

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

**NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI**

**Matematika kafedrası o'qituvhisi
M.T.Maxammadaliyevning**

HC modeli uchun kuchsiz davriy gibbs o'lchovlarining yagonalik shartlari.

ILMIY MAQOLASI

NAMANGAN-2019

HC modeli uchun kuchsiz davriy gibbs o'lchovlarining yagonalik shartlari

Gibbs o'lchovi tushunchasi statistik mexanikada muhim rol o'ynaydi. Berilgan gamiltonianning asosiy vazifasi bu gamiltonianga mos barcha Gibbs o'lchovlarini tasniflashdan iborat. Gibbs o'lchovining ta'rif va Gibbs o'lchovlari nazariyasiga oid boshqa tushunchalar bilan [1]-[4] ishlarda tanishish mumkin. Keli daraxtida Izing modeli uchun bu masala yetarlicha to'liq o'rganilgan.

τ^k - bu $k \geq 1$ tartibli cheksiz Keli daraxti, ya'ni siklsiz graf bo'lib, har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiqadi. Faraz qilaylik, $\tau^k = (V, L, i)$ bo'lsin, bu yerda $V - \tau^k$ ning uchlari to'plami, L - uning qirralari to'plami va i - insidentlik funksiyasi bo'lib, har bir $l \in L$ qirrasi uning chetki uchlari bo'lgan $x, y \in V$ larni mos qo'yadi. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x va y lar eng yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y \rangle$ kabi belgilanadi. Keli daraxtida $d(x, y)$ ($x, y \in V$) masofa ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$d(x, y) = \min \{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y : \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

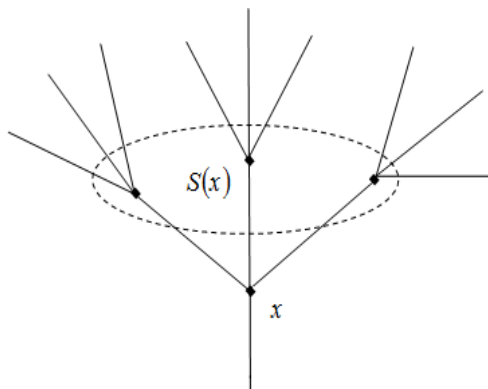
Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun ushbu belgilashlar kiritiladi:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$x \in W_n$ uchun esa quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

$S(x)$ to'plam x uchning to'g'ri avlodlari deyiladi (1-rasm).



1-rasm. x uchning to'g'ri avlodlari.

$\Phi = \{0,1\}$ va $\sigma \in \Phi^V$ – konfiguratsiya bo'lsin, ya'ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, bu yerda $\sigma(x) = 1$ sharti Keli daraxtida x uch “band” ekanligini, $\sigma(x) = 0$ sharti esa x uch “bo'sh” ekanligini bildiradi.

Ta'rif-1. Agar V (mos ravishda V_n yoki W_n) dagi har qanday $\langle x, y \rangle$ qo'shnilar uchun $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ bo'lsa, u holda σ konfiguratsiya joiz konfiguratsiya deyiladi va bunday konfiguratsiyalar to'plamini Ω (Ω_{V_n} va Ω_{W_n}) kabi belgilanadi. Ravshanki, $\Omega \subset \Phi^V$.

HC modelining gamiltoniani quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$H(\sigma) = \begin{cases} J \sum_{x \in V} \sigma(x), & \text{agar } \sigma \in \Omega, \\ +\infty, & \text{agar } \sigma \notin \Omega, \end{cases}$$

bunda $J \in R$.

$\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ joiz konfiguratsiya uchun belgilash kiritamiz:

$$\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \sigma_n(x),$$

$\# \sigma_n$ – bu V_n dagi birlar (band uchlar) soni.

$z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_+^2$ vektor-funksiya V da berilgan bo'lsin. U holda $\lambda > 0$ va $n = 1, 2, \dots$ lar uchun Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovini qaraylik:

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}. \quad (1)$$

Bu yerda Z_n – normallovchi bo'luvchi:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\# \varphi_n} \prod_{x \in W_n} z_{\varphi_n(x), x}.$$

$\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligi muvofiqlik shartini qanoatlantiradi deyiladi, agar ixtiyoriy $n \geq 1$ va $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ lar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad (2)$$

bunda

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n} \\ 0, & \text{agar } \sigma_{n-1} \vee \omega_n \notin \Omega_{V_n}. \end{cases}$$

Bunday holda Kolmogorov teoremasiga ko'ra $(\Omega, \mathbf{B})$ da shunday yagona μ o'lchov mavjudki, $\forall n \in N$ va $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ lar uchun

$$\mu(\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\mathbf{B} - \Omega$ ning silindrik qism to'plamlaridan hosil bo'luvchi σ -algebradir.

Ta'rif-2. (1) formula orqali aniqlangan (2) muvofiqlik shartini qanoatlantiruvchi μ o'lchov $\lambda > 0$ bilan $z : x \in V \setminus \{x_0\} \mapsto z_x$ funksiyaga mos keluvchi HC-Gibbs o'lchovi deyiladi.

[5] dan ma'lumki, Keli daraxtida HC modelining har bir Gibbs o'lchoviga

$$z'_x = \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + \lambda z_y}$$

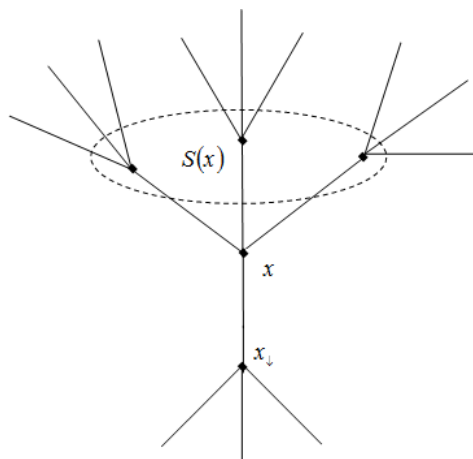
tenglamani qanoatlantiruvchi $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar to'plamini mos qo'yish

mumkin, bu yerda $z'_x = \frac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda = e^{J\beta} > 0$ – parametr va $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$.

Faraz qilaylik, $G_k^* - G_k$ ning qism gruppasi bo'lsin.

Ta'rif-3. Agar har qanday $x \in G_k$, $y \in G_k^*$ lar uchun $z_{yx} = z_x$ bo'lsa, u holda $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar G_k^* -davriy deyiladi. G_k -davriy miqdorlar translyatsion-invariant deyiladi.

Har qanday $x \in G_k$ uchun $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ to'plam yagona elementdan iborat va uni $x_\downarrow$ deb belgilaymiz. Uni, ya'ni $x_\downarrow$ ni x uchning ajdodi deyiladi (2-rasm).



2-rasm. x uchning ajdodi.

Faraz qilaylik, $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ faktor-gruppa bo'lsin, bu yerda $G_k^* - r \geq 1$ indeksli normal bo'luvchi.

Ta'rif-4. Agar $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$, $\forall x \in G_k$ lar uchun $z_x = z_{ij}$ bo'lsa, $z = \{z_x, x \in G_k\}$ miqdorlar G_k^* -kuchsiz davriy deyiladi.

Eslatma. Agar z_x ning qiymati $x_\downarrow$ ga bog'liq bo'lmasa, u holda kuchsiz davriy o'lchovlar davriy o'lchovlar bilan ustma-ust tushadi.

Ta'rif-5. Agar μ o'lchov G_k^* -(kuchsiz) davriy z miqdorlarga mos kelsa, u holda μ o'lchov G_k^* -(kuchsiz) davriy deyiladi.

Mazkur ishda biz to'rt indeksli ixtiyoriy $G_k^{(4)}$ normal bo'luvchi uchun G_k^* -kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlarini o'rganamiz.

$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ va $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{juft son}\}$ bo'lsin, bunda $w_x(a_i)$ - son $x \in G_k$ so'zdagi a_i harflar soni, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{juft son}\}$, $|x|$ - bu $x \in G_k$ so'z uzunligi va $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ - indeksi to'rtga teng bo'lgan normal bo'luvchi.

$G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ faktor gruppani qaraymiz, bunda

$$H_0 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_1 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{juft}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\},$$

$$H_2 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{juft} \right\},$$

$$H_3 = \left\{ x \in G_k : |x| - \text{toq}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{toq} \right\}.$$

U holda $G_k^{(4)}$ -kuchsiz davriy z_x miqdorlar quyidagi ko'rinishga ega:

$$z_x = \begin{cases} z_1, & x \in H_3, x_{\downarrow} \in H_1 \\ z_2, & x \in H_1, x_{\downarrow} \in H_3 \\ z_3, & x \in H_3, x_{\downarrow} \in H_0 \\ z_4, & x \in H_0, x_{\downarrow} \in H_3 \\ z_5, & x \in H_1, x_{\downarrow} \in H_2 \\ z_6, & x \in H_2, x_{\downarrow} \in H_1 \\ z_7, & x \in H_2, x_{\downarrow} \in H_0 \\ z_8, & x \in H_0, x_{\downarrow} \in H_2. \end{cases}$$

Bunda z_x lar quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{k-i}}, & z_2 = \frac{1}{(1 + \lambda z_6)^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i}}, \\ z_3 = \frac{1}{(1 + \lambda z_4)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^{k-i+1}}, & z_4 = \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_7)^{k-i+1}}, \\ z_5 = \frac{1}{(1 + \lambda z_6)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^{k-i+1}}, & z_6 = \frac{1}{(1 + \lambda z_5)^{i-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_8)^{k-i+1}}, \\ z_7 = \frac{1}{(1 + \lambda z_5)^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_8)^{k-i}}, & z_8 = \frac{1}{(1 + \lambda z_3)^i} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda z_7)^{k-i}}. \end{cases} \quad (3)$$

[6] ishdan ma'lumki, ushbu

$$I_1 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\}, \quad I_2 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_7, z_2 = z_8\},$$

$$I_3 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, z_7 = z_8\}, \quad I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8, z_2 = z_7\}.$$

to'plamlar (3) akslantirishga nisbatan invariantdir.

Yana [6] va [7] ishlardan quyidagi teorema ma'lum.

Teorema 1. [6],[7] HC modeli uchun normal bo'luvchining indeksi to'rt bo'lganda quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. $k \geq 1$ va $i \leq k$ bo'lsin. U holda I_1 da kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi yagona. Bundan tashqari bu o'lchov yagona translyatsion invariant Gibbs o'lchovi bilan ustma-ust tushadi.

2. $k = 2$, $\lambda_{cr} = 4$ va $i = 1$ yoki $i = 2$ bo'lsin. U holda I_2 da $\lambda < \lambda_{cr}$ bo'lganda yagona, $\lambda = \lambda_{cr}$ da ikkita va $\lambda > \lambda_{cr}$ da uchta kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari mavjud, bunda har bir holda Gibbs o'lchovlaridan bittasi translyatsion invariant, qolganlari davriy bo'lmagan kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlaridir.

3. $k = 3, i = 1$ bo'lsin. U holda shunday λ_0 mavjudki, I_2 da $\lambda > \lambda_0$ bo'lganda kamida to'rtta Gibbs o'lchovlari mavjud, bunda ulardan bittasi bittasi translyatsion-invariant, qolganlari davriy bo'lmagan kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlaridir.

4. $k \geq 1, i = 1$ yoki $k = 2, i = 2$ bo'lsin. U holda I_3 da kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi yagona.

5. $k = 2, 3$ va $i = 1$ yoki $k = i$ bo'lsin. U holda I_4 da kuchsiz davriy Gibbs o'lchovi yagona.

Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema 2. $I_3 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_2, z_7 = z_8\}$ invariantda $k = 3, i = 3$ va $k = 4, i = 4$ bo'lganda HC-modeli uchun barcha kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translyatsion invariant bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $\lambda > 0$ bo'lganda (3) tenglamalar sistemasi faqat $z_1 = z_2 = z_7 = z_8$ ko'rinishdagi yechimga ega ekanligini ko'rsatish yetarli.

I_3 invariantda $k = 3, i = 3$ bo'lganda (3) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \lambda z_7}{1 + \lambda z_7 + \lambda^3 \sqrt[3]{z_7^2}} \right)^3 \\ z_7 = \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_1 + \lambda^3 \sqrt[3]{z_1^2}} \right)^3 \end{cases} \quad (4)$$

(4) dan ko'rish mumkinki $z_1 > 0$ va $z_7 > 0$ bo'lganda $z_1 < 1$ va $z_7 < 1$ bo'ladi, ya'ni biz uchun musbat yechimlar zarur. Quyidagicha belgilash kiritamiz: $y^3 = z_1$, $x^3 = z_7$. U holda $0 < x < 1, 0 < y < 1$ bo'lib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y = \frac{1 + \lambda x^3}{1 + \lambda x^3 + \lambda x^2} \\ x = \frac{1 + \lambda y^3}{1 + \lambda y^3 + \lambda y^2} \end{cases} \quad (5)$$

Maxrajni nolga teng emasligini hisobga olib, uni chap tomonga ko'paytiramiz:

$$\begin{cases} x + \lambda xy^2 + \lambda xy^3 = 1 + \lambda y^3 \\ y + \lambda x^2 y + \lambda x^3 y = 1 + \lambda x^3 \end{cases} \quad (6)$$

(6) ning birinchi tenglamasidan ikkinchisini ayiramiz va ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x - y) - \lambda xy(x - y) - \lambda xy(x^2 - y^2) = \lambda(y^3 - x^3). \quad (7)$$

(7) tenglamani yechimlari mos ravishda (5) ning ham yechimlari bo'ladi.

Agar $x = y$ bo'lgan holda $z_1 = z_7$ bo'lib, yechim I_1 invariantga tushib qoladi. I_1 invariantda esa yechim yagonaligi isbotlangan.

Endi $x \neq y$ bo'lsin. U holda $x < y$ yoki $x > y$ lardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi. (7) ning ikki tomonini $x - y$ ga bo'lamiz:

$$1 - \lambda xy - \lambda xy(x + y) = -\lambda(x^2 + xy + y^2).$$

Oxirgi tenglikni soddalashtirganimizdan so'ng ushbu

$$\lambda(x^2 y + xy^2 - x^2 - y^2) = 1$$

ko'rinishiga keladi. Bundan

$$\lambda = \frac{1}{x^2(y - 1) + y^2(x - 1)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ma'lumki, $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Bundan $\lambda < 0$ ga ega bo'lamiz, lekin $\lambda > 0$ edi. Demak, (7) tenglama $x \neq y$ da yechimga ega emas ekan.

I_3 invariantda $k=4, i=4$ bo'lganda (3) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{1 + \lambda z_7}{1 + \lambda z_7 + \lambda^4 \sqrt[4]{z_7^3}} \right)^4 \\ z_7 = \left(\frac{1 + \lambda z_1}{1 + \lambda z_1 + \lambda^4 \sqrt[4]{z_1^3}} \right)^4 \end{cases} \quad (8)$$

(8) dan ko'rish mumkinki, $z_1 > 0$ va $z_7 > 0$ bo'lganda $z_1 < 1$ va $z_7 < 1$ bo'ladi. Belgilash kiritamiz: $y^4 = z_1, x^4 = z_7$. U holda $0 < x < 1, 0 < y < 1$ bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y = \frac{1 + \lambda x^4}{1 + \lambda x^4 + \lambda x^3} \\ x = \frac{1 + \lambda y^4}{1 + \lambda y^4 + \lambda y^3} \end{cases} \quad (9)$$

Maxrajni nolga teng emasligini hisobga olib, uni chap tomonga ko'paytiramiz:

$$\begin{cases} x + \lambda xy^3 + \lambda xy^4 = 1 + \lambda y^4 \\ y + \lambda x^3 y + \lambda x^4 y = 1 + \lambda x^4 \end{cases} \quad (10)$$

(10) ning birinchi tenglamasidan ikkinchisini ayiramiz va ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x - y) - \lambda xy(x^2 - y^2) - \lambda xy(x^3 - y^3) = \lambda(y^4 - x^4) \quad (11)$$

(11) tenglamani yechimlari mos ravishda (9) ning ham yechimlari bo'ladi. Yuqoridagi kabi, agar $x = y$ bo'lsa, yechim yagona bo'ladi.

$x \neq y$ bo'lsin. U holda $x < y$ yoki $x > y$ lardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

Faraz qilaylik $x > y$ bo'lsin. U holda (11) ni har ikki tomonini $y - x$ ga bo'lib yuboramiz:

$$-1 + \lambda xy(x + y) + \lambda xy(x^2 + xy + y^2) = \lambda(x^2 + y^2)(x + y).$$

Bu tenglamani yechimi yo'qligini isbotlash uchun

$$\lambda xy(x+y) + \lambda xy(x^2 + xy + y^2) < \lambda(x^2 + y^2)(x+y)$$

ekanligini isbotlash yetarli. Ma'lumki, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Bundan

$$\lambda xy + \lambda xy(x+y) < \lambda(x^2 + xy + y^2).$$

Tengsizlikni har ikki tomonini $x > 0$ ga ko'paytiramiz. U holda

$$\lambda x^2 y + \lambda xy(x^2 + xy) < \lambda(x^3 + x^2 y + xy^2)$$

ga ega bo'lamiz. Natijaning har ikkala tomoniga $\lambda xy + (y + y^2) + \lambda y^3$ ni qo'shamiz:

$$\lambda xy(x+y) + \lambda xy(x^2 + xy + y^2) + \lambda y^3 < \lambda(x^2 + y^2)(x+y) + \lambda xy(y + y^2).$$

$\lambda y^3 < \lambda xy(y + y^2)$ ekanligini inobatga olib, har ikki tengsizlikni bir-biridan ayirsak

$$\lambda xy(x+y) + \lambda xy(x^2 + xy + y^2) < \lambda(x^2 + y^2)(x+y)$$

hosil bo'ladi. Bu esa yuqoridagi (9) sistema faqatgina $x = y$ bo'lgandagina yechimga ega ekanligini bildiradi. Xuddi shu jarayonni $x < y$ uchun ham bajariladi. Unda faqat tengsizlikni $y > 0$ ga ko'paytiramiz. Bu esa o'z navbatida I_3 invariantda $k = 3$, $i = 3$ va $k = 4$, $i = 4$ bo'lganda kuchsiz davriy Gibbs o'lchovlari translyatsion invariant bo'lishini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Adabiyotlar

1. Георги Х.О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. - М.: Мир, 1992.
2. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. - М. : Мир, 1977.
3. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. - М.: Наука, 1980.
4. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci., 2013.
5. Suhov Yu. M., Rozikov U. A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network. Queueing Syst.. 2004. V. 46. P. 197–212.
6. Хакимов Р. М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса четыре. Укр. мат. журн.. 2015. Т. 67, № 10. С. 1409–1422.
7. Khakimov R.M., Madgoziyev G.T. Weakly periodic Gibbs measures for two and three state HC models on a Cayley tree. UzMJ, 2018, -№ 3, p. 116-131.