**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI**

**OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI**

**5130100-Matematika**

**ta’lim yo‘nalishi bitiruvchisi**

**Xonpo’latov Xushnudbek Xamidilla o’g’lining**

**“Uch holatli Hard-Core modellari uchun translatsion-invariant Gibbs o’lchovalari”**
mavzusidagi

# BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**«Himoyaga tavsiya etildi»**
**Matematika kafedrasi mudiri**
**_______DSc. M.M.Rahmatullayev**
**«___» _____________ 2019y.**

**BMI rahbari:**
**PhD, dotsent R.Xakimov**

Bitiruv malakaviy ishi kafedradan dastlabki himoyadan o’tdi
Kafedraning 10A sonli bayonnomasi «___» _____________ 2019y.

**Namangan – 2019**

**MUNDARIJA**

**KIRISH**……………………………………………….…………………….....3

**ASOSIY QISM**.........................................................................................10

1. Keli daraxtining gruppali tasviri va Kolmogorov teoremasi................10

2. Uch holatli unumdor Hard-Core modellari..................................................21

3. $k=3$ tartibli Keli daraxtida translatsion-invariant Gibbs o’lchovlari..........26

4. $k\geq 2$ tartibli Keli daraxtida translatsion-invariant Gibbs o’lchovlari..........33

5. Translatsion-invariant Gibbs o’lchovlarining chekka o’lchov bo’lish shartlari.........................................................................................................42

**XULOSA.**........................................................................58

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YHATI.**.....59

# KIRISH

***Shuni unutmaslik kerakki, kelajagimiz poydevori bilimdargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq.***

***Sh.M.Mirziyoev.***

Respublikamiz Prezidenti Sh.M. Mirziyoyevning davlat rahbari sifatidagi ta`lim – tarbiya, fan va ishlab chiqarish integrasiyasiga hamda pedagoglarga, olimlarga ko'rsatayotgan e`tiborlari, yaratib berayotgan imkoniyatlari, tayyorlanayotgan mutaxassislarning saviyasiga bo'lgan talablarni qondirilishida, bunga dahldor bo'lgan har bir kishi ma`suliyatini o'ta darajada oshiradi. Bu borada prezidentimizning 2016 yil 29-dekabrdagi farmonlari yoki 30-dekabr kungi O'zbekiston Fanlar Akademiyasining akademiklari va bir qator fan namoyondalari va oliy o'quv yurti rahbarlari bilan o'tkazgan uchrashuvlari ayniqsa, juda katta e`tiborga molik.

Vatanimizda siyosiy va davlat mustaqilligi kamol topishi bilan barcha sohalarda ijobiy o'zgarishlar yuz bermoqda. Vatanimizning nufuzi jahon miqyosida oshib bormoqda. Jamiyatimiz hayotining barcha sohalarida bilimli va saviyali yosh mutaxassislarga bo'lgan ehtiyoj ham oshib bormoqda. Istiqlolimiz yutuqlarini yanada rivojlantiruvchi, milliy qadriyatlarimizni asrab avaylaydigan yetuk mutaxassislarni tarbiyalab yetkazishga Prezidentimiz va Hukumatimiz tomonidan juda katta e`tibor berilmoqda.

"Ta`lim va kadrlar tayorlash butun tizimi darajasi xamda sifatini tubdan oshirish, maktablar,o'rta maxsus,kasb-hunar ta`limi va oliy o'quv muassalaridagi ta`lim standartlari va o'quv dasturlarini zamonaviy talablarni hisobga olgan holda tanqidiy tahlil qilish hamda yangilash p edagogik kadrlash tayorlash va qayta tayorlashni tashkil etishni takomillashtirish. Yosh avlodni hayotga qat`iy e`tiqod va qarashlar ruhida, mentalitetimizga yot bo'lgan zararli ta`sirlar va oqimlarga qarshi tura oladigan milliy hamda umuminsoniy qadriyatlarga xurmat ruxida tarbiyalash" shu kunning dolzarb vazifasidir.

Milliy mentalitetimizga ko'ra, o'zbek oilalari azaldan ko'pbolalik bo'lib, har bir ota-ona farzandlarini sog'lom, barkamol, kasb-hunarli va oliy ma'lumotli, bilimli bo'lib voyaga yetishlari uchun tinmay harakat qilishgan.

Jonajon O`zbekistonimiz mustaqillikka erishgan kunlardan boshlaboq butun ta'lim tizimini tubdan isloh qilish rejalari ishlab chiqildi va bosqichma-bosqich amalga oshirilmoqda. Ushbu ta'lim tizimida aniq fanlarni, xususan, matematika fanini rivojlantirish va uning olamshumul yutuqlarini hayotning turli jabhalariga tatbiq etib, davlatimizni dunyoning – rivojlangan davlatlari qatoridan munosib joy olishiga erishish yo`lida tinmay ish olib borilmoqda.

Endi, matematikaning o`tmishi, hozirgi kuni va kelajagi haqida biroz to`xtalib o`tamiz.

Matematika fani insoniyat hayotida eng asosiy ahamiyat kasb etuvchi fan ekanini butun dunyo tan olgandir. Uning har bir kishi uchun har soniyada zarur ekani ravshan, undan hamma u yoki bu darajada foydalanadi, lekin ushbu jarayonni o`zi anglab yetmaydi. Bunga misol qilib, vaqt o`lchovini, kundalik harajatlarni, o`qiladigan fanlar va darslar soni, mavzular, transport, yo`nalishlar nomeri va hokazolarni keltirish mumkin.

Matematikaning turli sohalarga: xalq xo`jaligiga, transportga, sanoatga, meditsinaga, biologiya, kimyo, fizika, genetika va boshqa o`nlab fanlarga tatbiqlari turmush darajasi va turli fanlarning shahdam qadamlar bilan olg`a ketishiga omil ekani ravshan.

Matematika, bir qarashda, matematikadan yiroq bo`lgan sohalarga, masalan adabiyotga, tilshunoslikka, sport sohasiga, psixologiyaga, tarixga va boshqa sohalarga kirib bormoqda. Matematikaning insoniyat tarixida va rivojlanish jarayonida nechog`lik ahamiyatga ega ekanini juda ko`p allomalar munosib baholaganlar. Masalan, ulug` shoh va shoir, astronom, matematik alloma - Mirzo Ulug`bek matematika haqida shunday yozgan: - "Matematika g`oyat bir yuksak fanki, unda bir olam mo`jiza yotadi”.

Haqiqatan ham, matematika ilmi - insoniyat uchun bebaho ekanligini tan olmaydigan aqlli odamni topish amri mahol, chunki har bir fanning rivojlanish darajasi - bu fan matematik bilimlardan qanchalik foydalana olishi bilan baholanadi.

Oliy ta'lim sohasida ham juda ko'plab yutuqlarga erishildi. Oliy maktab sohasida test usuli joriy etilishini viloyatlar markazlarida pedagogika institutlarining unverstitetlarga aylantirilishi va joylardagi o'quv yurtlariga yuqori ta'sis nizomi berilishi tashkil etilgan milliy tashkilot va xalqaro jamoalar hisobidan chet ellarga tajriba almashish va talabalarni o'qishga yuborish yo'lga qo'yilishi, iqtisod va biznes sohasidagi mutaxassis va o'qituvchilarni qayta tayyorlash bo'yicha aniq maqsadga yo'naltirilgan ishlar olib borilishi o'tish davrida 2 mingdan ortiq talaba va mutaxassisning chet ellarda o'qib kelishi 200 dan ortiq chet el mutaxassisining respublikamiz o'quv muassasalariga jalb qilinishi qayd etib o'tilgan. Davlat va jamiyat qurilishi akademiyasi, bank-moliya akademiyalarini tashkil qilganimiz hozirdanoq o'z samarasini berayotganini katta mamnuniyat bilan ta'kidlashimiz lozim. O'qituvchi bolalarimizga zamonaviy bilim bersin deb talab qilamiz. Zamonaviy bilim berish uchun avvalo murabiyning o'zi ana shunday bilimga ega bo'lishi lozim.

O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishganidan so'ng, turli sohalar kabi ta`lim sohasiga, malakali kadrlar tayyorlashga jiddiy e`tibor berilmoqda. Bu esa hukumatimiz tomonidan qabul qilinayotga qarorlar, farmonlar, qonunlar, dasturlar va amalga oshirilayotgan islohotlarda namoyon bo'lmoqda. Xususan, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida" 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-sonli farmoni asosida 2017–2021-yillarda O'zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo'nalishi bo'yicha harakatlar strategiyasi tasdiqlandi. Harakatlar strategiyasining maqsadi olib borilayotgan islohotlar samaradorligini tubdan oshirishdan, davlat va jamiyatning har tomonlama va jadal rivojlanishini ta`minlash uchun shart-sharoitlar yaratishdan, mamlakatni modernizasiyalash va hayotning barcha sohalarini erkinlashtirishdan iboratdir. Harakatlar strategiyasida O'zbekiston Respublikasini 2017–2021-yillarda rivojlantirishning beshta ustivor yo'nalishi belgilangan.

"Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorga ko'ra: 2017-2021 yillarda oliy ta'lim muassasalarining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash va modernizatsiyalash, ularni zamonaviy o'quv-ilmiy laboratoriyalar, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari vositalari bilan jihozlash kompleks chora-tadbirlari;

2017-2021 yillarda Oliy ta'lim tizimini kompleks rivojlantirish dasturini amalga oshirish moliyaviy xarajatlar hajmining hisoblangan parametrlari;

2017-2021 yillarda qurilish, rekonstruksiya qilish va kapital ta'mirlashning har yili tasdiqlanadigan manzilli dasturlariga kiritiladigan oliy ta'lim muassasalari ro'yxati;

2017-2021 yillarda o'quv va ilmiy laboratoriya uskunalari bilan jihozlashning har yili tasdiqlanadigan manzilli dasturlariga kiritiladigan oliy ta'lim muassasalari ro'yxati;

2017-2021 yillarda oliy ta'lim muassasalarini rivojlantirishning manzilli dasturlari tasdiqlandi.

Hozirgi zamon matematikasining barcha yutuqlari haqida batafsil so'zlash imkoni kichik bir ish ichida beimkon muammodir, chunki matematika fani shunchalik rivojlanib ketganki, uning yuzlab tarmoqlarida minglab ilmiy ishlar qilinmoqda, chop etilgan ishlarning bir necha foizigina o‘rganilib, kundalik hayot ehtiyojlariga tatbiq etiladi xolos.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi.** Gibbs o‘lchovlari nazariyasi statistik fizika va Evklid kvant nazariyasini o‘rganishning asosiy ob'yekti bo‘lishi bilan birga bu o‘lchov, o‘lchovlar nazariyasining nisbatan yangi sohasini tashkil qiladi.

Gibbsning limit o‘lchovlari umumiy harakteristikasi R.L.Dobrushin, O.Lenford va D.Ryuellarning ishlarida keltirilgan. Bu tushunchaning xususiy hollari avvalroq N.N.Bogolyubov va B.I.Xatsetlar tomonidan o‘rganilgan. Yuqoridagi ishlarning kengaytirilgan va zamonaviylashtirilgan ko‘rinishi N.N.Bogolyubov, D.Ya.Petrina va B.I.Xatsetlarning ilmiy maqolalarida tadqiq etilgan. Shuningdek, R.A.Minlos va D.Ryuellarning ilmiy ishlarini ham eslatib o‘tamiz. Shu mavzu bo‘yicha O‘zbek olimlaridan professorlar N.N.G‘aniho‘jayev, U.A.Rozikov, F.Muhammedovlar, fan nomzodlari N.N.Xatamov, E.Normatov va boshqalar ilmiy ish olib borishmoqda.

Gibbsning limit o‘lchovlarining nazariy – ehtimollik ko‘rinishlarini K.Prestonning kitobidan ko‘rish mumkin.

Gibbsning limit o‘lchovlari nuqtai nazaridan Gauss o‘lchovlarini Yu.A.Rozanov, F.Spitser, R.L.Dobrushinlarning ilmiy ishlarida muhokama qilingan.

Gibbs o‘lchovining mavjudligi haqidagi teorema va uning isboti R.L.Dobrushin tomonidan keltirilgan. Kvant maydonlari nazariyasining panjarasimon modellariga ta'luqli va bu teoremani qo‘llanishiga K.M.Xinin tomonidan misol ko‘rilgan. Uning ilmiy ishida bir nechta umumiy hollar o‘rganilgan.

$\varphi(x)$ chekkalanmagan to‘plamdan qiymatlar qabul qiluvchi modellar uchun Gibbsning limit o‘lchovlari mavjudligi haqidagi teoremalar J. Libovits va E. Prezuttilar ilmiy ishlarida ko‘rilgan.

Yang va Li ishlarida, ilk bor, termodinamik limitga o‘tishning statistik mexanikaning turli masalalariga va ayniqsa faza almashishlar nazariyasiga qo‘llashning ahamiyati ko‘rsatilgan.

Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib, xususan P.M.Blexer, N.G‘anixo‘jaev, S.Zahari, F.Spitser, Yu.Suxov, U.Roziqov va boshqalar tomonidan Keli daraxtida statistik mexanikaning modellari o‘rganilgan, davriy Gibbs o‘lchovlar to‘plami bayon etilgan. Bunday o‘lchovlar faqat yoki translyasion-invariant, yoki davri ikkiga teng bo‘lgan davriy o‘lchovlar bo‘lishi isbotlangan.

Shuning uchun davriylikni umumiyroq ta'rifini keltirish va yangi Gibbs o‘lchovlarini olish zarur bo‘ldi. U.A.Rozikov va M.M.Rahmatullayevlarning ilmiy ishlarida Izing modeli uchun kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlari va kuchsiz davriy asosiy holatlar tushunchasi kiritiladi va o‘rganiladi. Hard-Core modeli uchun bunday o‘lchovlar R.M.Xakimov tomonidan o‘rganilgan. Hard-Core modeli uchun hozirgacha faqat translatsion-invariant va davriy o‘lchovlargina o‘rganilgan. Ushbu BMI da Hard-Core modeli uchun translatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi o‘rganiladi.

Yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, Bitiruv Malakaviy Ishining mavzusi dolzarbdir.

Har bir Gibbs o‘lchoviga bitta fizik sistemaning fazasi mos qo‘yiladi. Agar bittadan ko‘p Gibbs o‘lchovi mavjud bo‘lsa u holda fazoviy o‘tish bor deb ataladi.

Asosiy fazoviy o‘tishlar nazariyasi S.A.Pirogov va Ya.G.Sinai ishlarida mujassamlashgan. Zamonaviy Gibbs o‘lchovlari nazariyasi va fazoviy o‘tishlar nazariyasi quyidagi kitoblarda yoritilgan «Baus M., Nejero C.F. Equilibrium

Statistical Physics. –Springer. 2008. 364p.», « Benik C. Ising type Antiferromagnetics. – Springer. 2003. 120p.», «Gallavotti G., Bonetto F., Gentile G. Aspects of Ergodic, Qualitative and Statistical Theory of Motion. – Springer. 2004. 435p.», «Jean Zinn-Justin. Phase Transitions and Renormalization Group. – OXFORD University press. 2007. 452p.», «Palmer J. Planar Ising Correlations. – Prog. Math. Phys. Birkhuser.2007.363p.», «Pierre Brymaud. Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. –Springer.1999, 445p.».

Ba'zi modellar (Pots, Izing, Hard-Core, SOS, $\lambda-$ model va h.z.) uchun translatsion-invariant va davriy Gibbs o‘lchovlari N.N.G‘anixo‘jaev, U.A.Roziqov, F.Muxammedov, Dj.Libovits, ye.Prezutti Yu.M.Suxov va boshqalar tomonidan, Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullaridan foydalanib o‘rganilgan. Shuningdek, ba'zi bir davriy bo‘lmagan Gibbs o‘lchovlari sinfi ham o‘rganilgan.

Keli daraxtida $p-$ adik Gibbs o‘lchovlari nazariyasi U.A.Rozikov va F.M.Muxammedovlar tomonidan rivojlantirilgan.

Asosan Izing, Hard-Core $\lambda-$ modellari va bu modellarning ba'zi bir umumlashmalari uchun fazoviy o‘tish mavjud emasligi ( $p-$adik Gibbs o‘lchovi yagonaligi) isbotlangan. Shuningdek, parametrlarning fazoviy o‘tish mavjud bo‘ladigan qiymatlari ko‘rsatilgan. Masalan, spin qiymatlari $\{1,2,...,q\}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan $p-$adik Hard-Core modeli uchun faqat va faqat $q$ son $p$ ga karrali bo‘lganda fazoviy o‘tish mavjud bo‘lishi isbotlangan.

U.A.Rozikov tomonidan Keli daraxtida sanoqli davriy Gibbs o‘lchovlari tushunchasi kiritilgan va bunday o‘lchovlar to‘plami bir jinsli bo‘lmagan Izing modeli uchun ko‘rsatilgan.

U.A.Rozikov va M.M.Rahmatullayevlar tomonidan ilk bor kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovi tushunchasi kiritildi, hamda Izing modeli uchun ma’lum shartlar asosida kuchsiz davriy Gibbs o‘lchovlari va kuchsiz davriy asosiy holatlar olindi.

Modellar gamil’tonianlariga bog‘liq masalalarga bag‘ishlangan ilmiy ishlar ko‘pligiga qaramasdan, haligacha yechilmagan (ochiq) masalalar qolmoqda. Masalan, Gibbs limit o‘lchovlari to‘plamini to‘la tasniflash masalasi hal bo‘lishiga (yakunlanishiga) hali ancha bor.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining maqsadi.** Ushbu Bitiruv Malakaviy ishda uch holatli Hard-Core modellari uchun translatsion-invariant Gibbs o’lchovlari to’plamining strukturasini o’rganishdan iborat.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining vazifalari.** Bitiruv Malakaviy ishida asosan quyidagi masalalar ko‘rilgan:

- Keli daraxti uchlari to‘plami $V$ va $G_k$ gruppalar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjudligi o’rganish.
- Hard-Core modeli uchun translatsion-invariant Gibbs o‘lchovlari mavjudligi masalasi o’rganish.
- Ikkinchi, uchinchi tartibli Keli daraxti utida Hard-Core modeli uchun davriy Gibbs o’lchovlarining mavjudligi o’rganish.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining obyekti va predmeti.** Hard-Core modeli uchun translatsion invariant Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi masalasi.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining usullari.** Bitiruv Malakaviy ishida Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari, o‘lchovlar nazariyasi va qisqartirib akslantirish usullaridan foydalanilgan.

**Natijalar realizatsiyasi.** Bitiruv Malakaviy ishi nazariy harakterga ega. Bitiruv Malakaviy ishi usullari va natijalari kelgusida Keli daraxtida boshqa modellarning Gibbs o‘lchovlarini aniqlashda va maxsus kurslar o‘qishda qo‘llanishi mumkin.

**Bitiruv Malakaviy ishi mavzusining tuzilishi va tarkibi:** Bitiruv malakaviy ishi: kirish, asosiy qism, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yhatidan iborat.

## 1. Keli daraxtining gruppali tasviri va Kolmogorov teoremasi

**Keli daraxti.** $k \geq 1$ tartibli $T^k$ Keli daraxti bu cheksiz daraxtdir, ya'ni har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi tsiklik garfdir.

$T^k = (V, L, i)$ ni qaraylik, bunda $V$ to'plam $\tau^k$ daraxtning uchlar to'plami, $L-$ uning qirralari to'plami va $i-$ har bir $l \in L$ qirraga uning $x, y \in V$ chetki nuqtasini mos qo'yuvchi insidentlik funksiyasidir. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda $x$ va $y$ uchlar eng yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y \rangle$ kabi belgilanadi. Keli daraxtida $x, y \in V$ uchlar orasidagi $d(x, y)$ masofa ushbu formula orqali aniqlanadi

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V,\ \langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\},$$

bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ yaqin qo‘shnilar.

Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},$$

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

$x \in W_n$ uchun $S(x) = \{y \in W_{n+1} :\ d(x, y) = 1\}$ to'plam $x$ ning to'g'ri avlodlari to'plami deyiladi.

Yuqoridagi minimumni aniqlovchi $\pi = \{x = x_0, x_1 \ldots \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$

ketma-ketlik $x$ dan $y$ ga yo‘l deyiladi .

**Keli daraxtining gruppali tasvirlanishi.** Bizga N.N.G‘anixo'jaev va Blexerlarning birgalikdagi ishlaridan va U.A.Roziqov ilmiy maqolalaridan ma'lumki, Keli daraxtini, tashkil etuvchilari $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ bo‘lgan ikkinchi tartibli

$(k+1)$ ta siklik gruppalarni erkin ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan $G_k$ gruppa orqali tasvirlash mumkin. Buning uchun asosiy tushuncha va tasdiqlarni beramiz.

**Ta’rif 1.1.** $G$ gruppa $A_\alpha$ qism gruppalarni erkin ko‘paytmasi deyiladi , agar $A_\alpha$ qism gruppa birgalikda butun $G$ gruppani hosil qilsa , ya’ni $G$ ning har bir $g$ elementi $A_\alpha$ dan olingan chekli elementlar ko‘paytmasidan iborat bo‘lsa :

$$g = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in A_\alpha, \ \overline{i=1,n} \qquad (1.1)$$

va agar $G$ ning har bir elementi quyidagi shartlar ostida yagona (1.1) ko‘rinishda bo‘lsa

1) barcha $a_i$ elementlar birdan farqli

2) (1.1) da $A_\alpha$ qism gruppadan ikkita element yonma-yon turmaydi, umuman olganda (1.1) ko‘paytmada bitta qism gruppaga kirgan bir necha ko‘paytuvchini o‘z ichiga olgan bo‘lsa ham.

Faraz qilaylik, $G_K$ – barpo etuvchilari $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ bo‘lgan, ( $\kappa+1$ ) ta ikkinchi tartibli siklik gruppalarni erkin ko‘paytmasi bo‘lsin.

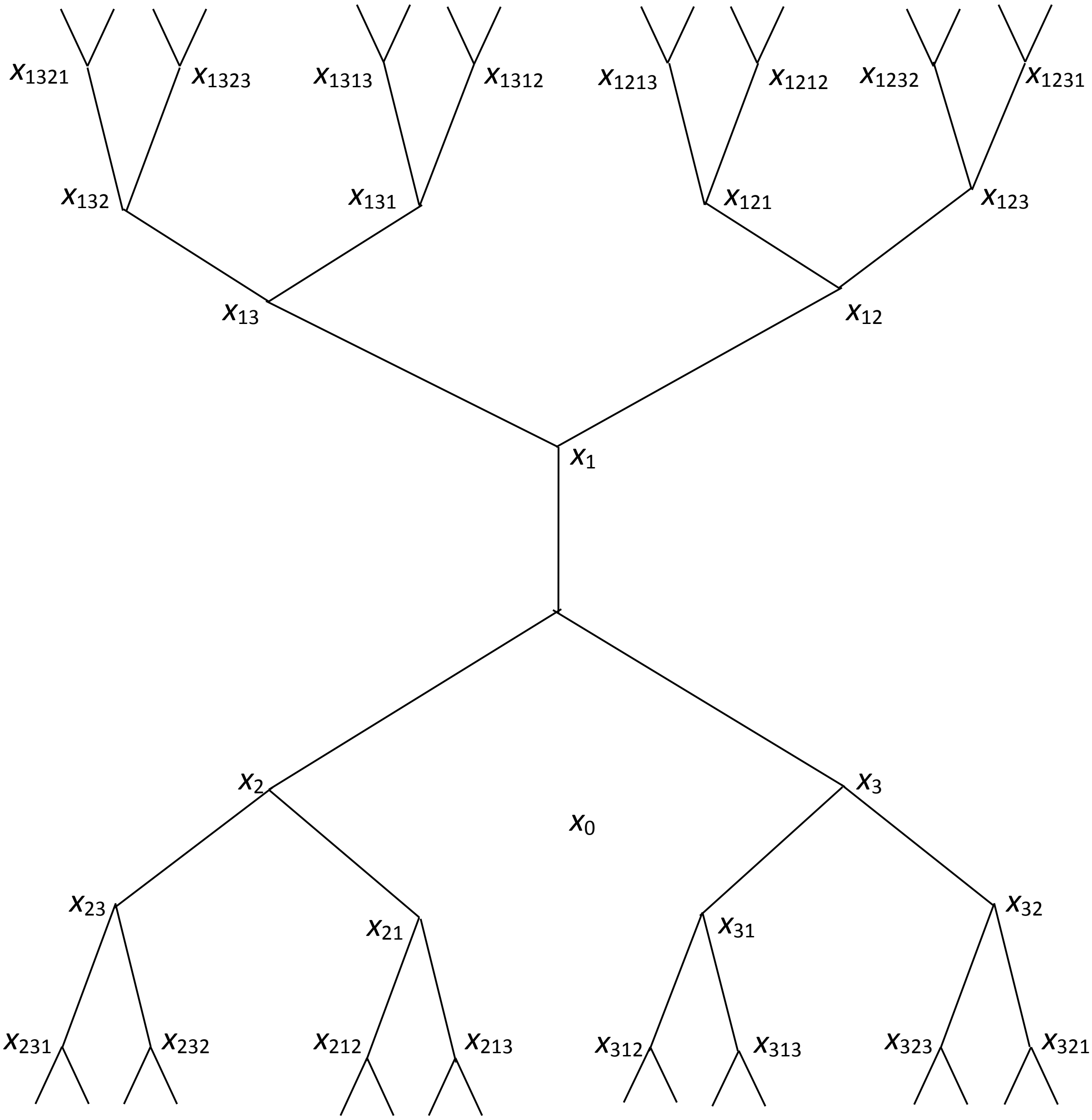
**Tasdiq 1.1.** Keli daraxtining $V$ uchlar to‘plami bilan $G_\kappa$ gruppa orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud.

**Isboti:** Bu moslik quyidagicha quriladi. Fiksrlangan ihtiyoriy $x_0 \in V$ uchga $G_\kappa$ gruppaning $e$ birlik elementini mos qo‘yamiz. Umumiylikka zid bo‘lmagan holda ko‘rilayotgan grafni tekislikda deb qarashimiz mumkin. Keyin $x_0$ uchga qo‘shni bo‘lgan uchlarni soat strelkasi yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalish bilan $x_i \in V$ lar bilan nomerlab chiqamiz.

Har bir $x_i \in V$ uch uchun gruppaning $a_i, \, i=1, \, k+1$ tashkil etuvchilarini mos qo‘yamiz. Endi har bir $x_i \in V$ uchlar uchun ikkilik $x_{ij}$ nomerlashni aniqlaymiz, bular $x_i$ —ni qo‘shnilari bo‘ladi. $x_i$ —ni bitta qo‘shnilaridan biri $x_0$ bo‘lib, unga $x_{ii} = x_0$ mos qo‘yamiz va u holda qolgan $x_i \in V$ qo‘shnilarni nomerlash yuqoridagi nomerlash qoidasi bo‘yicha bo‘ladi. Har bir $x_{ij}$ uch uchun $a_i\ a_{j,}$ $i, j = \overline{1,\ k+1}$ so‘zni mos qo‘yamiz, $x_{ii} = x_0$ va $a_i^2 = e$ bo‘lgani uchun, u holda bu akslantirish keyingi qadamlarda ham saqlanadi.

$x_{i,j}$ uchlarning qo‘shnilari uchun uchtali nomerlashni quyidagicha kiritamiz. $x_{i,j}$ -ni bitta qo‘shnisi $x_i$ bo‘lgani uchun ,unga $x_{ijj} = x_i$ mos qo‘yamiz va u holda

qolgan qo‘shnilarni nomerlash yuqoridagi kabi bir qiymatli aniqlanadi. Har bir $x_{ij\kappa}$ uch uchun $a_j a_j a_k$ so‘zni mos qo‘yamiz. Bu akslantirish oldingi qadam bilan mos keladi, chunki $x_{ijj} = x_i$ va $a_j a_j a_j = a_j a_j^2 = a_i$ . Shunday qilib, $T^k$ -Keli daraxtida uchlar to‘plami $V$ bilan $G_k$ gruppa orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin. Tasdiq isbot bo‘ldi. Uni quyidagi rasmdan ham ko‘rish mumkin.




**Rasm 1.1**

Yuqoridagi ko‘rinishni o‘ng ko‘rinish deyiladi, chunki bu holda $x$ va $y$ - yon qo‘shnilar va ularga mos keluvchi $g$ va $l$ $G_k$ - gruppa elementlari yoki $g = ha_i$ yoki $h = ga_j$ ba’zi bir $i, j$ uchun bo‘lishi mumkin. Chap ko‘rinishi ham xuddi yuqoridagiday aniqlanadi.

Faraz qilaylik, $G_k$ - $T^k$ , $k \geq 1$ Keli daraxtining o‘ng ko‘rinishi bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in G_k$ element quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} ... a_{i_n},$$

bu yerda $1 \le i_m \le k+1, \quad m = \overline{1,n}$. $n$-soni $x$ so‘zining uzunligi deyiladi va $l(x)$ ko‘rinishda belgilanadi.

$x$ so‘zning qisqarmaydigan yozilishda $a_i,\ i = 1,2,...,k+1$ harflar sonini $w_x(a_i)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $x = a_3 a_5 a_4 a_5 a_2$, u holda

$$w_x(a_2) = w_x(a_3) = w_x(a_4) = 1, \qquad w_x(a_5) = 2$$

Ravshanki, $x$ so‘zning uzunligi $l(x) = \sum_{i=1}^{k+1} w_x(a_i)$ bo‘ladi, yuqoridagi misolda

$$l(x) = l(a_3 a_5 a_4 a_5 a_2) = 1+1+1+2 = 5.$$

N.N.G‘anixo’jayev va U.A.Roziqov ishlarida quyidagicha ta’riflar va teorema bor.

**Ta’rif 1.2.** Faraz qilaylik, $M_1, M_2, ..., M_m$ biror bir to‘plamlar va

$$M_i \ne M_j, \ \ i \ne j \quad (i, j = \overline{1,m})$$

bo‘lsin. $\bigcap_{i=1}^{m} M_i$ kesishma qisqaruvchi deyiladi, agar shunday $i_0 (1 \le i_0 \le m)$ mavjud bo‘lib, $\bigcap_{i=1}^{m} M_i = (\bigcap_{i=1}^{i_0-1} M_i) \bigcap (\bigcap_{i=i_0+1}^{m} M_i)$ o‘rinli bo‘lsa.

$N_k = \{1,2, ..., k+1\}$ belgilash kiritaylik.

**Teorema 1.1.** Ixtiyoriy $\varnothing = A \subset N_k = \{1,2,...,k+1\}$ uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $H_A \subset G_k$ qism gruppa mavjud:

a) $H_A -$ indeks 2 ga teng normal bo‘luvchi;

b) $H_A \neq H_B$ ixtiyoriy $A \neq B \subset N_k$ uchun;

s) $|H_A \cap H_B| = \infty$ va $H_A \bigcap H_B \subset H_{A\Delta B}, A, B \subset N_k$

d) Agar $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq N_k$ $va$ $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ bo‘lsin, ixtiyoriy $i \neq j, i, j = \overline{1, m},$ u holda

$$\bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i} \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_{A_i};$$

e) Faraz qilaylik, $A_1, A_2, ..., A_m \subset N_k$, agar $\bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$ -qisqarmaydigan bo‘lsa, u holda u indeksi $2^m$-ga teng normal bo‘luvchi bo‘ladi;

f) Har bir $m = \overline{1, 2k}$ uchun qisqarmaydigan

$$H_m = \bigcap_{i=1}^{m} H_{A_i}$$

kesishma qurish mumkin.

**Konfiguratsiyalar fazosi.** $A \subseteq V$ to’plamda aniqlangan $\sigma_A$ : $x \in A \rightarrow \sigma_A(x) \in \Phi = \{0,1,...,q\}$ funksiya konfiguratsiya deyiladi. $A$ to’plam aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to’plami $\Omega_A = \Phi^A$ kabi belgilanadi. Xususan, $\Omega = \Omega_V$ va $\sigma = \sigma_V$.

$G_k$ gruppaning $G_k^*$ qism gruppasini qaraylik. Agar ihtiyoriy $x \in G_k$ va $y \in G_k^*$ uchun $\sigma(yx) = \sigma(x)$ bo’lsa, u holda $\sigma \in \Omega$ konfiguratsiya $G_k^* -$ davriy deyiladi.

Barcha siljishlarga nisbatan invariant bo’lgan konfiguratsiya translatsion-invariant deyiladi.

**Gamil’tonian.** $\sigma \in \Omega$ konfiguratsiyaning energiyasi ushbu

$$H(\sigma)=\sum_{\substack{A\subset V:\\ diam(A)\le r}} I(\sigma_A)$$

gamil'tonian orqali belgilanadi, bunda $r\in N,\ diam(A)=\max_{x,y\in A} d(x,y)$ va $I(\sigma_A):\Omega_A\to R-$berilgan potensial.

$D^c=V\setminus D$ да $\varphi_{D^c}$ chekkaviy shart berigan chekli $D\subset V$ soha uchun shartli gamil'tonian quyidagi

$$H(\sigma_D\mid\varphi_{D^c})=\sum_{\substack{A\subset V:A\cap D\ne\varnothing\\ diam(A)\le r}} I(\sigma_A)$$

Ko`rinishga ega, bunda

$$\sigma_A(x)=\begin{cases}\sigma(x), & \text{agar } x\in A\cap D\\ \varphi(x), & \text{agar } x\in A\cap D^c\end{cases}.$$

**Gibbs o'lchovi. B** – $\Omega$ to`plamning silindrik qism to`plamlaridan taskil topgan $\sigma$-algebra bo`lsin.

Ushbu $$\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x)=\begin{cases}\sigma(x), & agar\ x\in A,\\ \tilde{\sigma}(x), & agar\ x\in V\setminus A.\end{cases}$$

konfiguratsiyani qaraylik.

**Ta'rif 1.3.** Agar ihtiyoriy chekli $A\subset V$ uchun ushbu

$$\mu(\sigma_A\mid\tilde{\sigma}_{V\setminus A})=\frac{e^{-\beta H(\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\mu$ ehtimollik o'lchovi **B** $\sigma-$algebrada limit Gibbs o'lchovi deyiladi, bunda $H(\sigma)$ (1) formula orqali aniqlangan, $\beta=\frac{1}{T},\ T>0-$ harorat va

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi\in\Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

**O'lchovni davom ettirish haqida Kolmogorov teoremasi.** Ushbu bitiruv malakaviy ishida Kolmogorov teoremasi muhim ahamiyatga ega. Bizga bu teoremani turli ko'rinishlari ma'lum. Bizning ishimizda biz limit Gibbs o'lchovlarini o'rganishda ishlatiladigan variantidan foydalanamiz.

$G=(V,L)$ biror sanoqli graf bo'lsin. $G$ grafda berilgan $\Omega$ konfihuratsiyalar to'plamida hodisalar majmuasini aniqlaymiz. $\Lambda\subset V$ bo'lsin. $\omega_\Lambda$ bu $\Lambda$ to'plamda $\omega\in\Omega$ konfiguratsiyaning izi bo'lsin. $\omega_\Lambda$ ni $\Pi_\Lambda(\omega)=\omega_\Lambda$ ko'rinishda aniqlangan $\Pi_\Lambda:\Omega\to\Omega_\Lambda$ dan foydalanib hosil qilish mumkin.

$\mathrm{P}(\Omega_\Lambda)-\Omega_\Lambda$ ning barcha qism to'plamlari to'plami bo'lsin. U holda har qanday $A\in\mathrm{P}(\Omega_\Lambda)$ uchun

$$\Pi_\Lambda^{-1}(A)=\{\sigma\in\Omega:\ \Pi_\Lambda(\sigma)\in A\}$$

to'plam $\Lambda$ asosli silindr deyiladi. $\mathbf{B}-$ $\Omega$ to'plamning silindrik qism to'plamlaridan tashkil topgan $\sigma$ -algebra bo'lsin. $\mathrm{M}_1(\Omega)$ orqali $(\Omega,\mathbf{B})$ da aniqlangan barcha ehtimollik o'lchovlarining to'plamini belgilaymiz.

$\mu\in\mathrm{M}_1(\Omega)$ va chekli $\Lambda\subset V$ to'plam uchun $\Lambda$ dagi $\mu$ o'lchovning marginal taqsimoti – bu $\mu|_\Lambda=\mu\circ\Pi_\Lambda^{-1}$ kabi aniqlangan $\mu|_\Lambda\in\mathrm{M}_1(\Omega_\Lambda)$ ehtimollik o'lchovidir.

Boshqacha qilib aytganda, $\mu|_\Lambda$ ixtiyoriy $A\in\mathrm{P}(\Omega_\Lambda)$ uchun

$$\mu|_\Lambda(A)=\mu(\{\omega\in\Omega:\omega_\Lambda\in A\})$$

shart bajariladigan $\mathrm{M}_1(\Omega_\Lambda)$ dagi yagona taqsimotdir. Shuni ta'kidlash joizki, $\mu|_\Lambda$ ushbu

$$\mu|_\Delta = \mu|_\Lambda \circ (\Pi_\Delta^\Lambda)^{-1}, \quad \forall \Delta \subset \Lambda \subset V$$

shartni qanoatlantiradi, bunda $\Pi_\Delta^\Lambda : \Omega_\Lambda \to \Omega_\Delta$ akslantirish

$$\Pi_\Delta^\Lambda = \Pi_\Delta \circ \Pi_\Lambda^{-1}$$

ko'rinishda aniqlangan kanonik proyeksiya.

Quyidagi teorema $\mu \in \mathrm{M}_1(\Omega)$ o'lchov o'zining $\mu|_\Lambda, \Lambda \subset V$ marginallari yordamida to'liq ifodalanishini ko'rsatadi.

**Teorema 1.2 (Kolmogorov).** [12] $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \subset V}$, $\mu_\Lambda \in \mathrm{M}_1(\Omega_\Lambda)$ shunday ketma-ketlikki, ixtiyoriy chekli $\Lambda \subset V$ uchun quydagi muvofiqlik sharti bajarilsin:

$$\mu_\Delta = \mu_\Lambda \circ (\Pi_\Delta^\Lambda)^{-1}, \quad \forall \Delta \subset \Lambda .$$

U holda barcha $\Lambda \subset V$ uchun $\mu|_\Lambda = \mu_\Lambda$ shartni qanoatlantiriuvchi yagona $\mu \in \mathrm{M}_1(\Omega)$ o'lchov mavjud.

## 2. Uch holatli unumdor Hard-Core modellari

Ushbu rejada unumdor graf tushunchasi,zarur bo’lgan ta’riflar va shu model uchun ma’lum bo’lgan natijalar keltirilgan.

**HC-model.** Bir jinsli keli daraxtida uch holatli yaqin qo’shnilarning HC-modelini ko’rib chiqamiz.Qaralayotgan modelda har bir $x$ uchga $\sigma(x) \in \{0,1,2\}$ qiymatlardan biri mos qo’yiladi. $\sigma(x) = 1,2$ ekanligi $x$ uchning “band”ligini , $\sigma(x) = 0$ esa uning “vakant” ekanligini ifodalaydi.

**Konfiguratsiya.** Keli daraxtida konfiguratsiya $V \to \Phi = \{0,1,2\}$ kabi aniqlangan. $V$ da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to’plami $\Omega$ orqali belgilanadi.Xuddi shunga o’xshash, $V_n(W_n)$ da konfiguratsiyalar aniqlanadi va $V_n(W_n)$ da aniqlangan barcha konfiguratsiyalar to’plami $\Omega_{V_n}(\Omega_{W_n})$ kabi belgilanadi.

$\Phi$ to’plamni biror $G$ grafning uchlari to’plami sifatida qaraymiz. $G$ graf yordamida biz $G$-joiz konfiguratsiyani quyidagi tarzda aniqlaymiz: Agar $V(V_n)$dagi ixtiyoriy $x, y$ yaqin qo’shnilar uchun $\{\sigma(x), \sigma(y)\} - G$ grafning qirrasi bo’lsa ,u holda $\sigma$ konfiguratsiya keli daraxtida ($V_n$ yoki $W_n$) $G$-joiz konfiguratsiya deyiladi. $G$-joiz konfiguratsiyalar to’plamini $\Omega^G$ $(\Omega^G_{V_n})$ orqali belgilaymiz.

**Eslatma 2.1.**Qaralayotgan model uchun konfiguratsiyada joizlik shartini quyidagicha tushunish mumkin: Agar $x$ va $y$ ni xizmat ko’rsatish ob’ektlari deb olsak, bunda uchdagi spin qiymat 0 bo’lsa , xizmat ko’rsatish yo’qligini; $x$ va $y$ uchlardagi 1 yoki 2 spin qiymatlar esa berilgan ob’ektlardagi xizmar ko’rsatish sifatini ifodalaydi.

$G$ graf uchun aktivlik to’plami $\lambda : G \to R_+$ funksiyadir. $\lambda$ funksiyaning $i \in \{0,1,2\}$ uchlardagi $\lambda_i$ qiymatlari uchning “aktivligi” deyiladi.([9]ga qarang).

Berilgan $G$ va $\lambda$lar uchun $G$- HC modelning gamil’toniani ushbu

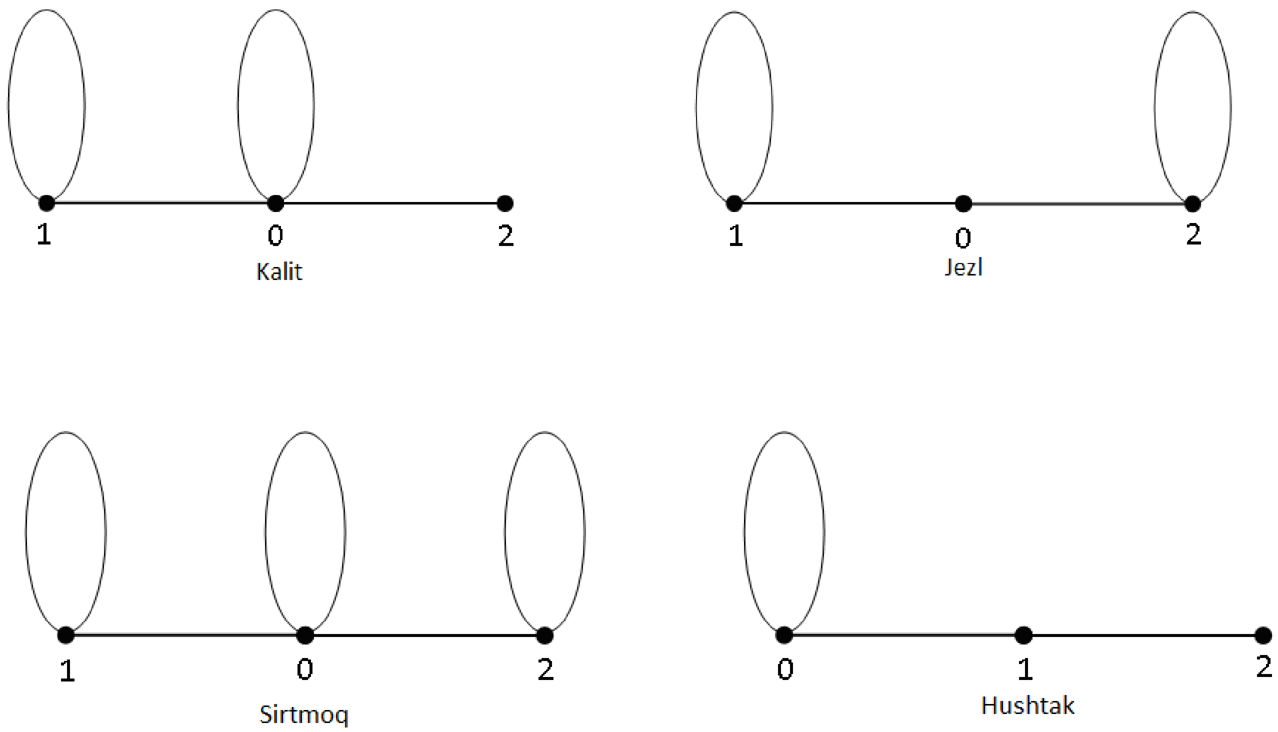
$$H_{G}^{\lambda}(\sigma)=\begin{cases}\sum_{x\in V}\ln\lambda_{\sigma(x)}, & \text{agar } \sigma\in\Omega^{G},\\ +\infty, & \text{agar } \sigma\notin\Omega^{G}.\end{cases}$$

orqali aniqlanadi.

**Ta’rif 2.1.** [3] Agar shunday $\lambda$ aktivlik mavjud bo’lsaki , mos gamil’tanian kamida 2 ta TIGO’ ga ega bo’lsa u holda $G$ unumdor graf deyiladi.

[3] ishdan ma’lumki uchlari 0,1,2 ($\sigma(x)$ ning qiymatlari to’plamida) bo’lgan faqatgina 4 ta unumdor graf mavjud bo’lib , ular quyidagi ko’rinishga ega(2.1rasm)

| | |
|---|---|
| Sirtmoq: | {0,0}{0,1}{0,2}{1,1}{2,2}; |
| Jezl: | {0,1}{0,2}{1,1}{2,2}; |
| Kalit: | {0,0}{0,1}{0,2}{1,1}; |
| Hushtak: | {0,0}{0,1}{1,2}. |




Rasm 2.1. Unumdor graflar.

Agar yo'l $x^0$ dan $y$ ga $x$ orqali o'tsa u xolda $x<y$ kabi yoziladi.Agar $y>x$ bo'lsa $y$ uch $x$ ning to'g'ri avlodi deyiladi hamda $x$ va $y$ qo'shnilar bo'lishadi. $S(x)$ orqali $x$ ning to'g'ri avlodlari to'plamini belgilaymiz.Qayd etish kerakki, $\tau^k$ da ixtiyoriy $x\neq x^0$ uch $k$ ta to'g'ri avlodga ega bo'ladi, $x^0$ uch esa $k+1$ ta avlodga ega bo'ladi.

$\sigma_n\in\Omega_{V_n}^G$ uchun

$$\sigma_n=\sum_{x\in V_n}1(\sigma_n(x)\geq 1)$$

$\sigma_n$ dagi band uchlar soni deb olamiz.

$z:x\mapsto z_x=(z_{0,x},z_{1,x},z_{2,x})\in R_+^3$ $V$ dagi vektor qiymatli funksiya bo'lsin.

$n=1,2,\ldots$ va $\lambda>0$ uchun $\Omega_{V_n}^G$ dagi $\mu^{(n)}$ ehtimollik o'lchovini qaraylik, bu yerda $\mu^{(n)}$ quyidagicha aniqlanadi.

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\lambda^{\sigma_n}\prod_{x\in W_n}z_{\sigma(x),x}. \qquad (2.1)$$

Bu yerda $Z_n$ –normallovchi bo'luvchi:

$$Z_n=\sum_{\sigma_n\in\Omega_{V_n}^G}\lambda^{\sigma_n}\prod_{x\in W_n}z_{\sigma(x),x}.$$

Agar ixtiyoriy $n\geq 1$ va $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}^G$ uchun

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n}^G)=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \qquad (2.2)$$

o'rinli bo'lsa $\mu^{(n)}$ ehtimolliklar o'lchovlari ketma-ketlikigi muvofiq deyiladi.

Bu holda $(\Omega^G, \mathbf{B})$ da yagona $\mu$ o'lchov mavjud bo'lib , barcha $n$ va $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ lar uchun

$$\mu(\{\sigma \in \Omega^G : \sigma\big|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

bo'ladi. Bu yerda $\mathbf{B} - \Omega^G$ ning slindrik qism to'plamlaridan hosil qilingan $\sigma-$ algebra.

**Ta'rif 2.2.** (2.1) formula va (2.2) shart yordamida aniqlangan $\mu$ o'lchov $\lambda > 0$ da $z : x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$ funksiyaga mos HC-Gibbs o'lchov deyiladi.

$G$ grafning qirralar to'plami $L(G)$ bo'lsin. $G$ grafning yaqinlik matrissasini $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & agar \ \{i,j\} \in L(G) \\ 0, & agar \ \{i,j\} \notin L(G) \end{cases}$$

bo'lsin.

Quyidagi teoremada $\mu^{(n)}$ o'lchovlar muvofiqligini kafolotlovchi $z_x$ funksiyaga qo'yiladigan shartlar shakllantirilgan:

**Teorema 2.1.** [6].(2.1) formula bilan berilgan Ehtimolliklar o'lchovlari $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, muvofiq bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in V$ da

$$z'_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11} z'_{1,y} + a_{12} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

$$z'_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21} z'_{1,y} + a_{22} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli,bu yerda $z'_{i,x}=\frac{\lambda z_{i,x}}{z_{0,x}},\ i=1,2$.

$k=2$ bo'lgan quyidagi teorema ma'lum.

**Teorema 2.2.** [3]. $k=2$ va $\lambda_{cr}=\frac{9}{4}$ bo'lsin. U holda $G=sirtmoq$ bo'lgan holda HC- modeli uchun $\lambda\leq\lambda_{cr}$ bo'lganda yagona $\mu_0$ TIGO' mavjud bo'ladi, $\lambda>\lambda_{cr}$ bo'lganda esa rosa 3 ta $\mu_i,\ i=0,1,2$ TIGO' mavjud bo'ladi.

**Eslatma 2.2.** [6] ishda $G=jerl$ bo'lgan hol uchun teorema 1.2 ga aynan o'xshash teorema isbotlangan , bunda $\lambda_{cr}=1$ .

## 3. $k=3$-tartibli Keli daraxtida translatsion-invariant Gibbs o'lchovlari

Ushbu rejada $G = sirtmoq$ va $G = jerl$ bo'lgan hollarda $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo'lganda uchinchi tartibli Keli daraxtiga 3 ta $k \ge 2$ tartibli Keli daraxtida esa kamida 3 ta TIGO' mavjud bo'ladigan $\lambda_{cr}$ ning aniq qiymatlari topilgan.

$z_{0,x} \equiv 1$ va $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0,\ i=1,2$ deb ataylik. U holda teorema 1.1 ga ko'ra har bir $x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ ixtiyoriy funksiyalar uchun Gibbsning HC-o'lchoviga quyidagi funksional tenglamalar sistemasining bitta yechimi mos keladi .

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}},\ i=1,2 \tag{2.3}$$

$z_x = z \in R_+^2$ $x \ne x_0$ bo'lgan translatsion invariant yechimlarni qaraymiz .

$G = sirtmoq$ bo'lgan holda $z_x = z$, deb olib (3.3) da quyidagi sistemaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left( \dfrac{1+z_1}{1+z_1+z_2} \right)^k, \\ z_2 = \lambda \left( \dfrac{1+z_2}{1+z_1+z_2} \right)^k. \end{cases} \tag{2.4}$$

(2. 4) sistemaning 1- tenglamasidan 2- tenglamasini ayrib tashlab $z_1 = z_2$ yoki $z_1 \ne z_2$ hol uchun $(1+z_1+z_2)^k = \lambda[(1+z_1)^{k-1} + \dots + (1+z_2)^{k-1}],$ yechimlarga ega bo'lamiz .

(2.4) sistemada $z_1 = z_2 = z$ bo'lganda (2.5) ga ega bo'lamiz :

$$\lambda^{-1} z = f(z) = \left( \frac{1+z}{1+2z} \right)^k$$

$f(z)$ funksiya $z>0$ da kamayuvchi . Demak (2.5) tenglama ixtiyoriy $\lambda>0.$ uchun yagona $z^*=z^*(k,\lambda)$ yechimga ega .

Quyidagi teorema o'rinli.

**Teorema 3.1** $k=3$ va $\lambda_{cr}=\dfrac{32}{27}$ bo'lsin . U holda HC – modeli uchun $G=sirtmoq$ bo'lgan holda , $\lambda>\lambda_{cr}$ da rosa uchta $\lambda\le\lambda_{cr}$ bo'lganda esa yagona TIGO' mavjud .

Isbot: $k=3$ bo'lgan holda agar $\sqrt[3]{z_1}=x>0,\ \sqrt[3]{z_2}=y>0$ deb olinsa , u holda (2.4) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{\lambda}\,\dfrac{1+x^3}{1+x^3+y^3}, \\ y=\sqrt[3]{\lambda}\,\dfrac{1+y^3}{1+x^3+y^3}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Ushbu tenglamalar sistemasida birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga bo'lib yuborib $x=y$ yoki $x\neq y$ hol uchun

$$x+y=\frac{1}{xy} \tag{2.7}$$

natijalarga ega bo'lamiz. (2.7) tenglamadan $x\neq y$ bo'lgan hol uchun $y$ ni topamiz

$$y=\frac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{2x}. \tag{2.8}$$

So'ngra (2.7) ga ko'ra $y^2=1/x-xy$ almashtirish bilan (2.6) sistemaning birinchi tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$x=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y^3}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y\cdot y^2}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{1+x^3+y\cdot\left(\dfrac{1}{x}-xy\right)}=$$

$$= \sqrt[3]{\lambda}\frac{1+x^3}{1+x^3+\frac{y}{x}-xy^2} = \sqrt[3]{\lambda}\frac{1+x^3}{1+x^3+\frac{y}{x}-x(\frac{1}{x}-xy)} = \sqrt[3]{\lambda}\frac{(1+x^3)x}{x^4+y(1+x^3)}$$

Ya'ni :

$$x = \sqrt[3]{\lambda}\frac{(1+x^3)x}{x^4+y(1+x^3)}.$$

(2.8) tenglikdan foydalanib , quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz

$$x^4+y(1+x^3) = \sqrt[3]{\lambda}(1+x^3) \Rightarrow y = \sqrt[3]{\lambda}\frac{(1+x^3)-x^4}{1+x^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{2x} = \sqrt[3]{\lambda}\frac{(1+x^3)-x^4}{1+x^3}.$$

Ushbu tenglama esa

$$4x(\sqrt[3]{\lambda}x^8-\sqrt[3]{\lambda}x^7+2x^6-2\sqrt[3]{\lambda}x^4+2x^3-\sqrt[3]{\lambda}x^2-\sqrt[3]{\lambda}x+1)=0$$

tenglamaga ekvivalent.

Mazkur tenglama $x = x(\lambda)$ yechimga ega. Ammo biz bu tenglamani $\lambda$ o'zgaruvchiga bog'liq o'rganmoqdamiz va $\lambda = \lambda(x)$ yechimga ega bo'lamiz . Buning uchun $\sqrt[3]{\lambda} = t$ belgilash kiritib

$$x(x^3+1)^2t^2 - x^2(x^6-1)t - (2x^6+2x^3+1) = 0 \qquad (2.9)$$

tenglamani qaraymiz . Bu yerdan

$$t_{1,2} = \frac{x^2(x^3-1) \pm (x^3+1)\sqrt{x^4+4x}}{2x(x^3+1)}.$$

Natijada $t_2 < 0,$ bo'lganda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$t - t_1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{x^2(x^3-1)+(x^3+1)\sqrt{x^4+4x}}{2x(x^3+1)} = \varphi(x).$$

$\varphi(x)$ funksiyani tahlil qilib , shuni takidlash mumkinki $\varphi(x) > 0$ va $\varphi'(x) = 0$ da yagona yechimga ega .

Bundan tashqari $x \to 0$ va $x \to +\infty$ da $\varphi(x) \to +\infty$ shuning uchun $t$ ning har bir qiymatiga $t > \varphi(x^*)$ bo'lganda $x$ ning kamida 2ta qiymati, $t = \varphi(x^*)$ da bitta qiymati mos keladi va $t = \varphi(x)$ tenglama $t < \varphi(x^*)$ da yechimga ega bo'lmaydi . Bu yerda $x^*$ $\varphi'(x) = 0$ tenglamaning yechimi . MathCAD (yoki Maple) dasturlari yordamida yagona hamda $x^* = \sqrt[3]{4}/2$ ga teng bo'lgan $\varphi'(x) = 0$ tenglamaning musbat yechimini topamiz.

O'rniga qo'yamiz :

$$\lambda_{cr} = t^3 = \varphi^3(x^*) = \frac{32}{27}.$$

Qayt etish kerakki, agar $\varphi''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $\lambda$ ning har bir qiymatiga $\lambda > \lambda_{cr}$ da $x$ ning faqatgina 2 ta qiymati mos keladi. Shuning uchun $\varphi(x) > 0$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham,

$$\varphi''(x) = \frac{12x^4(2-x^3)(x+4)\sqrt{x^2+4x}+(x^4+4x+12)(x^3+1)^3}{2x^2(x+4)(x^3+1)^3\sqrt{x^2+4x}}.$$

Quyidagi funksiyani qaraylik:

$$\psi(x) = 12x^4(2-x^3)(x+4)\sqrt{x^2+4x}+(x^4+4x+12)(x^3+1)^3.$$

Ma'lumki, agar $x^3 < 2$ bo'lsa u holda $\varphi''(x) > 0$ bo'ladi. U holda $\varphi(x) > 0$ ekanligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\alpha(x) = x^{26} + 14x^{23} + 24x^{22} + 79x^{20} + 240x^{19} - 1492x^{17} - 5976x^{16} - 7776x^{15} +$$

$$+7327x^{14}+29568x^{13}+38448x^{12}-6466x^{11}-25368x^{10}-33984x^{9}+289x^{8}+1584x^{7}+$$

$$+2160x^{6}+104x^{5}+600x^{4}+864x^{3}+16x^{2}+96x+144>0.$$

Bunda $\alpha(1)=496>0.$ Maple dasturi yordamida ko'rish mumkinki, $\alpha(x)=0$ tenglama 2 ta $x_1<1$ va $x_2<1$ musbat yechimlarga ega. Bu yerda $x>0$ da $\varphi''(x)>0$ ga ega bo'lamiz.

Endi (2.7) da $x=y$ bo'lsin. U holda $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ bo'ladi. (2.6) sistemaning birinchi yoki ikkinchi tenglamasidan foydalanib, $\lambda=\frac{32}{27}$ qiymatni aniqlaymiz. Bundan shuni ta'kidlash mumkinki, $k=3$ da $\lambda$ ning qiymati va $z=z_1=z_2=\frac{1}{2}$ qiymatlar (2.5) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (2.4) sistemaning yagona yechimi bo'ladi.Teorema isbotlandi.

$G=jezl$ bo'lgan holda , $z_x=z$ deb olib , (2.3) dan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} z_1=\lambda\left(\dfrac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_2=\lambda\left(\dfrac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k \end{cases} \qquad (2.10)$$

yoki $\sqrt[k]{z_1}=x>0, \sqrt[k]{z_2}=y>0$ bo'lganda

$$\begin{cases} x=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+x^k}{x^k+y^k}, \\ y=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+y^k}{x^k+y^k} \end{cases} \qquad (2.11)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $k=3$ bo'lsin. U holda ohirgi sistemada 1- tenglamani 2-tenglamaga bo'lib yuborib, $x=y$ yoki $x\neq y$ bo'lganda

$$x+y=\frac{1}{xy}$$

ga ega bo'lamiz.

Shunga o'xshash $G=sirtmoq$ bo'lgan holda (2.7) va (2.8) formulalardan ega bo'lishimiz mumkin. So'ngra (2.7) da $y^2=1/x-xy$ almashtirish bajarib , (2.11) sistemaning birinchi tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$x=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{1+x^3}{x^3+y\cdot\left(\frac{1}{x}-xy\right)}=\frac{1+x^3}{x^3+\frac{y}{x}-x\cdot\left(\frac{1}{x}-xy\right)}=\sqrt[3]{\lambda}\,\frac{x\cdot(1+x^3)}{x^4+y-x+x^3y}.$$

Bu yerdan (2.8) ni qo'llab quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y=\frac{\sqrt[3]{\lambda}(1+x^3)+x-x^4}{1+x^3}=\frac{\sqrt{x^4+4x}-x^2}{2x}.$$

Ushbu tenglama

$$4x(x^3+1)^2s^2+4x^2(3-x^3)(x^3+1)s-12x^6-4=0$$

kvadrat tenglamaga ekvivalent bo'lib, bu yerda $s=\sqrt[3]{\lambda}$ mazkur tenglama bitta musbat yechimga ega.

$$s=\frac{x^2(x^3-3)+\sqrt{x^4(x^3+3)^2+4x}}{2x(x^3+1)}=\varphi_1(x)$$

$\varphi_1(x)$ funksiyani $G=sirtmoq$ bo'lgan holdagiga o'hshash holda tahlil qilib, $\varphi_1'(x)=0$ tenglamaning musbat yechimini topamiz. Bu yechim yagona va $x^{**}=\sqrt[3]{4}/2$ ga teng, shuningdek,

$$\lambda_{cr} = s^3 = \varphi^3(x^{**}) = \frac{4}{27}.$$

Quyidagi teorema o'rinli.

**Teorema 3.2.** $k = 3$ va $\lambda_{cr} = \frac{4}{27}$ bo'lsin. U holda HC-modeli uchun $G = jezl$ bo'lgan holda $\lambda > \lambda_{cr}$ da 3 ta TIG'O', $\lambda \le \lambda_{cr}$ da esa bitta TIG'O' mavjud bo'ladi.

**Eslatma 3.1.**

1) Bu holda $\lambda = \lambda_{cr}$ da yagona TIG'O' $z = z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$ ga mos keladi.
2) $G = hushtak$ va $G = kalit$ bo'lgan hollarda $k \ge 1$ va ixtiyoriy $\lambda > 0$ uchun TIG'O' yagona ekanligi isbotlangan([6],[19]ga qarang).

## 4. $k \ge 2$ tartibli Keli daraxtida translatsion-invariant Gibbs o'lchovlari

$k \ge 2$ **bo'lgan hol.** Bu holda (2.4) tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Quyidagi lemma kelgusi izlanishlarimizni olib borishimiz uchun foydali:

**Lemma 4.1** (Kesten) [14]. $f:[0,1]\to[0,1]-$funksiya $\xi\in(0,1)$ qo'zg'almas nuqtali uzluksiz funksiya bo'lsin. $f$ funksiya $\xi$ nuqtada differensiallanuvchi va $f'(\xi)<-1$ deb olaylik. U holda shunday $x_0, x_1, 0\le x_0<\xi<x_1\le 1$ nuqtalar mavjudki, $f(x_0)=x_1$ va $f(x_1)=x_0$ tengliklar bajariladi.

(2.4) tenglamalar sistemasi $\sqrt[k]{z_1}=x>0,\ \sqrt[k]{z_2}=y>0$ da quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\begin{cases} x=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+x^k}{1+x^k+y^k}, \\ y=\sqrt[k]{\lambda}\,\dfrac{1+y^k}{1+x^k+y^k} \end{cases} \tag{2.12}$$

(2.12) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasidan $1+y^k$, ikkinchi tenglamasidan esa $1+x^k$ ni topib olamiz.

$$1+y^k=\frac{\sqrt[k]{\lambda}(1+x^k)-x^{k+1}}{x},$$
$$1+x^k=\frac{\sqrt[k]{\lambda}(1+y^k)-y^{k+1}}{y}$$

hamda shu sistemaning mos ravishda birinchi hamda ikkinchi tenglamalarining o'ng tomoniga qo'yamiz. Natijada ,

$$\begin{cases} x=\gamma(y), \\ y=\gamma(x) \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\gamma(x) = a - \frac{x^{k+1}}{1+x^k}, \quad a = \sqrt[k]{\lambda}.$$

Ma'lumki, $\gamma(x) > 0$ va $\gamma(a) = \frac{a}{1+a^k} < a,$ ya'ni , $\gamma:[0,a] \to [0,a].$ Bundan tashqari $\gamma(x)$ $[0,a]$ kesmada uzluksiz, differensiallanuvchi funksiya va shuningdek,

$$\gamma^{'}(x) = -\frac{x^k(x^k + k + 1)}{(x^k+1)^2} < 0,$$

bundan $\gamma(x)$ funksiya kamayuvchi. Bu yerda $\gamma(x) = x$ tenglama yagona $x = \xi$ yechimga ega.

So'ngra , $f'(\xi) < -1$ tengsizlikning o'rinliligini tekshiramiz. Haqiqatdan ham, ko'rishimiz mumkinki,

$$\gamma^{'}(\xi) = -\frac{\xi^k(\xi^k + k + 1)}{(1+\xi^k)^2} < -1. \qquad (2.13)$$

$t = \xi^k$ belgilash kiritamiz. U holda (2.13) tengsizlik $\xi > \frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}$ da o'rinli bo'lishini topamiz. Keyin esa, shartga ko'ra $\xi-$nuqta $\gamma$ akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi, demak

$$a = \xi + \frac{\xi^{k+1}}{1+\xi^k} = \varphi(\xi)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda qayt etish kerakki,

$$\varphi^{'}(\xi) = 1 + \frac{\xi^k(\xi^k + k + 1)}{(1+\xi^k)^2} > 0,$$

ya'ni $\varphi(\xi)$ funksiya o'suvchi . Natijada

$$a_{min} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt[k]{k-1}} \cdot \frac{k+1}{k},$$

bu yerdan

$$\lambda_{\min} = \lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

ekani kelib chiqadi. Bu yerdan lemma 1.1.ga ko'ra $\lambda > \lambda_{cr}$ da (2.12) sistemaning 3 ta $(\xi,\xi)$, $(x_0, y_0)$ va $(y_0, x_0)$ yechimlari mavjudligi kelib chiqadi.

Keyin esa $\lambda \le \lambda_{cr}$ da (2.12 tenglamalar sistemasining $(\xi,\xi)$ yagona yechimi mavjud. Haqiqatdan ham , $\lambda \le \lambda_{cr}$ da

$$0 > \gamma'(\xi) > -1$$

ga ega bo'lamiz, ya'ni $|\gamma'(\xi)| < 1$ va $\xi$ nuqta tortuvchi bo'ladi. Natijada ixtiyoriy $\xi_0 \in [0, a]$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^{(n)}(\xi_0) = \xi,$$

bu yerda $\gamma^{(n)}$- $\gamma$ akslantirishning $n-$iteratsiyasi. Bu yerdan $\gamma^2(\xi_0) = \xi_0$ yehimga ega bo'lmaydi, demak (2.12) tenglamalar sistemasi $\lambda \le \lambda_{cr}$ da yagona yechimga ega bo'ladi. Shunday qilib quyidagi teorema o'rinli.

**Teorema 4.1.** $k \ge 2$ va $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ bo'lsin. U holda HC-modeli uchun $G = sirtmoq$ bo'lgan holda $\lambda > \lambda_{cr}$ da kamida 3 ta, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da esa bitta TIG'O' mavjud.

**Eslatma 4.1.** $k = 2$ va $k = 3$ da 3 ta TIG'O' mavjudligi isbotlangan (1.2 va 1.3 teoremaga qarang). Ammo umumiy holda kamida 3 ta TIG'O' ning mavjudligi isbotlandi.

Endi

$$\gamma(x) = a - \frac{x^{k+1}}{1+x^k} = \frac{a(1+x^k) - x^{k+1}}{1+x^k} = x$$

va

$$\gamma(\gamma(x)) = a - \frac{\gamma^{k+1}}{1+\gamma^k} = x.$$

ni ko'rib chiqamiz.

Ohirgi tenglikni

$$(a-x)(1+\gamma^k) = \gamma^{k+1}$$

ga keltiramiz. Bu tenglikda ikki qismini $\gamma^k$ ga bo'lib va $\gamma$ uchun

$$(a-x)(\gamma^{-k} + 1) = \gamma$$

ifodani qo'ygan holda

$$(a-x)\left[\left(\frac{1+x^k}{a(1+x^k) - x^{k+1}}\right)^k + 1\right] = \gamma = \frac{a(1+x^k) - x^{k+1}}{1+x^k} \Leftrightarrow$$

$$(a-x)(1+x^k)[(1+x^k)^k + (a(1+x^k) - x^{k+1})^k] = (a(1+x^k) - x^{k+1})^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$(a-x)(1+x^k)^{k+1} + (a(1+x^k) - x^{k+1})^k[(a-x)(1+x^k) - a(1+x^k) + x^{k+1}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-x)(1+x^k)^{k+1} - x[a(1+x^k) - x^{k+1}]^k = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(a-x)(1+x^k)^{k+1}}{[a(1+x^k) - x^{k+1}]^k} = g(x).$$

ni olamiz.

Bizga ma'lum bo'lganidek $\gamma(x)=x$ tenglama yagona yechimga egadir. (2.12) sistemaning yechimlarini topish uchun quyidagi tenlamani ko'rib chiqamiz

$$h(x)=\frac{g(x)-x}{\gamma(x)-x}=0,$$

u quyidagi tenglikka ekvivalentdir

$$h(x)=(1+x^k)^{k-1}-\sum_{j=1}^{k-1}x^j\cdot[a(1+x^k)-x^{k+1}]^{k-j}\cdot(1+x^k)^{j-1}=0.$$

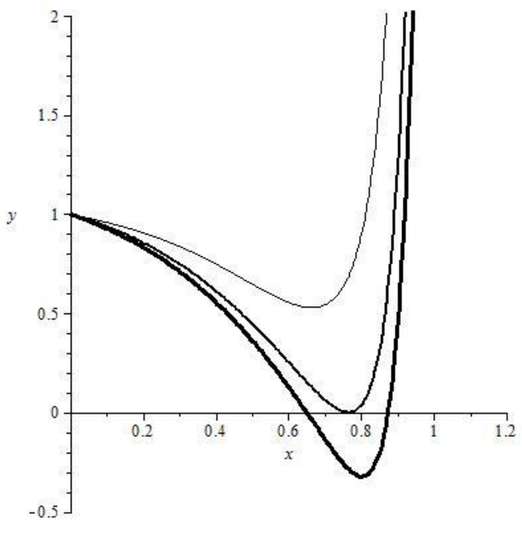
Aytib o'tish lozimli

$$h(0)=1,\quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

dir. Bundan tashqari kompyuterli tahlil ko'rsatib turibdiki, ixtiyoriy yakuniy $k\geq 2$ da $h(x)$ funksiyaning grafigi $\lambda<\lambda_{cr}$ da $Ox$ o'qini kesmaydi va $\lambda=\lambda_{cr}$ da $Ox$ o'qiga tegadi, $\lambda>\lambda_{cr}$ da esa $Ox$ o'qni ikki marta kesib o'tadi. (2.2 rasm)

Bu yerdan quyiagi gipoteza kelib chiqadi.

**Gipoteza 4.1**. Huddi $k=2, k=3$ holatlar kabi $k\geq 4,\ \lambda>\lambda_{cr}$ bo'lganda $G=sirtmoq$ uchun rosa uchta TIGO' mavjud.



Rasm 2.2. $h(x)$ funksiyaning $k=6$, $a=0.81$ dagi (yuqori chiziq), $a=\frac{7}{6\sqrt[6]{5}}\approx 0.81$ dagi (o’rtadagi egri chiziq) va $a=0.92$ dagi (pastki egri chiziq) kritik grafiklari

$G=jezl$ **bo’lgan hol.** (2.11) tenglamalar sistemasini qaraymiz. (2.11) sistemaning birinchi tenglamasidan $1+y^k$ ni topamiz va shu sistemaning ikkinchi tenglamasining o’ng tomoniga qo’yamiz. Bu sistemaning ikkinchi tenglamasidan $1+x^k$ ni topamiz va birinchi tenglamaning o’ng qismiga qo’yamiz. Natijada quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} x=\gamma(y) \\ y=\gamma(x), \end{cases}$$

bu yerda $\gamma(x)=a-\frac{x^{k+1}-x}{1+x^k}$, $a=\sqrt[k]{\lambda}$. $\gamma(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$\gamma^{'}(x)=-\frac{x^{2k}+2kx^k-1}{(x^k+1)^2}=-\frac{(x^k+1)^2+2[x^k(k-1)-1]}{(x^k+1)^2},$$

bu hisoblangan ifoda $x>\frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}$ da manfiy bo’ladi. Bundan shu shart bo’yicha $\gamma(x)=x$ tenglama yagona $x=\xi$ yechimga ega bo’ladi. Bundan tashqari $\xi>1/\sqrt[k]{k-1}$ da

$$\gamma^{'}(\xi)=-\frac{(\xi^k+1)^2+2[\xi^k(k-1)-1]}{(\xi^k+1)^2}<-1.$$

So’ngra , $\xi$ - shartga ko’ra $\gamma$ akslantirishning qo’zg’almas nuqtasi, demak $\xi>1/\sqrt[k]{k-1}$ da quyidagiga ega bo’lamiz:

$$a=\xi+\frac{\xi^{k+1}-\xi}{1+\xi^k}=\frac{2\xi^{k+1}}{\xi^k+1}=\varphi(\xi).$$

Qaytd etish lozimki,

$$\varphi'(\xi) = 2 \cdot \frac{\xi^{2k} + \xi^k (k+1)}{(1+\xi^k)^2} > 0,$$

ya'ni $\varphi(\xi)$ funksiya o'suvchi. Demak,

$$a_{min} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k-1}}\right) = \frac{2}{k\sqrt[k]{k-1}}$$

$$\lambda_{min} = \lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k.$$

Bu yerdan lemma 4.1. ga ko'ra $\lambda > \lambda_{cr}$ da (2.11) sistemaning 3 ta $(\xi, \xi)$, $(x_0, y_0)$ va $(y_0, x_0)$ yechimlari mavjudligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da (2.11) sistemasining yagona $(\xi, \xi)$ yechimi mavjud. Haqiqatdan ham, $\lambda \le \lambda_{cr}$ da $0 > \gamma'(\xi) > -1$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $|\gamma'(\xi)| < 1$. Natijada $\xi$ nuqta ixtiyoriy $\xi_0$ nuqta uchun tortuvchi nuqta bo'ladi

$$\lim_{n \to \infty} \gamma^{(n)}(\xi_0) = \xi,$$

bu yerda $\gamma^{(n)} - \gamma$ akslantirishning $n-$ iteratsiyasi. Bu yerdan $\gamma^2(\xi_0) = \xi_0$ yechimga ega emas, demak, (2.11) tenglamalar sistemasi $\lambda \le \lambda_{cr}$ da yagona yechimga ega.

Shunday qilib quyidagi teorema o'rinli:

**Teorema 4.2.** $k \ge 2$ va $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^k$ bo'lsin. U holda $G = jezl$ bo'lgan holda HC modeli uchun $\lambda > \lambda_{cr}$ bo'lganda 3 tadan kam bo'lmagan TIGO' mavjud; $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo'lganda aynan bitta TIGO' mavjud bo'ladi.

**Eslatma 4.2** $k=2,\ \lambda>\lambda_{cr}=1$ va $k=3,\ \lambda>\lambda_{cr}=4/27$ bo'lganda mos ravishda rosa 3 ta TIGO' mavjudligi isbotlangan. (Teorema 1.4. ning eslatma 1.3 siga qarang).

Endi quyidagini ko'rib chiqamiz:

$$\gamma(x)=a-\frac{x^{k+1}-x}{1+x^k}=\frac{a(1+x^k)-x^{k+1}+x}{1+x^k}=x$$

va

$$\gamma(\gamma(x))=a-\frac{\gamma^{k+1}-\gamma}{1+\gamma^k}=x.$$

Ohirgi tenglikni keltirib chiqaramiz.

$$(a-x)(1+\gamma^k)+\gamma=\gamma^{k+1}$$

ko'rinib turibdiki, $G=sirtmoq$ bo'lsa, bu tenglikda ikki qismini ham $\gamma^k$ ga bo'lib, $\gamma$ uchun ifodani qo'ysak,

$$(a-x)(\gamma^{-k}+1)+\gamma^{-k+1}=\gamma,$$

$$(a-x)\left[\left(\frac{1+x^k}{a(1+x^k)-x^{k+1}+x}\right)^k+1\right]+\left(\frac{1+x^k}{a(1+x^k)-x^{k+1}+x}\right)^{k-1}=\frac{a(1+x^k)-x^{k+1}}{1+x^k}\Leftrightarrow$$

$$(a-x)(1+x^k)[(1+x^k)^k+(a(1+x^k)-x^{k+1})^k]=(a(1+x^k)-x^{k+1})^{k+1}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{(a-x)(1+x^k)^{k+1}+(1+x^k)^k[a(1+x^k)-x^{k+1}+x]}{2[a(1+x^k)-x^{k+1}+x]^k}=g(x)$$

ni olamiz.

Oldin aniq bo’lganidek $\gamma(x)=x$ tenglama yagona yechimga ega. (2.11) sistemani yechimini topish uchun bu yechimdan farqli

$$h(x)=\frac{g(x)-x}{\gamma(x)-x}=0$$

tenglamani ko’rib chiqamiz. U quyidagiga ekvivalentdir

$$h(x)=(1+x^k)^{k-1}-\sum_{j=1}^{k-1}x^j\cdot[a(1+x^k)-x^{k+1}+x]^{k-j}\cdot(1+x^k)^{j-1}=0.$$

Aytib o’tish kerakki, $h(x)\to+\infty$ va $x\to+\infty$ da bu $h(0)=2$ bo’ladi. Bundan tashqari kompyuterli tahlil ko’rsatib turibdiki, yakuniy $k\geq 2$ da $h(x)$ funksiyaning grafigi $Ox$ o’qini $\lambda<\lambda_{cr}$, da kamaydi, $\lambda=\lambda_{cr}$ da $Ox$ o’qiga tegadi va $\lambda>\lambda_{cr}$ da ikki bora kesadi. Bu yerda keyingi gipoteza kelib chiqadi.

**Gipoteza 4.2.** $k=2, k=3$ holatlarga mos holda $k\geq 4,\ \lambda>\lambda_{cr}$ ga teng uchta TIGO’ $G=jerl$ uchun mavjuddir.

**Eslatma 4.3.** Teng uchta TIGO’ ni $G=sirtmoq$ va $G=jerl$ holatlarda mavjudligi $k\geq 4,\ \lambda>\lambda_{cr}$ da ochiq muammoligicha qolyapti.

## 5. Translatsion-invariant Gibbs o'lchovlarining chekka o'lchov bo'lish shartlari

Bu bo'limda $G = sirtmoq$ va $G = jezl$ holatlarda $k = 2$ da mavjud TIGO' chekka emasligini topamiz.

$G = sirtmoq$ hol uchun o'lchovlarning chekka emaslik shartlaridir. Chekka o'lchov bo'lishini tekshirish uchun [10], [15], [16] usullardan foydalanamiz. Buning uchun Markov zanjirini ko'rib chiqamiz, uni $\{0,1,2\}$ holda va $\mathrm{P}_{\mu}$ matritsani $P_{ij}$ ehtimolli o'tishlarda $\mu$ TIGO' da aniqlanishini ko'ramiz.

Avval ma'lum bo'lganidek $\mu$ Gibbs o'lchovini chekka o'lchov emasligi shartidan $\mathrm{P}_{\mu}$ matritsaga mos kelsa va $k\lambda_2^2 > 1$ bo'lsa, bu yerda $\lambda_2$ absolut qiymat bo'yicha $\mathrm{P}_{\mu}$ ning xususiy qiymati hisoblanadi.

Bu shartni tekshirish uchun (2.3) sistemaning yechimini oshkor ko'rinishini bilish lozim. Aniq yechimlarni biz faqatgina $k = 2$ da bilishimiz mumkin: (2.4) tenglamalar sistemasi $\lambda \le 9/4$ da $(z, z)$ yagona yechimga ega bo'ladi, bu yerda $z$ – tenglamaning yagona yechimidir

$$z = \lambda \left( \frac{1+z}{1+2z} \right)^2 \tag{2.14}$$

va $\lambda > \dfrac{9}{4}$ da $(z, z)$, $(z_1, z_2)$, $(z_2, z_1)$ uchta yechimga ega, bu yerda

$$z_1 = \left( \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a} \right)^2, \; z_2 = \left( \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a} \right)^2 \tag{2.15}$$

va $a = 2/(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda + 4})$. Chekka o'lchov mavjud emasligidan bu yechimlarga mos shartlarni topamiz. (2.1) dan $(z_1, z_2)$ yechim uchun $\sigma(x)$ holatdan $\sigma(y)$ holatga $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$ surushi ehtimolini aniqlashimiz mumkin bo'ladi:

$$P_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{\lambda^{\{\sigma(x),\sigma(y)\}} z_{\sigma(y)}}{\sum_{\sigma(y)\in\Omega^G} \lambda^{\{\sigma(x),\sigma(y)\}} z_{\sigma(y)}} \quad \Rightarrow \quad P_{ij} = \frac{\lambda^{\{i,j)\}} z_j}{\sum_{l=0,1,2} \lambda^{\{i,l\}} z_l}.$$

Bundan kelib chiqadiki, $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}$, $i = 1,2$ ni $G = sirtmoq$ holatga ishlatsak

$$P_{00} = \frac{z_0}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{1}{1 + z_1' + z_2'}, \quad P_{01} = \frac{\lambda z_1}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{z_1'}{1 + z_1' + z_2'},$$

$$P_{02} = \frac{\lambda z_2}{z_0 + \lambda z_1 + \lambda z_2} = \frac{z_2'}{1 + z_1' + z_2'}, \quad P_{10} = \frac{1}{1 + z_1'}, \quad P_{11} = \frac{z_1'}{1 + z_1'}, \; P_{12} = 0,$$

$$P_{20} = \frac{1}{1 + z_2'}, \quad P_{21} = 0, \quad P_{22} = \frac{z_2'}{1 + z_2'}$$

ni olamiz.

Bundan

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + z_1 + z_2} & \frac{z_1}{1 + z_1 + z_2} & \frac{z_2}{1 + z_1 + z_2} \\ \frac{1}{1 + z_1} & \frac{z_1}{1 + z_1} & 0 \\ \frac{1}{1 + z_2} & 0 & \frac{z_2}{1 + z_2} \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

kelib chiqadi ($z_i' = z_i$ shart).

Ravshanki, $s_3=1$ matritsaning xususiy qiyamatidan biridir. Qolgan ikkita $s_1, s_2$ qiymatlarni topamiz.

$$\det(P-sE)=0 \Rightarrow (1+z_1+z_2)(1+z_1)(1+z_2)s^3-$$

$$-[z_2(1+z_1+z_2)(1+z_1)+(1+z_1)(1+z_2)+z_1(1+z_1+z_2)(1+z_2)]s^2+$$

$$+z_1z_2(1+z_1+z_2)s+z_1z_2=0. \qquad (2.17)$$

Avvalo, chekka o'lchovni mavjud emas shartini tekshirib olamiz, u $(z_1,z_2)$ yechimga mos kelsin. Buning uchun ohirgi tenglamaning chap qismini $s-1$ ga bo'lib va $z_1z_2=1$ ni ko'rib, kvadrat tenglama olamiz

$$A(A+1)s^2-(A+1)s-1=0,$$

bu yerda $A=1+z_1+z_2=\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4\lambda}}{2}$. Bu kvadrat tenglamaning yechimi

$$s_1=\frac{A+1-\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)},\ s_2=\frac{A+1+\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)}.$$

ko'rinishga ega.

**Eslatma 5.1.** $s_1$ va $s_2$ uchun formulalar, bu xususiy qiymatlar $z_1+z_2$ dan bog'liqdir. Kelib chiqadiki, $(z_1,z_2)$ yechimga mos keluvchi $\mu_1$ TIGO' chekka o'lchov emas hisoblanadi qachonki $\mu_2$ o'lchov $(z_2,z_1)$ yechimdan chekka o'lchov ega emas hisoblansa.

$$s_1+s_2=\frac{1}{A}>0,\ s_1s_2=-\frac{1}{A(A+1)}<0$$

dan $|s_1|<s_2<s_3=1$ kelib chiqadi. Endi o'lchovlarni chekka o'lchov emaslik shartini $ks_2^2>1$ da tekshirib olamiz. Bu tengsizlikda

$$s_2 = \frac{A+1+\sqrt{(A+1)(5A+1)}}{2A(A+1)} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

kelib chiqadi. $\lambda$ ni musbat ekanligini hisobga olsak, yuqoridagi tahlildan so'ng ohirgi tengsizlikning yechimi

$$0 < \lambda < \frac{(\sqrt{2}-1+\sqrt{11+\sqrt{8}})^2}{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{11+\sqrt{8}}} \approx 1.4$$

ekanini olamiz.

$(z_1, z_2)$ yechimlar $\lambda > 9/4$ da mavjud bo'ladi. Demak, bu yechimga mos keluvchi o'lchov chekka o'lchovdir. Biz bu o'lchovni chekka o'lchov ekanligini kegingi izlanishlarda ko'rib chiqamiz.

Biroq , $k = 2$ da $\mu_0$ yagona o'lchovni chekka o'lchov emaslik shartini tekshiramiz. Bu holat (2.17) tenglama, uni $s-1$ ga bo'lishdan so'ng kvadrat tenglamaga aylanadi

$$(z+1)^2(2z+1)s^2 - 2z^2(z+1)s - z^2 = 0,$$

u quyidagi ko'rinishga ega

$$s_1 = -\frac{1}{(z+1)(2z+1)}, \quad s_2 = \frac{z}{z+1}.$$

Bu yerdan

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} \begin{cases} |s_1|, \text{agar } z < 1/2, \\ |s_2|, \text{agar } z > 1/2 \end{cases}$$

kelib chiqadi, bu yerda $z$ (2.14) ning yechimidir. Kardano formulasi yordamida (2.14) tenglamani yechamiz, u yagona haqiqiy yechimga ega bo'ladi

$$z=\frac{1}{12}\sqrt[3]{\lambda^3+24\lambda^2+102\lambda+8+6\sqrt{12\lambda^3+213\lambda^2+24\lambda}}+$$

$$+\frac{1}{12}\frac{\lambda^2+16\lambda+4}{\sqrt[3]{\lambda^3+24\lambda^2+102\lambda+8+6\sqrt{12\lambda^3+213\lambda^2+24\lambda}}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\lambda. \quad (2.18)$$

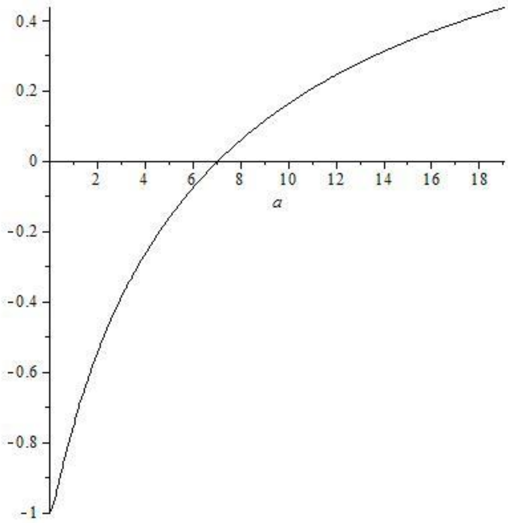
Maple yordamida $z-\frac{1}{2}>0$ $\lambda>b\approx 0.9$ va $z-\frac{1}{2}<0$ $\lambda<b$ da olish mumkin ekanligini ko'rish mumkin. $\lambda\le 9/4$ bo'lganda (2.4) sistemaning yechimi yagona, u holda unga mos keluvchi $\mu_0$ o'lchov $\lambda\le 9/4$ da chekka o'lchovdir. Bu o'lchovni chekka o'lchov emasligini intervalini aniqlash uchun

$$2s_2^2-1=2\left(\frac{z}{z+1}\right)^2-1>0,$$

shartni tekshiramiz, bu yerda $z$ (2.18) ko'rinishiga ega. Yana Maple dasturi yordamida amin bo'lish mumkinki, $\lambda>\lambda_0\approx 7.0355$ da ohirgi tengsizlik o'rinlidir.

Shunday qilib teorema isbotlandi.

**Teorema 5.1.** $k=2$ da $\lambda_0\approx 7.0355$ mavjud agar $\lambda>\lambda_0$ bo'lsa, $G=sirtmoq$ holatda HC-modeli uchun $\mu_0$ o'lchov chekka o'lchov bo'lmaydi.



Rasm 2.3. $2s_2^2-1$ funksiyaning grafigi

$G = sirtmoq$ **bo'lgan hol.** Oldingi bo'limga o'xshab $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2$ o'lchovlarning chekka o'lchov bo'lish shartlarini topamiz. $\mu$ Gibbs o'lchovlarini chekka o'lchov bo'lish sharti sifatida $k\kappa(\mu)\gamma(\mu)<1$ hisoblanadi.

Aytib o'tish kerakki, $\kappa$ xususiy oddiy shaklga egadir

$$\kappa=\frac{1}{2}\max\sum_{l=0}^{2}|P_{il}-P_{jl}|.$$

Bu yerdan tushunarliki, $|P_{il}-P_{jl}|=0$ $i=j$ da. (2.16) ni $i\neq j$ da ishlatsak

$$\sum_{i=0}^{2}|p_{il}-P_{jl}|=\begin{cases}\dfrac{2z_2}{1+z_1+z_2}, & agar\ i=0, j=1\ yoki\ i=1, j=o\\ \dfrac{2z_2}{1+z_1+z_2}, & agar\ i=0, j=2\ yoki\ i=2, j=o\\ \dfrac{|z_2-z_1|+z_1+z_2+2z_1z_2}{(1+z_1)(1+z_2)}, & agar\ i=1, j=2\ yoki\ i=2, j=1\end{cases}$$

ni olamiz. Bundan quyidagi kelib chiqadi

$$K=\begin{cases}\dfrac{z_1}{1+z_1}, & agar\ \ z_1>z_2,\\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, & agar\ \ z_1<z_2.\end{cases}$$

Demak, (2.15) ni yechimi uchun $\kappa=\dfrac{z_1}{1+z_1}$ va $(z,z)$ uchun $\kappa=\dfrac{z}{1+z}$ ga ega bo'lamiz.

**Tasdiq 5.1**. (2.16) P−matritsa bo'lsin va $\mu=\mu(z)$−unga mos Gibbs o'lchovi mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $A\subset \mathrm{T}$ da va $\eta$-chekka o'lchov konfeguratsiya $(s_1, s_2)$ yon juftliklar, $y \in \partial A$ va $x \in A$ yaqin qo'shnilar uchun u uchliklarda

$$P\mu_A^{\eta^{y,s_1}} - \mu_A^{\eta^{y,s_2}} P_x = K(p(s_1), p(s_2))$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $p(s) = \mu_A^{\eta^{y,free}} (\sigma(x) = s)$ va K funksiya

$$\mathrm{K}(p(s_1), p(s_2)) = \max\{p^{s_1}(s_1) - p^{s_2}(s_1)\},$$

ko'rinishida $p^t(s) = \mu_A^{\eta^{y,t}} (\sigma(x) = s)$ bilan aniqlanadi.

**Isbot.** P matritsaning ta'rifidan

$$p^t(s) = \frac{\lambda^{\{t,s\}} z_s p(s)}{\sum_{l=0}^{2} \lambda^{\{t,l\}} z_l p(l)}$$

va

$$\begin{pmatrix} \frac{p_0}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} & \frac{z_1 p_1}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} & \frac{z_2 p_2}{p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2} \\ \frac{p_0}{p_0 + z_1 p_1} & \frac{z_1 p_1}{p_0 + z_1 p_1} & 0 \\ \frac{p_0}{p_0 + z_2 p_2} & 0 & \frac{z_2 p_2}{p_0 + z_2 p_2} \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

ga egamiz. Bu yerda $p_i = p(i), i = 0,1,2.$ Tasdiq keyingi lemmadan kelib chiqadi.

**Lemma 5.1.** Quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

$p^0(0) \le p^s(0), s = 0,1,2;$

2. $p^1(0) \le p^2(0)$ qachonki $z_2 p_2 \le z_1 p_1$ bo'lsa;

3. $p^2(1) \le p^0(1) \le p^1(1);$

4. $p^0(2) \le p^2(2)$.

**Isbot.** (2.19) dan

$$p^0(0) - p^1(0) = -\frac{z_2 p_0 p_2}{(p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2)(p_0 + z_1 p_1)} \le 0;$$

$$p^0(0) - p^2(0) = -\frac{z_1 p_0 p_1}{(p_0 + z_1 p_1 + z_2 p_2)(p_0 + z_2 p_2)} \le 0;$$

$$p^1(0) - p^2(0) = \frac{z_2 p_2 - z_1 p_1}{(p_0 + z_2 p_2)(p_0 + z_1 p_1)} \le 0 \Leftrightarrow z_2 p_2 \le z_1 p_1$$

ga ega bo'lamiz. (3) va (4) holatlar shunga o'xshash isbotlanadi.

Endi ([18] 161 bet) ishga o'xshash $\gamma$ uchun bahoni

$$\gamma = max\left\{ \| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \|_x, \| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,2}} \|_x, \| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,2}} \|_x \right\},$$

bu yerda

$$\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \|_x = \frac{1}{2} \sum_{s \in \{0,1,2\}} | \mu_A^{\eta^{y,1}}(\sigma(x) = s) - \mu_A^{\eta^{y,0}}(\sigma(x) = s) | =$$

$$= \frac{1}{2}\left( | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{12} - P_{02} | \right) = \frac{1}{2}\left( | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{02} | \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left( | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | 1 - P_{00} - P_{01} | \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left( | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | + | P_{10} + P_{11} - P_{00} - P_{01} | \right) \le$$

$$\le | P_{10} - P_{00} | + | P_{11} - P_{01} | = \frac{z_2}{1 + z_1 + z_2}.$$

Bu yerda $P_{ij}$ – (2.16) matritsaning elementidir. O'xshash holda

$$\mathrm{P}\mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\mathrm{P}_x = \frac{z_1}{1+z_1+z_2};$$

$$\mathrm{P}\mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,2}}\mathrm{P}_x = \begin{cases} \dfrac{z_1}{1+z_1}, & \text{agar } z_1 > z_2, \\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, & \text{agar } z_1 < z_2 \end{cases}$$

ni olamiz, bundan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{z_1}{1+z_1}, & \text{agar } z_1 > z_2, \\ \dfrac{z_2}{1+z_2}, & \text{agar } z_1 < z_2. \end{cases}$$

Endi $\mu_0$ uchun $2\kappa\gamma < 1$ shartni tekshirib olamiz.

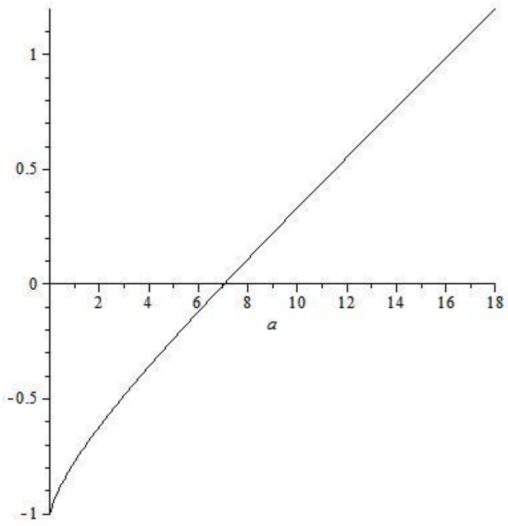
$z_1 = z_2 = z$ uchun $z - \sqrt{2} - 1 < 0$ ega bo'lamiz, bunda $z$ uchun qiymatlar (2.18) dan olinadi. Maple dasturi yordamida oxirgi tengsizlik $\lambda < \lambda_0 \approx 7.0355$ ( Rasm 2.4) da o'rinli ekanligini olamiz. Bundan kelib chiqadiki, $\mu_0$ o'lchov $\lambda < \lambda_0$ da chekka o'lchov hisoblanadi.

Bundan so'ng $\mu_1$ va $\mu_2$ uchun $2\kappa\gamma < 1$ ni olamiz.

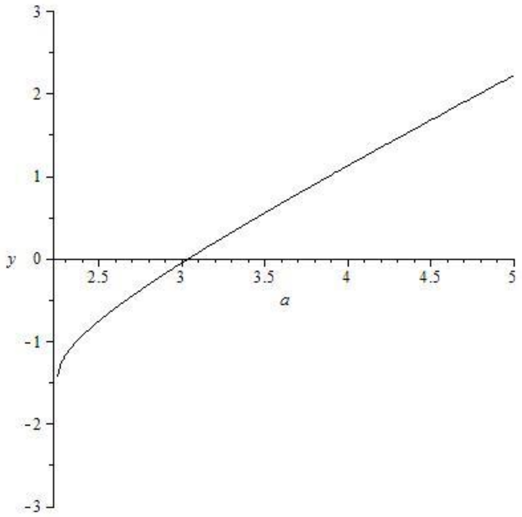
$(z_1, z_2), (z_2, z_1)$ yechimlarga (2.4) tenglamalar sistemasidan $k = 2, \lambda = 2.25$ bo'lganda ega bo'lamiz, bu yerda $z_1$ va $z_2$ (2.15) ga o'xshab aniqlangan. Ravshanki, $z_1 > z_2$. Shuning uchun

$$2\kappa\gamma - 1 = 2\left(\frac{z_1}{1+z_1}\right)^2 - 1 < 0$$

shartni tekshiramiz. Bu tengsizlik $\lambda < \frac{1}{2}(5\sqrt{2}-1)$ da o'rinlidir.




Rasm 2.4. Funksiyaning grafigi $z_1 - \sqrt{2} - 1 < 0$.




Rasm 2.5. Funksiyanigng grafigi $2\kappa\gamma - 1 = 2\left(\frac{z_1}{1+z_1}\right)^2 - 1.$

Demak, $\mu_1$ va $\mu_2$ o'lchovlar $2.25 < \lambda < \frac{1}{2}(5\sqrt{2}-1)$ da chekka o'lchov hisoblanadi. Teorema isbotlandi.

**Teorema 5.2.** $k=2$ bo'lsin. U holda HC-modeli uchun $G = sirtmoq$ holida $\mu_0$ o'lchov $0<\lambda<\lambda_0$ da va $\mu_1,\mu_2$ o'lchovlar $2.25<\lambda<0.5\cdot(5\sqrt{2}-1)$ da chekkaviydir.

$G = jezl$ **holat.** [6] ishdan ma'lumki $k=2$ da (2.11) tenglamalar sistemasi $\lambda\le 1$ da $(z^*,z^*)$ yagona yechimga egadir. Bu yerda $z^*-$tenglamaning yagona yechimidir.

$$z=\lambda\left(\frac{1+z}{2z}\right)^2 \tag{2.20}$$

va $\lambda>1$da uchta $(z^*,z^*), (z_1,z_2), (z_2,z_1)$ yechimga ega, bu yerda

$$z_1=\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)^2,\ \ z_2=\left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)^2 \tag{2.21}$$

va

$$a=\frac{2}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda+8}}.$$

$\mu^*,\ \mu_1,\ \mu_2$ chekka o'lchov bo'lmaslik shartini ularga mos yechimlardan topamiz. Buning uchun $G = sirtmoq$ holatiga o'xshash $z_{i,x}=\lambda\tilde{z}_{i,x}/\tilde{z}_{0,x},\ i=1,2$ da

$$P_{00}=0,\ P_{01}=\frac{\lambda\tilde{z}_1}{\lambda\tilde{z}_1+\lambda\tilde{z}_2}=\frac{z_1}{z_1+z_2},\ P_{02}=\frac{\lambda\tilde{z}_2}{\lambda\tilde{z}_1+\lambda\tilde{z}_2}=\frac{z_2}{z_1+z_2},$$

$$P_{10}=\frac{\lambda\tilde{z}_0}{\lambda\tilde{z}_0+\lambda^2\tilde{z}_1}=\frac{1}{1+\lambda z_1},\ P_{11}=\frac{\lambda^2\tilde{z}_1}{\lambda\tilde{z}_0+\lambda^2\tilde{z}_1}=\frac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1},\ P_{12}=0,$$

$$P_{20}=\frac{\lambda\tilde{z}_0}{\lambda\tilde{z}_0+\lambda^2\tilde{z}_2}=\frac{1}{1+\lambda z_2},\ \ P_{21}=0,\ P_{22}=\frac{\lambda^2\tilde{z}_2}{\lambda\tilde{z}_0+\lambda^2\tilde{z}_2}=\frac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}.$$

ni topamiz.

Bundan quyidagi matritsa kelib chiqadi

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{z_1}{z_1+z_2} & \dfrac{z_2}{z_1+z_2} \\ \dfrac{1}{1+\lambda z_1} & \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1} & 0 \\ \dfrac{1}{1+\lambda z_2} & 0 & \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2} \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning xususiy hollaridan biri $s_3=1$. $s_1, s_2$ ni qolgan ikki xususiy hollarini topamiz. Buning uchun $det(P-sE)=0$ tenglamaning ikki qismini ham $s-1$ ga bo'lib, olingan tenglamaning ikki qismini -1 ga ko'paytirib,

$$(z_1+z_2)[\lambda^2 z_1 z_2+\lambda(z_1+z_2)+1]s^2-(z_1+z_2)(\lambda^2 z_1 z_2-1)s-2\lambda z_1 z_2=0 \quad (2.22)$$

ko'rinishdagi kvadrat tenglamani olamiz. Avvalo, chekka o'lchov bo'lmaslik oraliqlarini topamiz, ular $(z_1, z_2)$ va $(z_2, z_1)$ yechimlarga mos keladi.

$z_1 z_2=1$ bo'lgani uchun (2.22) tenglamani ko'chirib olamiz

$$A(\lambda^2+\lambda A+1)s^2-A(\lambda^2-1)s-2\lambda=0,$$

bu yerda $A=z_1+z_2=\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+8\lambda}}{2}$.

Bu kvadrat tenglamaning yechimlari

$$s_1=\frac{A(\lambda^2-1)-\sqrt{D}}{2A(\lambda^2+\lambda A+1)}, \quad s_2=\frac{A(\lambda^2-1)+\sqrt{D}}{2A(\lambda^2+\lambda A+1)},$$

ko'rinishni oladi, bu yerda $D=A^2(\lambda^2-1)^2+8A\lambda(\lambda^2+\lambda A+1)$.

$s_1 + s_2 > 0,\ s_1 s_2 < 0$ dan $|s_1| < s_2 < s_3 = 1.$ kelib chiqadi. Endi chekka o'lchov bo'lmaslik shartini tekshiramiz: $ks_2^2 > 1$,

$$s_2 = \frac{A(\lambda^2 - 1) + \sqrt{D}}{2A(\lambda^2 + \lambda A + 1)} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bu tengsizlik

$$\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda} \cdot [(4 - 2\sqrt{2})\lambda^2 + 2 + 2\sqrt{2}] + (4 - 2\sqrt{2})\lambda^3 + 8\lambda^2 + (2\sqrt{2} - 14)\lambda < 0$$

tengsizlikka ekvivalentdir. Kompyuterli tahlil ko'rsatib turibdiki, bu tengsizlikning chap qismi ixtiyoriy $\lambda > 0$ qiymatida musbatdir. Demak, $(z_1, z_2)$ va $(z_2, z_1)$ yechimlarga mos o'lchovlar chekka o'lchov hisoblanadi. Endi biz (2.22) tenglamani $z_1 = z_2 = z^*$ ($z^* = z$ shartli) da ko'rib chiqamiz.

Bu holatda

$$z(\lambda z + 1)^2 s^2 - z(\lambda^2 z^2 - 1)s - \lambda z^2 = 0$$

ko'rinishidagi kvadrat tenglamani oladi. Uning yechimlari

$$s_1 = \frac{\lambda z}{1 + \lambda z},\ s_2 = -\frac{1}{1 + \lambda z}$$

ko'rinishiga ega.

Bu yerdan

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} \begin{cases} |s_1|, \text{agar } z > 1/\lambda, \\ |s_2|, \text{agar } z < 1/\lambda \end{cases}$$

bu yerda (2.20) ning yechimi $z$ dir. Kardano formulasi yordamida (2.20) tenglamani yechamiz. U bitta

$$z = \frac{1}{6}\sqrt[3]{27\lambda + 3\sqrt{-3\lambda^3 + 81\lambda^2}} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\sqrt[3]{27\lambda + 3\sqrt{-3\lambda^3 + 81\lambda^2}}} \qquad (2.23)$$

ko’rinishidagi qiymatga ega. Maple dasturi yordamida $z-\frac{1}{\lambda}>0$ ni $\lambda>\lambda_1\approx1.217$ va $z-\frac{1}{\lambda}<0$, $\lambda<\lambda_1$ da ko’rish mumkin. (2.11) sistemaning yechimi $\lambda\le1$ da yagona bo’lsa, u holda o’lchov bu yechimga mos $\lambda\le1$ da chekka o’lchovdir.

$I_1=(1,\lambda_1)$ va $I_2=(\lambda_1,+\infty)$ oraliqlarda mos ravishda

$$2s_2^2-1=2\left(\frac{1}{1+\lambda z}\right)^2-1>0,\quad 2s_1^2-1=2\left(\frac{\lambda z}{1+\lambda z}\right)^2-1>0$$

shartni tekshiramiz. Bu yerda $z$ (2.23) ko’rinishiga ega bo’ladi.

Bu yerda $z$ (2.23) ko’rinishga ega. Maple dasturi yordamida amin bo’lamizki, ikkinchi tengsizlik $\lambda>\lambda^*\approx2.287572$ da to'g'ri, birinchisi bo'lsa $0<\lambda<\lambda_2\approx0.645$ da o’rinli. Bundan kelib chiqadiki, $\lambda>\lambda^*\approx2.287572$ da biz o’rganayotgan o’lchov chekka o’lchov emasligini ko’ramiz.

**Teorema 5.3.** $k=2$, $\lambda>\lambda^*$ bo’lsin. U holda HC- modeli uchun $G=jezl$ da $\mu^*$ o’lchov chekka o’lchov bo’lmaydi.

Endi $G=jezl$ holatda $G=sirtmoq$ holga o’xshab $\mu^*$, $\mu_1$, $\mu_2$ o’lchovlarni chekka o’lchov ekanini o’rganamiz. Buning uchun $\kappa$ va $\gamma$ ni hisoblab:

$$k=\frac{1}{2}\max\sum_{i=0}^{2}\left|P_{il}-P_{jl}\right|=\max\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda z_1}, & \text{agar } z_2<\dfrac{1}{\lambda},\\ \dfrac{z_1}{z_1+z_2}, & \text{agar } z_2>\dfrac{1}{\lambda},\\ \dfrac{1}{1+\lambda z_2}, & \text{agar } z_1<\dfrac{1}{\lambda},\\ \dfrac{z_1}{z_1+z_2}, & \text{agar } z_1>\dfrac{1}{\lambda},\\ \dfrac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1}, & \text{agar } z_1>z_2,\\ \dfrac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}, & \text{agar } z_1<z_2\end{cases}$$

ni olamiz.

Bu yerda $z_1 = z_2 = z$ dan

$$k = \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda z}, & \text{agar } z < \frac{1}{\lambda}, \\ \frac{1\lambda}{1+\lambda z}, & \text{agar } z > \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

ni olamiz va $z_1 \neq z_2$ da esa

$$k = \begin{cases} \frac{\lambda z_1}{1+\lambda z_1}, & \text{agar } z_1 > z_2, \\ \frac{\lambda z_2}{1+\lambda z_2}, & \text{agar } z_1 < z_2. \end{cases}$$

$G = sirtmoq$ holatga o'xshab, agar $\gamma$ ni hisoblasak, u holda $\kappa = \gamma$ ni olamiz. Kompyuterli tahlil ko'rsatib turibdiki, $\mu *$ o'lchov $0 < \lambda < \lambda * \approx 2.287572$ da va $\mu_1, \mu_2$ o'lchovlar chekka o'lchov hisoblanadi.

**Teorema 5.4.** $k = 2$ bo'lsin. U holda HC-modeli uchun $G = jezl$ holda $\mu *$ o'lchov $0 < \lambda < \lambda *$ da va $\mu_1, \mu_2$ o'lchovlar $1 < \lambda < \lambda_3$ da chekka o'lchov hisoblanadi.

Quyidagi teoremalar o'rinli.

**Teorema 5.5.** Agar $k = 2$ bo'lsa, u holda HC-modeli uchun $G = sirtmoq$ holida $0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1) < \lambda < \lambda_0$ da hech bo'lmaganda 2 ta chekka o'lchov Gibbs o'lchovlar mavjud.

**Isbot**. $k = 2$ bo'lsin. 1.2 teoremadan ma'lumki, $0 < \lambda \leq \lambda_{cr} = \frac{9}{4}$ da yagona translatsion-invariant $\mu_0$ Gibbs o'lchovi mavjud. 3.2 teoremaning kuchiga

$0 < \lambda < \lambda_0$ da $\mu_0$ chekka o'lchov, $\lambda > \lambda_{cr} = 2,25$ da $\mu_0$ o'lchovlarga egamiz va ikkita yangi o'lchovlar 1.2 teoremada aytib o'tilgan. Agar $(0.5\cdot(5\sqrt{2}-1),\lambda_0)$ oraliqqa olingan yangi o'lchovlar chekka o'lchov deb hisoblasak, u holda faqatgina bitta $\mu_0$ chekka o'lchov qoladi. Biroq, bu holda chekka o'lchov bo'lmagan o'lchovni $\mu_0$ yagona o'lchov yordamida ifodalab bo'lmaydi. Kelib chiqadiki, $(0.5\cdot(5\sqrt{2}-1),\lambda_0)$ da hech bo'lmaganda bitta yangi o'lchov bo'lishi lozim. Teorema isbotlandi.

**Teorema 5.6.** Agar $k = 2$ bo'lsa, u holda HC-modeli uchun $G = jezl$ holatida $\lambda_3 < \lambda < \lambda^*$ da hech bo'lmaganda ikkita Gibbs o'lchovi mavjud bo'ladi.

Berilgan mavzuning ikkinchi bo'limida HC-modeli uchun uchta holat bilan parametrik aniq kritik qiymatlari keltirildi. $\lambda_{cr}$ uchun, unda $\lambda > \lambda_{cr}$ da uchta TIGO' mavjud.

Keli daraxtida $k \geq 2$ tartibda uchtadan ortiq bo'lmagan sirtmoq va jezl holatida TIGO' mavjudligi isbotlandi. Bunda $\lambda$ aktivlikni aniq qiymatlari keltirildi. Unda TIGO' lar miqdori o'zgaradi.

Bundan tashqari [10] va[11] dan usullarni ishlatib, chekka o'lchov bo'lish shartlari Keli daraxtida topilgan.

## XULOSA

Mening Bitiruv Malakaviy Ish mavzuyim **“Uch holatli Hard-Core modellari uchun tarnslatsion-invariant Gibbs o’lchovlari ”** deb nomlanib, ehtimollar nazariyasi, statistik fizika, kvant mexanikasining ma’lum ob’ektiga qaratilgan bo’lib o’lchovlar nazariyasining bir yo`nalishi deyish mumkin. Ma’lumki, berilgan gamil’tonian uchun Gibbs o’lchovining fazaviy diagrammasi bu gamil’tonianning asosiy yakkalangan (turg’un) holatining diagrammasiga yaqin bo’ladi. Yetarlicha kichik temperaturada, davriy asosiy holatga davriy Gibbs o’lchovlari mos keladi

Shuning uchun, tabiiy ravishda davriy asosiy holatlarni o’rganish masalasi vujudga keladi. Mening Bitiruv Malakaviy Ish mavzuyimda $T^k$ panjarasi, yani Keli daraxtida Hard-Core modeli uchun davriy Gibbs o’lchovlarini mavjudligini topish o’rganiladi. Odatda asosiy holat yordamida Gibbs o’lchovini topishni konturlar usuli deb ham ataladi. Konturlar usuli yordamida davriy asosiy holatlarni topish xaqidagi maqolalarni ko’p uchratish mumkin. O’zbekistonlik olimlardan prof. N.N.Ganihodjayev, prof. Rozikov, F.Muhammedov, N.M.Xatamov, M.M.Rahmatullayevlarning, R.Hakimov ilmiy ishlarida ham konturlar usulini qo’llanilganini ko’rish mumkin.

Mening Bitiruv Malakaviy Ish mavzuyimda Hard-Core modeli uchun tartibi ikkinchi, uchinchi bo’lgan Keli daraxti ustida Gibbs o’lchovlarini mavjudligini topish maqsadida tenglamalar sistemasini keltirib chiqardim va uni akslantirish sifatida qarab invariant to’plamlar sinfini topdim va bu invariant to’plamlarning ba’zilari uchun tenglamalar sistemasini echimlari translyatsion-invariant bo’lishini ko’rsatdim.

Bitiruv malakaviy ishimda asosan gamil’tonianlar, fizik modellar, Gibbs o’lchovni topishning Markov tasodifiy maydonlar nazariyasi va bu nazariyaning rekurrent tenglamalari usullarini va konturlar usulini o’rgandim. Shu sohaga doir bir nechta adabiyotlar va ilmiy maqolalardan foydalandim.

# FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

## O‘zbekiston Respublikasi qonunlari. O‘zbekiston Respublikasi Prezident farmonlari va qarorlari, Vazirlar Mahkamasining qarorlari.

1. SH.M.Mirziyoyev PF-5538-son “Xalq ta’limini boshqarish tizimini takomillashtirish bo’yicha qo’shimcha chora-tadbirlar to’g’risida” gi farmoishi. 2018-yil 5-sentabr.

2. SH.M.Mirziyoyev. F-4724-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi farmoyish. 2016-yil 8-oktyabr.

3. SH.M.Mirziyoyev. PQ-2909 sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari tog‘risida”gi qarori. 2017-yil 20-aprel.

4. I.A.Karimov. “Ilm ziyo salohiyati – yurt boyligi ” nutqi “Ma’rifat" gazetasi. 1993-yil, 21-iyul.

5. I.A.Karimov." Ishlohotlar izchilligi - inson mafaatlari omili, . "Ma’rifat" gazetasi. 1997-yil, 1-mart.

## Asosiy va qo‘shimcha adabiyotlar

1. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической физике. – М.:Мир, 1985. – 486 с.
2. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 109-117.
3. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. О крайних гиббсовских распределениях модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями. // УзМЖ. – Ташкент, 1995. – №2. – С. 36-47.
4. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. – М.: Мир, 1977. – 126 с.
5. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

6. Розиков У.А., Шоюсупов Ш.А. Плодородные НС-модели с тремя состояниями на дереве Кэли // Теор. и матем. физика, **156**:3 (2008), –С. 412-424.
7. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей НС с тремя состояниями на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика,– 2015. – Том 183, № 3. –С. 441-449.
8. Минлос Р.А. Лекции по статистической физике. // УМН. – 1968. – Т. 1. – С. 133-190.
9. Brightwell G., Winkler P. A second threshold for the hard-core model on a Bethe lattice. // Random Structur. Algor. – 2004. – V. 24. – P. 303-314.
10. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. // J. Combin. Theor, Series B. – 1999. – V. 77. – P. 221- 262.
11. Kesten H., Stigum B.P. Additional limit theorem for indecomposable multi-dimensional Galton-Watson processes. // Ann. Math. Statist. 37 (1966), – P. 1463-1481.
12. Martinelli F., Sinclair A., Weitz D. Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees. // Random Structures and Algoritms, 31 (2007), – P. 134-172.
13. Rozikov U.A, Khakimov R.M. Gibbs measures for fertile three-state hard core models on a Cayley tree. // Queueing Systems, – 2015, Vol.81, - № 1. – P. 49-69.
14. Kesten H. Quadratic transformations: a model for population growth. // I. Adv. Appl. Prob. – 1970. – V. 2. – P. 1-82.
15. Formentin M., Kuelske C. A symmetric entropy bound on the non-reconstruction regime of Markov chains on Galton-Watson trees. // Electron. Commun. Probab. 14 (2009), – P. 587-596.
16. Mossel E., Survey: Information Flow on Trees. Graphs, morphisms and statistical physics. // 155--170, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

17. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. О периодических гиббсовских распределениях модели Изинга на решетке Бете. // УзМЖ. – Ташкент, 1995. – № 4. – С. 8-18.

18. Добрушин Р.Л. Задача единственности гиббсовских случайных полей и проблема фазовых переходов. // Функ. Анал. и его прилож. – 1968. – Т. 2. – №. 4. – С. 44-57.

19. Martin J., Rozikov U.A., Suhov Yu.M. A three state hard-core model on a Cayley tree. // J. Nonlinear Math. Phys. – 2005. – V. 12, № 3. – P. 432-448.