s)}{s} ds}{M(u)} < \infty$.

Теорема IV.3.3 Для каждой функции Орлича M выполнено $H(L_M) = L_{M_1}$, где

$$M_1(u) = \begin{cases} M(u), & 0 \leq u \leq 1, \\ M(1) + u \int_1^u \frac{M'(t)}{t} dt, & u > 1. \end{cases}$$

Теорема IV.3.4

(1) Если T — положительное абсолютное сжатие, то $f \in L_{M_1} \Rightarrow M^T f \in L_M$;

(2) Если T порожден эргодическим автоморфизмом в S , то $M^T f \in L_M \Rightarrow f \in L_{M_1}$.

Пятая глава диссертации «Сходимость с регулятором и изометрии» посвящена некоторым дополнительным результатам, полученным в процессе работы над диссертацией. Ее первый раздел посвящен изучению сходимости последовательности средних Чезаро к предельной функции с некоторым регулятором.

Под сходимостью последовательности функций $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ к $\bar{f}$ с регулятором g и скоростью $\{r_n\} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, подразумевается, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ выполняется (mod 0) неравенство $|f_n - \bar{f}| \leq r_n \cdot g$, где g — некоторая измеримая функция на S , а $\{r_n\}$ — последовательность положительных чисел, при этом $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема V.1.1 Пусть (S, Σ, μ) — пространство Лебега конечной непрерывной меры, X — симметричное пространство на S .

Если линейный оператор T порожден эргодическим автоморфизмом в S , т.е. $T \in \Sigma_+^{00}$, то для любой функции $f \in L_1$, $f \neq \text{const}$, и всякой скорости $r_n \rightarrow 0$ найдется такая равноизмеримая с f функция $\hat{f}$, что выполнение неравенства $|S_n^T \hat{f} - \bar{f}| \leq r_n \cdot g$ для всех $n \in \mathbb{N}$ влечет $g \notin L_1$.

Второй раздел посвящен изучению структуры изометрий симметричных

пространств измеримых функций со строго монотонной нормой.

Известно, что каждая положительная обратимая изометрия U в $L_p(S)$, $1 \leq p < \infty$, имеет вид:

$$Uf = \left(\frac{d\mu \circ \tau^{-1}}{d\mu} \right)^{\frac{1}{p}} f \circ \tau, f \in L_p,$$

τ — некоторый несингулярный автоморфизм пространства S .

Пусть f, g — измеримые функции на пространстве Лебега (S, Σ, μ) . Мы говорим, что $|f| < |g|$, если $|f(s)| \leq |g(s)| \pmod{0}$ и $\mu\{|f(s)| < |g(s)|\} > 0$.

Мы называем норму $\|\cdot\|_X$ СП $(X, \|\cdot\|_X)$ строго монотонной, если неравенство $|f| < |g| \in X$ влечет неравенство $\|f\|_X < \|g\|_X$.

Пространства L_p при $1 \leq p < \infty$, Орлича L_M , в случае, если N -функция M удовлетворяет Δ_2 -условию, т. е. L_M сепарабельно, и Лоренца Λ_ψ , в том случае, когда функция ψ строго возрастает, имеют строго монотонную норму.

Пространство L_∞ и любое пространство Λ_ψ с функцией ψ , не являющейся строго возрастающей, не обладают этим свойством.

Говорят, что СП X удовлетворяет условию (C), если из предположения $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ и $0 \leq f_n \uparrow f \in X$ следует, что $\|f_n\|_X \rightarrow \|f\|_X$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема V.2.4. Пусть X — СП со строго монотонной нормой на пространстве Лебега (S, Σ, μ) с конечной или бесконечной σ -конечной мерой. Если X удовлетворяет условию (C), то каждая положительная изометрия в X имеет вид $Uf(s) = m(s) \cdot f(\tau s)$ с некоторыми измеримой функцией $m(s)$ и несингулярным автоморфизмом $\tau: S \rightarrow S \pmod{0}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению необходимых и достаточных условий для справедливости выполнения статистической и доминантной эргодических теорем в симметричных пространствах измеримых функций, заданных на пространстве Лебега с конечной или бесконечной -конечной непрерывной мерой. Кроме того, в диссертации рассматривается сходимость с регулятором для средних Чезаро S_n^T , порожденных положительным абсолютным линейным сжатием T , а также дается описание всех линейных изометрий, действующих в симметричном пространстве со строго монотонной нормой, удовлетворяющей условию (C).

Пусть X симметричное пространство измеримых функций, заданных на пространстве Лебега конечной непрерывной меры (S, Σ, μ) , $X \neq L_\infty$. В диссертации установлены следующие результаты, относящиеся к справедливости статистической эргодической теоремы (сокращенно, СЭТ) для положительных абсолютных линейных сжатий в X (см. главу II).

(a) СП X удовлетворяет СЭТ для всех автоморфизмов и потоков (т. е. в X верна статистическая эргодическая теорема для дискретных средних Чезаро S_n^T или непрерывных средних R_x) только и только в том случае, когда X сепарабельно.

Если X несепарабельно и X_0 обозначает замыкание L_∞ в X , то:

(b) Элемент $f \in X$ удовлетворяет СЭТ для автоморфизмов, т. е. средние $S_n^T f$ сходятся в X для любого автоморфизма T пространства S при $n \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда $f \in X_0$;

(c) Элемент $f \in X$ удовлетворяет СЭТ для потоков, т. е. средние $R_x f$ сходятся в X для любого потока $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$, действующего в пространстве S , при $x \rightarrow +\infty$, тогда и только тогда, когда $f \in X_0$;

(d) Автоморфизм T в S удовлетворяет СЭТ, т. е. средние $S_n^T f$ сходятся в X для любого элемента $f \in X$ при $n \rightarrow \infty$, в том и только том случае, когда T периодичен;

(e) Поток $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ в S удовлетворяет СЭТ, т. е. средние $R_x f$ сходятся в X для любого элемента $f \in X$ при $x \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда поток периодичен в каждой точке и периоды всех точек $\bmod 0$ ограничены в совокупности.

(f) Если $f \in X \setminus X_0$, то для каждого автоморфизма T или потока $\{T^\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}}$, не удовлетворяющих СЭТ, существуют такие равноизмеримые с f функции $\hat{f}$ и $\hat{\hat{f}}$, что средние Чезаро $S_n^T \hat{f}$ или непрерывные средние $R_x \hat{\hat{f}}$ не сходятся в X .

(g) Для каждого элемента $f \in X \setminus X_0$ и любого автоморфизма T , не имеющего эргодических компонент положительной меры, найдется такая равноизмеримая с f функция $\tilde{f}$, что средние $S_n^T \tilde{f}$ сходятся в X .

(h) Если автоморфизм T эргодичен, то средние $S_n^T f$ сходятся в X в том и только том случае, когда $\rho(S_n^T f, X_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(i) Если $f \in X \setminus X_0$, то найдётся такая равноизмеримая с f функция

$\tilde{f}$, что $\rho(S_n^T \tilde{f}, X_0) = \frac{\rho(D_n f^*, X_0)}{n}$, и сходимость средних Чезаро $S_n^T \tilde{f}$ в X равносильна сходимости к нулю последовательности $n^{-1} \rho(D_n f^*, X_0)$ при $n \rightarrow \infty$, где D_n — соответствующий оператор растяжения.

Пусть теперь $X \neq L_\infty$ — симметричное пространство на пространстве Лебега (S, Σ, μ) с бесконечной σ -конечной непрерывной мерой μ (см. главу III).

В этом случае, для выполнения СЭТ при действии любых положительных абсолютных линейных сжатий необходимы и достаточны сепарабельность пространства X и отсутствие включения $X \subseteq L_1$.

В частности,

(j) Пространство Орлича $(L_M, \|\cdot\|_M) \in (\text{СЭТ}) \Leftrightarrow M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$.

(k) Пространство Лоренца $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi}) \in (\text{СЭТ}) \Leftrightarrow \psi(+0) = 0$, $\psi(+\infty) = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$.

При получении критериев выполнения доминантных эргодических теорем в СП X на пространстве Лебега с конечной непрерывной мерой в главе IV, установлено, что

(l) $X \in \text{DET} \Leftrightarrow X \in \text{HLP} \Leftrightarrow \|D_r\|_{X \rightarrow X} = o(r)$ при $r \rightarrow +\infty \Leftrightarrow d_X \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \|D_{\frac{1}{r}}\|_{X \rightarrow X} dr < \infty$, где D_r — оператор растяжения (определен в разделе IV.2);

(m) Если T — положительное абсолютное линейное сжатие, порожденное эргодическим автоморфизмом, то предположение $X \notin \text{HLP}$ влечет $T \notin \text{DET}$;

(n) Если $p > 1$, то пространство Лоренца $L_{p,q} \in \text{DET}$ для каждого $1 \leq q \leq p < \infty$;

(o) Если L_M пространство Орлича, построенное по функции Орлича $M(u)$, то $L_M \in \text{DET} \Leftrightarrow L_M \in \text{HLP} \Leftrightarrow \inf_{t,u>1} \frac{M(tu)}{t^p M(u)} > 0$ для некоторого $p > 1 \Leftrightarrow \sup_{u>1} \frac{\int_1^u M(u/s) ds}{M(u)} < \infty$.

При описании положительных изометрий, действующих в симметричных пространствах X со строго монотонной нормой доказано, что если X удовлетворяет условию (C), то каждая такая изометрия U определена формулой

(p) $Uf(s) = m(s) \cdot f(\tau s) \pmod{0}$, где $m(s)$ — некоторая неотрицательная измеримая функция, а τ — несингулярный автоморфизм пространства S .

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.30.09.2019.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VEKSLER ALEKSANDR SEMENOVICH

**ERGODIC THEOREMS IN REARRANGEMENT-INVARIANT SPACES
OF MEASURABLE FUNCTIONS**

**01.01.01 – Mathematical analysis
(Physical and Mathematical Sciences)**

**DISSERTATION ABSTRACT
of doctoral dissertation (DSc) on physical and mathematical sciences**

Tashkent – 2019

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.DSc/FM144.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://fti-kengash.uz/> and on the website of “ZiyoNet” Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific adviser:

Chilin Vladimir Ivanovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Semenov Evgeniy Mihailovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
(Voronezh State University, Russia)

Ganikhodzhaev Rasul Nabievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Етакчи ташкилот:

**Crimean Federal University named after
V.I.Vernadsky, Russia.**

Defense will take place «____» _____ 2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.30.09.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _____ 2019 year.
(Mailing report № _____ on «____» _____ 2019 year).

A.A.Azamov

Vice Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev

Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

A.S.Sadullaev

Vice Chairman of Scientific seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Numerous problems of ergodic theory that correspond to the priority fields of modern world mathematics are closely related to classical statistical, individual and dominant ergodic theorems that describe the behavior of discrete Cesaro means $S_n^T f = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i f$ or similar means of a similar form in L_p -spaces of measurable functions defined on spaces (S, Σ, μ) with finite or σ -finite infinite continuous measure μ , where T is the linear contraction of this Banach space. The statistical ergodic theorem (SET) was first proved by von Neumann for isometric operators acting in the spaces L_2 . The statistical ergodic theorem, the dominant ergodic theorem for the case of positive linear contractions of the spaces L_p on a space with a finite continuous measure were and remain important problems in the general ergodic theory. We have naturally arrived at the questions concerning the necessary and sufficient conditions for the ergodic theorems to be held in a given symmetric space.

The aim of the research work. We describe the classes of symmetric spaces in which statistical, dominant and some other ergodic theorems hold.

The tasks of research work:

- the definition of symmetric spaces constructed in a Lebesgue space with a finite or σ -finite measure in which ergodic theorems for operators and flows are true;

- a full description of the class of symmetric spaces constructed in a Lebesgue space with finite or σ -finite measure in which the ergodic theorem and the dominant ergodic theorem are true;

- establishing the validity of statistical ergodic theorems in separable symmetric spaces for Dunford-Schwartz operators;

- finding criteria for not fulfilling statistical ergodic theorems in inseparable SPs other than L_∞ ;

- finding criteria for the validity of statistical ergodic theorems under the action of automorphisms or a flow of automorphisms;

- the definition of a subspace for whose elements the statistical ergodic theorem is true, as well as the properties of this subspace;

- proof that dominant ergodic theorems hold in symmetric spaces satisfying the Hardy-Littlewood property, and only in them.

The object of the research work are Lebesgue spaces with finite and σ -finite infinite measures, symmetric spaces defined on these Lebesgue spaces, Dunford-Schwartz operators acting in symmetric spaces, generated by automorphisms of Lebesgue spaces.

Scientific novelty of the research work is as follows:

- symmetric spaces constructed in a Lebesgue space with a finite or σ -finite measure in which hold ergodic theorems for operators and flows are defined;

- of the class of symmetric spaces constructed in a Lebesgue space with finite or σ -finite measure in which hold ergodic theorem and dominant ergodic theorem are completely described;

- the validity of statistical ergodic theorems in separable symmetric spaces for

Dunford-Schwartz operators is established;

criteria for not fulfilling statistical ergodic theorems in inseparable SPs other than L_∞ is found;

criteria for the validity of statistical ergodic theorems under the action of automorphisms or a flow of automorphisms is found;

a subspace for whose elements the statistical ergodic theorem is true, as well as the properties of this subspace are defined;

it is proved that dominant ergodic theorems hold in symmetric spaces satisfying the Hardy-Littlewood property, and only in them.

Summary of the dissertation. The dissertation is devoted to the study of necessary and sufficient conditions for the validity of statistical and dominant ergodic theorems in symmetric spaces of measurable functions defined on a Lebesgue space with a finite or infinite σ -finite continuous measure. In addition, the dissertation examines convergence with a regulator for Cesaro means S_n^T generated by positive absolute linear contraction T , and also describes all linear isometries acting in a symmetric space with a strictly monotonic norm satisfying condition (C).

Implementation of the research results. Based on the results obtained on ergodic theorems in rearrangement-invariant spaces of measurable functions, the following are obtained:

Finding criteria for fulfilling statistical ergodic theorems for automorphisms and flows were used in grant No. DP150100920 “Schur decompositions and related problems in operator theory”, to prove that the dominant ergodic theorem holds in symmetric spaces that satisfy the Hardy-Littlewood property, and only in them (Certificate of July 9, 2019, University of New South Wales, Australia). Application of scientific results made it possible to describe the ergodic properties of Dunford-Schwartz operators acting in non-commutative symmetric spaces of unbounded operators defined on Hilbert spaces;

Symmetric spaces constructed on a finite or σ -finite measurable Lebesgue space for which the statistical ergodic theorem is true were used in grant No. FL170100052 “Breakthrough methods for noncommutative calculus” to prove the fulfillment of statistical ergodic theorems in separable symmetric spaces for Dunford-Schwartz operators (Certificate of July 9, 2019, University of New South Wales, Australia). The application of scientific results made it possible to find conditions for the failure of statistical ergodic theorems in inseparable symmetric spaces other than L_∞ ;

Ergodic properties of the Dunford-Schwartz operators acting in function spaces were used in the RFBR grant No. 16-11-10125 “Operator equations in function spaces and applications to non-linear analysis” for describing isometries of Lorets spaces (Certificate 9-29-286 of August 27, 2019, Crimean Federal University, Russia). The application of scientific results made it possible to find criteria that an automorphism or flow must meet in order for the corresponding statistical ergodic theorem to be satisfied.

The outline of the thesis. The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 199 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Векслер А.С., Фёдоров А.Л. Симметричные пространства и статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016, 168 с.
2. Векслер А.С. Статистические эргодические теоремы в перестановочно – инвариантных пространствах измеримых функций. — Lambert Academic Publishing, ISBN 978-3-659-5047-0, 2018, 156 с.
3. Векслер А.С., Фёдоров А.Л. Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах. — Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, т. 27, 4 (1983), с. 8–13 (в настоящее время Uzbek Mathematical Journal – 01.00.00; No 6).
4. Векслер А.С., Фёдоров А.Л. Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных пространствах Орлича. — Известия АН УзССР, 1984, №2, 6 стр. (в настоящее время Uzbek Mathematical Journal – 01.00.00; No 6).
5. Векслер А.С. Положительные изометрии нормированных идеальных пространств функций. — Сборник трудов ТашГУ «Математический анализ и теория вероятностей», 1984 г., 7 стр. (в настоящее время Узбекистон Миллий университети хабарлари – 01.00.00; No 8).
6. Векслер А.С. Эргодическая теорема в симметричных пространствах. — Сиб. мат. журн., т. 26, 4 (1985), с. 189–191 (3. Scopus. IF=0.620).
7. Векслер А.С., Фёдоров А.Л. Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций. — Сиб. мат. журн., т. 29, 3 (1988), с. 183–185 (3. Scopus. IF=0.620).
8. Braverman M., Rubshtein B., Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces. — Studia Mathem. 128 (2) (1998), pp. 145–157. (3. Scopus. IF=0.78).
9. Sukochev F., Veksler A. Mean ergodic theorem in symmetric spaces. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017), 559–562 (3. Scopus. IF=0.515).
10. Chilin V.I., Veksler A.S. Mean ergodic theorem in function symmetric spaces for infinite measure. — Uzbek Mathematical Journal, 2018, No 1, pp. 35–46. (01.00.00; No 6).
11. Sukochev F., Veksler A. Positive Linear Isometries in Symmetric Operator Spaces. — Integral Equations and Operator Theory, 90 (2018), 90:58 Springer Nature Switzerland AG 2018. pp. 1–15 (58) (3. Scopus. IF=0.635).
12. Sukochev F., Veksler A. The Mean Ergodic Theorem in symmetric spaces. — Studia Mathematica, 245 (3) (2019), pp. 229–253 (3. Scopus. IF=0.78).

II бўлим (Часть II; Part II)

13. Векслер А. С., Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Сходимость с регулятором

- в эргодических теоремах. — Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия «Физико-математические науки», т. 23 (62), № 1 (2010) с. 1–12.
14. Векслер А. С. Статистическая эргодическая теорема и некоторые свойства симметричных пространств измеримых функций. — Международная конференция – XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016), сборник тезисов. Батилиман (Ласпи), Россия, 17–29 сентября 2016 г., стр. 5–6.
 15. Векслер А. С., Чилин В. И. Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах. — Тезисы докладов международной школы-конференции «Соболевские чтения». Новосибирск, Россия, 18–22 декабря 2016 г., стр. 80.
 16. Векслер А. С., Чилин В. И. Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах последовательностей. — Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных учёных «Современные проблемы динамических систем и их приложения», Туринский Политехнический Институт в г. Ташкенте, Ташкент, 1–3 мая 2017 г., стр. 23–25.
 17. Векслер А. С. Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций. — Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных учёных «Современные проблемы динамических систем и их приложения», Туринский Политехнический Институт в г. Ташкенте, Ташкент, 1–3 мая 2017 г., стр. 199–200.
 18. Векслер А. С., Чилин В. И. Положительные изометрии нормированных идеальных пространств измеримых функций. — Тезисы докладов конференции с участием зарубежных учёных «ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ», Ташкент, 11–12 мая 2017 г., стр. 277–279.
 19. Sukochev F. A., Veksler A. S. Mean ergodic theorem in symmetric spaces. — The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics. Abstracts. Urgench, Uzbekistan 08–12 August, 2017, pp. 42–43.
 20. Векслер А. С., Чилин В.И. Статистическая эргодическая теорема для бесконечных мер. — Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2017. – XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам, сборник тезисов. Симферополь, «ДИАЙПИ». – 2017, стр. 8–11.
 21. Chilin V. I., Veksler A. S. Mean ergodic theorem in symmetric spaces on infinite measure space. — Abstracts of the Uzbek-Israel International Conference “CONTEMPORARY PROBLEMS IN MATHEMATICS AND PHYSICS”. –October 6–10, 2017, Tashkent, Uzbekistan, pp. 59–61.
 22. Chilin V. I., Veksler A. S. The mean ergodic theorem in Lorenz spaces. — Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. – October 2–5, 2017, Astana, Kazakhstan, p. 59.

23. Векслер А. С., Чилин В. И. Статистическая эргодическая теорема для потоков на пространствах с бесконечной мерой. — Тезисы докладов международной конференции “Mathematical Analysis and its application to mathematical physics”. – Самарканд, сентябрь 17–20, 2018 г., часть 1, стр. 116.
24. Veksler A. S. Mean ergodic theorem with continuous time in function symmetric spaces for infinite measure. — Abstracts of the Uzbek-Israel joint International Conference “Science – Technology – Education – Mathematics – Medicine”. – May 13–17, 2019, Tashkent, Uzbekistan, pp. 140–141.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан
ўтказилди (11 октябр 2019 йил).

Босишга рухсат этилди: __.__.2019 йил
Бичими 60x84^{1/16}, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3.5. Адади: 100. Буюртма: № 1910-R

СП ООО «MICROS PAK» босмахонасида чоп этилди
100015, Тошкент ш., Кичик Бешагач кўчаси, 86-уй

