

**O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus
ta'lim vazirligi**

Buxoro davlat universiteti

Boshlang'ich ta'lim kafedrası

Matematika

Buxoro-2018

F.M.Qosimov, M.M.Qosimova, Matematika Buxoro davlat universiteti,
2018, -99 bet.

Mazkur to'plam boshlang'ich ta'lim va sport, tarbiyaviy ish (5141600) yo'nalishi bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, unda nomanfiy butun sonlar to'plamining uch xil: aksiomatik, to'plamlar nazariyasi hamda miqdorlar nuqtai nazarida talqin etilishi, sanoq sistemelari, sonlarning bo'linishi, bo'linish alomatlari, sonlarning eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy karralisini topish masalalari to'g'risida fikrlar yozilgan.

Ma'ruza matnlari BuxDU tabiiy fanlar o'quv-metodik kengashida (2017-yil 3 dekabr, -son bayonnomasi) nashrga tavsiya etilgan.

Mas'ul muharrir: Jumayev. M.E. pedagogikafanlari nomzodi, dotsent.

Taqrizchi: Расулов Т -fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

© Buxoro davlat universiteti fundamental kutubxonasi, Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy

Mavzularning taxminiy taqsimoti

T.r	Mavzular	Jami soat	Ma'ruza	Amaliy
Nomanfiy butun sonlar		112	56	56
I. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish		22	12	10
1	Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Z_0 ni tuzishdagi har xil yondoshishlar	2	2	
2	Matematikada aksiomatik metod. Piano aksiomalari	4	2	2
3	Nomanfiy butun sonlarni qo'shish va ko'paytirish. Ularning xossalari	4	2	2
4	Nomanfiy butun sonlar to'plamining tartiblanganligi	4	2	2
5	Z_0 da ayirish va uning xossalari	4	2	2
6	Nomanfiy butun sonlarni natural sonlarga bo'lish. Bo'lish xossalari	4	2	2
II. Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish		24	12	12
1	Natural son va nol tushunchasi	4	2	2
2	Qo'shish. Qo'shish qonunlari. "Teng", "kichik", "katta" munosabatlari	4	2	2
3	Ayirish. Ayirish xossalari	4	2	2
4	Ko'paytirish. Uning xossalari	4	2	2
5	Bo'lish. "...marta katta", "...marta kichik" munosabatlari.	4	2	2
6	Qoldikli bo'lish. Z_0 ning asosiy xossalari	4	2	2
	" Z_0 ni aksiomatik asosda hamda to'plamlar nazariyasi asosida qurish" mavzulari yuzasidan oraliq nazorat			
III. Natural son miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida		8	4	4
IV. Sanoq sistemalari		22	10	12
1	Pozitsion va pozitsion bo'lmagan			

	sanoq sistemalari	8	4	4
2	10 li va turli sanoq sistemasida sonlar ustida amallar	14	6	8
V. Sonlarning bo'linishi		36	18	18
1	Bo'linish munosabati va uning xossalari	4	2	2
2	Bo'linish alomatlari	12	6	6
3	Tub va murakkab sonlar	8	4	4
4	Sonlarning EKUB va EKUKi. Ularning xossalari	12	6	6
1."Natural son miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida" va "Sanoq sistemalari" mavzulariga doir 2-kollokvium(oraliq nazorat) 2. "Sonlarning bo'linishi " mavzusiga doir 3- kollokvium (oraliq nazorat)				

Mavzu: Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida tarixiy ma'lumot. Z_0 ni tuzishdagi har xil yondoshishlar.

Muammoli savollar:

- 1) Natural son deganda qanday sonlarni tushunamiz?
- 2) Nol-qanday son?
- 3) Nomanfiy butun sonlar to'plamini qanday talqin etish mumkin?
- 4) Natural sonlardan tashqari yana qanaqa sonli to'plamlarni bilasiz?
- 5) Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlardan xabardormisiz?

Reja:

- 1.Son tushunchasining vujudga kelishi haqida tarixiy ma'lumot.
- 2.Nomanfiy butun sonlar to'plamini tuzishdagi turlicha yondoshishlar.

Tayanch iboralar:

Natural son, nol, son tushunchalari, "Arifmetika" so'zining lug'aviy ma'nosi, natural son tushunchasining kelib chiqishi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

- 1.Н. Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: Просвещение, 1977.
- 2.Демидов. Основание арифметики. М.: 1972.
- 3.А.А. Столяр, Л.П.Лельчук. Математика. Минск. 1975.
- 4.Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошлан'ич математика курси асослари. Т. «Ы=итувчи», 1991.

1,2,3,4,... sonlar natural sonlar deb ataladi. Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. U dastlab amaliy xarakterdagi borgan sari murakkablashib boruvchi masalalarni yechish jarayonida asta-sekin vujudga kela boshlagan. Turli-tuman chekli to'plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zarurati kishilarning natural sonlarni yaratishlariga sabab bo'ldi.

O'zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o'tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to'plamlarni taqqoslash uchun berilgan to'plamlar orasida yoki to'plamlardan biri bilan ikkinchi to'plamning qism to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to'plamining sanog'ini ularni sanamasdan idrok qilganlar. Masalan, beshta buyumdan iborat guruhning sanog'i haqida "Odamda qancha barmoq bo'lsa, o'shancha" deb atashgan. Bunday usul shunday kamchilikka ega ediki, bunda taqqoslanuvchi to'plamlar bir vaqtda ko'zga ko'rinadigan bo'lishi kerak edi.

Juda uzoq rivojlanish davri natijasida kishilar natural sonlarni yaratishning navbatdagi bosqichiga keldilar - to'plamlarni taqqoslash uchun vositachi to'plamlarni: mayda toshchalarni, chig'anoqlarni, barmoqlarni qo'llay boshladilar. Bu vositachi to'plamlar endi natural son tushunchasi kurtaklarini namoyon qila boshlagan bo'lsada, biroq bu bosqichda ham hali son sanaladigan to'plamlardan ajralmagan edi: gap umuman son haqida emas, beshta tosh, beshta barmoq haqida borar edi. Vositachi to'plamlar nomini shu to'plamlar bilan taqqoslovchi to'plamning sanog'ini aniqlashda qo'llay boshladilar. Masalan, ba'zi qabilalarda beshta elementdan iborat to'plamlar sanog'i "qo'l" so'zi bilan, 20 ta buyumdan iborat to'plamning sanog'i "butun odam" so'zi bilan belgilangan. Kishilar vositachi to'plamlar bilan amallar bajarishni o'rgangandan keyingina mavjud umumiylikni masalan, beshta barmoq va beshta olma orasidagi mavjud umumiylikni aniqladilar, ya'ni vositachi to'plamlar elementlari tabiatan cheklanish yuz bera boshlashi bilan natural son haqidagi tasavvur vujudga kela boshladi. Bu bosqichda sanashda masalan, olmani sanashda bitta, ikkita va hokazo olma sanalmay, balki "bir", "ikki" va hokazo so'zlarini ishlatib sanay boshladilar. Bu son tushunchasi rivojlanishining eng muhim bosqichi bo'ldi. Zamonaning eng yirik matematigi N.N. Luzin mana shunday degan edi: "Biz birlik tushunchasini yaratgan inson dahosi qarshisida bosh egishimiz kerak. Son vujudga keldi, u bilan birga matematika vujudga keldi. Son-matematikaning asosiy tushunchalaridan biri; u hisob va o'lchash natijalarini ifodalashga imkon beradi.

Qachonlardir to'plamdagi elementlar soni bu elementlarning o'zidan ajralmagan holda qaralgan, jumladan, ikkita to'plamni miqdor jihatdan taqqoslash uchun ularning elementlari yonma-yon terib chiqilgan. Keyinroq esa har xil to'plamlarni tayin bir to'plam-vositachi bilan taqqoslash qulay ekanligi payqaldi. Barmoqlar doim o'zimiz bilan bo'lgani uchun barmoq bukib sanash

rasm bo'ldi. Shundan so'ng sonlar uchun maxsus nomlar vujudga keldi - dastlab kichikroq keyinchalik esa kattaroq sonlar o'z nomiga ega bo'lib bordi.

Vaqt o'tishi bilan sonlarga faqat nom berilibgina qolmay ularni belgilash ham o'rganildi. Bunda bobilliklar, aslini olganda sonlarni belgilashning pozitsion sistemasini qo'llagan - ayni bir belgi 1ni ham, 60ni ham, 3600ni ham belgilangan. Ular faqat nol belgisini bilmaganlar - bu ajoyib ixtironi Hind matematiklari VI asrda o'ylab topganlar.

Amaliy ehtiyojlar sanash va sonlarni belgilashdan tashqari ular ustida arifmetik amallarni bajarishni ham talab qilgan. Bobilliklar o'zlarini oltmishlik sistemasining murakkabligidan qutulish uchun ko'paytmalar, kvadratlar, kublar va boshqa amallar jadvallaridan foydalangan. Qadimgi yunonlar va rimliklar hisoblashlarni abak yordamida bajargan.

Asta-sekin natural sonlarni cheksiz ko'pligi haqidagi tasavvur shakllandi. E.o. III asrda Arximed ulkan songacha yaroqli belgilar sistemasini ishlab chiqdi.

Natural sonlar bilan bir qatorda butun sonning ulushlaridan tarkib topgan kasr sonlar boshlandi. Natural sonlar va kasrlarning to'plami har qanday o'lchash natijasini ifodalash uchun etarli edi. Uzoq vaqt o'lchash natijasi doim butun son yoki ikki butun son nisbati, ya'ni kasr son bilan ifodalanadi deb kelindi. Qadim Yunon faylasufi va matematigi Pifagor ta'lim berar edi: "...sonlarning elementlari hamma buyumlarning elementlaridir, butun olam yaxlitligicha son va garmoniyadir". Bu ta'limotga Pifagor maktabi vakillaridan biri ochgan kashfiyot juda og'ir zarba bo'ldi. U kvadratning diagonalini ifodalash uchun natural sonlar va kasrlar etarli emasligini keltirib chiqardi. Xuddi shu kashfiyotdan nazariy matematika erasi boshlanadi deb tasdiqlashga asos bor: o'lchovdosh bo'lmagan kattaliklar mavjudligini faqat tajriba yo'li bilan abstrakt mulohazasiz ochish mumkin emas.

Natural sonlar tushunchasi shakllangandan sung sonlar mustaqil ob'ektlar bo'lib qoldi. Ularni matematik ob'ektlar sifatida o'rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustida amallarni o'rgana boshlagan fan "Arifmetika" nomini oldi. Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to'plangan matematik belgilar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga asr o'rtalarida hind, arab dunyosi mamlakatlari va O'rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, Yevropalik olimlar katta hissa qo'shdilar.

"Natural sonlar" terminini birinchi bo'lib rimlik olim A. Boetsiy qo'lladi (480-542 yillar). Hozirgi vaqtda natural sonlarning xossalari, ular ustida amallar matematikaning "Sonlar nazariyasi" deb ataluvchi bo'limida o'rganiladi.

XIX asrda olimlarning diqqati natural sonning matematik nazariyalarining qurilishi va mantiqiy asoslanishga qaratilgan edi. Bu nazariyalar natural sonlar bilan hisoblashlar asosida yotadi.

Nol- butun son, o'nli sanoq sistemasidagi raqamlardan biri. "Nol" lotincha *nullus* "Hech qanday" degan ma'noni bildiradi. Nol o kabi belgilanadi. Ko'p xonali sonlarning yozilishida nol raqam sifatida ma'lum xonada birliklar yo'qligini belgilash uchun ishlatiladi. Nolni son sifatida xarakterlovchi asosiy

xossa shundan iboratki har qanday son nol bilan qo'shilganda o'zgarmaydi. Nol sonining boshqa xossalari: $a \bullet 0 = 0$; $a - a = 0$; agar $a \bullet b = 0$ bo'lsa, u holda $a = 0$ yoki $b = 0$.

Nol sonining uzoq va qiziqarli tarixi bor. Bobilning qadimgi yozuvidayoq (bizning eramizgacha V a.) sonlar yozuvida yo'q xonani belgilovchi maxsus belgi “ ∇ ” bor edi. Bu nolning uzoq ajdodidir. Yunon astronomlari bobilliklardan oltmishli sanoq sistemasini qabul qilib olishdi, ammo ular raqamni belgilash uchun ponalar o'rniga harflar qo'llashgan. Bunda tushurib qoldirilgan oltmishli xonali belgilash uchun 0 harfidan- “ouden” (“Hech nima”) degan ma'noni bildiruvchi so'zning birinchi harfidan foydalanishardi. Va nihoyat, o'nli sistemada sonlarni yozishda nolning hozir biz foydalanadigan belgisi Hindlarda V-VI a. da paydo bo'lgan edi.

Uzoq vaqt nol son deb tan olinmagan. Masalan, Diofant (III a.) o'rta asrlar matematiklari kabi nolni tenglamaning ildizi deb hisoblashardi, XVII asrga kelibgina, koordinatalar metodi kiritilgach, nol boshqa musbat va manfiy sonlar qatorida teng huquq bilan qatnasha boshlaydi: ularning hammasi son o'qining nuqtalari bilan tasvirlanadi.

Nomanfiy butun sonlar to'plamini nazariy talqin etishning turli xil yo'llari mavjud.

1) Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik nuqtai nazaridan qurish.

Bunday talqinda nomanfiy butun sonlar to'plamining aksiomatik ta'rifi berilib, bu to'plam elementlari ustida qo'shish va ko'paytirish amallarining ham aksiomatik ta'rifi kiritiladi. Ayirish va bo'lishlar qo'shish hamda ko'paytirish amallariga teskari amal sifatida talqin etiladi. Aksiomatik nuqtai nazaridan to'plamning xossalari yoritiladi.

2) Natural sonlar va ular ustida amallarni miqdorlar (kesmalarni) o'lchash sifatida talqin qilish.

Bu talqinda natural sonlar tushunchasi biror bir miqdor (kesma) ning o'lchov natijasi asosida o'rganiladi. Natural sonlar ustida amallarni o'rganish ham kesmalar ustida bajariladigan amallar bilan bog'lanadi.

3) Z_0 ni to'plamlar nazariyasi asosida qurish. Nomanfiy butun sonlar to'plami qandaydir to'plamlardagi elementlar sonini xarakterlovchi to'plam sifatida ta'riflanishi mumkin. Boshlangich matematika kursi asosan mana shu yondoshish asosida quriladi. Shu sababli nomanfiy butun sonlar va ular ustida bajariladigan amallar to'plamlar nazariyasi bilan uzviy bog'liq holda o'rganiladi.

Mavzu: Matematikada aksiomatik metod. Piano aksiomalari

Muammoli savollar:

- 1) Matematikada aksiomatik metod deganda nimani tushunasiz ?
- 2) Aksiomalar sistemasi oldiga qanaqa mantiqiy talablar qo'yildi ?
- 3) Z_0 to'plam uchun Pianoning qanday aksiomalarini bilasiz ?
- 4) Matematik induksiya metodi nima ?

Tayanch iboralar:

Aksiomatik metod, aksiomalar sistemasi, aksiomalar sistemasining bog'liqsizligi, to'laligi, qarama-qarshi emasligi, Piano aksiomalari, matematik induksiya metodi.

Reja:

1. Matematikada aksiomatik metod.
2. Aksiomalar sistemasining modeli.
3. Aksiomalar sistemasining qarama-qarshi emasligi, bog'liqsizligi, to'laligi.
4. Piano aksiomalari sistemasi.

Har bir matematik tushuncha xuddi qoidalar singari uzoq o'tmish tarixiy taraqqiyotlar mahsulidir. Bu matematik tushunchalar o'z-o'zidan kelib chiqmagan. Bular u yoki bu masalalarni yechganda amaliy ehtiyojlar asosida vujudga kelgan. Dastlab dalalarni o'lchash uchun iplarni tarang tortib o'lchaganlar. Bu tarang tortilgan ip bizga to'g'ri chiziq tushunchasini olib keladi. Shuningdek uylarning mustahkam qurilishi uchun, binolarni er sirtiga nisbatan to'g'ri burchak ostida qurish afzalligi tajribada kuzatilgan. Bu esa to'g'ri burchak tushunchalari vujudga kelishiga sabab bo'lgan ...

Insoniyatning bunday amaliy hayoti natijasida vujudga kelgan tushunchalar qat'iy ta'riflangan tushunchalar emas. U yoki bu tushunchalar tushuntirilishida bu tushuncha nimaga o'xshashligi ko'rsatilgan. Masalan: Shar haqida gapirilganda u koptokka o'xshashligi ta'kidlangan.

Har bir matematik tushunchaga qanday ta'rif beriladi?

Masalan: Aylana diametri ta'rifini beraylik: Dastlab, bu ta'rif: aylanani teng ikkiga bo'luvchi vatarga aylana diametri deb atalgan. Eramizdan oldingi VI asrda Milet shahrida yashagan qadimgi grek olimi Faless tomonidan bunday vatar albatta aylana markazidan o'tishini isbotlagan. Shundan so'ng aylana ikki nuqtasi va markazini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasiga aylana diametri , deb ta'rif berildi.

Bu ta'rifni berish uchun aylana, aylana markazi, to'g'ri chiziq kesmasi tushunchalaridan foydalandik.

... Bu tushunchalarga ham ta'rif berib, "nuqta", "to'g'ri chiziq", "tekislik" tushunchalariga kelib qolamiz. Bu tushunchalar qanday tushuncha?

Bunday tushunchalarga ta'rif berilmaydi. Bunday tushunchalar dastlabki tushunchalar yoki asosiy tushunchalar deb aytiladi. Har qanday ta'riflar asosida shu tushunchalar yotadi.

Har bir aksiomalar sistemasi o'ziga xos tushunchalariga ega bo'ladi. Mana geometriyada asosiy tushunchalar qilib: nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, masofa tushunchalari olinadi. Shuningdek bizlar qarayotgan "to'plam", "son" tushunchalari ham asosiy tushunchalarga kiradi.

Endi aksiomalar sistemasining qurilishi haqida gapiraylik. Har bir aksiomalar sistemasi quyidagicha quriladi:

1. Asosiy tushunchalar beriladi.

2. Asosiy tushunchalar ustida munosabat beriladi.

3. Aksiomalar bayon qilinadi.

4. Aksiomalar asosida teorema va xossalar isbot qilinadi.

Aksiomalar sistemasida yuqoridagi shartlar ixtiyoriy qilib olinmaydi... Bular ma'lum real ob'ektlarni va ular ustidagi xossalarni ifodalashi kerak.

Masalan: istalgan A, B, M- nuqtalari uchun $|AM| + |MB| \leq |AB|$ deb olinsa, bu har doim o'rinli bo'lmaydi, chunki $|AM| + |MB| \geq |AB|$ real aksiomalarga zid ...

Shunday qilib, matematik nazariya haqiqiy bo'lishi uchun aksiomalar sistemasining modelini berishi kerak...

Ta'rif: To'plam va unda ta'riflangan munosabatga aksiomalar sistemasining modeli "yoki interpretatsiyasi" deb aytiladi, agar unda sistemaning barcha aksiomalari o'rinli bo'lsa.

1-misol $a \sim b$ munosabati berilgan aksiomalar sistemasini qaraylik. U quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi.

$$1. \forall(a) a \sim a.$$

$$2. \forall(a, b) a \sim b \Rightarrow b \sim a.$$

3. $\forall(a, b, c) a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Bu 1, 3. aksiomalardan qator natijalar kelib chiqadi.

Masalan:

$$\forall(a, b, c) a \sim b \wedge c \sim b \Rightarrow a \sim c$$

Bu tasdiqlardan shu narsa kelib chiqadiki agar qandaydir X to'plami berilgan bo'lsa, unda ekvivalentlik munosabati ta'riflansa, u holda bu « $\sim$ » munosabati X to'plamini o'zaro kesishmaydigan ekvivalent sinflar to'plamiga ajratadi. X to'plam unda ta'riflangan " $\sim$ " munosabati 1-3 aksiomalar sistemasining modelini tashkil etadi.

Bu tasdiqni " $\sim$ " munosabati berilgan ixtiyoriy X to'plam elementlari uchun 1-3 aksiomalar sistemasiga qo'llasak, bu to'plamlarning hammasi 1-3 aksiomalar sistemasining modelini tashkil etadi.

2-misol. $a < b$, $<$ -munosabat bilan beriluvchi aksiomatik sistemani qaraylik:

$$1. (\forall a, b) [a < b \Rightarrow \overline{b < a}]$$

$$2. (\forall a, b, c) [a < b, b < c \rightarrow a < c]$$

$$3. (\forall a, b) [a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a]$$

1)-2)- aksiomalar qat'iy tartib munosabatini 1)-3) –aksiomalar qat'iy chiziqli tartib munosabatini beradi.

2)-misolda " $<$ " –munosabat bilan berilgan X to'plamda 1)-3) –aksiomalar bajarilsa X -1) -3) aksiomalar sistemasining modelini tashkil qiladi.

Shunday hol bo'ladiki, berilgan aksiomalar sistemasini modeli tashqi ko'rinishda har xil bo'lsada, lekin haqiqatda bu modellar bir xildir.

Masalan:

$$X = \{a, b, c\} \quad \text{va} \quad Y = \{1; 2; 3\}$$

To'plamlar berilgan bo'lsin, bu to'plamlarda agar

$$a < b, \quad b < c, \quad a < c$$

$$1 < 2, \quad 2 < 3, \quad 1 < 3$$

munosabatlar berilsa, bu 2 to'plam elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. $a \leftrightarrow 1, b \leftrightarrow 2, c \leftrightarrow 3$ Moslik o'rnatilsa, 1-model 2-modelga aylanadi. Bunday 2 ta modelda berilgan aksiomalar sistemasiga izomorf modellar deb aytiladi.

3. Biz yuqorida aksiomalar sistemasining (qarama-qarshi emasligi) aniq fikrlarni bayon qilishi va haqiqatni ko'rsatish kerakligini ko'rdik.

Shuningdek aksiomalar sistemasiga mantiq nuqtai nazarda ba'zi bir talablar bor:

1) Aksiomalar sistemasining qarama-qarshi emasligi.

2) Aksiomalar sistemasining bog'liqsizligi.

3) Aksiomalar sistemasining to'laligi.

Aksiomalar sistemasini qarama-qarshi emas degan so'z nima?

Bu –qandaydir berilgan aksiomalar sistemasining biror-bir aksiomaga nisbatan yolg'on aksiomaning mavjud emasligini bildiradi.

Masalan: bir vaqtning o'zida biror A jumlasini va uning inkori –rost bo'lishi mumkin emas.

Shunday aksiomalar sistemasini qaraylik:

$$1. (\forall a) (\exists b) [a \sim b]$$

$$2. (\forall a) [a \sim a]$$

$$3. (\forall a, b) [a \sim b \Rightarrow b \sim a \Rightarrow a \sim c]$$

$$4. (\forall a, b, c) [a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c]$$

Bu aksiomalar sistemasida 2 - aksioma qolgan aksiomalar sistemasiga qarama-qarshi bo'ladi.

Aksiomalar sistemasining qarama-qarshi emasligini ko'rsatish uchun, shunday modelni tuzish kerakki, sistemada qarama-qarshiliklar bo'lsa, ularni shu modelga qarama-qarshi modelga o'tkazish zarur.

Aksiomalar sistemasiga qo'yiladigan ikkinchi talab, bu aksiomalar sistemasining bog'liqsizligidir, ya'ni bu aksiomalardan hech birini qolgan aksiomalar orqali keltirib chiqarish mumkin emas.

Masalan: agar biz ekvivalentlik munosabatidagi aksiomalar sistemasiga, ya'ni: $(\forall a, b, c) [a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c]$ ni qo'shsak, u holda uni 1), 3) aksiomalardan

keltirib chiqarish mumkin. Aksiomalar sistemasining qandaydir aksiomasining bog'liqsizligini ko'rsatish uchun, shunday aksiomalar sistemasining modelini tuzish kerakki, bu modelda hamma aksiomalar o'z holicha bayon qilinib, faqat o'sha berilgan aksiomalarga, uning inkori bayon qilinadi.

Aksiomalar sistemasiga qo'yiladigan 3-talab:

Aksiomalar sistemi to'la bo'lishi kerak.

Ta'rif: aksiomalar sistemi to'la deb aytiladi, agar ularning hamma modellari o'zaro izomorf bo'lsa.

4. Boshlangich sinflarda asosan manfiy bo'lmagan butun sonlar bilan ish ko'riladi. Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamiga ta'rif berganda Piano aksiomalari sistemasiga tayanamiz. Italyan olimi Piano 1889 yilda shu aksiomalarni kashf qildi. Piano natural sonlar uchun aksiomalar sistemasini berdi. Quyida keltirilgan aksiomalar sistemi Z_0 uchundir.

Piano aksiomalar sistemi qurilishiga e'tibor beraylik; Bunda:

1. Asosiy tushunchalar "to'plam", "son", tushunchalari olinadi?

2. Asosiy munosabatlar- "ketidan keladi" munosabati tanlanadi.

3. Aksiomalar- keltiriladi. (ular to'rtta)

Ta'rif: Z_0 to'plamga manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami deb aytiladi, agar bu to'plamni elementlari orasida "ketidan keladi" munosabati ta'riflangan bo'lib, bu munosabat quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa:

A:1 Hech qanday son ketidan kelmaydigan 0 soni mavjud.

$$(\exists \bar{a}) \quad [a' = 0] \quad \text{yoki} \quad (\forall a) \quad (a' \neq 0)$$

A:2 Har qanday natural sonning ketidan keluvchi bitta va faqat bitta natural son mavjud.

$$(\forall a, b) \quad [a = b \Rightarrow a' = b']$$

A:3 Har qanday natural son bitta va faqat bitta natural son ketidan keladi.

$$(\forall a, b) \quad [a' = b' \Rightarrow a = b]$$

A:4 (Induksiya aksiomasi) Agar qandaydir sonlardan tuzilgan M to'plam 0-sonni o'z ichiga olsa, va bu to'plamda qandaydir a -natural sonni mavjudligidan uning ketidan keluvchi son ham mavjud bo'lsa, bu holda $M \sim Z_0$ bo'ladi.

Bunda a' – a natural son ketidan keluvchi son.

Induksiya bu xususiylikdan umumiylikka, konkretlikdan abstraklikka o'tish bosqichidir. Indusio- lotincha "yo'l ko'rsatish" ma'nosini bildiradi.

Yuqorida keltirilgan Pianoning 4-aksiomasi xuddi matematik induksiya printsipiga o'xshaydi.

Pianoning 4-aksiomasini matematik induksiya printsipiga o'xshatib quyidagicha aytilishi mumkin:

"Qandaydir R fikr: 1) 0 uchun rost va

2) istalgan x natural son uchun rostligidan, x son ketidan keluvchi x' uchun ham rostligi kelib chiqsa u holda R fikr barcha natural sonlar uchun rost bo'ladi".

Maktab matematika kursida matematik induksiya printsipli quyidagicha ko'rib chiqilgan edi:

“Agar $A(n)$ fikr (bunda n natural son)

1) $n=1$ uchun rost bo'lib va uning

2) $n=k$ uchun rostligidan (bunda k – istalgan natural son) navbatdagi $n=k+1$ son uchun ham rostligi kelib chiqsa u holda $A(n)$ fikr ixtiyoriy natural son n uchun rost bo'ladi”

Ikkinchi qismida $n=k$ uchun fikr rost $A(n)$ –deb faraz qilinib $n=k+1$ uchun fikr $A(n+1)$ –rostligi ko'rsatiladi. Ya'ni $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Isbotlashning shu ikkala bosqichidan foydalanib, $A(n)$ - fikrning barcha n -natural sonlar uchun rostligi kelib chiqadi.

Matematik induksiya metodidan, ayniyatlar to'g'riligini tekshirishda, ifodalar qiymatlarini hisoblashda, xullas tasdiqlarni isbotlashda foydalaniladi.

1-misol : $1+2+3+\dots+n=((1+n)n)/2$ (1) ekanligini isbotlang.

1) $n=1$ bo'lsin $1=((1+1)1)/2$ yoki $1=1$, $A(1)$ - to'g'ri

2) $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin: $1+2+3+\dots+k=((1+k)k)/2$ $A(k)$ -rost

3) $n=k+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatamiz, ya'ni
 $1+2+3+\dots+k+(k+1)=((1+k)(1+(k+1)))/2$; yoki
 $1+2+3+\dots+k+(k+1)=((1+k)(k+2))/2$;

$$(1+2+3+\dots+k)+(k+1)=((1+k)k)/2 + (k+1)=((k+1)(k+2))/2;$$

Demak 1) tenglik barcha n lar uchun rost.

Ta'rif: Agar b –soni a natural sondan keyin kelsa, u holda a natural soni, b natural sonidan oldin keladi deb aytiladi.

1-teorema : Nolga teng bo'lmagan har qanday natural son uchun undan oldin keluvchi natural soni mavjud va u faqat birgina.

Isbot: M -to'plam 0 ni o'z ichiga oluvchi va teorema shartini qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan bo'lsin $0 \in M$

2) $a \in M$ bo'lsin u holda $a^1 \in M$ chunki $a-a^1$ dan oldin keluvchi son. IV aksiomaga asosan $M \equiv Z_0$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Natija1. $(\forall a, b) [a' \neq b' \Rightarrow a \neq b]$ Haqiqatdan ham, $a' \neq b' \Rightarrow a \neq b$ bo'lsin, u holda $a=b \Rightarrow a'=b'$ o'rinli 2- aksiomaga asosan, demak

$$a' \neq b' \Rightarrow a \neq b.$$

1. $(\forall a, b) [a \neq b \Rightarrow a' \neq b']$ Isboti yuqoridagidek bajariladi.

2-teorema : Hech qanday natural son o'zidan oldinda keluvchi natural son bilan teng bo'lolmaydi.

Isbot : M -to'plam, teorema shartini qanoatlantiruvchi barcha a –larni o'z ichiga oladigan to'plam bo'lsin.

$M-0$ ni o'z ichiga oladi. $0 \in M$. Faraz qilamizki, $a \in M$ bo'lsin : $a' \neq a$ ikkinchi tomondan $(a')' \neq a' \Rightarrow a' \in M$ demak: $M \equiv Z_0$

Shu mavzu buyicha talabalarga mustaqil beriladigan vazifa: 1. Quyidagi yig'indini hisoblang: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Mavzu: Nomanfiy butun sonlar to'plamining tartiblanganligi

Muammoli savollar:

1. Istalgan ikkita nomanfiy butun sonlar o'zaro qanday taqqoslanadi?
2. Nomanfiy sonlar to'plami qanday xossalarga ega ?

Tayanch iboralar:

Qo'shish va ko'paytirishning monotonlik shartlari, Zo ning asosiy xossalari: tartiblanganligi, diskretligi, cheksizligi, quyidan chegaralanganlik.

Reja:

1. Zo da tartib munosabati.
2. Natural sonlarni qo'shish va ko'paytirishning monotonlik sharti.
3. Natural sonlar qatorining asosiy xossalari: tartiblanganligi, diskretligi, cheksizligi, quyidan chegaralanganligi.

Piano aksiomalar sistemasi bazasida qurilgan natural sonlar nazariyasi – bu tartiblangan natural sonlar nazariyasidir. Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamini ta'riflashda, bu to'plamda “ketidan keladi” munosabati asos qilib olingan edi.

Shu munosabatga ko'ra a natural son ketidan a' natural son keladi, a' natural sondan boshqa natural son emas.

Natural sonlar qatorida turuvchi 2 ta natural sondan qaysi biri katta? Shu maqsadda Z_0 to'plamda tartib munosabatini berish kerak. Z_0 to'plamda biror son ikkinchi sondan “katta”, “kichik”, “katta emas”, “kichik emas”, “teng” munosabatlari tartib munosabatini tashkil etadi.

Ta'rif: Agar a va b natural sonlari uchun, shunday noldan farqli k soni mavjud bo'lsaki, $a=b+k$ tenglik bajarilsa u holda a son b sondan katta, yoki b son a sondan kichik deb aytiladi, va u $a > b$ yoki $b < a$ deb belgilanadi, ya'ni ta'rifni simvolik yozsak:

$$a > b \Leftrightarrow (\exists k \neq 0) [a = b + k] \quad \begin{matrix} (a > b) \vee (a = b) \Rightarrow a \geq b \\ (a < b) \vee (a = b) \Rightarrow a \leq b \end{matrix}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Ikkita ketma-ket keluvchi natural sonlar uchun quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema: Har qanday natural son o'zidan oldin keluvchi natural sondan katta bo'ladi, ya'ni $(\forall a) [a < a^1]$

Haqiqatdan ham: $a' = a + 1$ $x' = x + 1$ (natijaga asosan)
 $a' > a$ $x' > x$ (ta'rifga asosan).

1-xossa: Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida quyidagi munosabat o'rinli:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 \dots < n < n^1 < \dots$$

2-xossa: 0 soni Z_0 da eng kichik sonidir.

3-xossa: Agar M qandaydir natural sonlar to'plami bo'lib, unda shunday b element topilsaki, $\forall x \in M$ uchun $x < b$ o'rinli bo'lsa, u holda M da eng katta element b bo'ladi.

2-teorema: Natural sonlar qatorida quyidagi munosabatlarning faqat va faqat bittasi bajariladi.

A) $a = b$

b) $a = b + k$ ($a > b$)

v) $b = a + m$ ($a < b$)

Isbot: Oldin shu munosabatlarning 2 tasi bir vaqtning o'zida o'rinli emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun qo'shimcha $a + b \neq b$ (*) munosabatdan foydalanamiz.

1) va 2) hollar bir vaqtda o'rinli emas, chunki

$$b \neq b + k$$

(*) munosabatga asosan 1) va 3) hollar ham bir vaqtda bajarilmaydi $a + m \neq a$ - * munosabatga asosan 2) va 3) hollar ham bir vaqtda bajarilmaydi...

Endi shu hollarning kamida bittasi bajarilishini ko'rsatamiz. Faraz qilamizki, M to'plam - a sonini va berilgan a uchun yuqoridagi munosabatlarning kamida bittasi o'rinli bo'lgan b larni o'z ichiga olsin. Bu to'plam Piano IV aksiomasini qanoatlantiruvchi to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

1) Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda $b = 0$ uchun $a = b$ ni hosil qilamiz, agar

$a \neq 0$ bo'lsa, u holda $b = 0$ uchun teorema 1ga asosan $b < a$ bo'ladi, shunday qilib, $0 \in M$.

2) $b \in M$ bo'lsin, u holda yoki $a = b$, bu paytda ko'rinarliki, $b^1 = b + 1 = a + 1$, ya'ni $a < b^1$ yoki $a < b$; ya'ni $a + k = b \Rightarrow (a + k)^1 = b^1$ $a + k^1 = b^1$ $a < b^1$ yoki $b < a$; ya'ni $b + k = a$; agar $k = 1$ bo'lsa, $b^1 = a$ agar $k \neq 1$ bo'lsa, $k = m^1$ deb

$$a = b + m^1$$

$$a = b + (m + 1)$$

$$a = B + (1 + M)$$

$$a = (B + 1) + M$$

$$a = B^1 + M \Rightarrow a > B^1:$$

$$\text{Demak, } B \in M \Rightarrow B^1 \in M.$$

Piano IV aksiomasiga asosan, teorema barcha N lar uchun o'rinli.

B) Zo da tartib munosabati tranzitivlik xossasiga ega.

$$(a, B, c, \in Z_0) a < B \wedge B < c \Rightarrow a < c$$

$$\text{Haqiqatdan ham } a < B \Leftrightarrow (\exists k \neq 0) [a + k = B]$$

$$B < c \Leftrightarrow (\exists m \neq 0) [B + m = c]$$

$$k = B \wedge B + m = c \Rightarrow (a + k) + m = c \quad a + (k + m) = c \quad a + l = c \quad a < c. \text{ Shuni isbotlash talab qilingan edi.}$$

3-teorema :

$$1) a = B \Rightarrow a + c = B + c \wedge a \bullet c = B \bullet c \quad (\forall a, B, c \in Z_0)$$

$$2) a > B \Rightarrow a + c > B + c \wedge a \bullet c > B \bullet c \quad (\forall a, B, c \in Z_0)$$

$$3) a < B \Rightarrow a + c < B + c \wedge a \bullet c < B \bullet c \quad (\forall a, B, c \in Z_0)$$

Isbot: 1) ning isboti qo'shish va ko'paytirishning yagonaligidan kelib chiqadi.

$$9. a > B \Rightarrow a = B + K$$

Qo'shish uchun

$$a + c = (B + K) + c$$

$$a + c = B + (K + c)$$

$$a + c = B + (c + K)$$

$$a + c = (B + c) + K$$

$$3) a < B \Rightarrow a + m = B$$

Qo'shish uchun

$$(a + m) + c = B + c$$

$$a + (m + c) = B + c$$

$$a + (c + m) = B + c$$

$$(a + c) + m = B + c$$

$$a + c < B + c$$

Ko'paytirish uchun:

$$a \bullet c = (B + K) \bullet c$$

$$a \bullet c = B \bullet c + K \bullet c$$

$$a \bullet c = B \bullet c + \pi$$

$$a \bullet c > B \bullet c$$

Ko'paytirish uchun:

$$(a + m) \bullet c = B \bullet c$$

$$a \bullet c + m \bullet c = B \bullet c$$

$$a \bullet c + l = B \bullet c$$

$$a \bullet c < B \bullet c$$

Teoremani isbotlashda qo'shish va ko'paytirishning o'rin almashtirish, guruhlash hamda ko'paytirishning qo'shishga nisbatan tarqatish qoidalaridan foydalaniladi.

4-teorema (Teskari teorema)

$$1) a+c=B+c \vee a \bullet c=B \bullet c \Rightarrow a=B$$

$$2) a+c>B+c \vee a \bullet c>B \bullet c \Rightarrow a>B$$

$$3) a+c<B+c \vee a \bullet c<B \bullet c \Rightarrow a<B$$

Ushbu teorema isboti mustaqil topshiriladi.

Yuqorida kiritilgan tartib munosabati Z_0 ning diskret to'plam ekanligini ko'rsatadi, ya'ni a va $a+1$ sonlari orasida boshqa natural son yo'qligini ko'rsatadi. Quyidagi teorema o'rinli:

5-teorema : Natural sonlar qatorida n va $n+1$ natural sonlari yonma-yon turuvchi sonlardir, ya'ni $n < a < n+1$ shartni qanoatlantiruvchi natural son mavjud emas.

Isbot: Faraz qilamizki 1) $a > n$ bo'lsin. U holda $\exists k \neq 0$ son mavjudki, $a = n+k$ bo'ladi.

Bu erda $k \geq 1$ tengsizlikning ikkala tomoniga n ni qo'shamiz.

$$n+k \geq n+1 \quad a=n+k \text{ bo'lgani uchun}$$

$$I \quad \left. \begin{array}{l} a \geq n+1 \\ a > n \end{array} \right\} \Rightarrow a - n + 1 \text{ dan katta bo'lishi kelib chiqadi.}$$

2) $a < n+1$ bo'lsin, ta'rifga ko'ra

$$a+m = n+1 \quad m \geq 1, \text{ bundan}$$

$$a+1 \leq n+1 \text{ yoki}$$

$$a \leq n$$

$$II \quad \left. \begin{array}{l} a < n+1 \\ a \leq n \end{array} \right\} \Rightarrow a - n \text{ dan kichik}$$

I va II lardan ko'rinadiki, n va $n+1$ sonlari yonma-yon turuvchi sonlardir. Nomanfiy butun sonlar to'plami xossalarini yorituvchi quyidagi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

6-teorema: Har qanday manfiy bo'lmagan son noldan kichik emas, 0- natural sonlar to'plamining eng kichik elementidir.

Bu teoremadan, Z_0 ning quyidan chegaralanganligi kelib chiqadi.

In $f \quad Z_0=0$; In $f \quad N=1$ (quyidan chegaralangan)

7-teorema . Natural sonlar to'plamida Arximed aksiomasi o'rinli: ya'ni $\forall a$ va b sonlar uchun $\exists n \in N$ topiladiki, $b \bullet n > a$ bajariladi.

7-teoremadan natural sonlar to'plamining cheksizligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, xulosa qilsak, manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami: cheksiz; quyidan chegaralangan (0 soni bilan); yuqoridan chegaralanmagan, diskret; tartiblangan to'plam ekan.

Mavzu: Nomanfiy butun sonlar yigindisi va ko'paytmasi.

Muammoli savollar:

1. a va b sonlarning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
2. a va b sonlarning ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
3. Nomanfiy butun sonlarni qo'shish qanday xossalarga ega?
4. Nomanfiy butun sonlarni ko'paytirish qanday xossalarga ega?

Tayanch iboralar:

Qo'shish va ko'paytirish aksiomalari, qo'shiluvchi, yigindi, ko'paytuvchi, ko'paytma, kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik qonunlari.

Reja:

1. Nomanfiy butun sonlarda "qo'shish" amalining mavjudligi va yagonaligi.
2. Qo'shishning Zo dagi xossalari.
3. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining mavjudligi va yagonaligi.
4. Ko'paytirish amalining Zo dagi xossalari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. А.А. Столяр, Л.П. Лельчук. Математика. Минск. 1975.
2. Н. Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: Просвещение, 1977.
3. Демидов. Основание арифметики. М.: 1972.
4. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ылитувчи», 1991.
5. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.

Ta'rif: a va b natural sonlarning yig'indisi deb, Zo natural sonlar to'plamida ta'riflangan shunday algebraik amalga aytiladiki, bu amal quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa:

V: -Nomanfiy butun a son uchun $a+0=a$ (0 - Zo da qo'shishga nisbatan neytral element)

Misol: $1+0=1$, $5+0=5$, $10+0=10$.

Boshlang'ich sinf kitoblarida ham biz bunga o'xshagan misollarni ko'plab uchratishimiz mumkin. Jumladan 1-sinf matematika kitobining 0 dan 10 gacha bo'lgan sonlar ustida amallar bo'limida shunday misollar keltirilgan.

$5+0=5$, $3+0=3$, $6+0=6$

VI: Ixtiyoriy a , b nomanfiy butun sonlar uchun $a+b=(a+b)$

Misol: $a=5$, $b=2$ bo'lsin. 6-aksioma to'g'riligini tekshiramiz.

$a+b=5+2=7$, $(a+b)=(5+2)=7$

0 , 0^I , 0^{II} , 0^{III} , 0^{IV} - ifodalarni sonlar orqali quyidagicha belgilaymiz: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Natija: $(\forall a)[a'=a+1]$

6-aksiomaga asosan $b=0$ deb olib, $a+0=(a+0)$ ni hosil qilamiz, lekin 0 ni 1 deb olib, $a+0=a$ bo'lib, $a+1=a'$.

1-teorema: Natural sonlarni qo'shish amali mavjud va u amal yagonadir.

Misol: $551+320=871$.

Istalgan natural sonlarni doim qo'shish mumkin. Bu teorema isboti 2 bosqichdan iborat.

1. Natural sonlar yigindisi mavjud

2. U yagona.

1. Shu amalning yagonaligini isbot qilamiz. Zo da “qo’shish” amali ikkita bir-biridan farqli bo’lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $a+B=X_B$, $a+B=Y_B$.

Farazimizga asosan $X_B \neq Y_B$. Hozir biz ko’rsatamizki, $(\forall B)[X_B=Y_B]$ M-to’plam $X_B=Y_B$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha B larni o’z ichiga olgan bo’lsin. $M=Z_0$ ekanligini isbotlaymiz.

V –aksiomaga asosan

$$X_0=a+0=a$$

$$Y_0=a+0=a \text{ bundan } X_0=Y_0 \quad 0 \in M.$$

$B \in M$, $X_B=Y_B$ II – aksiomaga asosan $(X_B)'=(Y_B)'$ bo’ladi.

$$(X_B)'=(a+B)'=a+B'=X_B'$$

$$(Y_B)'=(a+B)'=a+B'=Y_B' \text{ bundan } B' \in M.$$

1), 2) lardan IV-aksiomaga ko’ra $M=Z_0$.

Shunday qilib biz qo’shish amalining yagonaligini isbotladik

2. Z_0 da qo’shishning xossalari:

Yuqorida keltirilgan qator aksiomalardan quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1-xossa: Manfiy bo’lmagan butun sonlar to’plami nolni yutish xossasiga ega.

$$(\forall a \in Z_0) [0+a=a].$$

Isbot: $P(a)$ - $0+a=a$ ni ifodalasin. Biz $P(a)$ ning barcha a lar uchun o’rinli ekanligini isbot qilamiz.

1) $a=0$ $0+a=a$ dan $0+0=0$ (5-aksiomaga ko’ra) $P(0)$ - rost.

2) Endi $P(a) \Rightarrow P(a')$ ko’rsatamiz. $0+a=a$ bo’lsin. Bundan $(0+a)'=a'$ (2-aksiomaga ko’ra). $(0+a)'=0+a' \Rightarrow a'=0+a'$ (6-aksiomaga ko’ra).

Demak, $(0+a=a) \Rightarrow (0+a'=a')$ 1), 2) lardan 4-aksiomaga ko’ra $(\forall a \in Z_0) [0+a=a]$.

2-xossa: Manfiy bo’lmagan butun sonlarni qo’shish amali o’rin almashtirish (kommutativlik) xossasiga ega. Ya’ni $(\forall a, B) [a+B=B+a]$

$$\text{Misol: } 51+49=49+51=100$$

Isbot: Bu teoremani B ga ko’ra induksiya yo’li bilan isbotlaymiz.

$P(B)$ - « $a+B=B+a$ » ni ifodalasin.

1) $a+0=a$ (V -aksiomaga asosan) $a=0+a$ 1-xossaga asosan. Bu yerdan ko’rinadiki $a+0=0+a$, ya’ni $P(0)$ -rost.

2) Endi $P(a) \Rightarrow P(a')$ ni isbotlaymiz. $P(B)$ - rost bo’lsin, ya’ni

$a+B=B+a \Rightarrow (a+B)'=(B+a)'$ (2- aksiomaga ko’ra). 6- aksiomaga asosan

$$(a+B)'=a+B' \Rightarrow a+B'=B'+a$$

$$(B+a)'=B'+a.$$

Demak, $(a+B)=(B+a) \Rightarrow (a+B'=B'+a)$ ya’ni $P(B) \Rightarrow P(B')$.

3- xossa: Nomanfiy butun sonlarni qo’shish amali guruhlash (assotsiativlik) xossasiga ega, ya’ni $(\forall a, B, c \in Z_0) [(a+B)+c=a+(B+c)]$ xossaning isbotini c buyicha olib boramiz.

1) $c=0$ da $(a+B)+0=a+B$ (5-aksiomaga ko’ra).

$a+(B+0)=a+B$ (5-aksiomaga ko’ra) $(a+B)+0=a+(B+0)$ $P(0)$ -rost.

2) $P(c)$ - rost bo’lsin, ya’ni $(a+B)+c=a+(B+c)$ –rost, bundan kelib chiqadiki, $[(a+B)+c]'=[a+(B+c)]'$ 6-aksiomaga asosan $(a+B)+c'=a+(B+c)'$, yana bir marta 6-

aksiomani $(a+b)+c=a+(b+c)$ $P(c)$ -rost. Demak, induksiya aksiomasiga asosan 3-xossa ixtiyoriy Z_0 to'plam elementlari uchun o'rinli.

Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasining mavjudligi va yagonaligi

Ta'rif: a va b natural sonlarning ko'paytmasi deb, shunday algebraik amalga aytiladiki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

VII: $(\forall a \in Z_0) a \bullet 0 = 0$

VIII: $(\forall a, b \in Z_0) a \bullet b = a \bullet b + a$

Shu o'rinda bir narsani aytish lozimki, 7-aksiomaga asoslangan misollarni boshlangich sinflarning matematika darsliklaridagi ko'pgina misollarda ko'rishimiz mumkin. $3 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 2 = 0$, $4 \cdot 0 = 0$, $7 \cdot 0 = 0$

Istalgan ikkita nomanfiy butun sonlarning ko'paytmasi mavjudmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

2-teorema. Natural sonlarni ko'paytirish amali mavjud va u yagona.

Isbot: 1) yagonaligini isbotlaymiz, teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz, ya'ni bu amal 2 ta turlicha qiymatga ega bo'lsin deb faraz qilaylik:

$$a \bullet b = x_b, a \bullet b = y_b \text{ Farazimizga asosan } x_b \neq y_b (\forall b)$$

M to'plam $x_b = y_b$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha b larni o'z ichiga olgan bo'lsin.

$M = Z_0$ ekanini isbotlaymiz. 7-aksiomaga asosan:

$$x_0 = a \bullet 0 = 0$$

$$y_0 = a \bullet 0 = 0 \text{ bundan } x_0 = y_0; \text{ Demak, } 0 \in M$$

$b \in M$ bo'lsin, $a \bullet b = a \odot b$ bo'lsin, endi $b' \in M$ ekanligini ko'rsatamiz: $a \bullet b' = a \bullet b + a = a \odot b + a = a \odot b'$; $b' \in M$. Demak, $M = Z_0$ ($\odot$ amal ikkinchi xil ko'paytirish deb tushuniladi)

Ko'paytirish amalining xossalari:

Yuqoridagi ta'rif va teoremalardan ko'paytirish amalining qator xossalari kelib chiqadi.

1⁰. $1 \cdot a = a$. Har qanday sonni birga ko'paytirsak, shu sonning o'zi hosil bo'ladi.

2⁰. Ko'paytirish amali kommutativlik xossasiga ega. $a \cdot b = b \cdot a$. Misol: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

3⁰. Ko'paytirish amali assotsiativlik (guruhlash)xossasiga ega.

$$(\forall a, b, c \in N_0) [(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)]$$

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Misol: $2 \cdot 17 = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 7 = 20 + 14 = 34$

4⁰. Nomanfiy natural sonlarni ko'paytirish amali qo'shishga nisbatan tarqatish xossasiga ega.

$(\forall a, b, c \in N_0) [a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c]$. Bu xossani isbotini keltiraylik.

Isbot: a, b - ixtiyoriy natural sonlar. M -to'plam shunday natural sonlar to'plamiki, bu to'plam M elementlari uchun teorema o'rinli bo'lsin agar $c=0$ bo'lsa

1) $a \bullet (b+0) = a \bullet b$. $a \bullet b + a \bullet 0 = a \bullet b + 0 = a \bullet b \Rightarrow a \in M$.

2) $\forall c \in M$ uchun $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ bo'lsin

3) $a \bullet (b+c') = a \bullet (b+c) = a \bullet (b+c) + a = a \bullet b + a \bullet c + a = a \bullet b + a \bullet c' \Rightarrow c' \in M$.

Demak, IV aksiomaga asosan $M = N_0$ bo'ladi.

Mavzu: Manfiy bo'lmagan butun sonlarni ayirish va uning xossalari.

Muammoli savollar;

- 1) Noma'lum qo'shiluvchi qanday topiladi?
- 2) Ikki son ayirmasi qachon bajariladi?
- 3) Ayirish amali qanday xossalarga ega?

Reja:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlarni ayirish.
2. Ayirish amalining bajaruvchanligi va bir qiymatliligi.
3. Ayirish amalining xossalari.

Tayanch iboralar:

Ayirish amali, kamayuvchi, ayriluvchi, ayirma, ayirmani bajaruvchanlik sharti, ayirish amali xossalari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. А.А. Столяр, Л.П.Лельчук. Математика. Минск. 1975.
2. Н. Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: Просвещение, 1977.
3. М.К.Гребенча, С.Е.Ляпин. Арифметика. Пособие для учительских институтов. Учпедгиз. 1952.
4. Демидов. Основание арифметики. М.: 1972.
5. В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.

O'zimizga, agar ikki qo'shiluvchilar yig'indisi a va shu qo'shiluvchilarning birortasi b sonlari ma'lum bo'lganda, ikkinchi qo'shiluvchini topish masalasini qo'yaylik. Bu masalaning berilishidan bevosita ko'rish mumkinki, bu qo'shish amaliga teskari masala. Bu qo'shiluvchilardan izlanadiganni x deb, 2-qo'shiluvchini b deb olsak, u holda $a=b+x$ o'rinli bo'ladi. x ni topish uchun bizga a va b sonlari ayirmasi ta'rifini berishimiz kerak.

Ta'rif: a va b sonlarning ayirmasi deb, $a=b+x$ shartni qanoatlantiruvchi x soniga aytiladi. Bunda: a - kamayuvchi; b - ayriluvchi; x - ayirma. a va b sonlarning ayirmasi $a-b$ deb belgilanadi: (-ayirish amali).

Ikki son ayirmasini topish amaliga ayirish amali deb aytiladi.

Ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal. Ikki son ayirmasi qachon mavjud, qachon bajariladi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

2.1-teorema: a) $b-a$ ayirma mavjud bo'lishi uchun $a \leq b$ ($b \geq a$) – aayriluvchining kamayuvchidan oshmasligi zarur va yetarlidir.

b) Agar $b-a$ ayirma mavjud bo'lsa, bu yagonadir;

$$(\forall a, b) \{ (\exists x) x = b - a \Rightarrow a \leq b \}$$

Isbot: Teoremani isbotlash uchun

$$1. (\exists x) \{ x = b - a \Rightarrow a \leq b \}$$

$$2. a \leq b \Rightarrow (\exists x) [x = b - a]$$

3. $(\exists x_1 x_2)[x_1 \neq x_2 \wedge x_1 = b - a \wedge x_2 = b - a]$
 ekanliklarini ko'rsatamiz.

Ta'rifga asosan; $x = b - a \Rightarrow b = x + a$

Agar a) $x=0$ bo'lsa, $a=b$ bo'ladi

b) $x>0$ bo'lsa $b=x+a \Rightarrow b>a$ ($a<b$)

demak, $x \geq 0$ bo'lsa $a \leq b$ bo'ladi. 1) o'rinli

2. $a \geq b \Rightarrow (\exists x)[b-a=x]$ – ni ko'rsatamiz

Agar $a=b$ bo'lsa, u holda $b=a+0$ ayirish ta'rifiga asosan $0=b-a$ ya'ni agar $a<b$ bo'lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga asosan

$$a < b \Rightarrow (\exists x)[b = a + x] \Rightarrow [x = b - a]$$

2) hol ham o'rinli

3) Faraz qilamizki, $a < b \Rightarrow (\exists x)[b = a + x] \Rightarrow [x = b - a]$. Ayirish amali ta'rifiga ko'ra $b=x_1+a$ va $b=x_2+a$ sonli tenglikning tranzitivlik xossasiga ko'ra

$x_1+a=x_2+a$ bundan $x_1=x_2$ bu esa $x_1 \neq x_2$ ga zid.

Bu ziddiyatlik farazimizga asosan hosil bo'ldi. Demak, ayirma mavjud bo'lsa, bu ayirma doim bir qiymatlidir.

3. Quyida ayirish amali bajaruvchan deb qarab, qator xossalarini qarab chiqamiz.

1-xossa: Agar ayirmaga ayiruvchini qo'shsak, u holda kamayuvchi hosil bo'ladi.

$(a-b)+b=a$. Haqiqatdan ham $a-b=c$ bo'lsin, ta'rifga ko'ra, $a=b+c$ yoki $c+b=a$, lekin $c=a-b$ $(a-b)+b=a$ bo'ladi.

2-xossa: Agar ikki son yig'indisidan bitta qo'shiluvchini ayirsak, ikkinchi qo'shiluvchi kelib chiqadi.

$(a+b)-b=a$. Haqiqatdan ham $(a+b)-b=x$ bo'lsin, ta'rifga ko'ra

$$a+b=x+b \Rightarrow a=x$$

3-xossa: Berilgan songa ikki son ayirmasini qo'shish uchun, songa dastlab kamayuvchini qo'shib, ayiriluvchini ayirish kifoya.

Ya'ni: $a+(b-c)=a+b-c$

Isbot: $a+(b-c)=x$ bo'lsin. Tenglikning ikkala tomoniga c ni qo'shamiz. $a+(b-a)+c=x+c$ $(b-c)+c=b$ ekanligi $a+b=x+c$. Ayirish amali ta'rifiga ko'ra $a+b-c=x$. U holda $a+(b-c)=a+b-c$ bo'ladi.

4-xossa: Sondan ikki son ayirmasini ayirish uchun, shu sondan qo'shiluvchilarni ketma-ket ayirish kifoya.

$a-(b+c)=a-b-c$ bunda $a \geq b+c$

Isbot: $a-(b+c)=x$ bo'lsin. Ayirish amali ta'rifiga ko'ra $a=x+(b+c)$ yoki qo'shish amalining o'rin almashtirish xossasiga ko'ra $a=x+(c+b)$, qo'shish amalining guruhlash xossasiga ko'ra $a=(x+c)+b$, ta'rifga ko'ra, $a-b=c+x$ $a-b=x+c$, yana ayirish amali ta'rifiga ko'ra $a-b-c=x$.

Demak, $a-(b+c)=a-b-c$

5-xossa: Sondan ayirmani ayirish uchun sondan kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya.

Ya'ni: $a-(b-c)=a-b+c$, bunda $b \geq c$; $a \geq b-c$

Isbot: $a-(b-c)=x$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $a=x+(b-c)$ tenglikni ikkala tomoniga c ni qo'shamiz.

$$a+c=x+[(b-c)+c] \quad a+c=x+b$$

Ta'rifga ko'ra $x=a+c-b$ yoki $x=a-b+c$. Demak, $a-(b-c)=a-b+c$

6-xossa: Ko'paytirish amali ayirish amaliga ko'ra tarqatish (distributlik) qonuniga ega. $(a-b) \bullet c = a \bullet c - b \bullet c$.

Isbot: Haqiqatdan ham $(a-b) \bullet c + b \bullet c = [(a-b) + b] \bullet c = a \bullet c$.

Yoki. $(a-b) \bullet c + b \bullet c = a \bullet c$. Ta'rifga ko'ra $(a-b) \bullet c = a \bullet c - b \bullet c$.

7 - xossa $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d)$. Ayirmalar yig'indisi kamayuvchilar yig'indisi bilan ayiriluvchilar yig'indilarining ayirmasiga teng.

Isbot: $(a-b) + (c-d) + (b+d)$. Yig'indini qaraymiz. Qo'shish amalining assosativlik, kommutativlik xossalarga asosan

$$(a-b) + (c-d) + (b+d) = [(a-b) + b] + [(c-d) + d] = a + c.$$

Demak, $(a-b) + (c-d) + (b+d) = a + c$. Ta'rifga ko'ra.

$$(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d).$$

8-xossa: Yigindidan sonni ayirish uchun, ayiriluvchi sonni qo'shiluvchilarning birortasidan ayirish kifoya.

$$(a+b) - c = (a-c) + b = a + (b-c), \quad \text{agar} \quad a > c \quad b > c:$$

Isbot: $(a+b) - c = x$ bo'lsin ta'rifga asosan. $a+b = x+c$ Tenglikning ikkala tomondan bir xil son b ni ayirib, $a = x+c-b \Rightarrow a = c + (x-b)$, $x \geq b$.

Ta'rifga asosan $a - c = x - b$ yoki $(a-c) + b = x$. Demak, $(a+b) - c = (a-c) + b$.

9-xossa: Ayirmadan sonni ayirish uchun, sonli ayiruvchiga qo'shib, yigindini kamayuvchidan ayirish kifoya.

$$(a-b) - c = a - (b+c) \quad a-b > c;$$

Isbot: $(a-b) - c = x$ bo'lsin. Tarifga ko'ra. $a-b = x+c$ bo'ladi. Ya'ni, ta'rifga asosan. $a = x + (b+c)$ yoki

$$x = a - (b+c) \text{ Demak, } (a-b) - c = a - (b+c).$$

Har bir xossa bayonidan so'ng misollar, qolaversa boshlangich sinf darsligidan misollar keltirilib, nazariy tushuncha mustahkamlanadi.

Shunday qilib, xulosa qilsak, ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal bo'lib, ayirma faqat va faqat ayiriluvchi kamayuvchidan katta bo'lmagan holda mavjud bo'lib u bir qiymatli bo'ladi.

Mavzu: Manfiy bo'lmagan butun sonlarni natural sonlarga bo'lish.

Muammoli savollar:

1. Bo'lish amali qaysi amalga teskari amal sifatida ta'riflanadi?
2. Nomanfiy butun sonni natural songa bo'lish deb nimaga aytiladi?
3. Bo'lish amalini har doim bajarish mumkinmi?

4. Bo'lish amali qanday xossalarga ega?

Reja:

1. Bo'lish ta'rifi.
2. Bo'lish amalini bajaruvchanligi.
3. Bo'lish amalining xossalari.

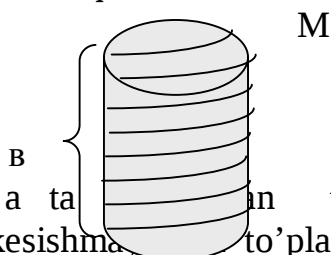
Tayanch iboralar:

Bo'lish amali, bo'linuvchi, bo'luvchi, bo'linma, bo'lish amali xossalari.

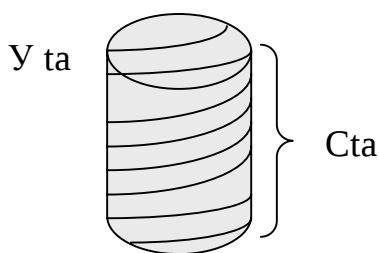
Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ўқитувчи», 1991.
3. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
4. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
5. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
6. А. Нурметов, Л. Левенберг, И. Ашмаджонов. Бошланғич синфларда математика ўқитиш методикаси. Т.: «Ўқитувчи», 1985.

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida bo'lish amali algebraik amal sifatida chekli to'plamni teng quvvatli to'plam ostilarga bo'lish masalasidan kelib chiqadi. a ta



1. M to'plam a ta an tuzilgan bo'lsin. Har birida b tadan nechta o'zaro kesishma to'plam ostilarini tuzish mumkin? Bu masalani odatda ma'noga qarab bo'lish deyiladi.



2. a ta elementli M to'plam c ta teng quvvatli to'plam ostilarga ajratilgan. Har bir to'plam ostiga nechta element mavjud bo'ladi?

Bu masalani esa "teng qismga bo'lish" deb aytiladi.

Faraz qilaylik, bu ikkala masala echimga ega.

x-birinchi masala echimi, y-ikkinchi masala echimi bo'lsin. Birinchi masalaga ko'ra, berilgan b soni a soni ichida necha marta borligini ko'rsatsa, ikkinchi masalada esa har bir qism (to'plam osti)da nechtdan element borki, ularni c tasi a ga teng bo'lsin.

Bu ikkala masalani ko'paytma shaklida quyidagicha yoza olamiz.
 $b \cdot x = a$ va $y \cdot c = a$

Birinchi masalada ko'payuvchini topish kerak bo'lsa, ikkinchi masalada ko'paytuvchini topish talab qilinadi. Bu ikkala masalani echish uchun bo'lish amalidan foydalanamiz.

Shuning uchun bo'lish amali ta'rifini beraylik:

Ta'rif: a sonining b soniga bo'linmasi deb, $bx = a$

tenglikni qanoatlantiruvchi x soniga aytiladi. Bo'linmani topish amaliga bo'lish amali deb aytiladi.

Bu erda a - bo'linuvchi: b - bo'luvchi: x -bo'linma. a va b sonlarning bo'linmasi: $a:b$ yoki $\frac{a}{b}$ deb belgilanadi.

Bo'lish amali doimo mavjudmi, qachon bajariladi?

2 Bo'luvchi nolga teng bo'lgan holni qaraylik, bo'linma noldan farqli bo'lsin. U holda bo'linuvchi ham nolga teng bo'ladi. $a \cdot c = 0$ tenglik istalgan c lar uchun o'rinli, ya'ni $0:0$ ifoda istalgan sonni beradi. Shuning uchun $0:0$ - ifoda bir qiymatli emas ya'ni aniqmaslikdir.

Agar $a \neq 0$ bo'lib, $0 \cdot c = a$ bo'lsa, bu tenglik noto'g'ri chunki $c = a:0$ - hech qanday sonni bermaydi. Shuning uchun nolga bo'lish mumkin emas.

B - natural son bo'lsin. B natural son bilan manfiy bo'lmagan butun sonlar ko'paytmasi qatorini qarab o'taylik.

$B \bullet 0 = 0$; $B \bullet 1 = B$; $B \bullet 2 = 2B$; $B \bullet 3 = 3B \dots, n \bullet B, \dots$

Bu qator sonlarga B soniga karrali sonlar deb aytiladi. Bu sonlar qatori monotonlik shartlariga ko'ra chiziqli tartiblangan ya'ni $0 < b < 2b < 3b < \dots < n \cdot b < \dots$

Agar $B=1$ bo'lsa, u holda B ga karrali sonlar qatori bilan ustma – ust tushadi.

Agar $B>1$ bo'lsa, u holda shunday son topiladiki u B ga karrali emas.

Masalan: istalgan a uchun $\epsilon \bullet k < a < \epsilon(k+1)$, $k \in N$

Bunday a lar uchun $a = B \bullet n$, $n \in N$ tenglik bajarilmaydi, ya'ni a ni B ga bo'lish mumkin emas, $a = B \bullet n$ bo'lsa, u holda $n = a:B$ o'rinli.

Demak, xulosa qilsak, faqat va faqat a soni B soniga karrali bo'lgandagina, manfiy bo'lmagan butun son a ni natural son B ga bo'lish mumkin. O soni barcha sonlarga bo'linadi va natijada nol chiqadi.

Ta'rif: Agar a sonini B ga bo'lish amali mavjud bo'lsa, u holda $a:B$ deb simlovik belgilanadi va quyidagi teng kuchli jumalardan bittasi qo'llaniladi: “ a B ga karrali”, “ a B ga bo'linadi”, “ a ni B bo'ladi”, “ B a ning bo'luvchisi bo'ladi”.

Shuningdek ba'zi adabiyotlarda a/B belgilardan ham foydalaniladi.

Agar bo'lish amali mavjud bo'lsa, bu amal natijasi nechta, bir qiymatli bo'la oladimi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema: Agar bo'lish amali mavjud bo'lsa, u holda bo'linma yagonadir.

Isbot: teskarisini faraz qilish metodidan foydalanib isbotlaymiz:

$$a:b=c \text{ va } a:b=d, \text{ lekin } c \neq d \text{ bo'lsin}$$

Ta'rifga ko'ra, $a=b \bullet c$ va $a=b \bullet d$ o'rinli

bu erdan $b \bullet c = b \bullet d$ yoki $b \neq 0 \Rightarrow c=d$

Bu ziddiyatlik farazimizga ko'ra hosil bo'ldi. Demak farazimiz noto'g'ri bo'lib, bo'linma mavjud bo'lsa u har doim yagonadir.

Bo'lish amalining xossalari:

1-xossa: Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida bo'lish amali algebraik amal emas. (bo'lish amali Zo da ta'riflanmagan)

Masalan: $b > 1$ uchun $(b+1):b$, chunki $b < b+1 < 2b$ $b+1$ soni b ga karrali emas, misolda $5:4$

2-xossa: Bo'lish amali assotsiativlik xossasiga ega emas $(\forall a, b, c)$
 $[a:(b:c) \neq (a:b):c]$ buni 1ta misolda ko'rish kifoya:

Misol:

$$8:(4:2) \neq (8:4):2$$

$$8:2 \neq 2:2$$

$$4 \neq 1$$

3-xossa: Agar kichik natural son, katta natural songa bo'linsa, u holda kichik natural son nolga teng bo'ladi: $(a < b) \wedge (a:b) \Rightarrow a=0$ o'rinli

Haqiqatdan ham agar, $a \neq 0$ deb qaralsa, u holda $0 < a < b$, a sonining b ga karrali emasligi kelib chiqadi. Bu esa $a:b$ ga zid.

4-xossa: Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida bo'lish amali kommutativ emas. Ya'ni: $(\forall a, b)[a:b \neq b:a]$ faqat va faqat $a \neq b$ da o'rinli xolos; misol $8:4 \neq 4:8$

5-xossa: Bo'linmani bo'luvchiga ko'paytirganda bo'linuvchi hosil bo'ladi: $(a:b) \bullet b = a$

Isbot: $a:b=x$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra $a=b \bullet x$ o'rinli bo'ladi. Demak tenglikda $(a:b) \bullet b = x \bullet b = b \bullet x = a$; Shuni isbotlash kerak edi.

Misol: $(8:4) \bullet 4 = 8$

6- xossa: Tenglikning har ikkala tomonini noldan katta bo'lgan umumiy ko'paytuvchiga qisqartirib yuborish mumkin: $(\forall c > 0)[ac = bc \Rightarrow a = b]$

Haqiqatdan ham: $ac=bc$ bo'lish amali ta'rifiga asosan $a \cdot c : c = a$ $bc : c = b$

bo'linmaning yagonaligi haqidagi teoremdan $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ hosil bo'ladi.

7- xossa: Bo'linuvchi va bo'luvchilarni bir vaqtda noldan katta bo'lgan songa ko'paytirganda yoki bo'lganda bo'linma o'zgarmaydi:

$$(\forall c > 0)[a:b = a \cdot c : b \cdot c]$$

Haqiqatdan ham, $a \cdot c : b \cdot c = x$ ta'rifga ko'ra $ac = xbc$ yoki 6-xossaga asosan $a = xb$ yoki ta'rifga ko'ra $x = a:b$ hosil bo'ladi. shu xossadan kelib chiqadi $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

8- xossa: Sonni ko'paytmaga bo'lish uchun shu sonni ko'paytuvchilarga birin – ketin bo'lish kerak.

$$a:(b \cdot d) = (a:b):d$$

Isbot : $a:(b \cdot d) = x$ bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $a = (b \cdot d) \cdot x$ yoki $a = b \cdot (d \cdot x)$ ta'rifga ko'ra $a:b = d \cdot x$ yana bir marta ta'rifni qo'llasak $(a:b):d = x$ bo'ladi.

$$\text{Misol : } 12:(4 \cdot 3) = (12:4):3 = (12:3):4$$

9-xossa: Agar ko'paytuvchilarning birortasi biror songa bo'linsa, u holda ko'paytmani shu songa bo'lish uchun, shu ko'paytuvchini songa bo'lib, ikkinchi ko'paytuvchiga ko'paytirish kerak

$$(b:c) \Rightarrow a \cdot b : c = a \cdot (b:c)$$

Isbot : $b:c = x$ bo'lsin, u holda $b = c \cdot x$ o'rinli $a \cdot b : c = a \cdot c \cdot x : c = ax = a \cdot (b:c)$ Shuni isbotlash kerak edi.

$$\text{Misol : } (12:3) \cdot 5 = 12:3 = 5 \cdot (12:3) \quad 20 = 20 - \text{o'rinli .}$$

10-xossa: Bo'linmani songa ko'paytirish uchun, bo'linuvchini songa ko'paytirish va ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish kerak $(b:c) \cdot a = a \cdot b : c$

Bu xossa isboti bevosita 9-xossadan kelib chiqadi. (Vazifa).

11-xossa: Agar bo'linuvchi c soniga karrali bo'lsa u holda bo'linmani c soniga ko'paytirish uchun bo'linuvchini o'zgartirmagan holda bo'luvchini c soniga bo'lish kerak.

$$(b:c) \Rightarrow (a:b) \cdot c = a : (b:c)$$

12,13-xossalar: Agar qo'shiluvchilar c soniga karrali bo'lsa, u holda yig'indi (ayirma) ni c soniga bo'lish uchun har bir qo'shiluvchini c soniga bo'lish kifoya.

$$\text{Ya'ni : } (a:c) \wedge (b:c) \Rightarrow (a \pm b):c = a:c \pm b:c$$

Isbot : (qo'shish amali uchun)

$$(a+b):c = x \quad a:c + b:c = y \text{ bo'lsin}$$

$$a+b = c \cdot x \quad c \cdot (a:c + b:c) = c \cdot y$$

$$a+b = c \cdot x \quad a+b = c \cdot y$$

$$x=y \text{ kelib chiqadi.}$$

Shunday qilib, xulosa qilsak, manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plamida bo'lish amali, ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida ta'riflanib, bo'linuvchi bo'luvchiga karrali bo'lgan vaqtdagina, bo'linma mavjud va bir qiymatli bo'ladi...

Foydalanilgan adabiyotlar:

- 1.Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ўқитувчи», 1991.
- 2.Н.Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: 1977.
- 3.В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
- 4.А.М.Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
- 5.А.Нурметов, Л.Левенберг, И.Ашмаджонов. Бошланғич синфларда математика ўқитиш методикаси. Т.: «Ўқитувчи», 1985.

Mavzu: Natural son va nol tushunchasining nazariy to'plam ma'nosi.

Reja:

- 1.Tartibiy va miqdoriy natural sonlar.
- 2.Miqdoriy natural son va nolning nazariy to'plam ma'nosi.

Muammoli savollar:

- 1.Tartibiy natural sonlar deb nimaga aytiladi?
- 2.Miqdoriy natural son nima?
3. Natural qatorning N kesmasi deganda nimani tushunasiz?
- 4.Miqdoriy natural son va nolning nazariy to'plam nuqtai nazarda qanday talqin qilish mumkin?

Tayanch iboralar:

Son, natural son, tartibiy natural son, miqdoriy natural son, nol soni.

Foydalanilgan adabiyotlar:

- 1.Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ўқитувчи», 1991.
- 2.Н.Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: 1977.
- 3.В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
- 4.А.М.Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
- 5.А.Нурметов, Л.Левенберг., И.Ашмаджонов. Бошланғич синфларда математика ўқитиш методикаси. Т.: «Ўқитувчи», 1985.

Natural son tushunchasining vujudga kelish tarixi va uni turlicha usullarda talqin qilinishi to'g'risida oldingi mavzularda to'xtaldik. Bu mavzuga

natural sonning nazariy to'plam nuqtai nazarida talqini bilan tanishib o'tamiz. Masalan, beshta buyumdan iborat guruhning sanog'i haqida "qo'lda qancha barmoq bo'lsa, shuncha, yigirma buyumdan iborat to'plamning sanogi haqida odamda qancha barmoq bo'lsa o'shancha" deb atashgan. Bizga ma'lumki, natural sonlar deb buyumlarni sanashda qo'llaniladigan sonlarga aytiladi. Sanash jarayoni nimani ifodalaydi? Masalan: biz $A = \{k, e, m, r\}$ to'plam elementlarini sanashni qanday olib borishimiz kerak? Bu to'plamning har bir elementini ko'rsatib, biz "birinchi", "ikkinchi", "uchinchi", "to'rtinchi" deymiz va shu bilan sanash jarayoni tugaydi, chunki A to'plamning hamma elementlari foydalanildi. Sanab borib biz qator qoidalarga amal qilamiz. A to'plamning ixtiyoriy elementi sanashda birinchi ko'rsatilishi mumkin, biroq birorta ham element tushirib qoldirilmasligi va ikki marta sanalmasligi kerak.

A to'plam elementlarining sanab biz A to'plamda to'rtta element bor deymiz, ya'ni bu to'plamning miqdoriy xarakteristikasiga ega bo'lamiz. Biroq buni hosil qilish uchun tartibiy natural sonlar "birinchi", "ikkinchi", "uchinchi", "to'rtinchi" dan foydalandik. Boshqacha aytganda, biz natural qator kesmasi deb ataluvchi $\{1, 2, 3, 4\}$ to'plamdan foydalandik.

Ta'rif: Natural qatorning Na kesmasi deb, a natural sondan katta bo'lmagan natural sonlar to'plamiga aytiladi. Masalan: N_4 kesma 1, 2, 3, 4 natural sonlar to'plamining o'zidir.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, natural qatorning Na kesmasi $x < a$ bo'lgan barcha x sonlardan tashkil topadi. Bundan tashqari ixtiyoriy Na kesma $a > 1$ da 1 ni o'z ichiga oladi.

Natural qator kesmasining kiritilgan ta'rifi to'plam elementlari sanog'i tushunchasini aniqlashtirish imkonini beradi. Biroq avval shuni eslatib o'tamizki $A = \{k, e, m, r\}$ to'plam elementlarini sanash jarayonida bu to'plamning har bir elementiga N_4 kesmadan yagona son qo'yilgan edi, ya'ni A to'plam bilan natural qatorning N_4 kesmasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan edi.

Ta'rif: A to'plam elementlarini sanash deb, A to'plam bilan natural qatorning Na kesmasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishga aytiladi. a soni deb A to'plamdagi elementlar soniga aytiladi va $n(A)$ kabi yoziladi. Bu a soni yagona va u miqdoriy natural sonidir.

Shunday qilib, qayta sanashda chekli A to'plam elementlari nafaqat ma'lum tartibda joylashtiriladi, balki, shuningdek A to'plam nechta elementni o'z ichiga olishi aniqlanadi. (Bunda "bir", "ikki", "uch", va hokazo sonlar bilan ifodalanuvchi miqdoriy natural sonlardan foydalaniladi.)

Sanoqning tahlili shuni ko'rsatadiki, sanash uchun avvaldan etarli sonlar zapasiga ega bo'lish zarur, bunda, sonlar bir qator xossalarga ega bo'lishi kerak: ma'lum tartibda joylashishi, birinchi son mavjud bo'lishi kerak va hokazo.

Boshlang'ich matematika o'qitishda ham tartibiy va miqdoriy sonlarning uzviy bog'lanishi o'z ifodasini topgan. Sonlarning bunday tomonlari bilan o'quvchilar birinchi o'nlikdagi sonlarni o'rganishdayoq tanishadilar. Bu turli-tuman elementlarni sanashda yuz beradi.

“Mazkur to’plam nechta elementga ega?” degan savolga javob miqdoriy natural son bilan ifodalanadi; tartibiy son esa sanoqda u yoki bu predmet qaysi o’rinni egallashini ko’rsatadi va “Sanoqda berilgan predmet nechanchi o’rinda bo’ldi?” degan savolga javob beradi?

2. Miqdoriy son ma’nosini to’plamlarning teng quvvatliligi tushunchasidan foydalanib, nazariy to’plam nuqtai nazaridan boshqacha talqin qilish mumkin.

Biror bir chekli A to’plamni olamiz va unga teng quvvatli barcha to’plamlarni bir sinfga kiritamiz. Masalan, agar A uchburchakning uchlari to’plami bo’lsa u holda u bilan birga bir sinfga quyidagi to’plamlar kiradi: uchburchak tomonlari to’plami, “til” so’zidan harflar to’plami va hokazo.

A ga teng quvvatli bo’lmagan biror bir chekli B to’plamni olib B to’plamga teng quvvatli bo’lgan barcha to’plamlarni ajratamiz. Natijada chekli to’plamlarning yangi sinfini hosil qilamiz. Agar bu jarayon davom ettirilsa, u holda teng quvvatlilik munosabati ekvivalentlik munosabati ekanidan hamma chekli to’plamlar ekvivalentlik sinflari bo’yicha bo’lingan bo’lib qoladi. Bunda bir sinfning ixtiyoriy ikkita to’plami teng quvvatli bo’lmaydi, turli sinflarga tegishli ikkita to’plam teng quvvatli bo’lmaydi.

Ayni bir sinfning barcha to’plamlarida qanday umumiylik bor? Ular bir xil quvvatga ega. Ekvivalentlikning bitta sinfidagi barcha to’plamlar uchun bu umumiy xossadir va u natural son hisoblanadi. Masalan: to’rtburchakning uchlari to’plamiga teng quvvatli to’plamlar uchun umumiy xossa “uch” natural sonidir, to’g’ri to’rtburchakning tomonlari to’plamiga teng quvvatli to’plamlar uchun umumiy xossa “to’rt” natural sonidir.

Shunday qilib, nazariy to’plam nuqtai nazaridan miqdoriy natural songa chekli teng quvvatli to’plamlar sinfining umumiy xossasidir.

Har bir sinfga birgina va faqat birgina natural son mos keladi, har bir natural songa teng quvvatli chekli to’plamlarning birgina va faqat birgina sinfi mos keladi.

Ma’lumki, ekvivalentlikning har bir sinfi unga tegishli ixtiyoriy elementini bu sinfning vakilini berish bilan bir qiymati aniqlanadi. Demak, teng quvvatli to’plamning har bir sinfini uning vakilini ko’rsatish bilan berish mumkin. Masalan, to’rtburchakning uchlari to’plamini teng quvvatli bo’lgan va “to’rt” natural sonni aniqlovchi to’plamlar sinfini $B = \{a, b, c, d\}$ to’plamni ko’rsatish bilan berishi mumkin. Demak B to’plam “to’rt” natural sonni aniqlaydi.

Umuman har bir chekli A to’plamga bitta va faqat bitta natural son $a = n(A)$ mos keladi, biroq har bir a natural songa bir ekvivalentlik sinfining teng quvvatli turli to’plamlari mos keladi.

Shuning uchun “besh” soniga beshburchak tomonlari to’plami ham uning uchlari to’plami ham, “kitob” so’zidagi harflar to’plami ham mos keladi.

Nol soni ham nazariy to’plam talqiniga ega va u bo’sh to’plamga mos qo’yiladi: $0 = n(\emptyset)$

Boshlang’ich matematika kursida miqdoriy natural son teng quvvatli chekli to’plamlar sinfining umumiy xossasi sifatida qaraladi. Shuning uchun

o'quvchilar "bir" sonini o'rganayotganda darslikning betida bitta buyumning tasviri keltiriladi: bitta chelak, bitta qiz va hokazo. "Uch" sonini o'rganayotganda darslikning betida uchta elementga ega turli to'plamlar tasviri keltiriladi: uchta kub, uchta tosh, uchta tayoqcha va hokazo.

Mavzu: Qo'shish, o'shish qonunlari, "teng", kichik, "katta" munosabatlari.

Muammoli savollar:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlar yig'indisini nazariy to'plam nuqtai nazarda qanday ta'riflash mumkin?
2. Qo'shishning qanday qonunlarini bilasiz?
3. "Teng", "kichik", "katta" munosabatlarni nazariy to'plam nuqtai nazarda izohlang?

Reja:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlar yig'indisi ta'rifi.
2. Qo'shish qonunlari.
3. Nazariy-to'plam nuqtai nazaridan "teng", "kichik", "katta" munosabatlari.

Tayanch iboralar.

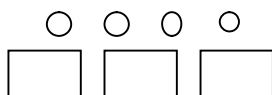
Qo'shish amali, yig'indi- $a+b$, qo'shishning kommutativlik o'rin almashtirish, guruhlash-assotsiativlik qonunlari, "teng", "kichik", "katta" munosabatlari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ы=итувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
3. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А. Нурметов, Л. Левенберг, И. Ашмаджонов. Бошланғич синфларда математика Ы=итиш методикаси. Т.: «Ы=итувчи», 1985.

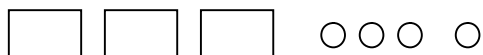
Birinchi sinf o'quvchilari yechadigan ushbu masalani qaraymiz: "Po'lat 4 ta, Naima esa 3 ta qo'ziqorin topdi. Bolalar hammasi bo'lib nechta qo'ziqorin topishgan? Masala qo'shish amali yordamida yechiladi: $4+3=7$. Biroq nima uchun boshqa amal emas, qo'shish amalidan foydalanilganligi qanday tushuntiriladi?

Po'lat topgan har bir qo'ziqorinni doiracha bilan, Naim topgan har bir qo'ziqorinni kvadratcha bilan tasvirlab, masala shartini ko'rgazmali namoyish etamiz, (1-rasm). Masala savoliga javob berish uchun Po'latning qo'ziqorinlariga Naimaning qo'ziqorinlarini qo'shish (birlashtirish) kerak,



1-rasm

ya'ni ikkita qo'ziqorinlar to'plamini birlashtirish (2-rasm) va



2-rasm

bu birlashmada nechta element hosil bo'lganini sanab chiqish kerak. Ko'rinib turibdiki, butun nomanfiy sonlarni qo'shish to'plamlarning birlashmasi bilan uzviy bog'langan ekan.

Yana bitta masalani qarab chiqamiz. $A = \{a, b, c, d\}$ va $B = \{c, x, y\}$ to'plamlar birlashmasidagi elementlar sonini topamiz. $n(A)=4$, $n(B)=3$, $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y\}$ ekanini, biroq $n(A \cup B) \neq 4+3$ bo'lishini aniqlash qiyin emas. Nima uchun shunday?

Gap shundaki, bu masalada A va B to'plamlar kesishmaydi va demak ular birlashmasidagi elementlar soni $n(A) + n(B)$ yig'indi bilan ustma-ust tushmaydi.

Shuning uchun butun nomanfiy sonlar yig'indisi kesishmaydigan to'plamlar birlashmasi orqali aniqlanadi.

Ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning yig'indisi deb, $n(A)=a$, $n(B)=b$ bo'lib, kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$a+b = n(A \cup B)$, bu erda $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $A \cap B = \emptyset$

Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, $5+2=7$ bo'lishini tushuntiramiz. 5-bu biror A to'plamning elementlari soni, 2-biror B to'plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi kerak. Masalan, $A = \{x, u, z, t, r\}$, $B = \{a, b\}$ to'plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz: $A \cup B = \{x, u, z, t, r, a, b\}$. Sanash yo'li bilan $n(A \cup B)=7$ ekanini aniqlaymiz. Demak $5+2=7$.

Ko'rib o'tilgan misolga ko'ra quyidagicha savol tug'ilishi mumkin: 5 va 2 sonlarning yig'indisi $n(A)=5$, $n(B)=2$ bo'ladigan kesishmaydigan A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emasmikan? Boshqacha aytganda, agar kesishmaydigan boshqa, lekin $n(A_1)=5$, $n(B_1)=2$ shartni qanoatlantiruvchi A_1 va B_1 to'plamlar olinsa $5+2$ yig'indi o'zgarmasmikan? Aslini olganda o'zgarmaydi. Umuman $a+b$ yig'indi $n(A)=a$, $n(B)=b$ shartini qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to'plamlarining tanlanishiga bog'liq emas.

Bundan tashqari, butun nomanfiy sonlar yig'indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita butun nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig'indisi – butun nomanfiy c sonini har doim topish mumkin, u berilgan a va b sonlar uchun yagona bo'ladi.

Yig'indining mavjudligi va yagonaligi ikki to'plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig'indini topishda qo'llaniladigan amal qo'shish amali, qo'shilayotgan sonlar esa qo'shiluvchilar deb ataladi.

Yuqorida biz ikki qo'shiluvchining yig'indisiga ta'rif bergan edik. Bir nechta qo'shiluvchini yig'indisiga qanday ta'rif beriladi?

Ikkita qo'shiluvchining yig'indisi aniqlangan va n ta qo'shiluvchining yig'indisi ham aniqlangan bo'lsin. U holda $n+1$ ta qo'shiluvchidan iborat yig'indi, ya'ni $a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}$ yig'indi $(a_1+a_2+\dots+a_n)+a_{n+1}$ ga teng.

Masalan, $2+7+15+19$ yig'indini topish uchun yuqoridagi ta'rifga ko'ra quyidagi almashtirishlarni bajarish kerak:

$$2+7+15+19=(2+7+15)+19=((2+7)+15)+19=(9+15)+19=24+19=43$$

Boshlang'ich matematika kursida butun nomanfiy sonlarni qo'shish ikkita predmetlar to'plamining birlashmasi (bunda nazariy to'plam terminologiyasi va simbolikasidan fodalanilmaydi) bilan bog'liq amaliy mashqlar asosida kiritiladi. Qo'shishning nazariy to'plam ma'nosini ochishning bosh mezoni yig'indini topishga doir arifmetik masalalarni yechishdir.

Qo'shish qonunlari.

Oldingi mavzularda bayon etilgan butun nomanfiy sonlarni qo'shishga doir yondoshish qo'shishning ma'lum qoidalari- o'rin almashtirish va guruhlash qoidalarini asoslashga imkon beradi.

Dastlab o'rin almashtirish (kommutativlik) qonunini isbotlaymiz, ya'ni ixtiyoriy butun nomanfiy a va b sonlar uchun $a+b=b+a$ tenglikning bajarilishini isbotlaymiz.

a A to'plamdagi elementlar soni, b B to'plamidagi elementlar soni va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. U holda butun nomanfiy sonlar yig'indisining ta'rifiga ko'ra $a+b$ A va B to'plamlar birlashmasidagi elementlar soni bo'ladi. $a+b=n(A \cup B)$. To'plamlar birlashmasining o'rin almashtirish xossasiga ko'ra $A \cup B$ to'plam $B \cup A$ to'plamga teng va demak, $n(A \cup B)=n(B \cup A)$. Yig'indining ta'rifiga ko'ra $n(B \cup A)=b+a$, shuning uchun ixtiyoriy butun nomanfiy a va b sonlar uchun $a+b=b+a$.

Endi guruhlash (assosiativlik) qoidasini isbotlaymiz, ya'ni ixtiyoriy butun nomanfiy a , b va c sonlar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$ tenglikni bajarilishini isbotlaymiz.

$$a=n(A), b=n(B), c=n(C) \text{ bo'lsin, bunda } (A \cap B)=\emptyset \text{ } (B \cap C)=\emptyset$$

U holda ikki son yig'indisining ta'rifiga ko'ra $(a+b)+c=n(A \cup B)+n(C)=n((A \cup B) \cup C)$ deb yozish mumkin.

To'plamlarning birlashmasi guruhlash qonuniga buysungani uchun $n((A \cup B) \cup C)=n(A \cup (B \cup C))$ bo'ladi. Bundan ikki son yig'indisining ta'rifiga ko'ra $n(A \cup (B \cup C))=n(A)+n(B \cup C)=a+(b+c)$ ga ega bo'lamiz. Demak, ixtiyoriy butun nomanfiy a, b va c sonlar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$ bo'ladi.

Qo'shishning guruhlash qonunining qo'llanilishi qanday? U uchta qo'shiluvchining yig'indisini qanday topish mumkinligini tushuntiradi: buning uchun birinchi qo'shiluvchi bilan ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish va hosil bo'lgan songa uchinchi qo'shiluvchini qo'shish etarli yoki birinchi qo'shiluvchini ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilar yig'indisiga qo'shish etarli. Guruhlash qonuni qo'shiluvchilar o'rnini almashtirishni ko'zda tutmasligini eslatib o'tamiz.

Qo'shishning o'rin almashtirish qonuni ham, guruhlash qonuni ham ixtiyoriy sondagi qo'shiluvchilar uchun umumlashtirilishi mumkin. Bunda o'rin

almashtirish qonuni qo'shiluvchilar o'rnini har qanday almashtirilganda ham yig'indi o'zgarmasligini, guruhlash qonuni esa qo'shiluvchilarni har qanday guruhlaganda ham (ularning tartibini o'zgartirmagan holda) yig'indi o'zgarmasligini anglatadi.

Qo'shishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlaridan bir nechta qo'shiluvchining yig'indisi qo'shiluvchilar o'rinlarini ixtiyoriy usulda almashtirish bilan yoki qo'shiluvchilarning ixtiyoriy guruhni qavsga olish bilan o'zgarmasligi kelib chiqadi.

Qo'shish qonunlaridan foydalanib, $109+36+191+64+27$ ifodaning qiymatini hisoblaymiz. O'rin almashtirish qonuniga asosan 36 va 191 qo'shiluvchilarning o'rinlarini almashtiramiz.

U holda $109+36+191+64+27=109+191+36+64+27$.

Guruhlash qonunidan foydalanib, qo'shiluvchilarni guruhlaymiz, so'ngra qavs ichidagi yigindilarni topamiz:

$$109+191+36+64+27=(109+191)+(36+64)+27=300+100+27$$

300 va 100 sonlarini qavs ichiga olish bilan guruhlash qonunini yana bir marta qo'llaymiz: $300+100+27=(300+100)+27$.

Hisoblashni bajaramiz: $(300+100)+27=400+27=427$

Boshlang'ich sinf o'quvchilari qo'shishning o'rin almashtirish xossasi bilan birinchi o'nlikdagi sonlarni o'rganishda tanishadilar. Dastlab u bir xonali sonlarni qo'shish jadvalini tuzishda qo'llaniladi, keyin esa turli-tuman hisoblashlarni takomillashtirish uchun qo'llaniladi.

Boshlang'ich matematika kursida qo'shishning guruhlash qonuni oshkor ko'rinishda o'rganilmaydi, lekin har doim qo'llaniladi. Jumladan, u sonlarni qismlar bo'yicha qo'shishning asosiy usulidir:

$3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$. Bundan tashqari, sonni yig'indiga qo'shish, yig'indini songa qo'shish, yig'indini yig'indiga qo'shish hollarida guruhlash qonuni o'rin almashtirish bilan birga qo'llaniladi. Masalan, $2+1$ yig'indiga 4 sonini qo'shish quyidagi usullar bilan beriladi:

1) $4+(2+1)=4+3=7$

2) $4+(2+1)=6+1=7$

3) $4+(2+1)=5+2=7$

Bu usullarni tahlil qilamiz: 1) holda hisoblashlar amallarning ko'rsatilgan tartibiga mos ravishda bajarilgan; 2) holda qo'shishning guruhlash xossasi qo'llanilgan. So'ngi holdagi hisoblash esa qo'shishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlariga suyanadi, bunda oraliq almashtirishlar tushirib qoldirilgan. Ular bunday. Dastlab o'rin almashtirish qonuniga asosan 1 va 2 qo'shiluvchilarning o'rinlarini almashtirdik: $4+(2+1)=4+(1+2)$. Keyin guruhlash qonunidan foydalandik: $4+(1+2)=(4+1)+2$ va nihoyat, hisoblarni amallar tartibi bo'yicha bajardik: $(4+1)+2=5+2=7$

“Teng” va “kichik” munosabatlari.

Sonlarni taqqoslash qanday nazariy asosda yuz berishini aniqlaymiz. Ikkita butun nomanfiy a va b son berilgan bo'lsin. Nazariy to'plam nuqtai nazaridan ular chekli A va B to'plamlar elementlari sonini ifodalaydi: $a=n(A)$,

$b=n(B)$, Agar to'plamlar teng quvvatli bo'lsa, u holda ularga aynan bir son mos keladi, ya'ni $a=b$

Ta'rif: Agar a va b sonlar teng quvvatli to'plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng bo'ladi:

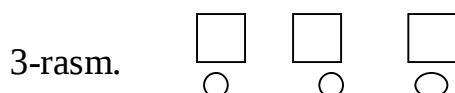
$$a=b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ bu erda } n(A)=a, n(B)=b$$

Agar A va B to'plamlar teng quvvatli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi.

Ta'rif: Agar A to'plam B to'plamning qism to'plamiga teng quvvatli bo'lsa va $n(A)=a$, $n(B)=b$ bo'lsa, a son b sonidan kichik deyiladi va $a < b$ kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda b son a sonidan katta deyiladi va $b > a$ kabi yoziladi.

$$A < b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ bu erda } B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B, B_1 \neq \emptyset$$

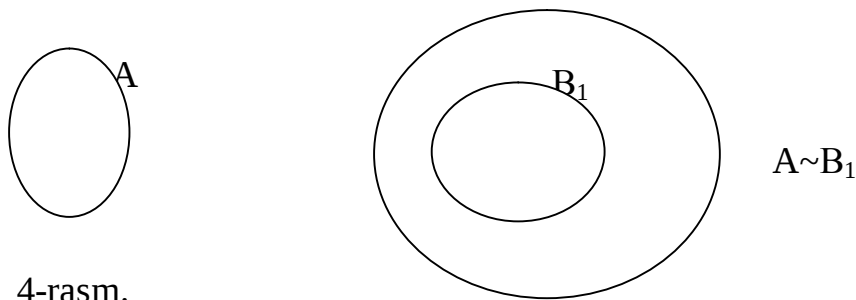
Boshlang'ich maktabda $2=2$, $3=3$, $2 < 3$, $3 < 4$ va hokazolarni tushuntirishda «teng» va «kichik» munosabatlarining keltirilgan ta'riflaridan kelib chiqiladi. Masalan, $3=3$ yozuvni kiritishda kvadrat va doiralarning ikkita teng quvvatli to'plamlari qaraladi. (3-rasm).



$3 < 4$ munosabatni o'rganishda bunday mulohaza kiritiladi: uchta pushti va to'rtta ko'k doiracha olamiz va har bir pushti doirachani ko'k doirachaning ustiga qo'yamiz, ustiga doiracha qo'yilmagan ko'k doiracha qolganini ko'ramiz, demak pushti doirachalar ko'k doirachalardan kam, shuning uchun $3 < 4$ kabi yozish mumkin. Agar a va b sonlar mos ravishda A va B to'plamlar (doirachalar, kvadratlar, tayoqchalar va h.k) bilan aniqlansa, u holda B to'plamdan o'zining A to'plamiga teng quvvatli qism to'plamini ajratish amalda juda xilma-xil usullar bilan yuz beradi: ustiga qo'yish, yonma-yon qo'yish, juftliklar hosil qilish va h.k. Bunday bo'lishi mumkin, chunki $a < b$ munosabat (shuningdek $a=b$ munosabat ham) $n(A)=a$, $n(B)=b$ bo'luvchi A va B to'plamlarni tanlashga bog'lik emas, faqat A to'plam B to'plamning o'z qism to'plamiga (tenglik nolida esa A to'plam B to'plamga) teng quvvatli bo'lishi muhimdir.

“Kichik” munosabati ta'rifiga bayon etilgan yondashish qo'llanishda chegaralanishga ega, u 20 ichidagi sonlarni taqsimlash uchun qo'llanilishi mumkin, chunki bu predmetlarning ikkita guruhini taqqoslash bilan bog'liq.

Butun nomanfiy sonlarni yana qanday taqqoslash mumkin? Yuqorida berilgan ta'rif ma'nosida $a < b$ bo'lsin. U holda $a=n(A)$, $b=n(B)$ va $A \sim B_1$ bu erda B_1 , B to'plamning o'z qism to'plami (4-rasm).



$B_1 \subset B$ bo'lgani uchun B to'plamni B_1 to'plam va uning to'ldiruvchisi $B \setminus B_1$ to'plamning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin. Bu to'ldiruvchi to'plamni B'_1 bilan belgilaymiz, ya'ni $B/B_1 = B'_1$ U holda $B = B_1 \cup B'_1$ va demak, $n(B) = n(B_1 \cup B'_1)$ B_1 va B'_1 to'plamlar kesishmasligi sababli yig'indining ta'rifiga ko'ra $n(B) = n(B_1) + n(B'_1)$ (*). Lekin shartga ko'ra $B_1 \sim A$, demak, $n(B_1) = n(A)$. Agar B_1 to'plamdagi elementlar sonini c bilan belgilasak, u holda (*) tenglikni $b = a + c$ ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni $a < b$ ekanidan $b = a + c$ kelib chiqadi. Teskari da'voning ham o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. "Kichik" munosabatining boshqacha ta'rifiga keldik.

$a + c = b$ bo'ladigan c son mavjud bo'lganda va faqat shu holda a son b sonidan kichik bo'ladi. Bu ta'rifdan foydalanib, $3 < 7$ ekanini qanday tushuntirish mumkin? $3 < 7$, chunki $3 + 4 = 7$ bo'ladigan butun nomanfiy 4 soni mavjud.

"Kichik" munosabatining qo'shish orqali ta'riflashning bunday usulidan boshlang'ich matematika kursida ham foydalaniladi. Ushbu yozuvlar juftlari ham shundan dalolat beradi: $5 + 1 = 6$, $6 > 5$; $7 + 1 = 8$, $7 < 8$

Sonlarni taqqoslashni yana bir usulini ko'rib chiqamiz.

$a < b$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy x natural son haqida, agar $x \leq a$ bo'lsa, $x < b$ bo'ladi deyish mumkin. Bu degan so'z, $a < b$ bo'lganda natural qatorning N_a kesmasi N_b kesmaning o'z qism to'plami bo'ladi. Teskari da'vo ham o'rinli.

Shunday qilib, "kichik" munosabatining yana bitta ta'rifiga ega bo'lamiz:

Natural qatorning N_a kesmasi shu qatorning N_b kesmasining o'z qism to'plami bo'lganda va faqat shu holda a soni b sonidan kichik bo'ladi:

$$a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ va } N_a \neq N_b$$

Masalan $3 < 7$ tengsizlikning o'rinligini shu nuqtai nazardan $(1, 2, 3) \subset (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ekanini bilan tushuntirish mumkin.

"Kichik" tushunchasining mazkur talqini sonlarni ularning natural qatoridagi o'rnini bilishga asoslangan holda taqqoslashga imkon beradi.

Sonlarni taqqoslashning bu usuli ham boshlang'ich matematikani o'qitishda qo'llaniladi. Sanoqda oldin keladigan son undan keyin keladigan sonidan har doim kichik bo'ladi.

Mavzu: Ayirish. Ayirish xossalari.
(To'plamlar nazariyasi nuqtai nazarida)
Muammoli savollar:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlarni ayirmasi nazariy to'plam nuqtai nazarida qanday talqin qilinadi?
2. Ayirma qachon mavjud bo'ladi?
3. Ayirish amali qanday xossalarga ega?

Reja:

1. Butun nomanfiy a va v sonlarning ayirmasi ta'rifi.
2. Ayirish amalining bajaruvchanligi va bir qiymatligi.
3. Ayirish amalining xossalari.

Tayanch iboralar:

Ayirish amali, kamayuvchi, ayiriluvchi, ayirma. Sondan yig'indini ayirish, sondan ayirmani ayirish.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ыйитувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
3. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А. Нурметов, И. Ахмеджонов. Бошланғич синфларда математика ыйитиш методикаси. Т.: «Ыйитувчи», 1985.

Birinchi sinf o'quvchilari yechadigan ushbu masalani qaraylik:

Maktab hovlisiga 8 tup daraxt-olma o'tkazildi.

Olmalar 3 tup. Maktab hovlisiga necha tup nok o'tkazilgan. Masalaning savoliga javob berish uchun 8 dan 3 ni ayirish kerak: $8-3=5$. Biroq bu erda nima uchun boshqa amaldan emas, sonlarni ayirishdan foydalanilganligini qanday tushuntirish kerak? Maktab hovlisiga o'tkazilgan har bir daraxtni doira bilan tasvirlash orqali masala shartini ko'rgazmali namoyish etamiz (1-rasm).



O'tkazilgan daraxtlardan 3 tasi olma daraxti-rasmda ularni olmalarni tasvirlovchi doiralar ustiga chizish bilan ajratamiz. U holda qolgan daraxtlar noklar bo'ladi. Ular 8 dan 3 ni ayirsa, nechta bo'lsa, o'shancha, ya'ni 5 ta.

Ko'rinib turibdiki, berilgan masalaning yechimi berilgan to'plamdan qism to'plamni ajratish va bu qism to'plamning to'ldiruvchisidagi elementlar sonini topish bilan uzviy bog'langan, ya'ni sonlarni ayirish qism to'plamni to'ldirish operatsiyasi bilan bog'liq ekan.

Ta'rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B \subset A$ shartlar bajarilganda B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchi to'plamining elementlari soniga aytiladi:

$$a-b=n(A \setminus B), \text{ bu erda } a=n(A), b=n(B), B \subset A$$

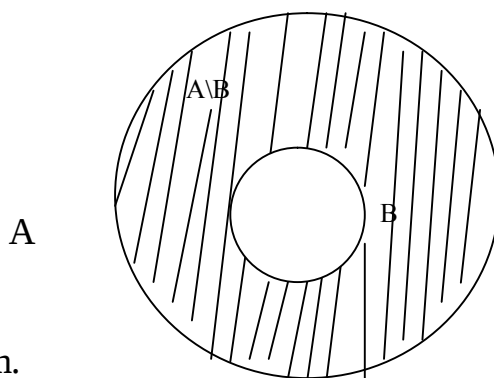
Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, $7-4=3$ bo'lishini tushuntiramiz. 7 biror A to'plamning elementlari soni, 4 esa A to'plamning qism to'plami bo'lgan B to'plamning elementlari soni. Masalan, $A=\{x,u,z,t,p,r,s\}$, $B=\{x,u,z,t\}$

to'plamlarni olaylik. B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisini topamiz: $A \setminus B = \{p, r, s\}$, $n(A \setminus B) = 3$ ega bo'lamiz. Demak, $7 - 4 = 3$

$n(A) = 7$, $n(B) = 4$ va $B \subset A$ bo'ladigan A va B to'plamlar sifatida qaralganlardan farq qiladigan to'plamlarni tanlash mumkin ekanligi aniq, chunki a-b ayirma $n(A) = a$, $n(B) = b$ va $B \subset A$ shartlarni qanoatlantiruvchi A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'lik emas.

Biroq butun nomanfiy sonlarning ayirmasi har doim ham mavjud bo'ladimi? $B \subset A$ ekanida $n(B) \leq n(A)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $a = n(A)$, $b = n(B)$ va $B \subset A$ shartlarini qanoatlantiruvchi butun nomanfiy a va b sonlarning a-b ayirmasi $b \leq a$ bo'lganda va faqat shu holda mavjud bo'ladi.

a-b ayirmani topishda qo'llaniladigan amal ayirish amali a-kamayuvchi, b-ayiriluvchi



2-rasm.

Ko'p hollarda ayirish amali to'g'ri bajarilganligini tekshirish uchun biz qo'shishga murojaat qilamiz. Nima uchun? Shubhasiz, bunga qo'shish va ayirish amallari orasida bog'lanish mavjudligi sabab bo'ladi.

$a = n(A)$, $b = n(B)$ va $B \subset A$ bo'ladigan butun nomanfiy a va b sonlar berilgan, bo'lsin va bu sonlarning ayirmasi B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisidagi elementlar soni bo'lsin ya'ni $a - b = n(A \setminus B)$.

Eyler doiralarida A, B $A \setminus B$ to'plamlar 2-rasmda ko'rsatilganidek tasvirlanadi.

$A = B \cup (A \setminus B)$ ekani ma'lum, bundan

$n(A) = n(B \cup (A \setminus B))$. $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ bo'lgani uchun biz

$n(A) = n(B \cup (A \setminus B)) = n(B) + n(A \setminus B) = b + (a - b)$ ga ega bo'lamiz.

Demak, $a = b + (a - b)$ ga ega bo'lamiz, ya'ni a-b ayirma shunday sonki uning b son bilan yigindisi bo'ladi, ya'ni ayirmaga ayiriluvchini qo'shganimizda kamayuvchi hosil bo'ladi.

Ta'rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig'indisi a songa teng bo'ladi.

Biz bir to'plamning ikkinchi to'plamgacha to'ldiruvchisidagi elementlar soni sifatidagi butun nomanfiy sonlar ayirmasini ta'rifidan uning yig'indi orqali ta'rifi kelib chiqishini ko'rsatdik. Teskari da'voni ham isbotlash mumkin.

Shunday qilib, $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$

Ayirish amali qo'shishga teskari amal deb aytiladi. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremlarni isbotlaymiz:

Teorema: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi $b \leq a$ bo'lganda va faqat shunda mavjud bo'ladi.

Isbot. Agar $a=b$ bo'lsa, u holda $a-b=0$ bo'ladi va demak, $a-b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Agar $b < a$ bo'lsa, u holda “kichik” munosabati ta'rifiga ko'ra shunday natural son mavjudki, bunda $a=b+c$ bo'ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $c=a-b$ ya'ni $a-b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Agar $a-b$ ayirma mavjud bo'lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, $a=b+c$ bo'ladi.

Agar $c=0$ bo'lsa u holda $a=b$ bo'ladi; agar $c > 0$ bo'lsa, u holda “kichik” munosabatining ta'rifiga ko'ra $b < a$ bo'ladi. Demak, $b \leq a$,

Teorema: Agar butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir.

Isboti. $a-b$ ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik; $a-b=c_1$ va $a-b=c_2$ U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $a=b+c_1$ va $a=b+c_2$ ga ega bo'lamiz. Bunda $b+c_1=b+c_2$ va demak $c_1=c_2$ ekani kelib chiqadi.

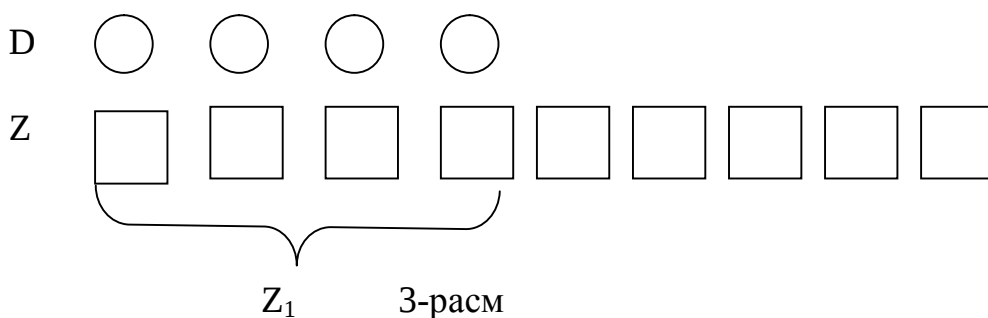
Boshlang'ich matematika kursida dastlab butun nomanfiy sonlarning ayirmasi berilgan to'plamning qism to'plamini ajratish va yangi to'plamni-ajratilgan qism to'plamning to'ldiruvchisini hosil qilish bilan bog'liq bo'lgan amaliy mashqlar asosida qaraladi. Bunda nazariy to'plam terminologiyasi va simvolikasidan foydalanilmaydi. Ayirishning nazariy to'plam ma'nosining bosh mezonini masalalarni echishdir.

Ayirishning qo'shish bilan bog'lanishi “Noma'lum qo'shiluvchi qanday topiladi?” mavzusini o'rganishda o'rnatiladi. Ayirish tushunchasining qo'shishga teskari amal sifatidagi ta'rifi oshkor ko'rinishda berilmaydi, lekin ta'kidlab o'tiladi: “ayirish qo'shish bilan bog'langan: 40 sonidan 16 sonini ayirish deb shunday sonni topishga aytiladiki, uni 16 ga qo'shganda yig'indida 40 soni hosil bo'ladi. Bu 24 sonidir. Demak, $40-16=24$ ”

“...ta ko'p” va “... ta kam” munosabatlari.

Amaliy faoliyatda masalalar echish jarayonida ko'pincha nafaqat a sonining b sonidan ko'pligi (yoki kamligi), balki a sonining b sonidan nechta ko'pligi (yoki kamligi) ham aniqlanadi.

“...ta ko'p” va “... ta kam” munosabatlarining ma'nosi qanday?



a va b $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo'lgan butun nomanfiy sonlar va $a < b$ ekani aniqlangan bo'lsin. Demak, B to'plamda uning A to'plamga teng quvvatli B_1 qism

to'plamni ajratish mumkin va $B \setminus B_1$ to'plam bo'sh emas, $n(B \setminus B_1) = c$ ($c \neq 0$), bo'lsin. U holda B to'plamda A to'plamda qancha element bo'lsa shuncha va yana c ta element bo'ladi. Bunday holda a soni B sonidan c ta kam yoki B soni a sonidan c ta ko'p deyiladi.

$B_1 \subset B$ da $c = n(B \setminus B_1)$ bo'lgani uchun $c = b - a$ bo'ladi. Demak, bir son ikkinchi sonidan nechta kam yoki ko'p ekanini bilish uchun katta sonidan kichik sonni ayirish kerak.

Masalan, quyidagi masalani qaraylik: "Maktab oldiga 4 tup olma va 9 tup olcha o'tqazildi. Necha tup ko'p olcha o'tqazildi?"

Ifodalangan qoidaga ko'ra savolga ayirish yordamida javob topiladi: $9 - 4 = 5$ (tup) Biroq tushunmovchilik vujudga keladi: 9 tup olchadan 4 tup olmani ayirish mumkinmi? Gap shundaki, mazkur holda 9 tup olchadan 4 tup olcha ayiriladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun olmalarni doirachalar bilan olchalarni esa kvadratchalar bilan tasvirlaymiz (3-rasm).

Masalaning savoliga javob berish uchun olchalar to'plami olmalar to'plamiga teng quvvatli bo'lgan Z_1 qism to'plamni ajratamiz (rasmda bu to'plamda figurali qavs bilan ko'rsatilgan). U holda qolgan olchani Z_1 qism to'plamning Z to'plamgacha to'ldiruvchisini hosil qiladi va ularning soni 9 va 4 sonlar ayirmasiga teng.

"...ta ko'p" va "... ta kam" munosabatlari boshqa turdagi masalalarda ham uchraydi.

Masalan, bunday masalani qaraylik: "Maktab oldiga 4 tup olma va ulardan 5 tup ko'p olcha o'tqazildi. Necha tup olcha o'tqazilgan?"

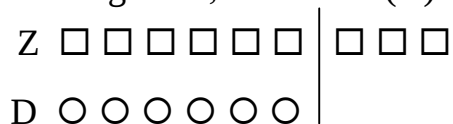
Masalada daraxtlarning ikkita to'plami: olmalar to'plami va olchalar to'plami haqida gap bormoqda. Ularni D va Z bilan belgilaymiz. $n(D) = 4$ ekanini ma'lum. Z to'plamda D to'plamdagidan 5 ta element ko'p ekanini bilgan holda undagi elementlar sonini topish kerak. Oxirgi jumla $n(Z) - n(D) = 5$ ekanini anglatadi. Bundan $n(Z) = 5 + n(D) = 5 + 4 = 9$ 3-rasmdan foydalanib, yanada batafsil tushuntirish mumkin.

Z to'plamda D to'plamdagidan 5 ta element ko'p bo'lgani uchun bu Z to'plamda D to'plamda qancha element bo'lsa, shuncha va yana 5 element bor degan ma'noni anglatadi. Boshqacha aytganda, Z to'plamni $Z_1 \sim D$ va $n(Z_2) = 5$ bo'ladigan ikkita Z_1 va Z_2 to'plamlarning birlashmasi sifatida qarash mumkin. Z_1 va Z_2 to'plamlar umumiy elementga ega bo'lmagani uchun

$$n(Z) = n(Z_1 \cup Z_2) = n(Z_1) + n(Z_2) = 4 + 5 = 9 \text{ bo'ladi.}$$

Endi quyidagi masalaga murojaat etamiz: "Maktab oldiga 9 tup olcha va undan 3 tup kam olma o'tqazildi. Necha tup olma o'tqazilgan?"

Bu erda ham oldingi masaladagi kabi daraxtlarning 2 ta to'plami: olchalar to'plami (Z) va olmalar to'plami (D) haqida gap bormoqda, biroq $n(Z) = 9$ ekanini ma'lum, D to'plami Z to'plamidagidan 3 ta element kam ekanini bilgan holda D to'plamidagi elementlar sonini topish kerak. Oxirgi jumla $n(Z) - n(D) = 3$ ekanini anglatadi, bundan $n(D) = n(Z) - 3 = 9 - 3 = 6$.



4-rasm

4-rasmdan foydalanib, bu masalani quyidagicha echish mumkin: olmalar olchalardan 3 ta kam bo'lganligi uchun olchalar olmalardan 3 ta ko'p bo'ladi, shuning uchun Z to'plamidan 3 ta elementga ega bo'lgan qism to'plamni chiqarib tashlasak, D to'plamiga teng quvvatli to'plam hosil bo'ladi: $n(D) = 9 - 3 = 6$.

Tabiiyki, boshlang'ich maktabda bu punktda keltirilgan masalani boshqacha asoslash bilan echiladi, biroq bu bilan uning mohiyati o'zgarmaydi.

Shuni ta'kidlaymizki, "5 soni 2 dan 3 ta ko'p" jumlani ">" belgidan foydalanib qisqacha yozish mumkin emas, chunki "... ta ko'p" munosabat uchun (shuningdek "... ta kam" munosabat uchun ham) maxsus belgi yo'q. ">" belgi "ko'p" (katta) munosabatini "<" belgi esa "kam" (kichik) munosabatini belgilash uchun xizmat qiladi.

Yig'indidan sonni va sondan yigindini ayirish qoidalar

Yig'indidan sonni va sondan yigindini ayirishning ma'lum qoidasini asoslaymiz.

Yig'indidan sonni ayirish qoidasi. Yig'indidan sonni ayirish uchun yig'indidagi qo'shiluvchilardan biridan shu sonni ayirish va hosil bo'lgan natijaga ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish etarli.

Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz:

Agar a, b, c butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda:

a) $a \geq c$ bo'lganda $(a+b)-c=(a-c)+b$ bo'ladi.

b) $b \geq c$ bo'lganda $(a+b)-c=a+(b-c)$ bo'ladi.

c) $a \geq c$ va $b \geq c$ bo'lganda yuqoridagi formulalarning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin.

$a \geq c$ bo'lsin, u holda $a-c$ ayirma mavjud bo'ladi. Uni p orqali belgilaymiz: $a-c=p$. Bundan $a=p+c$ chiqadi. $p+c$ yig'indini $(a+b)-c$ ifodadagi a ning o'rniga qo'yamiz va uni shakl almashtiramiz:

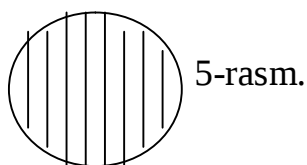
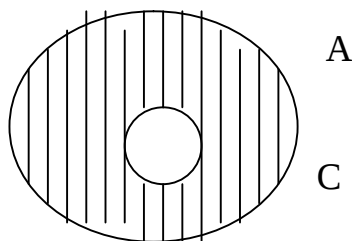
$$(a+b)-c = (p+c+b)-c = p+c+b-c = p+b.$$

Biroq p harf orqali $a-c$ ayirma belgilangan edi, demak, isbotlanishi talab etilgan $(a+b)-c=(a-c)+b$ ifodaga ega bo'lamiz.

Boshqa hollar uchun ham shunga o'xshash mulohaza yuritiladi.

Eyler doiralari yordamida berilgan qoida (" a " hol)ni ko'rgazmali namoyish etamiz.

$n(A)=a$, $n(B)=b$, $n(C)=c$ va $A \cap B = \emptyset$, $C \subset A$ bo'ladigan 3 ta chekli A , B , C to'plam olamiz. u holda, $(a+b)-c$ $(A \cup B) \setminus C$ to'plam elementlari soni, $(a-c)+b$ esa $(A \setminus C) \cup B$ to'plam elementlari soni bo'ladi. Eyler doiralari $(A \cup B) \setminus C$ to'plam 5-rasmda ko'rsatilgandek shtrixlangan soha bilan tasvirlanadi.



$(A \setminus C) \cup B$ to'plam ham xuddi shunday soha bilan tasvirlanishiga oson ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, berilgan A , B va C to'plamlar uchun $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$ bo'ladi. Demak,

$$n((A \cup B) \setminus C) = n((A \setminus C) \cup B) \text{ va } (a+b)-c = (a-c)+b$$

“b” holni ham shunga o'xshash ko'rgazmali namoyish qilish mumkin.

Sondan yig'indini ayirish qoidasi: Sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish etarli, ya'ni agar a, b, c -butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda $a \geq b+c$ bo'lganda $a-(b+c)=(a-b)-c$ ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi va uning nazariy to'plam tasviri yigindidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang'ich maktabda konkret misollarda qaraladi, asoslash uchun ko'rgazmali tasvirlar namoyish etiladi. Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi. Masalan, sondan yig'indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi:

$$5-2=5-(1+1)=(5-1)-1=4-1=3$$

Keltirilgan qoidalarining ma'nosi arifmetik masalalarni turli usullar bilan echishda yaxshi ochiladi. Masalan, “Ertalab 20 ta katta va 8 ta kichkina baliqchilar qayig'i dengizga jo'nadi. 6 ta qayiq qaytdi. Baliqchilar bilan yana nechta qayiq qaytishi kerak?” Masala uchta usul bilan echilishi mumkin:

I usul.	1. $20+8=28$	II usul	1. $20-6=14$	III usul	1. $8-6=2$
	2. $28-6=22$		2. $14+8=22$		2. $20+2=22$

Mavzu: Ko'paytirish. Ko'paytirish xossalari.

Muammoli savollar:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlarning ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ko'paytirishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlari nima va ular nima maqsadda qo'llaniladi?
3. Ko'paytirishning qo'shish va ayirishga nisbatan taksimot qonuni qanday yoziladi? Bu qonunlarni qay paytda qo'llash mumkin?

Reja:

1. Manfiy bo'lmagan butun sonlarning ko'paytmasi ta'rifi.
2. Ko'paytirish qonunlari.
 - a) ko'paytirishning o'rin almashtirish va guruhlash qonuni.
 - v) ko'paytirishning qo'shish va ayirishga nisbatan taksimot qonuni.

Tayanch iboralar:

Ko'paytirishning nazariy to'plam ma'nosi, o'rin almashtirish, guruhlash, taqsimot qonunlari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ы=итувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
3. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А. Нурметов, Л. Левенберг, И. Ащмаджонов. Бошланғич синфларда математика ы=итиш методикаси. Т.: «Ы=итувчи», 1985.

Butun nomanfiy sonlar ko'paytmasi tushunchasi turlicha ta'riflanishi mumkin. Dastlab yig'indi tushunchasiga asoslangan yondashishni kurib chiqamiz.

Ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi butun nomanfiy $a \bullet b$ songa aytiladi:

$$1. b > 1 \text{ bo'lganda } a \bullet b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ ta qo'shiluvchi}}$$

b ta qo'shiluvchi

$$2) b = 1 \text{ bo'lganda } a \bullet 1 = a;$$

$$3) b = 0 \text{ bo'lganda } a \bullet 0 = 0.$$

Bu ta'rifning nazariy- to'plam jihatdan ma'nosi quyidagicha: Agar $A_1, A_2, \dots, A_b$ to'plamlarning har biri a tadan elementga ega bo'lsa va ulardan hech bir ikkitasi kesishmasa, u holda ularning birlashmasi $a \bullet b$ ta elementga ega bo'ladi. Demak, $a \bullet b$ ko'paytma – bu har biri a tadan elementga ega bo'lgan, juft- jufti bilan kesishmaydigan b ta to'plamning kesishmasidagi elementlar sonidir.

$$a \bullet 1 = a \text{ va } a \bullet 0 = 0 \text{ tengliklar shartli qabul qilingan.}$$

a va b sonlarning ko'paytmasini topishga yordam beradigan amal ko'paytirish amali deyiladi; ko'paytirilayotgan sonlar ko'paytuvchilar deb ataladi.

Ixtiyoriy butun nomanfiy sonlarning ko'paytmasi mavjud va u yagonadir. Berilgan ta'rif bilan o'quvchilar boshlangich sinflarda tanishadilar. Uning ma'nosi masalalarni echishda ochiladi.

Masalan, quyidagi masalani qaraylik: “Har bir bolalar paltosiga 4 ta tugma qadash kerak. Shunday 6 ta paltoga nechta tugma qadash kerak bo'ladi?” Nima uchun u ko'paytirish bilan echiladi? Chunki unda har birida 4 tadan element bo'lgan 6 ta to'plamdan tashkil topgan birlashmadagi elementlar sonini aniqlash talab etiladi. Ta'rifga ko'ra bu son ko'paytirish bilan topiladi: $4 \bullet 6 = 24$ (tugma). Butun nomanfiy sonlar ko'paytmasining boshqacha ta'rifi ham bor. U to'plamlarning Dekart ko'paytmasi bilan bog'liq;

$A = \{x, y, z\}$ va $B = \{n, t, r, s\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Ularning Dekart ko'paytmasini topamiz. Bu ko'paytmani to'g'ri to'rtburchak shaklidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

$$\begin{array}{cccc} (x, n), & (x, t), & (x, r), & (x, s), \\ (y, n), & (y, t), & (y, r), & (y, s), \\ (z, n), & (z, t), & (z, r), & (z, s), \end{array}$$

Jadvalning har bir satridagi barcha juftliklar bir xil birinchi komponentlarga ega, har bir ustundagi juftliklar esa bir xil ikkinchi komponentlarga ega. Bunda hech qanday ikkita satr aqalli bitta bir juftlikka ham ega emas. Bundan $A \times B$ Dekart ko'paytmadagi elementlar soni $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga teng ekani kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ va $3 \cdot 4 = 12$. Berilgan A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasidagi elementlar soni $n(A) \cdot n(B)$ ko'paytmaga tengligini ko'rib chiqamiz. Umuman, agar A va B – chekli to'plamlar bo'lsa, u holda $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. Shunday qilib, butun nomanfiy a va b sonlarning ko'paytmasini $n(A) = a$, $n(B) = b$ bo'ladigan A va B to'plamlarning Dekart ko'paytmasi elementlari soni sifatida qarash mumkin:

$$a \cdot b = n(A \times B), \text{ bunda } n(A) = a, n(B) = b.$$

Birinchi holda ham, ikkinchi holda ham biz ikki son ko'paytmasini aniqladik. Bir nechta ko'paytuvchining ko'paytmasini qanday aniqlash kerak?

Ikkita ko'paytuvchining ko'paytmasi aniqlangan va n ta ko'paytuvchining ko'paytmasi ham aniqlangan bo'lsin. U holda $n + 1$ ta ko'paytuvchidan iborat ko'paytma, ya'ni $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ ko'paytma $(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$

Masalan, $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$ ko'paytmani topish uchun bu ta'rifga ko'ra biz quyidagi almashtirishlarni ketma- ket bajarishimiz kerak:

$$2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = (2 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 9 = ((2 \cdot 7) \cdot 5) \cdot 9 = (14 \cdot 5) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630.$$

Ko'paytirish qonunlarini ko'paytmaning to'plamlarning Dekart ko'paytmasi orqali ta'rifidan kelib chiqqan holda isbotlaymiz.

Ko'paytirish qonuni

1. O'rin almashtirish qonuni: ixtiyoriy butun nomanfiy a va b sonlar uchun $a \cdot b = b \cdot a$ tenglik o'rinli.

$a = n(A)$, $b = n(B)$ bo'lsin. U holda ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $a \cdot b = n(A \times B)$. Biroq $A \times B$ va $B \times A$ to'plamlar teng quvvatli: $A \times B$ to'plamdagi har bir (a, b) juftlikka $B \times A$ to'plamdan yagona (b, a) juftlikni mos qo'yish mumkin va aksincha. Demak, $n(A \times B) = n(B \times A)$ va shuning uchun $a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a$.

2. Guruhlash qonuni: ixtiyoriy butun nomanfiy a , b , c sonlar uchun

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ tenglik o'rinli. $A = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ bo'lsin. U holda ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra

$$(a \cdot b) \cdot c = n((A \times B) \times C), \quad a \cdot (b \cdot c) = n(A \times (B \times C)).$$

$(A \times (B \times C))$ va $A \times (B \times C)$ to'plamlar turlicha: birinchisi $((a, b), c)$ ko'rinishdagi, ikkinchisi esa $(a, (b, c))$ ko'rinishidagi juftliklardan tashkil topgan, bu erda $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Biroq $(A \times B) \times C$ va $A \times (B \times C)$ to'plamlar teng quvvatli, chunki bir to'plamning ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslanishi mavjud. Shuning uchun $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$ va demak, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni: Ixtiyoriy butun nomanfiy a , b , c sonlar uchun $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ tenglik o'rinli.

Bu qonun quyidagi tenglikdan keltirib chiqariladi: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
 (*) $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. U holda ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra:

$(a+b) \cdot c = n((A \cup B) \times C)$ bo'ladi. Bundan (*) tenglikka asosan $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$ ga, keyin esa yig'indi va ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = a \cdot c + b \cdot c$ ga ega bo'lamiz.

4. Ko'paytirishning ayirishga nisbatan taqsimot qonuni: ixtiyoriy butun nomanfiy a, b, c ($a > b$) sonlar uchun $(a-b) \times c = a \cdot c - b \cdot c$ tenglik o'rinli.

Bu qonun $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ tenglikdan keltirilib chiqariladi va yuqoridagi qonunga o'xshash isbotlanadi.

Ko'paytirishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlarini ixtiyoriy sondagi ko'paytuvchilar uchun kengaytirish mumkin. Qo'shishdagi kabi bu qonunlar ko'pincha birgalikda qo'llaniladi, ya'ni agar bir nechta ko'paytuvchining o'rinlari ixtiyoriy usul bilan almashtirilsa, yoki agar ularning ixtiyoriy guruhi qavsga olinsa, u holda bu ko'paytuvchilarning ko'paytmasi o'zgarmaydi.

Taqsimot qonunlari ko'paytirish bilan qo'shish va ayirish orasida aloqa o'rnatadi. Bu qonunlar asosida $(a+b) \cdot c$ va $(a-b) \cdot c$ tipidagi ifodalarda qavslarni ochish shuningdek, agar ifoda $a \cdot c - b \cdot c$ yoki $a \cdot c + b \cdot c$ ko'rinishda bo'lsa, ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish yuz beradi.

Hisoblashlarda ko'paytirish qonunlari qanday qo'llanilishini aniqlaymiz. Masalan, $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ ifodaning qiymatini topamiz.

15 va 6 ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtiramiz-buni ko'paytirishning o'rin almashtirish qonuniga asosan bajarish mumkin, natijada $125 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 8$ ga ega bo'lamiz.

Bu ko'paytmada ikkitadan ko'paytuvchili guruhlar ajratamiz-buni ko'paytirishning guruhlash qonuniga ko'ra qilish mumkin: $(125 \cdot 6) \cdot (15 \cdot 8)$
 Qavs ichidagi sonlarni ko'paytiramiz: $750 \cdot 120$

Bu ko'paytmani topish uchun 750 ni ikkita-700 va 50 sonlari yigindisi ko'rinishida ifodalaymiz: $(700+50) \cdot 120$

Har bir ko'paytuvchini 120 ga ko'paytiramiz-buni ko'paytirishning qo'shishga nisbatan taqsimot qonuniga muvofiq qilish mumkin: $700 \cdot 120 + 50 \cdot 120 = 84000 + 6000 = 90000$ $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8$ ifodaning qiymatini boshqa usul bilan ham topish mumkin: $125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8 = 125 \cdot (15 \cdot 6) \cdot 8 = 125 \cdot 90 \cdot 8 = 125 \cdot 8 \cdot 90 = (125 \cdot 8) \cdot 90 = 1000 \cdot 90 = 90000$

Bu holda almashtirishlarni bajarishda quyidagilardan foydalanildi:

Ko'paytirishning guruhlash qonuni-uning asosida $15 \cdot 6$ ko'paytuvchilar guruhi ajratilib, keyinchalik $125 \cdot 8$ bajarilgan edi;

Ko'paytirishning o'rin almashtirish qonuni-uning asosida 90 va 8 ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilgan edi.

Boshlang'ich matematika kursida ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi o'rganiladi, u bunday ifodalanadi: "Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashishi bilan ko'paytma o'zgarmaydi"-va bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalini tuzishda keng foydalaniladi. Guruhlash qonuni boshlang'ich maktabda

oshkor ko'inishda qaralmaydi, biroq sonni ko'paytmaga ko'paytirishda o'rin almashtirish qonuni bilan birga qo'llaniladi. Bu quyidagicha yuz beradi: o'quvchilarga $3 \cdot (5 \cdot 2)$ ifodaning qiymatini topishning turlicha usullarini qarab chiqish va hosil bo'lgan natijalarni taqqoslash taklif etiladi.

Quyidagi keltiriladi:

1. $3 \cdot (5 \cdot 2) = 3 \cdot 10 = 30$;
2. $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$;
3. $3 \cdot (5 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$.

Ulardan birinchisi amallarni bajarish tartibi qoidasiga, ikkinchisi ko'paytirishning guruhlash qonuniga, uchinchisi ko'paytirishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlariga asoslangan.

Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan taksimot qonuni maktabda konkret misollarda qaraladi va sonni yig'indiga va yig'indini songa ko'paytirish qoidalari nomi bilan ataladi. Bu ikki qoidani qarash metodik mulohazalar bilan oshiriladi.

MAVZU: Bo'lish. "...marta katta", "...marta kichik" munosabatlar.

Muammoli savollar:

1. Nomanfiy butun sonni natural songa bo'lishning nazariy to'plam asosida qanday talqin qilish mumkin?
2. Qachon a sonni b songa bo'lish mumkin?
3. "...marta katta" va "...marta kichik" munosabatlarini nazariy to'plam nuqtai nazarda qanday ta'riflash mumkin?
4. Bo'lish amali qanday xossalarga ega.

Reja:

1. Butun nomanfiy sonlarni natural sonlarga bo'linmasi ta'rifi.
2. Natural sonlar bo'linmasining mavjud bo'lishining zaruriy sharti.
3. "...marta katta" va "...marta kichik" munosabatlari.
4. Yig'indini songa va sonni ko'paytmaga bo'lish qoidalari.

Tayanch iboralar:

Bo'lish amalining nazariy to'plam nuqtai nazarda talqin qilish, bo'linuvchi, bo'luvchi, bo'linma.

Foydalanilgan adabiyotlar:

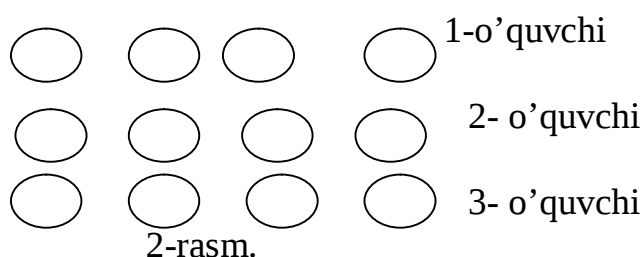
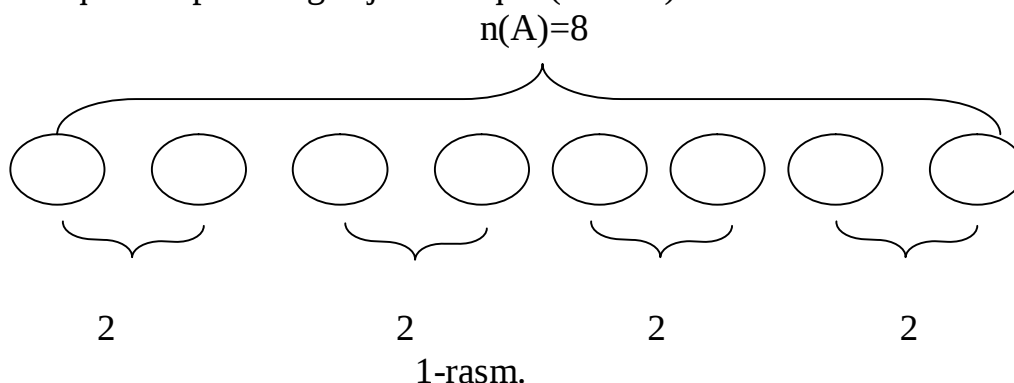
1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ы=итувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
3. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А. Нурметов, Л. Левенберг, И. Ашмаджонов. Бошланғич синфларда математика ы=итиш методикаси. Т.: «Ы=итувчи», 1985.

Kichik yoshdagi maktab o'quvchilari bo'lish amalini o'rganishga kirisha boshlaganda echadigan bir masalani qaraylik: "8 ta apelsinni har biriga 2 tadan

qilib necha marta apelsin qo'yishdi? Nechta likopcha kerak bo'ldi?"

Masalaning savoliga javob bo'lish yordamida topiladi: $8:2=4$

Bu masalaning echilishini tahlil qilamiz. Masalada 8 ta elementga ega to'plam qaralmoqda. U har birida 2 tadan element bo'lgan qism to'plamlarga, ya'ni teng quvvatli qism to'plamlarga ajratilmoqda (1-rasm)



Bundan tashqari, ular jufti-jufti bilan kesishmaydi. Masalada necha shunday qism to'plam hosil bo'lishi so'ralyapti. Shunday qilib, javobda hosil qilingan 4 soni- bu 8 ta elementdan iborat to'plam bo'lingan ikki elementli qism to'plamlar sonidir. (Bunday masalalar odatda ma'noga qarab bo'lishga doir masalalar deb nomlanadi.)

Endi boshqa misolga e'tibor beraylik: "12 ta qalamni 3 o'quvchiga baravardan tarqatishdi. Har bir o'quvchi nechtadan qalam oldi?"

U ham bo'lish bilan echiladi: $12:3=4$. Lekin bu erda 4 soni boshqa ma'noda-12 ta elementdan iborat to'plam bo'lingan teng quvvatli kesishmaydigan har bir uchta qism to'plamdagi elementlar soni sifatida qatnashmoqda (2-rasm). (Bunday masalalar teng bo'laklarga bo'lishga doir masalalar deb nomlanadi.)

Umumiy ko'rinishda butun nomanfiy a sonining natural b songa bo'linmasi quyidagicha ta'riflanadi:

Ta'rif: $a=n(A)$ va A to'plam jufti-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratilgan bo'lsin.

Agar b A to'plamni bo'lishdagi qism to'plamlar soni bo'lsa, u holda a va b sonlarning bo'linmasi deb har bir qism to'plamdagi elementlar soniga aytiladi.

Agar b A to'plamni bo'lishdagi har bir qism to'plam elementlari soni bo'lsa, u holda a va b sonlarning bo'linmasi deb bu bo'linmadagi qism to'plamlar soniga aytiladi.

$a:b$ bo'linmani topishda foydalaniladigan amal bo'lish deb, a soni bo'linuvchi, b soni bo'luvchi deb ataladi.

Bo'lish amalining to'g'ri bajarilganini tekshirish uchun biz ko'pincha ko'paytirishga murojaat qilamiz. Nima uchun? Chunki bo'lish va ko'paytirish amallari o'zaro bog'liq ekani shubhasiz. Biroq bu bog'lanish qanday?

$a=n(A)$ to'plam va A to'plam b ta jufti-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli $A_1, A_2, \dots, A_b$, qism to'plamlarga bo'lingan bo'lsin. U holda $c=a:b$ har bir shunday qism to'plamdagi elementlar soni bo'ladi, ya'ni $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=\dots=n(A_b)$

Shartga ko'ra $A=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b$ bo'lgani uchun $n(A)=n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b)$ bo'ladi. Lekin $A_1, A_2, \dots, A_b$ qism to'plamlar jufti-jufti bilan kesishmaydi, demak, yig'indining ta'rifi ko'ra $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b)=n(A_1)+n(A_2)+\dots+n(A_b)=c+c+\dots+c$ (b ta qo'shiluvchi)

Ko'paytmaning ta'rifi ko'ra har biri c ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisi $c \cdot b$ ko'paytmaga teng. Shunday qilib, $a=c \cdot b$ ekani aniqlandi, ya'ni a va b sonlarning bo'linmasi shunday sonki, u bilan b sonning ko'paytmasi a ga teng bo'ladi. $C=a:b$ bo'linma A to'plamning bo'linishidagi qism to'plamlar soni bo'lganda ham xuddi shunday xulosaga kelamiz.

Shunday qilib, bo'linmaning ikkinchi ta'rifi ega bo'lamiz:

Ta'rif: Butun nomanfiy a soni bilan b natural sonning bo'linmasi deb shunday butun nomanfiy $c=a:b$ songa aytiladiki, uning b son bilan ko'paytmasi a bo'ladi.

Teskari bog'lanishning mavjudligini ham ko'rsatish mumkin, ya'ni bo'linmaning ikkinchi ta'rifidan birinchi ta'rifi kelib chiqishini ko'rsatish mumkin: $a:b=c \Leftrightarrow a=c \cdot b$

Demak, ikkinchi holda bo'linma ko'paytma orqali ta'riflandi. Shuning uchun bo'lish ko'paytirishga teskari amal deb aytiladi.

a va b natural sonlarning bo'linmasi har doim ham mavjud bo'ladimi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Ikkita a va b natural sonning bo'linmasi mavjud bo'lishi uchun $b \leq a$ bo'lishi zarur.

Isboti. a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsin, ya'ni $a=c \cdot b$ bo'ladigan c natural son mavjud bo'lsin. Ixtiyoriy c natural son uchun $1 \leq c$ da'vo o'rinli. Bu tengsizlikning ikkala qismini b natural songa ko'paytiramiz, $b \leq c \cdot b$ ga ega bo'lamiz. $c \cdot b=a$ bo'lgani uchun $b \leq a$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

$a=0$ va b natural sonning bo'linmasi nimaga teng? Ta'rifga ko'ra bu $c \cdot b=0$ shartni qanoatlantiruvchi a sonidir. $b \neq 0$ bo'lgani uchun $c \cdot b=0$ tenglik $c=0$ bo'lganda bajariladi. Demak, $b \in \mathbb{N}$ da $0:b=0$ bo'ladi.

Teorema. Agar a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Bu teoremaning isboti ayirmaning yagonaligi haqidagi teoremaning isboti kabi.

Endi butun nomanfiy sonni nolga bo'lish mumkin emasligi haqidagi masalani ko'rib chiqamiz.

$a \neq 0$ va $b=0$ sonlar berilgan bo'lsin. A va b sonlarning bo'linmasi mavjud deb faraz qilamiz. U holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a=c \cdot 0$ bo'ladigan butun nomanfiy c soni mavjud bo'ladi, bundan $a=0$. Shartga zid xulosaga keldik. Demak, $a \neq 0$ va $b=0$ sonlarning bo'linmasi mavjud emas.

Agar $a=0$ va $b=0$ bo'lsa, u holda bunday a va b sonlarning bo'linmasi mavjud degan jumladan c ning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'ladigan $0=c \cdot 0$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni $a=0$ va $b=0$ sonlarning bo'linmasi har qanday son bo'lishi mumkin. Shuning uchun matematikada nolni nolga bo'lish ham mumkin emas deb hisoblanadi. ($0:0$ –aniqmaslikdir)

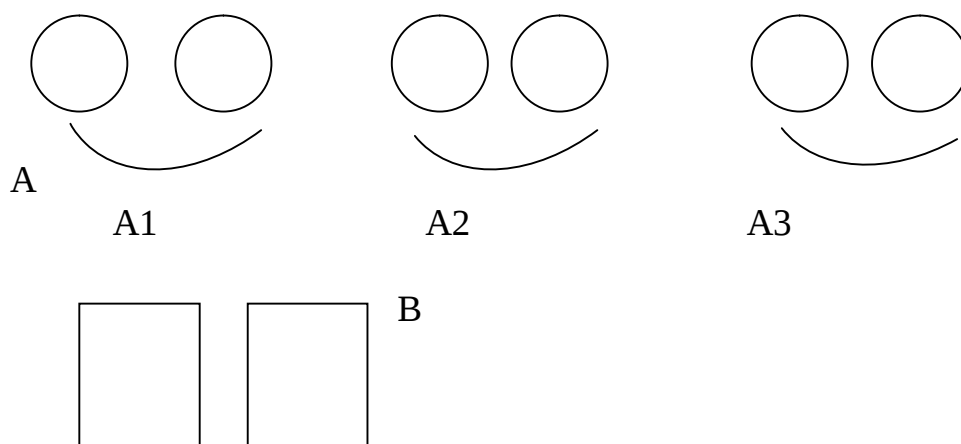
Boshlang'ich matematika kursida bo'lish haqidagi dastlabki tasavvurlar to'plamni jufti-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratish bilan bog'liq bo'lgan, lekin mos terminologiya va simvolikalar kiritilmaydigan amaliy mashqlar asosida shakllanadi. Bu bo'lish tushunchasini ochishning bosh vositasi masalalarni echishdir. Shunday ikkita masalani yechishning mohiyati punktning boshida ko'rib o'tildi.

Bo'lishning ko'paytirishga teskari amal sifatidagi ta'rifi oshkor ko'rinishda berilmaydi. Bo'lish bilan ko'paytirish orasidagi o'zaro bog'lanish “Noma'lum ko'paytuvchini topish” temasini o'rganish bilan o'rnatiladi, bunda asosan bo'linmaning nazariy-to'plam bayonida o'rinli bo'lgan ikkita ma'nosining umumlashishi yuz beradi.

“...marta katta”, “...marta kichik” munosabatlari.

Masalalar echishda va amaliy faoliyatda ko'pincha bunday savol tug'iladi: “Bir son ikkinchi sonidan necha marta katta yoki kichik?” “...marta katta” va “...marta kichik” munosabatlari bilan dastlabki tanishish boshlang'ich maktabda yuz beradi. Bu munosabatlarning ma'nosini aniqlashtiramiz.

6 ta elementi bo'lgan A to'plam va 2 ta elementi bo'lgan B to'plam berilgan bo'lsin. A to'plamda B to'plamga teng quvvatli qism to'plamlar ajratamiz (3-rasm). Ular 3 ta ekan. Bunday holda 6 soni 2 sonidan 3 marta katta, 2 soni esa 6 sonidan 3 marta kichik deb aytiladi.



3-rasm.

Umuman, agar $a=n(A)$, $b=n(B)$, $a>b$ bo'ladigan a va b sonlar berilgan va A to'plamni B to'plamga teng quvvatli c ta qism to'plamga ajratish mumkin

bo'lsa, a soni b sonidan c marta katta, b soni esa a sonidan c marta kichik deb aytiladi.

Ammo bu c sonining o'zi nimani ifodalaydi? Nazariy to'plam nuqtai nazaridan bu a va b sonlarining bo'linmasidir. Bundan quyidagi qoidani hosil qilamiz:

Bir son ikkinchi sondan necha marta katta yoki kichik ekanini bilish uchun katta sonni kichik songa bo'lish zarur.

Masalan, ushbu masalani qaraylik: "3 tup olma va 12 tup olcha o'tqazildi. Olchadan necha marta kam olma o'tqazildi?" Yuqoridagi qoidaga ko'ra savolga bo'lish yordamida javob topiladi: $12:3=4$ (marta). Bajarilgan amalning ma'nosi 4 rasmda yorqin namoyish etilgan. "...marta ko'p" va "... marta kam" munosabatlarni boshqa ko'rinishdagi masalalarda ham uchraydi.

○ ○ ○ ○

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4-rasm

○ ○ □

○ ○ □

○ ○ □
 $\underbrace{\quad\quad}$ $\underbrace{\quad\quad}$
 A B

5-rasm

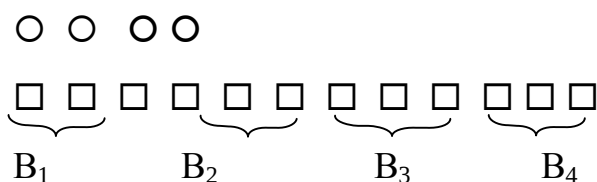
Masala: Lolada 6 ta daftar, Karimda undan 2 marta kam daftar. Karimda nechta daftar bor?

Masalada ikkita to'plam: Loladagi daftarlar to'plami A , Karimdagi daftarlar to'plami B haqida gap bormoqda. $n(A)=6$ ekani ma'lum. $n(B)$ soni 6 dan 2 marta kam ekanini bilgan holda shu $n(B)$ sonni topish talab etiladi. Bu shartdan kelib chiqib, A to'plamni teng quvvatli ikkita qism to'plam ko'rinishida tasvirlash mumkin (5-rasm) u holda B to'plamda A to'plamning har bir qism to'plamida nechta element bo'lsa, shuncha element bo'ladi, bu son bo'lish bilan topiladi: $6:2=3$. Demak, $n(B)=3$, ya'ni Karimda 3 ta daftar bor ekan.

Masala. Lolada 3 ta daftar, Karimda esa undan 4 marta ko'p daftar bor. Karimda nechta daftar bor?

Bu masalada ham oldingi masaladagi kabi ikkita to'plam: Loladagi daftarlar to'plami A va Karimdagi daftarlar to'plami B qaraladi. $n(B)=3$ ekani ma'lum. B to'plamdagi elementlar soni A to'plamdagi elementlar sonidan 4 marta ko'p ekanini bilgan holda $n(B)$ ni topish talab etiladi. Bu B to'plam A to'plamga teng quvvatli kesishmaydigan to'rtta B_1, B_2, B_3, B_4 qism to'plamdan

iborat ekanini anglatadi (6-rasm) va demak, $n(B_1)=n(B_2)=n(B_3)=n(B_4)=n(A)$
 Biroq u holda B to'plamdagi elementlar sonini qo'shish bilan topish mumkin:
 $n(B) \llcorner n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \llcorner n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + n(B_4) \llcorner 3 + 3 + 3 + 3$. qo'shishni
 ko'paytirish bilan almashtirib, ushbuni hosil qilamiz: $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$
 Demak, Karimda 12 ta daftar bor ekan.



6-rasm

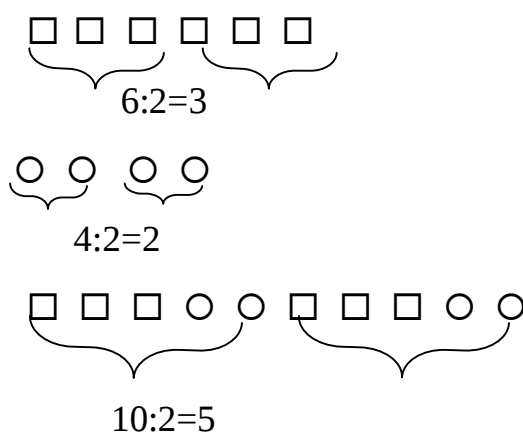
«a soni b dan c marta katta» jumlani «>» belgidan foydalanib, qisqa yozish mumkin emasligini eslatib o'tamiz, chunki «... marta katta» munosabatini yozish uchun («...marta kichik» munosabati uchun ham) maxsus belgi yo'q.

Yig'indini songa va sonni ko'paytmaga bo'lish qoidalari.

Natural sonlarni bo'lishning ba'zi xossalari bilan tanishamiz. Bu qoidalarni tanlash boshlang'ich matematika kursi mazmuni bilan aniqlangan.

Yig'indini songa bo'lish qoidasi. Agar a va b sonlar s songa bo'linsa, u holda ularning $a+b$ yig'indisi ham c ga bo'linadi; $a+b$ yig'indini c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma a ni c ga va b ni s ga bolganda hosil bo'ladigan bo'linmalar yig'indisiga teng, ya'ni $(a+b):c=a:c+b:c$.

Isboti. a soni c ga bo'lingani uchun $a=c \cdot m$ bo'ladigan $m=a:c$ natural son mavjud. Shunga o'xshash $b=c \cdot n$ bo'ladigan $n=b:s$ natural son mavjud. U holda $a+b=c \cdot m + c \cdot n = c \cdot (m+n)$ Bundan $a+b$ yigindining c bo'linishi va $a+b$ ni c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma $m+n$ ga eng bo'lishi, ya'ni $a:c+b:c$ ekani kelib chiqadi.



7-rasm

Isbot qilingan qoidani nazariy to'plam nuqtai nazaridan talqin qilish mumkin.

$A=n(A)$, $b=n(B)$, bunda $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Agar A va B to'plamlarning har birini c ga eng quvvatli qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plamlar birlashmalarini ham shunday ajratish mumkin (7-rasm).

Bunda, agar A to'plamni ajratishdagi har bir qism to'plam $a:c$ elementga ega bo'lsa, B to'plamning har bir qism to'plami $b:c$ elementga ega bo'lsa, u

holda $A \cup B$ to'plamning har bir qism to'plamida $a:c+b:c$ element mavjud bo'ladi.

Sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasi. Agar a natural son b va c natural sonlarga bo'linsa, u holda a sonni b va c sonlar ko'paytmasiga bo'lish uchun a sonni $b(s)$ ga bo'lish va hosil bo'lgan bo'linmani $s(b)$ ga bo'lish etarli:

$$a:(b \cdot c) = (a:b):c = (a:c):b$$

Isboti. $(a:b):c = x$ deb faraz qilaylik. U holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a:b = c \cdot x$ bo'ladi, bundan shunga o'xshash $a = b \cdot (c \cdot x)$ bo'ladi. Ko'paytirishning guruhlash qonuniga asosan $a = (b \cdot c) \cdot x$ bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglik $a:(b \cdot c) = x$ ekanini bildiradi. Shunday qilib, $a:(b \cdot c) = (a:b):c$

Sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish qoidasi. Sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun bu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish yetarli, ya'ni $a:(b:c) = (a \cdot b):c$.

Bu qoidaning isboti avvalgi qoidaning isbotiga o'xshash.(isboti mustaqil) Yuqoridagi qoidalar misollar yechilishida keng qo'llaniladi.

Masalan, $(720+600):24$ ifodaning qiymatini topish uchun 720 va 600 qo'shiluvchilarni 24 ga bo'lish va hosil bo'lgan bo'linmalarni qo'shish etarli:

$$(720+600):24 = 720:24 + 600:24 = 30 + 25 = 55$$

$1440 \oslash 12 \cdot 15$ ifodaning qiymatini avval 1440 ni 12 ga bo'lib, keyin hosil bo'lgan bo'linmani 15 ga bo'lib topish mumkin:

$$1440 \oslash 12 \cdot 15 = (1440:12):15 = 120:15 = 8$$

Ko'rsatib o'tilgan qoida boshlang'ich matematika kursida konkret misollarda qaraladi. $6+4$ yig'indini 2 soniga bo'lish qoidasi bilan dastlabki tanishishda ko'rgazmali material namoyish etiladi. Keyinchalik bu qoidadan hisoblashlarni ixcham bajarish uchun foydalaniladi. Sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasi nol bilan tugagan sonlarga bo'lishda keng qo'llaniladi.

Mavzu: Qoldiqli bo'lish. Z_0 ning asosiy xossalari.

Muammoli savollar:

1. Qoldiqli bo'lish ta'rifini nazariy to'plam nuqtai nazarida qanday talqin qilish mumkin?
2. Nomanfiy butun sonlar to'plami qanday xossalarga ega?

Reja:

1. Qoldiqli bo'lish ta'rifi.
2. Butun nomanfiy sonlar to'plamining xossalari.

Tayanch iboralar:

Qoldiqli bo'lishning nazariy to'plam ma'nosi, Z_0 xossalari: tartiblanganlik, diskretlik, cheksizlik.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ылтиувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.

3. В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М.Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А.Нурметов, Л.Левенберг, И.Ацмаджонов. Бошланғич синфларда математика ығиш методикаси. Т.: «Ығиш», 1985.

37 soni 8 ga bo'linmaydi. Lekin $37=8\cdot4+5$ bo'ladigan 4 va 5 sonlari mavjud. 37 sonini 8 ga bo'lish qoldikli bo'lish bilan bajariladi, bunda to'liqsiz 4 bo'linma va 5 qoldiq topildi deb aytiladi.

Ta'rif. Butun nomanfiy a sonni b natural songa qoldikli bo'lish deb, $a=bq+r$ va $0<r<b$ bo'ladigan butun nomanfiy q va r sonlarni topishga aytiladi.

Qoldikli bo'lishning berilgan ta'rifidan kelib chiqadigan o'ziga xos xususiyatiga e'tibor beraylik. Qoldiq b bo'luvchidan kichik natural sonidir. Shuning uchun butun nomanfiy sonlarni b ga bo'lganda hammasi bo'lib b ta turlicha qoldiq hosil bo'lishi mumkin: $0,1,2,3,\dots,b-1$. Masalan, butun nomanfiy sonlarni 5 ga qoldikli bo'lganda, quyidagi qoldiqlar hosil bo'lishi mumkin: $0,1,2,3,4$. Agar $a<b$ bo'lsa, u holda a ni b ga qoldikli bo'lganda to'liqsiz bo'linma $q=0$, qoldiq $r=a$ bo'ladi, ya'ni $a=0\cdot b+a$.

a ni b ga qoldikli bo'lishni har doim ham bajarish mumkinmi? Bu savolga biz isbotsiz qabul qiladigan ushbu teorema javob beradi.

Teorema: Ixtiyoriy butun nomanfiy a soni va b natural son uchun $a=b\cdot q+r$, bunda $0<r<b$, bo'ladigan butun nomanfiy q va r sonlar mavjud. Bu xossaga ega bo'lgan butun nomanfiy sonlar jufti (q,r) yagonadir.

Qoldikli bo'lishning nazariy to'plam ma'nosi qanday ekanini aniqlaymiz.

$a=n(A)$ va A to'plam $A_1, A_2, \dots, A_q$, X to'plamlarga ajratilgan bo'lib, bunda $A_1, A_2, \dots, A_q$, to'plamlar teng quvvatli va b tadan elementni olgan, X to'plam esa $A_1, A_2, \dots, A_q$ to'plamlarning har biridagi elementlaridan kam elementlarga ega bo'lsin. Masalan, $n(X)=r$. U holda $a=bq+r$ bo'ladi, bunda $0<r<b$. Shunday qilib to'liqmas bo'linma q -bu A to'plamni ajratishdagi (har birida b tadan element bo'lgan) teng quvvatli qism to'plamlar soni, qoldiq r - X to'plamdagi elementlar soni. Boshlang'ich maktabda qoldikli bo'lish bilan tanishish misol tariqasida 9 ta boladan 4 ta juft tuzish va bitta bola juftsiz qolish vaziyatini qarab chiqishda yuz beradi, ya'ni tuliqmas bo'linma va qoldiq bilan tanishish, mohiyatiga ko'ra, nazariy to'plam asosida yuz beradi. Qoldikli bo'lishning quyidagicha yozilishidan foydalaniladi.

$$9:2=4(1 \text{ qoldiq}).$$

Agar bo'lishda qoldiq qolsa, u holda qoldiq bo'luvchidan har doim kichik bo'lishi ta'kidlab o'tiladi.

Qoldikli bo'lishning muhimligi shundan iboratki, u ko'p xonali sonlarni bo'lish algoritmiga asos bo'ladi. Butun nomanfiy sonlar to'plamining xossalari. Butun nomanfiy sonlar to'plami qator xossalarga ega. Xususan, u tartiblangan va cheksizdir.

Butun nomanfiy sonlar to'plamini "kichik" munosabati yordamida tartiblantirish mumkin ekanini isbotlaymiz. Buning uchun bu munosabat

tranzitiv va antisimmetrik ekanini ko'rsatamiz, buning ustiga "kichik" munosabatining yigindi orqali ta'rifidan kelib chiqamiz.

Teorema. Agar $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, u holda $a < c$ bo'ladi.

Isboti. $a < b$ va $b < c$ bo'lgani uchun "kichik" munosabatining ta'rifiga ko'ra $b = a + x$ va $c = b + y$ bo'ladigan x va y natural sonlar topiladi. Lekin u holda $c = (a + x) + y$ bo'ladi va qo'shishning guruhlash qonuniga asosan $c = a + (x + y)$ ga ega bo'lamiz. $x + y$ butun nomanfiy son bo'lgani uchun "kichik" munosabatining ta'rifiga ko'ra $a < c$ bo'ladi.

Teorema. Agar $a < b$ bo'lsa, u holda $b < a$ bo'lishi noto'g'ri.

Isboti. Hech qanday butun nomanfiy a son uchun $a < a$ tengsizlikning bajarilmasligiga ishonish qiyin emas. Agarda $a < a$ bo'lganda edi, u holda $a = a + c$ bo'ladigan natural c soni topilar edi, lekin yigindining yagonaligiga ko'ra buning bo'lishi mumkin emas. Endi ikkala $a < b$ va $b < a$ tengsizliklar bajariladi deb faraz qilaylik. U holda "kichik" munosabatining tranzitivlik xossasiga ko'ra $a < a$ tengsizlikka ega bo'lamiz, buning esa bo'lishi mumkin emas.

Butun nomanfiy sonlar uchun "kichik" munosabati tranzitiv va antisimmetrik bo'lgani uchun u tartib munosabati bo'ladi, butun nomanfiy sonlar to'plami esa tartiblangan to'plam bo'ladi.

"Kichik" munosabatining ko'rib o'tilgan xossalaridan ixtiyoriy butun nomanfiy a va b sonlar uchun $a < b$, $a = b$, $b > a$ munosabatlardan faqat bittasi bajarilishi kelib chiqadi.

Bu to'plamning elementlarini ixtiyoriy sondan avval kichigi keladigan qilib joylashtirib, butun nomanfiy sonlar qatorini hosil qilamiz: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Bu qator cheksizdir. A ta elementga ega bo'lgan biror A to'plamni olamiz. A to'plamning hamma elementlaridan farq qiladigan yana bitta element qo'shib qo'yilsa, u holda elementi $a + 1$ ta bo'lgan yangi B to'plam hosil bo'ladi. $a + 1$ sonni a sondan bevosita keyin keluvchi son deb aytamiz. U holda har bir butun nomanfiy son uchun undan bevosita keyin keluvchi yagona natural sonni ko'rsatish mumkin. Aksincha: har bir butun nomanfiy son bittadan ortiq bo'lmagan butun nomanfiy sondan bevosita keyin keladi, nol hech qanday butun nomanfiy sondan bevosita keyin kelmaydi. 0 sonidan boshlab tartib bilan bevosita bir-biridan keyin keluvchi natural sonlarga o'ta borib, biz butun nomanfiy sonlar to'plamini hosil qilamiz.

"Bevosita keyin kelish" munosabati butun nomanfiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish bilan uzviy bog'langan. Haqiqatdan ham, agar $a + b$ yig'indi ma'lum bo'lsa, $a + (b + 1)$ yig'indini topish oson $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, ya'ni u $a + b$ yig'indidan bevosita keyin keluvchi songa teng. Masalan, agar $4 + 2 = 6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda $4 + 3$ yig'indini topish uchun 6 ga 1 ni qo'shish yetarli: $4 + 3 = 4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$

"Bevosita keyin kelish" munosabatidan ko'paytirish uchun ham shunga o'xshash foydalaniladi: agar $7 \cdot 5 = 35$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $7 \cdot 6$ ko'paytmani topish oson. Buning uchun 35 ga 7 ni qo'shish yetarli, chunki $7 \cdot 6 = 7 \cdot (5 + 1) = 7 \cdot 5 + 7 = 35 + 7$ bo'ladi.

Butun nomanfiy sonlar to'plamining yana bitta xossasini aytib o'tamiz. A – biror butun nomanfiy son va $a + 1$ a dan bevosita keyin keluvchi son bo'lsin.

U holda hech qanday butun nomanfiy a son uchun $a < x < a+1$ bo'ladigan x natural son ko'rsatish mumkin emas. Bu xossa natural sonlar to'plamining diskretlik xossasi, a va $a+1$ sonlarning o'zi esa qo'shni sonlar deb ataladi.

Birinchi o'nlikdagi sonlarni o'rganishning o'zidayoq natural qatorning har bir sonini qanday hosil qilish mumkinligi aniqlanadi. Bunda "Keyin keladi", "Oldin keladi" va 1 ni qo'shish hamda 1 ni ayirish tushunchalaridan foydalaniladi, ya'ni o'quvchilar natural qator sonlarining xossalari qurishlari uchun sharoit yaratiladi: ixtiyoriy sonni sanoqda undan oldin keluvchi songa birni qo'shish bilan hosil qilish mumkin, ixtiyoriy son undan oldin keluvchi sondan bitta ko'p va h.k.

Mavzu: Natural sonning ma'nosi va sonlar-kattaliklarni o'lchash natijalari ustida amallar ma'nosi.

Muammoli savollar:

- 1) Qachon $/OB/ < /OA/$ ($/OB/ > /OA/$) bo'ladi? Berilgan OA va OB kesmalar uchun (boshi bir nuqtada bo'lgan) 3 ta holni tushuntiring.
- 2) $a+b$; $a-b$; larni tushuntiring. (kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni qo'shish va ayirish)
- 3) Sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosi (kattaliklarning qiymatlari sifatida)

Reja:

1. Kesmalarni taqqoslash. Kesmalar ustida amallar.
2. Natural son kesma uzunligining qiymati sifatida.
3. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosi.
4. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosi.

Tayanch iboralar:

Natural son, kattalik, kesma, kesma uzunligi, birlik kesma, qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish amallari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ы=итувчи», 1991.
2. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.
3. В.М. Бродис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954.
4. А.М. Пышкало, Л.П. Стойлова. Теоретические основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1974.
5. А. Нурметов, Л. Левенберг, И. Ахмеджонов. Бошланғич синфларда математика ы=итиш методикаси. Т.: «Ы=итувчи», 1985.

Kishiga amaliy faoliyatida nafaqat buyumlar sanog'ini olib borishga, balki turli kattaliklar uzunlik, massa, vaqt va boshqalarni o'lchashga to'g'ri keladi. Shuning uchun natural sonlarning vujudga kelishida sanoqqa bo'lgan ehtiyojgina emas, kattaliklarni o'lchash masalasi ham sabab bo'ladi.

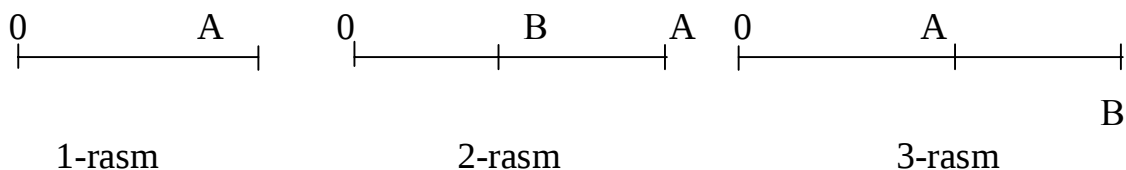
Agar natural son kattaliklarni o'lchash natijasida paydo bo'lgan bo'lsa, uning qanday ma'noga ega ekanligini aniqlaymiz. Natural songa bunday yondashish bilan bog'liq bo'lgan hamma nazariy dalillarni bitta kattalik –kesma uzunligi misolida qaraymiz.

a va b kesmalar berilgan bo'lsin. Bu kesmalarga teng kesmalarni boshi O nuqtada bo'lgan biror nurga quyamiz. $OA=a$ va $OB=b$ kesmalarni hosil qilamiz. Uchta hol bo'lishi mumkin.

1. A va B nuqtalar ustma-ust tushadi. (1-rasm) O holda OA va OB bitta kesma, a va b kesmalar esa unga teng, demak, $a=b$.

2. B nuqta OA kesma ichida yotadi (2-rasm) O holda OB kesma OA kesmadan kichik (yoki OA kesma OB kesmadan katta) deyiladi va bunday yoziladi: $OB < OA$ ($OA > OB$) yoki $b < a$ ($a > b$).

3. A nuqta OB kesma ichida yotadi. (3-rasm) O holda OA kesma OB kesmadan kichik deyiladi va bunday yoziladi: $OA < OB$ yoki $a < b$ ($b > a$).

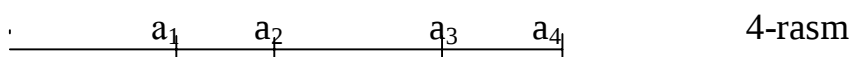


Kesmalar ustida turli amallar bajariladi.

Ta'rif: Agar a kesma $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalarning birlashmasi bo'lib, kesmalarning birortasi ham ichki umumiy nuqtaga ega bo'lmasa (bir-biri bilan ustma-ust tushmasa) va bir kesma ikkinchi kesmaning oxiriga birin-ketin tutashsa, a kesma bu kesmalarning yigindisi deyiladi.

Bunday yoziladi: $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

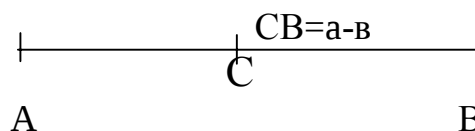
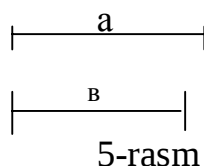
Masalan, 4-rasmda tasvirlangan a kesmani a_1, a_2, a_3, a_4 kesmalarning yigindisi deyish mumkin.



Ta'rif: a va b kesmalarning $a-b$ ayirmasi deb, shunday c kesmaga aytiladiki, uning uchun $b+c=a$ tenglik o'rinli bo'ladi.

a va b kesmalarning ayirmasi bunday topiladi. a kesmaga teng AB kesma yasaladi va unda b kesmaga teng AC kesma ajratiladi.

O holda CB kesma a va b kesmalarning $a-b$ ayirmasi bo'ladi. (5-rasm)



Ravshanki, a va b kesmalarning ayirmasi mavjud bo'lishi uchun b kesma a kesmadan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kesmalar ustida amallar qator xossalarga ega. Ulardan ba'zilarini isbotsiz keltiramiz.

1. Har qanday a va b kesmalar uchun $a+b=b+a$ tenglik o'rinli, ya'ni kesmalarni qo'shish o'rin almashtirish qonuniga buysonadi.

2. Har qanday a, b, c kesmalar uchun

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

tenglik o'rinli, ya'ni kesmalarni qo'shish guruhlash qonuniga buysonadi.

3. Har qanday a va b kesmalar uchun

$$a+b \neq a.$$

4. Har qanday a, b va c kesmalar uchun $a < b$ bo'lsa, u holda $a+c < b+c$ bo'ladi.

Kesmalar uzunliklari qanday o'lchanishini eslaylik. Eng avval kesmalar to'plamidan birorta e kesma tanlab olinadi va u birlik kesma yoki uzunlik birligi deb ataladi.

So'ngra berilgan a kesma birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Agar a kesma e birlik kesмага teng n ta kesma yig'indisi bo'lsa, bunday yoziladi:

$$a = e + e + \dots + e = ne$$

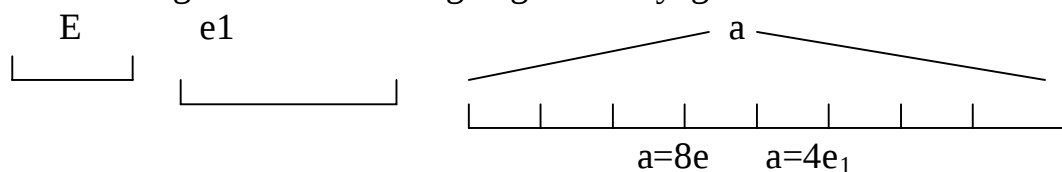
n ta qo'shiluvchi va n natural son va kesma uzunligining e uzunlik birlikdagi son qiymati deyiladi.

Masalan, 6-rasmda tasvirlangan a kesma uzunligining e uzunlik birlikdagi son qiymati 8 soni bo'ladi. Bunday yozish mumkin: $a=8e$

Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda, a kesma uzunligining son qiymati o'zgaradi. Masalan; agar uzunlik birlik sifatida e_1 kesma tanlab olinsa (6-rasm), a kesma uzunligining son qiymati 4: $a=4e_1$ ga teng bo'ladi.

Shuni eslatib o'tish muhimki, har qanday natural son n uchun uzunligi shu son bilan ifodalanadigan kesma mavjud bo'ladi. Bunday kesma yasash uchun e uzunlik birligini birin-ketin n marta qo'shish yetarlidir.

Shunday qilib, a kesma o'zunligining son qiymati sifatidagi natural son a kesma tanlab olingan e birlik kesmalarning nechtasidan iboratligini ko'rsatadi. Tanlab olingan e uzunlik birlikdagi bu son yagonadir.



6-rasm

Bunday sonlar uchun "teng" va "kichik" munosabatlari qanday ma'noga ega ekanligini aniqlaymiz.

N natural son a kesma uzunligining son qiymati, m natural son b kesma uzunligining son qiymati bo'lib, bu sonlar bitta e uzunlik birligida hosil qilingan bo'lsin. U holda:

agar a va b kesmalar teng bo'lsa, ular uzunliklarining son qiymati teng bo'ladi, ya'ni $n = m$: teskari tasdiq ham o'rinli;

agar a kesma b kesmadan kichik bo'lsa, a kesma uzunligining son qiymati b kesma o'zunligining son qiymatidan kichik bo'ladi, ya'ni $n < m$ teskari tasdiq ham o'rinli.

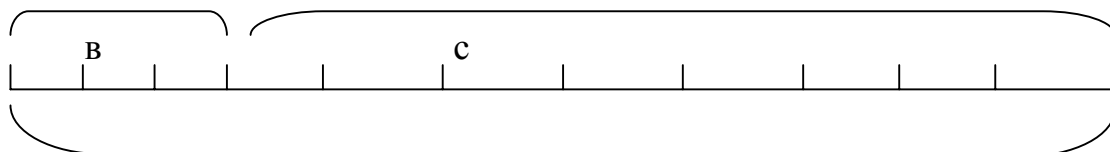
Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymati orasida o'rnatilgan o'zaro bog'lanish kesmalar uzunliklarini taqqoslashni ularning tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi va aksincha.

Masalan, $5\text{ sm} > 3\text{ sm}$, chunki $5 > 3$

Biz natural son kesmalar uzunliklarini o'lchash natijalari sifatida nimani bildirishini aniqladik. Natural sonning ma'nosini, sonlar orasidagi munosabatlarini yo'z, massa, baho, vaqt kabi boshqa kattaliklarni o'lchash bilan bog'liq ravishda shunga o'xshash talqin qilish mumkin.

Agar natural sonlar kesmalarining uzunliklarini o'lchash natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, bu sonlarni qo'shish va ayirish qanday ma'noga ega bo'lishini aniqlaymiz.

1.Qo'shish. Masalan, 3 va 8 sonlari v va s kesmalar uzunliklarini e birlik yordamida o'lchash natijalari bo'lsin, ya'ni $b=3e$, $c=8e$. Ma'lumki $3+8=11$. Ammo 11 soni qaysi kesma uzunligini o'lchash natijasi bo'ladi? Ravshanki, bu $a=b+c$ kesma o'zunligining qiymatidir.(7-rasm)



a 7-rasm.

Mulohazani umumiy ko'rinishda yuritamiz. A kesma b va c kesmalar yig'indisi hamda $b=me$, $c=ne$ bo'lsin, bunda m va n –natural sonlar. U holda b kesma m ta bo'lakka, c kesma n ta shunday bo'lakka bo'linadi, bu bo'laklarning har biri birlik kesma e ga teng. Shunday qilib, butun a kesma $m+n$ ta shunday bo'lakka bo'linadi. Demak, $a=(m+n)e$.

Shunday qilib, m va n natural sonlar yig'indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalanadigan b va c kesmalardan tuzilgan a kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin ekan.

2.Ayirish. Agar a kesma b va c kesmalardan iborat bo'lib, a va b kesmalarining uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil uzunlik birligida), c kesma uzunligining qiymati a va b kesmalar uzunliklari qiymatlarining ayirmasiga teng: $c=(m-n)e$, ya'ni natural sonlarning $m-n$

ayirmasini uzunliklari mos ravishda m va n natural sonlar bilan ifodalangan a va b kesmalar ayirmasi bo'lgan c kesma o'zunligining qiymati sifatida qarash mumkin ekan.

Agar $a=9e$ kesma b va c kesmalardan iborat bo'lsa, $c=(9-4)e=5e$ bo'ladi, bunda $b=4e$. Shuni eslatamizki, natural sonlarni qo'shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o'lchash bilan, balki boshqa kattaliklarni o'lchash bilan bogliq.

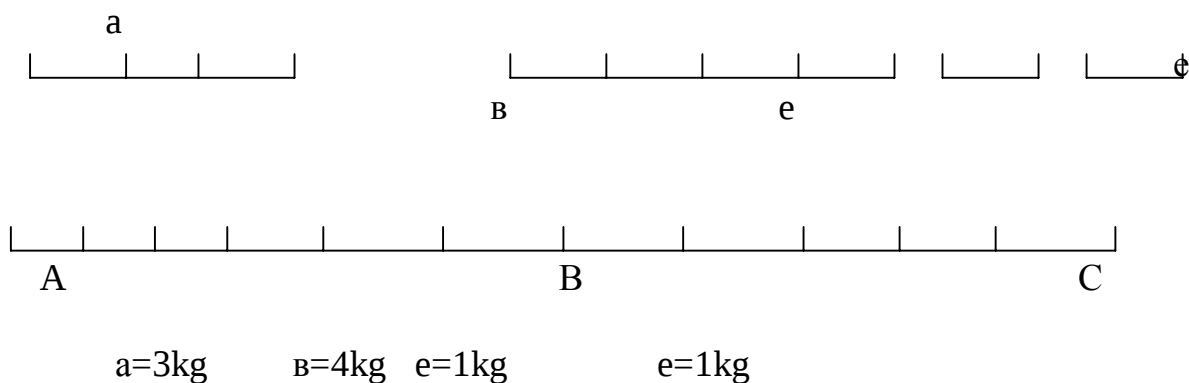
Boshlang'ich sinflar uchun matematika darsliklarida turli kattaliklar va ular ustida amallar qaraladigan masalalar ko'p. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tanlashni asoslashga imkon beradi.

Masalan, quyidagi masalani qaraylik: Bogdan 3 kg olcha va 4 kg olma terishdi. Hammasi bo'lib necha kg meva terishgan? Masala qo'shish amali bilan echiladi. Nima uchun?

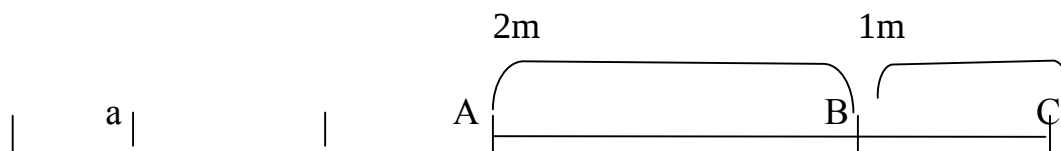
Terilgan olchalar massasini a kesma ko'rinishida, terilgan olmalar massasini b kesma ko'rinishida tasvirlaymiz. (8-rasm) U holda terilgan hamma mevalar massasini AB kesmadan va BC kesmadan AC kesma yordamida tasvirlash mumkin. AC kesma uzunligining son qiymati AB va BC kesmalar son qiymatlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun terilgan mevalar massasini qo'shish amali bilan topamiz: $3+4=7(\text{kg})$.

Ushbu masalani yechishda ham amal tanlash xuddi shunga o'xshash asoslaniladi: "Bolalar kuylagiga 2 m, kattalar kuylagiga undan 1 m ortiq gazlama ketadi. Kattalar ko'ylagiga necha metr gazlama ketadi?"

Bolalar ko'ylagiga ketgan gazlamani a kesma ko'rinishida tasvirlaymiz, unda kattalar ko'ylagiga ketgan gazlamani AB kesma va 1 m ni tasvirolovchi BC kesma yordamida tasvirlaymiz (9-rasm). AC kesma uzunligining qiymati qo'shiluvchi kesmalar uzunliklari qiymatlarining yigindisiga teng bo'lgani uchun kattalar ko'ylagiga ketgan gazlama miqdorini qo'shish amali bilan topamiz: $2+1=3(\text{m})$



8-rasm.
1m

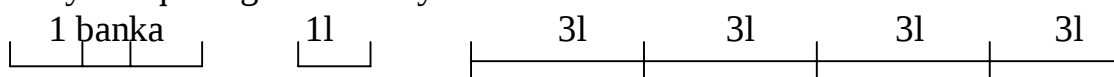


II sinf o'quvchilari uchun masalaga qaraylik: "Oshxonada har birida 3 l sharbat bo'lgan 4 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo'lib qancha sharbat bor?"

Nima uchun bu masala ko'paytirish amali bilan yechiladi: $3 \cdot 4 = 12(l)$. Masalaga berilgan rasm masalani yechishga yordam beradi: 4 ta bankada hammasi bo'lib qancha sharbat borligini bilish uchun $3l + 3l + 3l + 3l$ yig'indini topish yetarli. $3l$ yozuv $3 \cdot 1$ ko'paytma bo'lgani uchun topilgan ifodani quyidagicha ko'rinishda yozish mumkin: $(3+3+3+3) \cdot 1$. To'rtta bir xil qo'shiluvchining yigindisini $3 \cdot 4$ ko'paytma bilan almashtirib $(3+3+3+3) \cdot 1 l = 12 l$ ni hosil qilamiz.

Mazkur masalani echishning boshqa usuli ham bor. Avvalo shuni aytishimiz kerakki, bu masalada sharbat egallagan xajmning ikki birligi banka va metr haqida gapirilmoqda. Avval sharbat bankalar bilan o'lchangan, keyin uni yangi birlik- metr bilan o'lchash kerak, bunda shu narsa ma'lumki, eski birlikda (bankada) uchta yangi birlik (3 litr) bor. Demak, $4 \cdot 1b = 4 \cdot (3l) = 4 \cdot (3 \cdot 1l) = (4 \cdot 3) \cdot 1 = 12 l$. Bularning hammasi 10-rasmida tasvirlangan.

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlaydi.



10-rasm.

Bu tasdiqni sonlarga-kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo'llab, umumiy ko'rinishda isbotlaymiz, ya'ni a kesma b kesmadan, e kesmaning yuzi n ta kesmadan iborat bo'lsa, a kesma uzunligining son qiymati uzunlikning e_1 birligida $m \cdot n$ bo'ladi.

Haqiqatan, a kesmaning e_1 kesmaga teng bo'laklari soni $n+n+\dots+n$ ta qo'shiluvchi bilan ifodalanadi, shuning uchun $u = n \cdot m$ eng.

Demak, $a = (m \cdot n)e_1$.

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish uzunlikning yangi birligiga o'tishni ifodalaydi: agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m \cdot n$ ko'paytma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Endi kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni bo'lish qanday ma'noga ega ekanligini aniqlaymiz.

Masalan qaraymiz: "Bir bankaning sig'imi 3 l. 12l meva sharbatini quyish uchun nechta banka kerak bo'ladi?"

Masalani yechish uchun 12 l ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda 3l ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz.

Topamiz: $12l : 3l = 4l(b)$

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi-metr va boshqa qaralmoqda. Masalada o'lchash natijasini bankalar bilan ya'ni yangi birlikda (sharbat hajmi metr bilan o'lchanganda) ifodalash talab qilinmoqda, shu bilan, birga yangi birlikda

(bankada) 3ta eski birlik (3l) bor, shuning uchun $1l=1b:3$
 $12l=12 \cdot (1b:3)=(12:3) \cdot 1b=4 \cdot 1b=4b$

Ko'rib turibmizki, natural sonlarni bo'lish kattalikning yangi birligiga o'tish bilan bog'liq ekan. Buni umumiy holda ko'rsatamiz. A kesma e m ta kesmadan, e_1 kesma e n ta kesmadan iborat bo'lsin. E_1 uzunlik birligida a kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topishni aniqlaymiz.

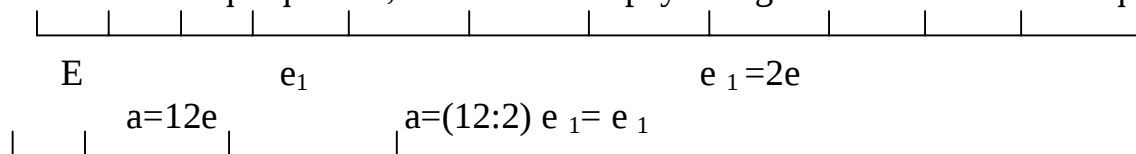
$$E_1=a \text{ va } b \text{ bo'lgani uchun } e = e_1:n. \text{ U holda } akmekm \cdot (e_1:n)=(m:n) \bullet e_1$$

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo'lgan natural sonlarni bo'lish uzunlikning yangi(yanada yirikroq) birligiga o'tishni tasvirlaydi: agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m:n$ bo'linma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar $a=12e$ va $e_1=2e$ bo'lsa a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati $6 e_1$ ga teng bo'ladi:

$$a=12e=12 \cdot (e_1:2)=(12:2) e_1=6 e_1$$

Bunday vaziyat 11-rasmda tasvirlangan. Boshlangich sinflar uchun matematika darslarida turli kattaliklar qaraladigan ko'paytirish hamda bo'lish bilan yechiladigan masalalar ko'p. Bularning hammasi odatda ko'rgazmalilik asosida bajariladi. Bunda ko'paytirish bir xil qo'shiluvchilarni qo'shish amali sifatida talqin qilinadi, bo'lish esa ko'paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.



12-rasm.

Mavzu: Sanoq sistemalari.

Muammoli savollar.

- 1) Sanoq sistemasining paydo bo'lish tarixi haqida nimalarni bilasiz?
- 2) Qanday sanoq sistemasi turlarini bilasiz?
- 3) Sonning o'nli sanoq sistemadagi yozuvi deganda qanday yozuvni tushunasiz?
- 4) Bir sanoq sistemasidan 2-sanoq sistemasiga o'tishning qanday yo'llari bor?
- 5) 548, 10328, 94050 sonlarining 8 lik sanoq sistemalaridagi yozuvini ko'rsating.

Reja:

1. Pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalari.
 - a) Qadimgi Misr sanoq sistemasi.
 - v) Qadimgi Grek sanoq sistemasi.
 - d) Rim sanoq sistemasi.
2. Pozitsion sanoq sistemalari.
3. Sonning o'nli sanoq sistemadagi yozuvi.
4. Sonning turli sanoq sistemadagi yozuvi.
5. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o'tish.

Tayanch iboralar.

Son tushunchasi, sanoq sistemalari, pozitsion va pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalari, arifmetik amallar.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954
2. В.Фомин. Системы счисления. М.: 1978.
- 3.Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т.: «Ы=итувчи», 1991.
4. Н.Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: 1977.
- 5.Р.Иброхимов. Математикадан масалалар типлами. Т.: «Ы=итувчи», 1996.

Son tushunchasi bu juda qadimiy tushunchalardan biridir. Sonlarning nomlanishi, joylashishi, yozilishi turli davrlarda, turli mamlakatlarda turlicha bo'lgan.

Matematikada sonlarning o'qilishi, yozilishi, ular ustida bajariladigan amallar tiliga sanoq sistemalari deb ataymiz.

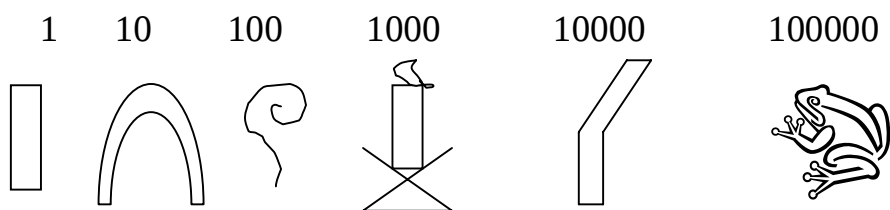
Barcha sanoq sistemalari o'zining "Grammatik qurilishi" jihatidan pozitsion bo'lmagan (nepozitsion) va pozitsion sanoq sistemalariga bo'linadi.

Dastlab pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalar to'g'risida fikr yuritaylik.

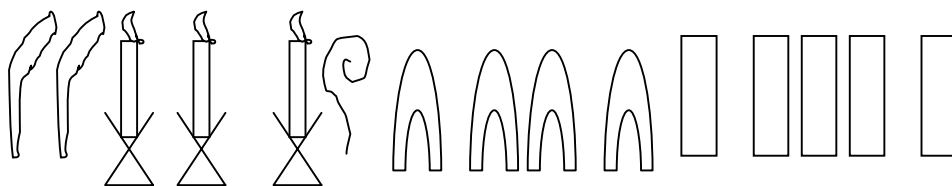
So'zimizni eng qadimgi sanoq sistemalardan biri- Misr sanoq sistemasidan boshlaymiz. U ehtimol bundan 5000 yil muqqaddam paydo bo'lgandir. Misr sanoq sistemasida son ishoralari qanday tasvir etilgan va ular yordamida qanday qilib sonlar yozilgan, shuni ko'rib o'taylik.

Misr sanoq sistemasida bir, o'n, yuz,. Ming, o'n ming, yuz ming, million sonlari uchun maxsus ishoralar (ierogliflar) bo'lgan.

Bular quyidagilardir.

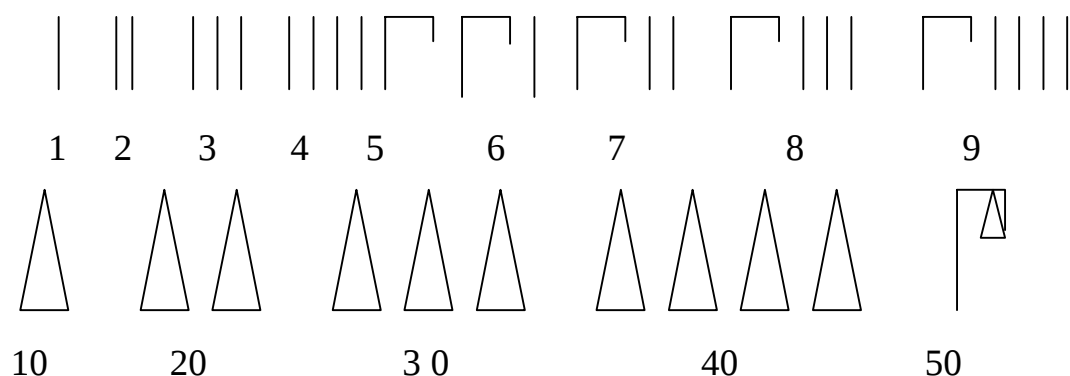


Masalan, butun son 23145 ni qadimgi Misr sanoq sistemasida ifodalaylik:

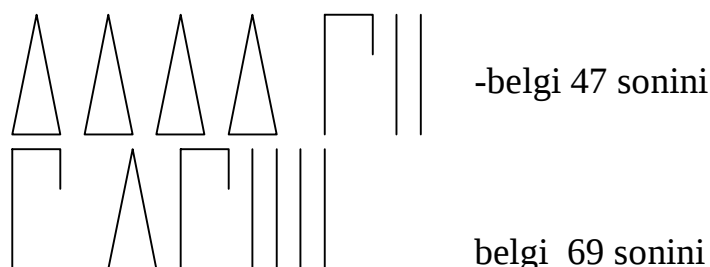


Buni yozish uchun o'n minglikni ifodalovchi ikkita ieroglifni, so'ngra mingni ifodalovchi uchta ieroglifni yuzlikni ifodalovchi 1 ta ieroglif, o'nlikni ifodalovchi 4 ta, birni ifodalovchi 5 ta ieroglifni qator qilib yozganlar .

Shunday qilib son yozishda har bir ieroglif ko'pi bilan to'qqiz marta takrorlanishi mumkin edi. Misr sanoq sistemasida nol uchun ishora bo'lmagan. Qadimgi sanoq sistemalaridan yana biri bu qadimgi Grek sanoq sistemasidir. Qadimgi Gretsiyada foydalanilgan, Attik yoki Gerodian sistemi deb atalgan sanoq sistemasidagi ba'zi sonlarni quyidagicha belgilardan foydalanganlar.



N	G	X	G	M
100	500	1000	5000	10000



Bu ikki ko'rinishdagi sanoq sistemalaridan shu narsani ko'rish mumkinki, har bir raqam qaysi o'rinda kelishidan qat'iy nazar doim bitta sonni ifodalaydi. Eramizdan oldingi III asrda Gretsiyada Attik sanoq sistemi o'rniga IONIYa sanoq sistemi deb ataladigan sistema vujudga keldi.

Bu sistemada butun sonlar grek alfaviti harflari bilan tasvirlangan. Shu bilan birga sonlarni ifodalovchi harflarning tepasiga chiziqcha chizib qo'yiladi . Bunday sanoq sistemi alfavit sanoq sistemi deb ataladi. Ioniya alfavit sanoq sistemi 27 harfdan iboratdir. Harfdan farqlash uchun harf tepasida chiziqcha qo'yilib sonlar yozilgan.

Pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalaridan yana biri va hozir ham qo'llaniladigan sistema bu Rim sanoq sistemasidir.

Rim raqamlari bilan butun sonlarni yozish uchun quyidagi 7 ta asosiy sonlarning tasvirlarini esda saqlash kerak.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Shu sonlar bilan 4000 gacha istalgan butun sonni yoza olamiz. Shu bilan birga, bir sonda bu raqamlardan ba'zilar (I, X, C, M) uch martagacha takrorlanishi mumkin. Sonlarni rim raqamlarida yozishda kichikroq raqam katta raqamning o'ng tomonida turishi mumkin. Bu holda kichik raqam katta raqamga qo'shiladi. Masalan, 283 soni rim raqamlarida SSLXXXIII Misolimizda yuzlikni ifodalovchi raqam 2 marta o'nlik va birlikni ifodalovchi raqamlar 3 martadan takrorlangan. Bu sanoq sistemasida kichik raqam katta raqamning chap tomoniga yozilishi mumkin. Bunday xollarda kichik raqamni katta raqamdan ayirish kerak bo'ladi. Masalan: XSIV=100-10+5-1=94 ni ifodalaydi. Bu sistemada ham nolni ifodalovchi ishora yuq. Masalan: 1809 ni MDSSSIX belgi ishlatish mumkin. Rim raqamlari yordamida katta raqamlarni ham yozish mumkin. Buning uchun ming sonini yozgan o'ng tomondan pastga lotin m harfi qo'yiladi.

Masalan: SDXVIIIm CMLXXXVI – 417986 ni ifodalaydi. Pozitsion bo'lmagan sanoq sistemi shu bilan xarakterlanadiki, berilgan sistemada sonlarni belgilash uchun qabul qilingan belgilar to'plamining har bir belgisi sonning yozuvida bu belgining qanday joylashishiga bogliq bo'lmagan holda hamma vaqt 1 ta va faqat 1 ta sonni ifodalaydi.

Ko'rinib turibdiki, pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalarida sonning yozilishi juda murakkablik tug'diradi. Yozuvlar juda ko'p joyni oladi. Yozuvlar qaysi sanoq sistemasida qulay?

Buning uchun pozitsion sanoq sistemalarini qaraylik. Pozitsion sanoq sistemasida har bir belgi turgan o'rniga qarab (pozitsiyasiga qarab) turli sonlarni ifodalaydi.

Birinci pozitsion sanoq sistemalari qadimgi Vavilonda vujudga kelgan bo'lib, ular 60 lik sanoq sistemalaridir. Vavilonliklar asosan 2 ta ishora 1ni “ ifodalovchi ∇ pona va o'nni bildiruvchi gorizontall < pona) yordamida ifodalangan. Bunday ponalar uchburchakli prizma shaklidagi egilgan tayoqchalarni loydan yasalgan yassi tugarakchalarga yozilar edi. Qadimiy vavilonliklar yozuvining “Pona xat” deb atalishi ana shundan kelib chiqqan.

Yuqoridagi 2 ta ishora yordamida 1 dan 59 gacha hamma butun sonlar o'nlik sistemada xuddi Misr sanoq sistemasidagicha yozilar edi; ya'ni sonda nechta o'nlik va nechta birlik bo'lsa, o'n va bir ishoralari o'shancha marta takrorlangan.

60 soniga kelganda u xuddi 1 sonidek yoziladi. Lekin bu ishora boshqa ishoralar orasida kattaroq oraliq qo'yiladi. Keyinchalik yuqoridagi 1-belgi nafaqat 1 va 60 sonlari uchun, balki 60 ning darajalari 60², 60³, uchun ham ishlatiladi.

60 lik sanoq sistemalari hozirgacha (bu eramizdan oldin 2000 yil oldin vujudga kelgan bo'lsa ham) saqlanib kelinmoqda. 1 soat = 60 minut, 1 minut = 60 sekund, to'liq burchak 3600 va hokazo.

Eng ko'p tarqalgan sanoq sistemi bu 10 lik sanoq sistemasidir. Bu birinchi bo'lib Hindistonda VI asrda vujudga kelib, keyin arablar orqali Yevropaga tarqalgan. Hozirgi paytda ham jahonda 10 lik sanoq sistemasidan keng foydalanilyapti.

Bu sistemaning dastlabki sonlari ;

[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9] lar

Bu to'plam o'nlik sanoq sistemasining alfavitidir. Bu sanoq sistemasi asosan IX asrda o'rta osiyolik olim Al-Xorazmiyga mansub. U o'zining "Hind sonlari haqida" degan asarida buni keng bayon qilgan.

Endi " n natural sonning o'nli yozuvi qanday?" degan savolga javob beramiz.

Ta'rif: n natural sonning $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ ko'rinishdagi yozuviga sonning 10 lik sanoq sistemasidagi yozuvi deb aytiladi. Bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$, -lar manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lib, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlaridan birortasini ifodalovchi sonlardir.

Sonning unli sanoq sistemasidagi yozuvini qisqacha

$n = n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$, deb yozadilar.

Masalan: $3749 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9$

Quyidagi tasdiqni isbotsiz qabul qilamiz " Har qanday natural sonning o'nli yozuvi mavjud va bu yozuv yagonadir".

Sonning o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvi sonlarni o'qish uchun, ularni taqqoslash uchun qulaydir. Masalan, n va m sonlarning o'nli sanoq sistemasidagi yozuvi berilgan bo'lsin:

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0 \quad (n_k \neq 0)$$

$$m = m_e \cdot 10^e + m_{e-1} \cdot 10^{e-1} + \dots + m_1 \cdot 10 + m_0 \quad (m_e \neq 0)$$

Agar quyidagi hollardan

a) $k < e$

б) $k > e, n_k < n_e$

в) $k = e, n_k = m_e, \dots, n_s = m_s, n_{s-1} < m_{s-1}$

aqalli bittasi o'rinli bo'lsa, u holda $n < m$ bo'ladi.

Demak, agar n va m sonlari turli xildagi sonlar bo'lsalar, u holda ular uchun a)-v) shartlardan bittasi o'rinlidir.

Masalan: I. 1) $5973 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$ va

$$325 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$$

$k=3, e=2 \quad 3>2$ bo'lgani uchun $5973>325$

II. 1) $259 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$

2) $243 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3$

$5>4$ bo'lgani uchun $259>243$

4. Biz yuqorida o'nli sanoq sistemalaridan tashqari yana 60 lik, 12 lik, 20 lik sanoq sistemalaridan foydalanishlarini ko'rib chiqdik. Hozirgi paytda tez hisoblash EXM lari 2 lik va 8 lik sanoq sistemalarida asoslangan holda ishlaydi. Shuning uchun biz umumiy bo'lgan qlik sanoq sistemasini qaraymizki, u qaraydigan 10 lik , 8 lik, 12 lik sanoq sistemalari uning xususiy hollari bo'lsin. Bu sistemalarning hammasida son yozuvi bir xil printsipga buysunadi. Birdan katta bo'lgan sanoq sistemaning asosi q-natural son tanlanadi.

Xuddi sonning o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvi singari istalgan natural sonni faqat bir xil usulda quyidagi yigindi shaklida ifodalash mumkin:

$n_k n_k \bullet q^k + n_{k-1} \bullet q^{k-1} + \dots + n_1 \bullet q + n_0 \quad (n_k \neq 0)$, bunda

$$0 \leq n_k \leq q-1$$

$$0 \leq n_{k-1} \leq q-1$$

$$0 \leq n_0 \leq q-1.$$

$N = n_k \cdot q^k + n_{k-1} \cdot q^{k-1} + \dots + n_1 \cdot q + n_0 \quad (n_k \neq 0)$,bunda

Bu yozuvni qisqacha quyidagicha yozish ham mumkin:

$$n = \overline{n_k n_{k-1} \dots n_0}_{(q)}$$

Masalan: $n=475(8)$ -bu son sakkizlik sanoq sistemasida berilgan. Bu son yoyilmasi: $n=4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 5$. q sonining o'zi q lik sanoq sistemasida $q=1 \cdot q + 0$ bo'lib, u $10(q)$ deb yoziladi. Ba'zi natural sonlarning o'z sanoq sistemasida ifodalanishini quyidagi jadvalda yaqqol ko'ramiz:

Q=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Q=2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100
Q=3	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110
Q=4	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30
Q=5	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22
Q=6	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20
Q=7	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15
Q=8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14
Q=9	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13
Q=11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	10	11
Q=12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10

$q=11$ da α -10 ni ifodalaydi.

$Q=12$ da α -10, β -11 ni ifodalaydi.

Turli sanoq sistemalarida sonlarni taqqoslash xuddi o'nli sanoq sistemasidagiga o'xshash bo'ladi. Lekin sonlar bir xil sanoq sistemasiga nisbatan olinishi shart.

Agar sonlar turli sanoq sistemalarida berilgan bo'lsa, u holda bir sanoq sistemasidan 2-sanoq sistemasiga o'tishga to'g'ri keladi.

5. Bir sanoq sistemasidan ikkinchi bir sanoq sistemasiga o'tish uchun oldin birinchi sanoq sistemasidan o'nlikka o'tib, undan esa izlangan sanoq sistemasiga o'tish mumkin va bir sanoq sistemasidan ikkinchi bir sanoq

sistemasiga to'g'ridan-to'g'ri o'tish mumkin. Hozir quyida shu 2 masalani qarab chiqamiz:

1-masala: n sonining q lik sanoq sistemasidagi yozuvi $n=n_k n_{k-1} \dots n_0 (q)$

bo'lsin. Bu sonning o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvini toping.

Ta'rifga ko'ra $n=n_k n_{k-1} \dots n_0 (q)=n_k \bullet q^k + n_{k-1} q^{k-1} + \dots + n_1 \bullet q + n_0$

Bu sonlar ustida amallarni bajarib, hosil qilgan son izlangan son bo'ladi.

Masalan: 1) $n=362(7)$ sonni o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvini toping. $362(7) = 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 = 191$. Demak, $362(7) = 191$

2) $\alpha 4\beta_{(12)}$ son uchun o'qli yozuvni topaylik, bu yerda $\alpha=12$ lik sanoq sistemasida 10 sonini $\beta=12$ lik sanoq sistemasida 11 sonini ifodalaydi.

$$\alpha 4\beta_{(12)} = 10 \bullet 12^2 + 4 \bullet 12 + 11 = 1499.$$

2-masala: Berilgan unli sanoq sistemasidagi sonni q lik sanoq sistemasidagi yozuvini topaylik,

$n = n_k \bullet q^k + n_{k-1} q^{k-1} + \dots + n_1 \bullet q + n_0$ berilgan bo'lsin. Bu sonni quyidagicha yozish mumkin; $N = q \bullet (n_k q^{k-1} + n_{k-1} \bullet q^{k-2} + \dots + n_1) + n_0$, bu erda $0 \leq n_0 < q$

Bu yozuvdan ko'rinadiki, n_0 -n sonini q soniga bo'lganda bo'lishdan chiqqan qoldiqdir. Xuddi shunday n_1 qoldiq topiladi va hokazo.

Natijada bu protsess to'g'linma nolga teng bo'lguncha davom ettiriladi, so'ngra qoldiqlar qator qilib oxiridan yozib chiqilsa, hosil bo'luvchi son q lik sanoq sistemasida sonning yozuvi bo'ladi.

Masalan: 1) 46 sonining 2 lik sanoq sistemasidagi yozuvini toping.

$$\begin{array}{r} 46 \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 23} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 11} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 5} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 1} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 0} \end{array}$$

Demak, $46=101110_{(2)}$ natijani to'g'riligini tekshiramiz:
 $101110_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 46$

Birinchi sanoq sistemasidan ikkinchi sanoq sistemasiga to'g'ridan-to'g'ri o'tish uchun kishida ko'proq shu sistemalar ustida amallarga doir malakalar hosil bo'lishi kerak. Bu usulni kelasi darsda ko'rib o'tamiz.

Agar berilgan 1-sanoq sistema asosi 2-sanoq sistemaning asosi darajalaridan iborat bo'lsa, berilgan sanoq sistemasidan 2-siga o'tish ancha oson.

Praktikada keng tarqalgan EXMLlarda olib boradigan 2 lik va 8 lik sanoq sistemalarini qaraylik. 2 lik sanoq sistemasidan 8 lik sanoq sistemasiga o'tish va aksincha juda oson. Quyidagi jadvalda buning guvohi bo'lasiz:

8 lik sanoq sistemi	0	1	2	3	4	5	6	7
------------------------	---	---	---	---	---	---	---	---

2 lik sanoq sistemasi	000	001	010	011	100	101	110	111
-----------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$$25460_{(8)} \longrightarrow X_{(2)}$$

$$25460_{(8)} = 10101100110000_{(2)}$$

Bu EXMlarida programmalar 8 lik sanoq sistemasiga moslab beriladi, hisoblashlar 2 lik sanoq sistemasida olib boriladi.

Shunday qilib, xulosa qilsak, har bir sanoq sistemas o'zining qurilishi jihatidan pozitsion-nopozitsion sanoq sistemalariga bo'linadi. Pozitsion bo'lmagan sanoq sistemalari shu bilan xarakterlanadiki, bu sistemaga kiruvchi har bir belgi o'rniga (pozitsiyasiga) bog'liq emas, qayerda turgan bo'lsa, bari bir, bir xil sonni ifodalaydi.

Pozitsion sanoq sistemalari bundan mustasno. Sonning 10 lik sanoq sistemasidagi yozuvi sonning qlik sanoq sistemasidagi yozuvining xususiy holi $q=10$ bo'lgan holdagi yozuvdir.

Demak, har bir son turli sanoq sistemalarida turlicha sonlarni ifodalar ekan.

O'tilgan mavzu bo'yicha topshiriqlar:

- 1) 9471; 9847 sonlarni Rim raqamlari yordamida yozing;
- 2) MMDCXLVII; MMMDCCCLXXI- sonlar arab raqamlarda yozilsin.

Mavzu: O'nli va turli sanoq sistemalarida ko'p xonali sonlar ustida amallar.

Muammoli savollar:

1. Unli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni qo'shish qanday nazariy qoidalarga asoslanib bajariladi?
2. 769-547 ayirmada ayirish amali algoritmnining nazariy asoslarini tushuntiring.
3. Ko'paytirish amali algoritmining nazariy asoslarini tushuntiring.
4. O'nli sanoq sistemasida ko'pxonali sonlarni bo'lish qanday nazariy bilimlar asosida bajariladi?

Reja:

1. O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni qo'shish.
2. O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni ayirish.
3. O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni ko'paytirish.
4. O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni bo'lish.

Tayanch iboralar:

Arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) algoritmlari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. В.М.Брадис. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1954
2. В.Фомин. Системы счисления. М.: 1978.
3. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланч математика курси асослари. Т.: «Ы-итувчи», 1991.
4. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: 1977.

5.Р.Иброҳимов. Математикадан масалалар типлами. Т.: «Ылитувчи», 1996.

1.О'нли sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni qo'shish.

Amalda natural sonlarni qo'shish qanday bajarilishini aniqlaymiz .

Agar a va b sonlar bir xonali son bo'lsa, ularning yig'indisini topish uchun $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $A \cap B = \emptyset$ bo'lib, A va B to'plamlarning birlashmasidagi elementlar sonini hisoblash yetarli. Lekin, bunday sonlarni qo'shishda har gal to'plamlarga murojaat qilmaslik uchun ikkita bir xonali sonni qo'shishda hosil bo'ladigan hamma yigindilar esda saqlanadi. Bunday yig'indilarning hammasi maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni qo'shish jadvali deyiladi.

Agar a va b sonlari ko'p xonali bo'lsa, u holda qo'shish amalining ma'nosi bu yerda ham saqlanadi.

Ma'lumki, ko'p xonali sonlar "ustun" qilib qo'shiladi. Ammo sonlarni qo'shishning bu qoidasi asosida yotadigan nazariy o'rni qanday? $273+3526$ yig'indini qaraymiz. Qo'shiluvchilarni koeffitsientli uning darajalari yig'indisi ko'rinishida yozamiz.

$$273+3526=(2\cdot 10^2+7\cdot 10+3)+(3\cdot 10^3+5\cdot 10^2+2\cdot 10+6)$$

Bu ifodada qavslarni ochib, qo'shiluvchilar o'rnini shunday almashtiramizki, birlar birlar oldida, o'nlar o'nlar oldida va hokazo bo'lsin va yana qavs ichida olamiz. Bularning hammasini qo'shishning tegishli qonunlari asosida bajarish mumkin. Haqiqatdan, guruhlash qonuni ifodalarni qavssiz yozishga imkon beradi.

$$2\cdot 10^2+7\cdot 10+3+3\cdot 10^3+5\cdot 10^2+2\cdot 10+6$$

O'rin almashtirish qonuniga ko'ra qo'shiluvchilar o'rnini almashtiramiz:

$$3\cdot 10^3+2\cdot 10^2+5\cdot 10^2+7\cdot 10+2\cdot 10+3+6$$

Guruhlash qonuniga ko'ra guruhlaymiz:

$$3\cdot 10^3+(2\cdot 10^2+5\cdot 10^2)+(7\cdot 10+2\cdot 10)+(3+6).$$

1-qavsdan 10^2 ni, 2-sidan 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Buni qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunini qo'llab bajarish mumkin:

$$3\cdot 10^3+(2+5)\cdot 10^2+(7+2)\cdot 10+(3+6).$$

Ko'rib turibmizki, 273 va 3562 sonlarini qo'shish tegishli xonalar raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni qo'shishga keltirildi. Bu yig'indini qo'shish jadvalidan topamiz:

$$3\cdot 10^3+7\cdot 10^2+9\cdot 10+9$$

Hosil qilingan ifoda 3799 sonining o'nli yozuvidir.

Umuman, sonlarni "Ustun" qilib qo'shishning ma'lum qoidasi: sonlarni o'nli sanoq sistemasida yozishga, qo'shishning o'rin almashtirish va guruhlash

qonunlariga, qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunlariga, bir xonali sonlarning qo'shish jadvaliga asoslanadi.

O'nli sanoq sistemasida yozilgan ko'p xonali sonlarni qo'shish algoritmi umumiy ko'rinishda mana bunday ifodalanadi:

1. Ikkinchi qo'shiluvchini tegishli xonalar bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo'shiluvchining ostiga yozamiz.

2. Birlar xonasidagi raqamlar qo'shiladi. Agar yig'indi 10 dan kichik bo'lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga (unlar xonasiga) o'tamiz.

3. Agar birlar raqamlarining yigindisi 10 dan katta yoki 10ga teng bo'lsa, uni $10+C_0$, bunda C_0 -bir xonali son, ko'rinishda yozamiz: C_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo'shiluvchidagi o'nlar raqamiga birni qo'shamiz, keyin o'nlar xonasiga o'tamiz.

4. O'nlar bilan yuqoridagidek amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo'shilgandan keyin bu jarayonni to'xtatamiz.

Boshlang'ich matematika kursida ko'p xonali sonlarni qo'shish qoidasi, asosan, uch xonali sonlarni yozma qo'shishni urganishda ifodalanadi. Bu qoida va "ustun" qilib qo'shishning yozuvidan oldin quyidagi aniq holni tushuntiramiz:

$$246+123=(200+40+6)+(100+20+3)=(200+100)+(40+20)+(6+3)=300+60+9=369.$$

Bajarilgan almashtirishlarning har bir qadamini asoslaymiz.

246 va 123 sonlari avval xona qo'shiluvchilarining yigindisi ko'rinishida yoziladi. (ya'ni, aslida sonlarni unli sanoq sistemasida yozish usuli qo'llaniladi). Keyingi bosqich yuzlarga yuzlar, o'nlar o'nlar, birlarga birlar qo'shiladi. Buni qo'shishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlarining natijasi bo'lgan yig'indini yig'indiga qo'shish qoidasiga asoslanib bajarish mumkin. So'ngra qavslardagi yigindilar topiladi. Qo'shiluvchilar yaxlit sonlar bo'lgani uchun, ya'ni nol bilan tugagani uchun yoki bir xonali sonlar bo'lgani uchun oxirgi qavsdagi kabi, ular bir xonali sonlarni qo'shish jadvaliga tayangan holda qo'shiladi. $300+60+9$ ifoda xona qo'shiluvchilarining yig'indisidir (ya'ni sonning unli yozuvidir) shuning uchun uni 369 ko'rinishida yozish mumkin.

Shunday qilib, 246 va 123 sonlarini qo'shish birlar, unlar va yo'zlarni xonalab qo'shishga keltirildi, buni "Ustun" qilib yozish qulay:

$$\begin{array}{r} 246 \\ + 123 \\ \hline 369 \end{array}$$

O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni ayirish.

Bir xonali b sonni bir xonali sondan yoki 18 dan katta bo'lmagan 2 xonali a sondan ayirish shunday c sonni topishga keltiriladiki, uning uchun $a=b+c$ bajariladi. Bu ayirish bir xonali sonlarni qo'shish jadvaliga tayanadi.

Agar a va b sonlari ko'p xonali bo'lib $b < a$ bo'lsa, u holda ayirish amalining ma'nosi 20 ichida ayirish kabi qoladi, ammo ayirma boshqacha topiladi.

Ma'lumki, ko'p xonali sonlar "ustun" qilib ayiriladi. Bu algoritmnining nazariy asoslari nimadan iboratligini topamiz.

769-547 ayirmani qaraymiz. Berilgan sonlarni ko'effitsiyentli unning darajalari yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$769-547=(7\bullet 10^2+6\bullet 10+9)-(5\bullet 10^2+4\bullet 10+7).$$

$7\bullet 10^2+6\bullet 10+9$ yig'indidan $5\bullet 10^2+4\bullet 10+7$ yig'indini ayirish uchun shu yig'indidan har bir qo'shiluvchini birin –ketin ayirish kifoya, bu qanday yoziladi:

$$(7\bullet 10^2+6\bullet 10+9)-5\bullet 10^2-4\bullet 10-7.$$

Endi $7\bullet 10^2+6\bullet 10+9$ yig'indidan $5\bullet 10^2$, $4\bullet 10$, 7 sonlarni ayiramiz. Yig'indidan sonni ayirish uchun shu sonni birorta qo'shiluvchidan ayirish yetarli. Shuning uchun $5\bullet 10^2$ sonni $7\bullet 10^2$ qo'shiluvchidan $4\bullet 10$ sonni $6\bullet 10$ qo'shiluvchidan, 7 sonini 9 qo'shiluvchidan ayiramiz.

$$(7\bullet 10^2-5\bullet 10^2)+(6\bullet 10-4\bullet 10)+(9-7).$$

Ayirishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot xossasiga asosan 102 va 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz.

$$(7-5)\bullet 10^2+(6-4)\bullet 10+(9-7).$$

Ko'rib turibmizki, 769 va 547 sonlarining ayirmasi tegishli xona raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni ayirishga keltirildi: 7-5, 6-4, 9-7 ayirmalarini qo'shish jadvalidan topamiz:

$$2\bullet 10^2+2\bullet 10+2$$

Hosil qilingan ifoda 222 sonining o'nli yozuvidir. Demak, $769-547=222$

Umuman “ustun” qilib ayirish qoidasi: sonlarni o'nli sanoq sistemasida yozish usuliga, yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish va ayirishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonuniga, bir xonali sonlarni qo'shish jadvaliga asoslanadi.

Kamayuvchining biror xonasidagi bir xonali son ayriluvchining o'sha xonasidagi bir xonali sondan kichik bo'lgan holda ham ayirish qoidasining asosida o'sha nazariy dalillar yotishini ko'rsatamiz.

Berilgan sonlarni ko'effitsentli o'nning darajalari yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$(5\bullet 10^2+4\bullet 10+0)-(1\bullet 10^2+2\bullet 10+6)$$

0 dan 6 ni ayirib bo'lmaydi, demak, birinchi holdagidek ayirib bo'lmaydi. Shuning uchun 540 sonidan bitta o'nlikni olamiz va uni 10 birlik ko'rinishda yozamiz:

$$(5\bullet 10^2-1\bullet 10^2)+(3\bullet 10-2\bullet 10)+(10-6)$$

ayirishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunini qo'llab va qo'shish jadvalidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(5-1)\bullet 10^2+(3-2)\bullet 10+(10-6)=4\bullet 10^2+1\bullet 10+4=414$$

O'nli sanoq sistemasida yozilgan ko'p xonali sonlarni ayirish algoritmi umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi.

$$X = a_n 10^n + \dots + a_1 10 + a_0,$$

$Y = B_k 10^k + \dots + B_1 10 + B_0$ sonlari berilgan bo'lsin.

1. Ayiriluvchini mos xonalar bir –birining ostida bo'ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz.

2. Agar ayiriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo'lmasa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.

3. Agar ayiriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta, ya'ni $a_0 < B_0$ bo'lib, kamayuvchining o'nlari raqami 0 dan farqli bo'lsa, kamayuvchining o'nlari raqamini 1 ta kamaytiramiz, shu vaqtning o'zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10 + a_0$ sonidan B_0 ni ayiramiz va natijasini ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.

4. Agar ayiriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo'lib, kamayuvchining o'nlari, yo'zlar va boshqa xonasidagi raqamlar 0 ga teng bo'lsa, kamayuvchining 0 dan farqli birinchi (birlar xonasidan keyingi) raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o'nlari xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamni esa 10 ta orttiramiz va $10 + a_0$ dan B_0 ni ayiramiz. Natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o'tamiz.

5. Keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.

6. Kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

Boshlang'ich matematika kursida ko'p xonali sonlarni ayirish qoidasi uch xonali sonlarni yozma ayirishni o'rganishda ifodalanadi.

Bu qoida va "ustun" qilib ayirishning yozuvidan oldin aniq holni tushuntiramiz.

$$485 - 231 = (400 + 80 + 5) - (200 + 30 + 1) = (400 - 200) + (80 - 30) + (5 - 1) = 200 + 50 + 4 = 254$$

Bajarilgan almashtirishning har bir qadamini asoslaymiz. 485 va 231 sonlari avval xona qo'shiluvchilarining yig'indisi ko'rinishida yoziladi (ya'ni sonni o'nli sanoq sistemasida tasvirlashdan foydalaniladi). So'ngra birinchi sonning yuzliklaridan ikkinchi sonning yuzliklari, o'nliklaridan o'nliklari, birliklaridan birliklari ayriladi, bu sondan yig'indini va yig'indidan sonni ayirish qoidasiga asosan bajariladi.

Haqiqatdan; a) sondan yig'indini ayirish qoidasiga asosan

$$(400 + 80 + 5) - 200 - 30 - 1;$$

b) yig'indidan sonni ayirish qoidasiga asoslanadi.

$$(400 - 200) + (80 - 30) + (5 - 1)$$

Qavslardagi ayirmalar bir xonali sonlarni qo'shish jadvaliga tayanib topiladi.

$200 + 50 + 4$ ifoda xona qo'shiluvchilarining yig'indisidir, shuning uchun uni 254 deb yozish mumkin.

Shunday qilib, 485 dan 231 ni ayirish birlar, o'nlari va yo'zlarni xonalar bo'yicha ayirishga keltirildi, bu esa berilgan sonlarni "ustun" qilib yozib ayirish uchun qulaydir.

O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni ko'paytirish .

Agar a va b sonlari bir xonali bo'lsa, ularning ko'paytmasini topish uchun $n(A) = a$, $n(B) = b$ bo'lgan A va B to'plamlarining dekart ko'paytmasidagi elementlar sonini hisoblash yetarli. Ammo bunday sonlarni ko'paytirishda har gal to'plam va hisoblashlarga murojaat qilmaslik uchun ikkita bir xonali sonni ko'paytirishda hosil bo'lgan hamma ko'paytmalar esda saqlanadi.

Hamma bunday ko'paytmalar maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvali deyiladi.

Agar a va b sonlari ko'p xonali bo'lsa, ma'lumki, ular "ustun" qilib ko'paytiriladi. Bu ko'paytirishning nazariy asoslari nimadan iboratligini aniqlaymiz. Masalan: 426 ni 123 soniga ko'paytiramiz. (Sonlar yozma ustun shaklida ko'paytiriladi)

Natijani hosil qilish uchun 426 sonini 3 ga, 2 ga, 1 ga ya'ni ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirdik, ammo 2 ga ko'paytirganda natijani boshqacha yozdik, ya'ni 852 sonining birlarini 1278 sonining o'nlari tagiga yozdik, sababi, biz aslida 2ta o'nlikka ko'paytirdik, 3- qo'shiluvchi 426 ni esa bitta yuzlikka ko'paytirishning natijasidir. Undan tashqari biz ko'p xonali sonlar yig'indisini ham topdik. Shunday qilib, ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish uchun: ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishni; ko'p xonali sonni 10 ning darajasiga ko'paytirishni; ko'p xonali sonlarni qo'shishni bilish kerak.

Ko'p xonali sonlarni o'rganganimiz uchun ko'p xonali sonni bir xonali songa va o'nning darajasiga ko'paytirishning nazariy asoslari nimadan iboratligini aniqlaymiz.

426 ni 3 ga ko'paytirish jarayonini ko'rib chiqamiz. O'nli sanoq sistemasida sonlarni yozish qoidasiga ko'ra 426 sonini bunday ko'rinishda yozish mumkin.

$$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6, \text{ u holda } 426 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6) \cdot 3$$

qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonuniga asosan oxirgi yozuvida qavslarni ochib, o'zgartirib yozamiz:

$$(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 6 \cdot 3$$

Ko'paytirishning o'rin almashtirish va guruhlash qonunlari bu yigindidagi qo'shiluvchilarni bunday yozishga imkon beradi.

$$(4 \cdot 3) \cdot 10^2 + (2 \cdot 3) \cdot 10 + 6 \cdot 3$$

Qavs ichidagi ko'paytmalar bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalidan topiladi:

$$2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 18$$

Ko'rib turibmizki, ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirish bir xonali sonlarni ko'paytirishga keltirildi.

Ammo hosil bo'lgan ifoda sonning o'nli yozuvi emas-10 ning darajalari oldidagi koeffitsientlar 10 dan kichik bo'lishi kerak. Shuning uchun 12 ni $10+2$ ko'rinishda, 18 ni $10+8$ ko'rinishida yozamiz:

$$(10+2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (10+8)$$

$$\text{qavslarni ochamiz: } 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 10 + 8$$

qo'shishning guruhlash qonuni va qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunidan foydalanamiz: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6+1) \cdot 10 + 8$; 6+1 yigindi bir xonali sonlar yigindisidir va uni qo'shish jadvalidan osongina topiladi: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$

Hosil bo'lgan ifoda 1278 sonining unli yozuvidir. Shunday qilib, $426 \cdot 3 = 1278$

Umuman, $X = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ sonni bir xonali son u ga ko'paytirish algoritmini bunday ifodalash mumkin:

1. Ikkinchi sonni birinchi sonning ostiga yozamiz.
2. Birlar xonasidagi raqamlarni "y" soniga ko'paytiramiz. Agar ko'paytma 10 dan kichik bo'lsa, uni javobidagi birlar xonasiga yozamiz va keyin o'nlar xonasiga o'tamiz
3. Agar birlar xonasidagi raqamlarning "y" soniga ko'paytmasi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo'lsa, uni $10 \cdot q_1 + C_0$ ko'rinishda yozamiz, bunda C_0 – bir xonali son: C_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va q_1 ni keyingi xonaga o'tkazishni esda saqlaymiz
4. O'nlar xonasidagi raqamni Y soniga ko'paytiramiz, chikkan ko'paytmaga q_1 ni qo'shamiz va 2- hamda 3- punktlardagi jarayonni takrorlaymiz.
5. Yuqori xona raqamlari ko'paytirilgandan keyin ko'paytirish jarayoni tugallanadi.

Ma'lumki, x sonni 10^k ko'rinishdagi songa ko'paytirish berilgan sonning o'nli yozuviga o'ng tomondan k ta nolni qo'shib yozishga keltiriladi. Haqiqatan, agar

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \text{ bo'lsa, u holda}$$

$$x \cdot 10^k = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot 10^k$$

qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taksimot qonunini va ko'paytirishning boshka qonunlarini qo'llab, $a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^{k+1} + a_0 \cdot 10^k$ ni hosil qilamiz. Bu ifoda

$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 0 \dots 0$ sonning o'nli yozuvidir, chunki $a_n \cdot 10^{n+k} +$

$$a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^k \text{ ka } a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^k + 0 \cdot 10^{k-1} + \dots + 0$$

$$\text{Masalan, } 534 \cdot 103 = (5 \cdot 102 + 3 \cdot 10 + 4) \cdot 103 = 5 \cdot 105 + 3 \cdot 104 + 4 \cdot 103 = 534000$$

Endi ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish algoritmini qaraymiz. Yuqorida qaralgan misolga, ya'ni $426 \cdot 123$ ko'paytmaga qaytamiz. 123 sonini koeffitsientli unning darajalari yigindisi ko'rinishida yozamiz:

$123=1\cdot 10^2+2\cdot 10+3$ va $426\cdot(1\cdot 10^2+2\cdot 10+3)$ ko'paytmani yozamiz. Bu ko'paytma qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonuniga ko'ra $426\cdot(1\cdot 10^2)+426\cdot(2\cdot 10)+426\cdot 3$ ga teng. Bundan ko'paytirishning guruhlash qonuniga asosan: $(426\cdot)\cdot 10^2+(426\cdot 2)\cdot 10+426\cdot 3$

Shunday qilib, ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishga keltirildi.

Umuman, $x=a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ sonni $y=b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0$ songa ko'paytirish algoritmini bunday ifodalash mumkin.

1. x ko'paytuvchini yozamiz va uning ostiga ikkinchi ko'paytuvchi y ni yozamiz.
2. x sonni y sonning kichik xonasi b_0 ga ko'paytiramiz va $x b_0$ ko'paytmani y sonning ostiga yozamiz.
3. x sonni y sonning keyingi xonasi b_1 ga ko'paytiramiz va $x b_1$ ko'paytmani bir xona chapga surib yozamiz. Bu $x b_1$ ni 10 ga ko'paytirishga mos keladi.
4. Bu jarayonni $x b_k$ hisoblaguncha davom ettiramiz.
5. Topilgan $k+1$ ta ko'paytmani qo'shamiz.

Boshlang'ich matematika kursida ko'paytirishni o'rganish bir necha bosqichda olib boriladi, unga bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvali, nol bilan tugaydigan ikki xonali sonlarni ko'paytirish; ko'p xonali sonlarni bir xonali, ikki xonali va uch xonali sonlarga ko'paytirish kiradi.

“Ustun” qilib ko'paytirish algoritmini o'rganish uch xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishdan boshlanadi. Undan oldin quyidagi ko'paytma tushuntiriladi:

$$426\cdot 3=(400+20+6)\cdot 3=400\cdot 3+20\cdot 3+6\cdot 3=1200+60+18=1278$$

Bular uch xonali sonni bir xonali songa ko'paytirish:

- sonni o'nli sanoq sistemasida yozishga;
- qo'shishga nisbatan ko'paytirishni taqsimot qonuniga;
- yaxlit sonlarni bir xonali songa ko'paytirish, ya'ni bir xonali sonlarini ko'paytirish jadvaliga;
- ko'p xonali sonlarni qo'shishga asoslanishni ko'rsatadi.

So'ngra misollar orqali ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirish va ko'p xonali sonlarni qo'shishga keltiriladi. Misol: $46\cdot 38=46\cdot(30+8)=46\cdot 30+46\cdot 8$

4. O'nli sanoq sistemasida ko'p xonali sonlarni bo'lish.

Sonlarni bo'lish texnikasi haqida so'z borar ekan, bu jarayonni qoldiqli bo'lish amali kabi qaraladi. Ta'rifni eslaylik: butun nomanfiy a sonni b natural songa qoldiqli bo'lish deb $a=bq+r$ va $0<r<b$ bo'ladigan butun nomanfiy q va r sonlarni topishga aytiladi. Q sonni esa to'liqsiz bo'linma deyiladi.

Bir xonali va ikki xonali (89 dan katta bo'lmagan) sonlarni bir xonali songa bo'lganda bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalidan foydalaniladi.

Masalan, 54 ni 9ga bo'lish kerak bo'lsin. 9- ustunda (9- satrda) 54 sonini topamiz. U 6- satrda joylashgan. Demak $54:9=6$

Endi 51 ni 9 ga bo'lamiz. 9- ustunda 51 soni yuk. Shuning uchun bu ustunda 51 dan kichik eng yaqin 45 sonini olamiz. 45 soni 5- satrda bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 5 ga teng. Qoldiqni topish uchun 51 dan 45 ni ayiramiz: $51-45=6$. Shunday qilib, $51=9\bullet 5+6$ yoki maktab simvolikasi bilan yozsak: $51:9=5(\text{kol.}6)$

Endi ko'p xonali sonni bir xonali songa bo'lish qanday amalga oshirilishini aniqlaymiz. 238 ni 4 ga bo'lish kerak bo'lsin. Bu degani shunday to'liqsiz bo'linma q va r qoldiqni topish kerakki, ular uchun $238=4q+r$, $0\leq r<4$ bo'lsin.

Shuni aytish kerakki, 238 va 4 sonlarining to'liqsiz bo'linmasi q ga bo'lgan talabini quyidagicha yozish mumkin: $4q<238<4(q+1)$

Avval q sonining yozuvda nechta raqam bo'lishini aniqlaymiz.

Q bir xonali son bo'lmaydi, chunki 4 sonining bir xonali songa ko'paytmasi plyus qoldiq 238 ga teng emas. Agar q soni 2 xonali bo'lsa ya'ni agar $10<q<100$ bo'lsa, u holda 238 soni 40 va 400 sonlari orasida bo'ladi, bu esa to'g'ri. Demak, 238 va 4 sonlarining bo'linmasi 2 xonali son.

Bo'linmaning 10lar raqamini topish uchun 4 ni ketma-ket 20ga, 30ga, 40ga va hokazoga ko'paytiramiz. $4\cdot 50=200$, $4\cdot 60=240$ va $200<238<240$ bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 50 va 60 sonlari orasida bo'ladi, ya'ni $q=50+q_0$ u holda 238 soni haqida bunday deyish mumkin: $4\bullet(50+q_0)\leq 238<4\bullet(50+q_0+1)$, bundan $200+4q_0\leq 238<200+4(q_0+1)$ va berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini (bo'linmaning birlar raqamini) ko'paytirish jadvalidan foydalanib topish mumkin. $q_0=9$ hosil bo'ladi va demak, to'liqsiz bo'linma $q=50+9=59$. Qoldik ayirish bilan topiladi: $238-4\cdot 59=2$

Shunday qilib, 238 ni 4ga bo'lganda to'liqsiz bo'linma 59 va 2 qoldiq hosil bo'ladi. $238=4\cdot 59+2$ Bo'lishning ifodalangan bu jarayoni burchak qilib bo'lish asosida yotadi.

$$\begin{array}{r|l} 238 & 4 \\ \hline 20 & 59 \\ \hline 38 & \\ -36 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ko'p xonali sonni ko'p xonali songa bo'lish ham xudda shunday bajariladi. Masalan, 5658 ni 46ga bo'laylik. Bu bo'lishni bajarish shunday butun nomanfiy q va r sonlarni topish demakki, uning uchun $5658=46q+r$, $0\leq r<46$ bajarilsin. Bundan $46\bullet q\leq 5658<46(q+1)$. q bo'linmadagi raqamlar sonini aniqlaymiz. Shubhasiz, q bo'linma 100 va 1000 sonlari orasida yotadi (u uch xonali) chunki $4600<5658<46000$.

Bo'linmaning yo'zlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 46ni ketma-ket 100ga, 200ga 300ga va hokazo ko'paytiramiz. $46\cdot 100=4600$, $46\cdot 200=9200$ va $4600<5658<9200$, bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 100 va 200 sonlari orasida yotadi, ya'ni $q=100+q_1$, bu erda q_1 -ikki xonali son. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi. $46(100+q_1)\leq 5658<46\bullet(100+q_1+1)$ +avslarni ochib va

4600 sonini ayirib, ushbu tengsizlikka kelamiz: $46q_1 \leq 1058 < 46(q_1+1)$ q_1 soni ikki xonali. Shuning uchun bo'linmadagi o'nlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 46 ni ketma-ket 10ga, 20ga, 30ga va hokazo ko'paytirimiz. $46 \cdot 20 = 920$, $46 \cdot 30 = 1380$ va $920 < 1058 < 1380$, bo'lgani uchun $20 < q_1 < 30$ va q_1 sonini $q_1 = 20 + q_0$ ko'rinishda yozish mumkin. U holda 1058 soni haqida quyidagilarni aytish mumkin.

$$46 \bullet (20 + q_0) \leq 1058 < 46 \bullet (20 + q_0 + 1), \text{ ya'ni } 46 \bullet 20 + 46q_0 \leq 1058 < 46 \bullet 20 + 46(q_0 + 1), \\ 46q_0 \leq 138 < 46(q_0 + 1)$$

Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini 46 ni ketma-ket birga, 2ga, 3ga, 4ga, 5ga... ko'paytirib, tanlab topamiz. $46 \cdot 3 = 138$ ni ya'ni qoldiq nolga teng bo'lgan holni topamiz. Demak, $5658 : 46 = 123$.

Bu mulohazalar burchak qilib bo'lish asosida yotadi...

$$\begin{array}{r} 5658 \overline{) 46} \\ 46 \overline{) 123} \\ \underline{105} \\ 92 \\ 138 \\ \underline{ 138} \\ 0 \end{array}$$

Ko'p xonali sonlarni bo'lish haqida to'la tasavvurga ega bo'lish uchun bo'linmada nollar paydo bo'lgan holni qaraymiz. Masalan 7549 ni 37 ga bo'lamiz, ya'ni shunday q va r sonlarni topamizki, ular uchun $7549 = 37 \cdot q + r$, $0 \leq r < q$ va $37q \leq 7549 < 37(q+1)$, bajarilsin. 7549 va 37 sonlarining bo'linmasi q 100 va 1000 sonlar orasida yotadi (u uch xonali son), chunki $3300 < 7549 < 37000$ 37 ni 100ga, 200ga va hokazo ko'paytirib, $37 \cdot 200 \leq 7549 < 37 \cdot 300$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $q = 200 + q_1$, bunda q -ikki xonali son va $37 \cdot (200 + q_1) \leq 7549 < 37 \cdot (200 + q_1 + 1)$.

Shakl almashtirishlardan keyin $37q_1 \leq 149 < 37(q_1+1)$ tengsizlikka kelamiz. Q_1 soni ikki xonali bo'lgani uchun uning yozuvidagi o'nlar raqami 37ni 10ga, 20ga, 30 ga va hokazo ko'paytirish bilan topiladi. Biroq bizning holda bu sonlarning birortasi ham tengsizlikni qanoatlantirmas ekan. Demak, q_1 sonidagi o'nlar raqami 0 ga teng ekan, ya'ni $q_1 = 0 + q_1$ to'liqsiz bo'linma.

Butun nomanfiy a sonni b natural songa bo'lishning turli usullarining umumlashmasi quyidagi burchak qilib bo'lish algoritmi hisoblanadi:

I. Agar $a = b$ bo'lsa, bo'linma $q = 1$, qoldiq $r = 0$ bo'ladi.

II. Agar $a > b$ bo'lib, a va b sonlardagi xonalar soni bir xil bo'lsa, b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib bo'linma tanlab olinadi, chunki $a < 10b$

III. Agar $a > b$ bo'lib, a sondagi xonalar soni b sondagi xonalar sonidan katta bo'lsa, a bo'linuvchini yozib, uning o'ng tomoniga b bo'luvchini yozamiz va oralariga burchak belgisini qo'yib, bo'linma hamda qoldiqni ushbu ketma-ketlikda qidiramiz:

1. b sonda nechta xona bo'lsa, a sonida shuncha xonalarni yoki, agar zarur bo'lsa, bitta ortik xonani shunday ajratamizki, ular b dan katta yoki o'nga teng

d_1 sonni hosil qilsin. b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib, d_1 va b sonlarning q_1 bo'linmasini tanlab topamiz. q_1 ni burchak ostiga yozamiz.

2. d ni q_1 ga ko'paytirib, ko'paytmani a sonining ostiga shunday yozamizki, vq_1 sonning quyi xonasi ajratilgan d_1 sonning quyi xonasi ostiga yozilsin.

3. b_1 ning ostiga chiziqcha chizamiz va ayirmani topamiz.

$$r_1 = d_1 - bq_1$$

4. r_1 ayirmani bq_1 sonning ostiga yozamiz, r_1 ning o'ng tomoniga a bo'luvchining foydalanilmagan xonalaridan yuqori xonasini yozamiz va chiqqan d_2 sonni b bilan taqqoslaymiz.

5. Agar chiqqan d_2 son b dan katta yoki unga teng bo'lsa, u holda d_2 nisbatan I va II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linmani q_1 dan keyin yozamiz.

6. Agar chiqqan d_2 son b dan kichik bo'lsa, birinchi chiqqan d_3 son b dan katta yoki o'nga teng bo'lishi uchun keyingi xonalardan qancha zarur bo'lsa yana shuncha yozamiz. Bu holda q_1 dan keyin shuncha nol yozamiz. Keyin d_3 ga nisbatan I va II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linma nollardan keyin yoziladi. Agar a sonning kichik xonalaridan foydalanganda $d_3 < b$ bo'lsa, d_3 va b sonlarning bo'linmasi nolga teng bo'ladi va bu nolni bo'linmaning oxirgi xonasiga yozamiz, qoldiq $r = d_3$ bo'ladi.

Bo'lish ko'pgina matematik masalalar bilan jumladan, ko'p xonali sonlarni ko'paytirish va bo'lish masalasi bilan bogliq bo'lgani uchun u boshlangich sinflarda asta-sekin o'rganiladi. O'quvchilar avval jadvalli bo'lishni va nol bilan tugaydigan sonlarni bo'lishni o'rganadilar, so'ngra ikki xonali sonni bir xonali va ikki xonali songa bo'lishni (yigindini songa bo'lish qoidasiga va ko'paytirish jadvaliga tayanib), keyinroq qoldikli bo'lishni va nihoyat ko'p xonali sonni bir xonali, ikki xonali va uch xonali songa bo'lishni o'rganadilar.

Mavzu: Bo'linish munosabati va uning xossalari

R E J A:

1. Bo'linish munosabati haqida tushuncha.
2. Bo'linish munosabatining xossalari.
3. Sonlarning bo'linish belgilari.

Muammoli savollar:

1. Bo'linish munosabati deb nimaga aytiladi?
2. Bo'linish munosabati qanday xossalarga ega?
3. Bo'linish munosabatidan qachon foydalanish mumkin?

Tayanch iboralar:

bo'linish munosabati, bo'lish amali, yig'indining bo'linishi, ko'paytmaning bo'linishi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: «Просвещение», 1977.
2. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошлангич математика курси асослари. Т. «Ыйитувчи», 1991.

3. И.К.Андронов. Арифметика. М.: Учпедгиз, 1962.
4. К.Муцхаммедов. Элементар математикадан ылланма. Т.: «Ы=итувчи», 1972
5. Т.Тылаганов. Элементар математика. Т.: «Ы=итувчи», 1999.
6. Ырта мактаб «Математика» дарсликлари.

Meteorologlar ob-havoni oldindan aytib berishga, vrachlar biror operatsiyani bajarmay turib uni, aniqlashga harakat qiladilar. Buning uchun albatta ular ma'lum shartlarni asos qilib oladilar. Matematikada ham bunday tipdagi vazifalar ko'p uchraydi. Masalan, sonlar ustida bajariladigan 4 amalni qaraylik. Manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami berilgan bo'lsin. Bundagi 2 ta sonning ustida bajariladigan "+" va (·) amalini doimo bajarilishini ko'rish mumkin. Lekin istalan ikkita nomanfiy butun sonning ayirmasi va bo'linmasi har doim mavjud bo'lavermaydi. Masalan 5-9 va 5:9 nomanfiy butun sonlar to'plamida mavjud emas. Shuning uchun bu "-" va "/" amalarini bajarilishining shartlarini bilishimiz lozim. Ayirish amali uchun a va b sonlarining ayirmasi $a \geq b$ bo'lganda mavjud va yagonadir.

Bo'lish uchun bunday umumiy va oddiy usul yo'q. Matematiklarimiz biror a soniga bo'lmasdan a sonining yozuviga qarab b soniga bo'linishi yoki bo'linmasligini aniqlashga urinib kelganlar va bu sohada ancha yutuqlarga erishganlar. Bo'linish belgilari uchun bo'linish munosabati tushunchasining ta'rifini beramiz.

Ta'rif: Agar ixtiriyoriy a, b ($b \neq 0$), nomanfiy butun sonlar uchun $a = b \cdot c$ (1) shartni qanoatlantiruvchi soni mavjud bo'lsa, u holda a soni b ga bo'linadi, yoki karrali deyiladi va quyidagicha yoziladi. $a : b$ (bulinish munosabati)

: -munosabati bilan : amalini farqlash kerak.

Quyidagi misolni qaraylik.

$$10:2=5 \quad 10:2 \quad \text{yoki} \quad 18:7$$

$$10=2 \cdot 5$$

Bunda, "bo'luvchi", "bo'luvchisi", "bo'linuvchi", bo'linuvchisi terminlari farq qiladi.

Bo'linish munosabatining ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz.

1.0 soni har qanday songa bo'linadi. ($\forall a \in \mathbb{Z}_0$) $0 : a$

Isbot: $0 = a \cdot 0$, bundan ta'rifga asosan $0 : a$

2.0 dan farqli hech bir son 0 soniga bo'linmaydi. ($\forall a \in \mathbb{Z}_0$), $\overline{a:0}$

Isbot: $a = 0 \cdot b$ tenglik hech bajarilmaydi. Demak, noldan farqli sonni nolga bo'lish mumkin emas.

3. Har qanday son 1 ga bo'linadi. ($\forall a \in \mathbb{Z}_0$) $a : 1$

Isbot: $a = 1 \cdot a$, bundan ta'rifga asosan $a : 1$

4. Bo'linish munosabati refleksivlik xossasiga ega, ya'ni har qanday son o'z-o'ziga bo'linadi.

$$(\forall a \in \mathbb{Z}_0) \quad a : a$$

Isbot: $a = a \cdot 1$ tenglik o'rinli bo'lganiga asosan $a : a$

5. Agar a va b sonlari uchun $a : b$ va $a > 0$ bo'lsa, u holda $a \geq b$ bajariladi.

$$(\forall a \in \mathbb{Z}_0) \quad a : b \Rightarrow a = b \cdot c \quad \text{bunda} \quad c \neq 0, c > 0$$

a-b ayirmasini qaraylik $a - b = bc - b = b(c - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} c > 1 \text{ da } a-b > 0 \Rightarrow a > b \\ c = 1 \text{ da } a-b = 0 \Rightarrow a = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \geq b$$

6. Bo'linish munosabati assimetriplik xossasiga ega

$$a : b \wedge b : a \Rightarrow a = b, \quad a, b \in \mathbb{Z} \setminus 0$$

$$\text{Isbot: } a : b, a > 0 \Rightarrow a \geq b$$

$$b : a, b > 0 \Rightarrow b \geq a \text{ (bulardan 5- xossaga ko'ra)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \geq b \\ b \geq a \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \text{ kelib chiqadi.}$$

7. Bo'linish munosabati tranzitivlik xossasiga ega.

$$a : b \wedge b : c \Rightarrow a : c$$

$$\text{Isbot: } a : b \Rightarrow a = b \cdot q_1$$

$$b : c \Rightarrow b = c \cdot q_2$$

$$a = b \cdot q_1 = c q_2 \cdot q_1 = c \cdot (q_1 \cdot q_2) = c \cdot q \text{ bundan bo'linish munosabatining ta'rifi asosan } a : c.$$

8. Yig'indining bo'linish xossasi.

Agar qo'shiluvchilarning har biri c soniga bo'linsa, u holda bu qo'shiluvchilarning yig'indisi ham c soniga bo'linadi.

$$\text{Isbot: } a : c \wedge b : c \Rightarrow (a+b) : c$$

$$a : c \Rightarrow a = c \cdot q_1$$

$$b : c \Rightarrow b = c \cdot q_2 \text{ sonli tengsizliklarni hadma-had qo'shish mumkin. } a+b = cq_1 + cq_2 = c \cdot \underbrace{(q_1 + q_2)}_m$$

$a+b = c \cdot m$ ta'rifi asosan $(a+b) : c$ bunga teskari masalani olib qaraylik.

$$\square + \square = 10, 10 : 2 \Rightarrow \square : 2 \wedge \square : 2, \square : c, \square : c, \text{ bunda } \square + \square : c$$

$$\text{Ba'zi tanlab olingan } a, b \text{ sonlar uchun } \overline{a : c} \wedge \overline{b : c} \Rightarrow \neg (a+b) : c$$

$$\text{Misol. } 13 : 5 \wedge 17 : 5 \text{ ammo } (13+17) : 5$$

Bunga oid masalalarni qarashni talabani o'ziga havola etamiz.

1-natija. Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sonlarning har biri c soniga bo'linsa, u holda bu sonlarning yig'indisi ham c soniga bo'linadi.

$$a_1 : c, a_2 : c, \dots, a_n : c \Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) : c$$

(isboti talabaga havola qilinadi).

2-natija. Ayirmaning bo'linish xossasi.

Agar a va b sonlari c soniga bo'linsa va $a \geq b$ bo'lsa, u holda bu sonlarning ham ayirmasi c soniga bo'linadi.

$$(a : c \wedge b : c), a \geq b \Rightarrow (a-b) : c$$

Isboti talabaga havola etiladi.

9-xossa Ko'paytmaning bo'linish xossasi.

Agar ko'paytuvchilardan birortasi c soniga bo'linsa, bu sonlarning ko'paytmasi ham c ga bo'linadi.

$$a : c \Rightarrow (a \cdot b) : c$$

Isbot: $a:c \Rightarrow a=c \cdot q_1$

$$a \cdot \underbrace{b=c \cdot q_1}_n \Rightarrow a \cdot b=c \cdot n \Rightarrow (a \cdot b):c$$

3-natija Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlarning har biri c bo'linsa, ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar uchun $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$ ham c bo'linadi. (isbotini talabaga havola etamiz)

Bo'linish munosabati ko'pincha berilgan a soning biror b soniga qoldiqsiz bo'linish yoki bo'linmasligini aniqlash uchun zarur bo'lib o'quvchidan ba'zi bir sonlarga bo'linish alomatlarini o'rganishni taqozo qiladi.

Mavzu: Bo'linish alomatlari

Muammoli savollar:

1. Ikkiga, beshga, o'nga bo'linish belgilarini misollar orqali tushuntiring.
2. Uchga va to'qqizga bo'linish belgilarini asoslab bering.
3. To'rtga, yigirma beshga bo'linish belgilarini asoslang.
4. Yettiga, o'n birga, va o'n uchga bo'linishning belgilarini tushuntiring.

Reja:

1. Butun sonning berilgan songa bo'linishining zarur va etarli sharti.
2. Ikkiga, beshga, o'nga bo'linish shartlari.
3. Uchga va to'qqizga bo'linish shartlari.
4. Yettiga, o'n birga, va o'n uchga bo'linishning umumiy belgilari.

Tayanch iboralar:

Bo'linuvchi, bo'luvchi, bo'linma, to'liqsiz bo'linma, qoldiq, bo'linish alomatlari.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Н.В. Виленкин, А.М. Пышкало. Математика. М.: «Просвещение», 1977.
2. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т. «Ы=итувчи», 1991.
3. И.К. Андронов. Арифметика. М.: Учпедгиз, 1962.
4. К.Муцаммедов. Элементар математикадан ыпланма. Т.: «Ы=итувчи», 1972
5. Т.Тылаганов. Элементар математика. Т.: «Ы=итувчи», 1999.
6. Ырта мактаб «Математика» дарсликлари.

Ko'p hollarda bo'lishni bajarmasdan bir son ikkinchi songa bo'linadimi, degan savolga javob berish talab etiladi. Ba'zi bir sonlarga bo'linish belgilarini quyida keltiramiz. Biz sonni asosi $g=10$ bo'lgan sistemada raqamlar yordami bilan yozilgan deb hisoblaymiz.

$$N = a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$$

soni berilgan bo'lsin. Berilgan sonning qandaydir A soniga bo'linish shartini aniqlash talab etiladi.

10 sonining $10, 10^2, 10^3, \dots, 10^{n-1}$ darajalarini berilgan A soniga bo'lamiz. Tegishli bo'linma va qoldiqlarni $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$

va $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ orqali belgilaymiz. Bu vaqtda:

$$10 = Aq_1 + r_1$$

$$10^2 = Aq_2 + r_2$$

$$10^3 = Aq_3 + r_3$$

.....

$$10^{n-1} = Aq_{n-1} + r_{n-1}$$

Demak,

$$N = a_n (Aq_{n-1} + r_{n-1}) + \dots + a_3 (Aq_2 + r_2) + a_2 (Aq_1 + r_1) + a_1$$

yoki

$$N = a_n Aq_{n-1} + \dots + a_3 Aq_2 + a_2 Aq_1 + a_n r_{n-1} + a_{n-1} r_{n-2} + \dots + a_3 r_2 + a_2 r_1 + a_1$$

$$\text{Endi } (a_n q_{n-1} + \dots + a_3 q_2 + a_2 q_1)A = Q$$

$$a_n r_{n-1} + \dots + a_3 r_2 + a_2 r_1 + a_1 = P$$

deb belgilaymiz, bu vaqtda:

$$N = Q + P$$

Ammo Q soni A ga bo'linadi. Bundan kelib chiqadiki, agar P son A bo'linsa, bu holda- N ham A ga bo'linadi, agar P son A ga bo'linmasa, bu vaqtda N ham A ga bo'linmaydi.

Shunday qilib, **butun sonning berilgan songa bo'linishi uchun, butun son raqamlarining 10 ning mos darajalarini berilgan songa bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq bilan ko'paytmalarining yigindilari bu songa bo'linishi zarur va etarli.**

2 ga bo'linish belgisi. Bu holda $A = 2$. Mos qoldiqlar:

$$r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_{n-1} = 0.$$

Demak,

$P_1 = a_1$, ya'ni berilgan sonning 2 ga bo'linishi uchun sonning oxirgi raqami 2 ga bo'linishi zarur va etarli,

2) 3 ga bo'linish belgisi.

Bu holda $A = 3$.

10 ning darajalarini 3 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar:

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, \dots, r_{n-1} = 1.$$

Demak,

$$P = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

ya'ni sonning 3 ga bo'linishi uchun, sonning raqamlari yigindisi 3 ga bo'linishi zarur va etarli.

4 ga bo'linish belgisi.

Bu holda 10 ning darajalarini 4 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar:

$$r_1 = 2, r_2 = 0, r_3 = 0, \dots, r_{n-1} = 0.$$

Demak, $P = a_1 + 2a_2$,

ya'ni sonning 4 ga bo'linishi uchun, birlik raqami bilan o'nlik raqami ikkilanganining yigindisi 4 ga bo'linishi zarur va etarli.

R sonini o'zgartiramiz. R soniga $8a_2$ sonini qo'shamiz; bu holda:

$$P_1 = P + 8a_2 = a_1 + 2a_2 + 8a_2 = a_1 + 10a_2.$$

Agar P son 4 ga bo'linsa, bu holda P_1 ham 4 ga bo'linadi. Teskari tasdiq ham to'g'ri. Ammo P_1 oxirgi ikki raqam bilan ifodalangan son. Demak, sonning 4 ga bo'linishi uchun, uning oxirgi ikki raqami bilan ifodalangan son 4 ga bo'linishi zarur va etarli.

5 ga bo'linish belgisi.

Ayni holda $A = 5$ 10 darajalarini 5 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar 0 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$r_1 = 0, r_2 = 0, \dots, r_{n-1} = 0.$$

Demak, $P = a_1$

Shunday qilib, sonning 5 ga bo'linishi uchun oxirgi raqamining 5 ga bo'linishi zarur va etarli, ya'ni sonning oxirgi raqami 0 yoki 5 bo'lishi kerak.

5) 9 ga bo'linish belgisi.

Ayni holda $A = 9$.

10 ning darajalarini birmuncha boshqa ko'rinishda ifodalaymiz:

$$10 = 10 - 1 + 1 = 9 + 1$$

$$10^2 = 100 - 1 + 1 = 99 + 1;$$

$$10^3 = 1000 - 1 + 1 = 999 + 1;$$

.....

$$10^{n-1} = \overbrace{100\dots 0}^{n-1} - 1 + 1 = \overbrace{99\dots 9}^{n-1} + 1.$$

Demak, 10 ning darajalarini 9 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar:

$$r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_{n-1} = 1.$$

Bu vaqtda, $P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, ya'ni berilgan sonning 9 ga bo'linishi uchun raqamlari yigindisi 9 ga bo'linishi zarur va etarli.

6) 7 ga bo'linish belgisi.

Ayni holda $A = 7$ bo'ladi.

10 ning darajalarini 7 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar mos ravishda:

$$10 = 7 \cdot 1 + 3, \text{ ya'ni } r_1 = 3$$

$$100 = 7 \cdot 14 + 2, \quad r_2 = 2$$

$$1000 = 7 \cdot 142 + 6, \quad r_3 = 6$$

$$10000 = 7 \cdot 1428 + 4, \quad r_4 = 4$$

$$100000 = 7 \bullet 14285 + 5, \quad r_5 = 5$$

$$1000000 = 7 \bullet 142857 + 1, \quad r_6 = 1$$

Bundan keyingi qoldiqlar davriy ravishda takrorlanadi. Demak,

$$P = a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 6a_4 + 4a_5 + 5a_6 + a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 6a_{10} + 4a_{11} + 5a_{12} + a_{13} \dots^1$$

Yoki

$$P = a_1 + 3a_2 + 2a_3 + (7a_4 - a_4) + (7a_5 - 3a_5) + (7a_6 - 2a_6) + a_7 + 3a_8 + 2a_9 + (7a_{10} - a_{10}) + (7a_{11} - 3a_{11}) + (7a_{12} - 2a_{12}) + a_{13} + \dots,$$

ya'ni

$$P = (a_4 + a_5 + a_6 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots) \cdot 7 + (a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_7 + 3a_8 + 2a_9 + \dots) - (a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_{10} + 3a_{11} + 2a_{12} + \dots),$$

Endi

$$(a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_7 + 3a_8 + 2a_9 + \dots) = P_1.$$

$$(a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_{10} + 3a_{11} + 2a_{12} + \dots) = P_2.$$

Deb belgilaymiz.

Birinchi qo'shiluvchi $(a_4 + a_5 + a_6 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots)$. 7 albatta 7 ga bo'linadi, demak, P soni 7 ga bo'linishi uchun $P_1 - P_2$. (agar $P_1 > P_2$ bo'lsa, $P_2 - P_1$ ayirma 7 ga bo'linishi yoki agar $P_2 > P_1$ bo'lsa $P_2 - P_1$ ayirma 7 ga bo'linishi (ayirma 7 ga bo'linishi) zarur va yetarli. Shunday qilib, sonning 7 ga bo'linishi uchun, birinchi va ettinchi raqamini 1 ga, ikkinchi va sakkizinchi raqamini 3 ga, - uchinchi va to'qqizinchi raqamini 2 ga va hokazo ko'paytirish zarur va hosil bo'lgan ko'paytmani qo'shish kerak; so'ngra sonning to'rtinchi va o'ninchi raqamlarini birga, beshinchi va o'n birinchi raqamlarini 3 ga, oltinchi va o'n ikkinchi raqamlarini ikkiga va hokazo ko'paytirib, ko'paytmalarni qo'shish kerak bo'ladi, so'ngra bu yigindilarning ayirmasini topish kerak. Agar hosil bo'lgan ayirma 7 ga bo'linsa, bu holda berilgan son ham 7 ga bo'linadi. Misol. 586067542 soni 7 ga bo'linishini aniqlang.

Yechish.

5 4 2	0 6 7	5 8 7
2 3 1	2 3 1	2 3 1
10+12+2	0+ 18+7	10+ 24+ 6
24	25	40

Jami: $40 + 24 - 25 = 39$. Bu son 7 ga bo'linmaydi.

7) 11 ga bo'linish belgisi.

Ayni holda $A = 11$,

10 darajalarini 11 ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqlar:

$$10 = 11 \bullet 0 + 10 \text{ ya'ni } r_1 = 10$$

$$100 = 11 \bullet 9 + 1, \quad r_2 = 1$$

$$1000=11\bullet 90+10, \quad r_3 = 10$$

$$10000=11\bullet 909+1, \quad r_4 = 1$$

ya'ni 10 ning darajalarini 11 ga bo'lishda qoldiq, 10 darajalarining juft yoki toq bo'lishiga qarab yo 10, yoki 1 bo'ladi. Bu vaqtda:

$$P=a_1 + 10a_2 + a_3 + 10a_4 + a_5 + 10a_6 + \dots$$

Yoki

$$P = a_1 + 11a_2 - a_2 + a_3 + 11a_4 - a_4 + a_5 + 11a_6 - a_6 + \dots$$

Yoki

$$P = (a_2 + a_4 + a_6 + \dots) \cdot 11 + [(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \dots)].$$

Agar yigindi

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots < a_2 + a_4 + a_6 + \dots \text{ bo'lsa,}$$

$$P = (a_2 + a_4 + a_6 + \dots) \cdot 11 - [(a_2 + a_4 + a_6 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)] \text{ ko'rinishdagi yoyilmalardan iborat bo'ladi.}$$

Shunday qilib, berilgan son 11 ga bo'linishi uchun, juft o'rinda va toq (yoki aksincha) o'rinda turgan raqamlar yigindilari orasidagi ayirma 11 ga bo'linishi zarur va etarli.

Misol. 2079 sonining 11 ga bo'linishini aniqlang.

Yechish,

$$(0 + 9) - (2 + 7) = 0,$$

2079 soni 11 ga bo'linadi.

8) Sonlarning 7, 11 va 13 ga bo'linishining umumiy belgisi.

Istalgan N sonini

$$N = P - 1000 + Q$$

ko'rinishida yozish mumkin, bunda Q – oxirgi 3 ta raqamni ifodalaydigan son. P – qolgan raqamlarni ifodalaydigan son,

Shuni bo'tiborga olamizki, 1001 soni 7 ga ham va 11 ga ham, 13 ga bo'linadi. N ning ifodasini o'zgartiramiz:

$$N = P - 1001 - P + Q = P \cdot 1001 - (P - Q).$$

Shu sababli P- Q yoki Q -P ayirma 7 ga, yoki 11 ga, yoki 13 ga bo'linsa, bu holda N ham 7 ga yoki 11 ga, yoki 13 bo'linadi.

Shunday qilib, agar berilgan sonning oxirgi 3 raqami ifodalaydigan son bilan qolgan raqamlari ifodalovchi sonning ayirmasi (yoki aksinchasi) 0 ga teng bo'lsa, 7 ga, yoki 11 ga, yoki 13 ga bo'linsa, bu vaqtda berilgan son ham mos ravishda 7 ga, yoki 11 ga va yoki 13 ga bo'linadi.

1-misol. 368312 soni 7 ga, yoki 11 ga va yoki 13 ga bo'linishini aniqlang. Ayni holda:

$$P = 368, \quad Q = 312.$$

Demak,

$$P - Q = 368 - 312 = 56.$$

56 soni 7 ga bo'linadi va 11 ga, 13 ga bo'linmaydi, demak, berilgan son 7 ga bo'linadi, 11 va 13 ga bo'linmaydi.

2-misol. 378 456 soni 7, 11 va 13 ga bo'linishini aniqlash kerak.

Bu erda

$$P = 378;$$

$$Q = 456.$$

$$Q - P = 456 - 378 = 78.$$

78 soni 13 ga bo'linadi, demak, 378 456 soni ham 13 ga bo'linadi, 7 va 11 ga bu son bo'linmaydi, chunki 78 7 ga va 11 ga bo'linmaydi.

Mavzu: Tub va murakkab sonlar.

Reja:

- 1) Tub sonlar haqida tushuncha.
- 2) Murakkab sonlar.
- 3) Eratosfen g'alviri.
- 4) Sonning tub yoki murakkabligini aniqlash usuli.

Nazorat uchun savollar:

- 1) Qanday sonlarga tub sonlar deyiladi?
- 2) Qanday sonlar murakkab sonlar deb ataladi? Murakkab sonlarni tub sonlar ko'paytmasi shaklida tasvirlash haqidagi teorema nimadan iborat?
- 3) Eratosfen g'alviri qanday tuzilgan?
- 4) Qanday tub sonlar egizak tub sonlar deb ataladi?
- 5) Berilgan sonning tub yoki murakkabligini qanday aniqlash mumkin?

Tayanch iboralar.

Natural son, bo'luvchi, tub son, murakkab son, kanonik yoyilma, egizak tub sonlar, Eratosfen g'alviri.

Birdan katta bo'lgan har qanday natural son, hech bo'lmaganda ikkita bo'luvchiga ega. U birga va o'ziga bo'linadi. Shunday natural sonlar mavjudki, ular ikkitadan ortiq bo'luvchiga ega. Masalan,

10 soni 1;2;5;10 bo'luvchilarga ega.

Ta'rif: Faqat ikkita bo'luvchiga (1ga va o'ziga) ega bo'lgan birdan katta bo'lgan natural son tub son deyiladi; agar sonning ikkitadan ortiq bo'luvchilari bo'lsa, bunday sonlar murakkab sonlar deyiladi.

Masalan, 2;3;5;7;...- sonlari tub sonlar.

4;6;8;9;...- sonlari murakkab sonlar.

Bir tub son ham, murakkab son ham bo'lmaydi. Bir shunday birgina maxsus natural son bo'lib, faqat bitta bo'luvchiga ega.

Teorema: Birdan boshqa har qanday natural son hech bo'lmaganda bitta tub bo'luvchiga ega.

Isbot: Qandaydir A son berilgan bo'lsin.

1) Agar A tub son bo'lsa, u holda A son tub son ta'rifiga ko'ra faqat o'ziga va birga bo'linadi. Demak, A soni yagona tub bo'luvchi bo'lib qoladi. Bu hol uchun teorema isbotlanadi.

2) A - murakkab son bo'lsin. Bu holda murakkab son ta'rifiga asosan, bu sonning 1 va A orasida turadigan qandaydir bo'luvchilari bo'lishi kerak. Bu bo'luvchini C orqali belgilaymiz. Bu vaqtda

$$A = B \cdot C, \text{ bunda } 1 < C < A$$

Agar C tub son bo'lsa, u holda teorema isbotlanadi. Agar C -murakkab son bo'lsa, u vaqtda u

$$C = E \cdot D, \text{ bunda } 1 < E < C \text{ ga tengdir.}$$

Bu holda

$$A = B \cdot E \cdot D$$

Agar E tub son bo'lsa, teorema isbotlangan bo'ladi. Agar E murakkab son bo'lsa, unda

$$E = K \cdot H, \quad 1 < K < E \text{ bo'lib}$$

$$A = B \cdot K \cdot H \cdot D \text{ bo'ladi.}$$

Ammo $C, E, K, \dots$ sonlar kamayib boruvchi sonlardir, bundan tashqari, bularning barchasi A sonidan kichik. Shu sababli sonlar faqat chekli miqdorda bo'lishi mumkin.

Demak, bunday sonlar qatori, albatta tub son bilan tugallanadi, ya'ni A soni hech bo'lmaganda bitta tub bo'luvchiga ega bo'ladi.

Teorema: Har qanday murakkab son tub sonlar ko'paytmasi shaklida faqat birgina usul bilan tasvirlanishi mumkin.

Isbot: A - murakkab son bo'lsin; bu vaqtda oldingi teoremaga asosan bu sonning hech bo'lmaganda tub sonidan iborat bo'lgan bitta bo'luvchisi bor, ya'ni: $A = P_1 \cdot A_1$, bunda P_1 - tub son. Agar A_1 tub son bo'lsa, bu holda teorema isbotlangan bo'ladi.

Agar A_1 murakkab son bo'lsa, u holda yana shunday mulohaza yuritib $A_1 = P_2 \cdot A_2$ ni hosil qilamiz, bunda P_2 – tub son; bu vaqtda

$$A = P_1 \cdot P_2 \cdot A_2$$

Xuddi shunday mulohaza yuritib

$A = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot A_3$ ni hosil qilamiz va hokazo. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sonlar hamma vaqt kamayadi va doimo birdan katta, ammo natural sonlar cheksiz kamaya olmaydi, shuning uchun qandaydir A_n soni tub son bo'ladi, buni P_n deb belgilaymiz. Demak $A = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n$

A - ikki usulda tub ko'paytuvchilarga ajratilgan bo'lsin.

$$A = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n \text{ va}$$

$$A = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \dots \cdot Q_n \cdot Q_{n+1} \cdot \dots \cdot Q_m$$

Bu holda

$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \dots \cdot Q_n \cdot Q_{n+1} \cdot \dots \cdot Q_m$ ga ega bo'lamiz. Q_1 sonini olamiz; chap tomoni ham Q_1 ga bo'linishi lozim, ya'ni P dan biri Q_1 bo'linishi kerak. Ammo hamma P tub sonlar: demak, bulardan biri Q_1 ga teng bo'lishi lozim.

$P_1 = Q_1$ bo'lsin. Tenglikning ikki tomonini shu sonlarga qisqartirib,

$P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n = Q_2 \cdot Q_3 \cdot \dots \cdot Q_n \cdot Q_{n+1} \cdot \dots \cdot Q_m$ ni hosil qilamiz.
Shu kabi mulohaza yuritsak:

$$P_2 = Q_2 ; P_3 = Q_3 ; \dots ; P_n = Q_n$$

va

$$1 = Q_{n+1} \cdot Q_{n+2} \cdot \dots \cdot Q_m \text{ hosil bo'ladi.}$$

Bundan $Q_{n+1} = 1 ; Q_{n+2} = 1 ; \dots ; Q_m = 1$ ekani kelib chiqadi, chunki bir necha natural sonning ko'paytmasi ko'paytuvchilarning har biri 1 ga teng bo'lgandagina 1 ga teng bo'ladi. Shunday qilib, sonni har biri tub son bo'lgan ko'paytuvchilarga ajratish, faqat birgina usul bilan mumkinligini ko'rdik.

Sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ko'rsatish kanonik yoyilma deyiladi. Misol, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Ba'zan murakkab sonni tub ko'paytuvchilarga ajratganda tub ko'paytuvchi takrorlanishi mumkin. Masalan, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

Tub ko'paytuvchilarning takrorlanib kelishini hisobga olib murakkab A sonning tub ko'paytuvchilar shaklidagi kanonik yoyilmasi deb quyidagi ko'rinishdagi yozuvga aytiladi.

$$A = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot P_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot P_n^{\alpha_n}$$

Biz arifmetikaning asosiy teoremasi isbotini keltirdik.

Teorema: Tub sonlar soni cheksizdir.

Ushbu teorema ba'zi adabiyotlarda Yevklid teoremasi deb nomlanadi.

Isbot: Tub sonlar qatori $2; 3; 5; 7; \dots; K$ chekli va katta oxirgi tub son K deb faraz qilamiz. Yangi N sonini quyidagicha hosil qilamiz.

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot K + 1$$

N har qanday holda K dan katta. N tub son ham, murakkab son ham bo'lishi mumkin. Lekin, N tub son bo'lishi mumkin emas, chunki $N > K$, bizning farazimizda K dan katta bo'lgan tub son mavjud emas. Shu kabi N murakkab son ham bo'la olmasligini isbotlaymiz. Agar N murakkab son bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta tub P bo'luvchiga ega bo'lishi kerak, bu bo'luvchi farazga asosan K ga teng yoki K dan kichik bo'lishi kerak ($P \leq K$).

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot K$ ko'paytma P ga bo'linadi, chunki bu ko'paytmaning ko'paytuvchilari 2 dan boshlab K gacha bo'lgan barcha tub sonlardan iborat. Ammo bu holda 1 K ga bo'linadi, chunki agar yig'indi va bitta qo'shiluvchi berilgan songa bo'linsa, bu vaqtda ikkinchi qo'shiluvchi ham berilgan songa bo'linadi, buning bo'lishi mumkin emas.

Shunday qilib, N biror tub bo'luvchiga ega emas, ya'ni murakkab son emas. Demak, N tub son ham, murakkab son ham emas. Bu natija bizning tub sonlar qatori cheklidir degan farazimizning noto'g'riligini ko'rsatadi, ya'ni eng katta tub son mavjud emas, demak tub sonlar qatori cheksizdir.

Hozirgi zamon matematikasining asosiy masalalaridan biri natural qatorda tub sonlarning taqsimlanish qonunini topish va aniqlashdir.

Tub sonlarni eng oddiy va shu bilan birga eng qadimgi jadvalini tuzish tartibi grek matematigi va astronomi Eratosfenga (bizning eramizgacha bo'lgan 276-193 yillar) tegishlidir. Eratosfen taklif etgan usul quyidagidan iborat. Natural sonlar qatori yozilib, murakkab sonlar o'chiriladi.

Tub sonlar ta'rifini qanoatlantiradigan bu qatorning birinchi soni 2 o'chirib tashlanmaydi. So'ngra bu qatordan bittadan oralatib barcha juft sonlar (4;6;8;10;...) o'chirib tashlanadi. 2 dan keyin o'chirib tashlanmagan son 3dir; bu tub son bo'ladi, chunki bo'luvchisi 2 bo'lgan barcha sonlar allaqachon o'chirib tashlangan. Keyin 3 sonning o'zini qoldirib har uchinchi sonni o'chirib tashlanadi, ya'ni 6 dan boshlab 3 ga bo'linadigan barcha sonlar o'chiriladi. Navbatdagi o'chirib tashlanmagan son 5 dir; bu tub son; chunki tub son bo'lmaganda oldingi tub sonlarga bo'linishi mumkin edi; bu holda 2 yoki 3 ga bo'linuvchi bo'lar edi, lekin bu sonlarning bo'linuvchilari allaqachon o'chirib tashlangan. 5 sonini qoldirib va 5 ga bo'linadigan barcha sonlarni , ya'ni to'rtta sondan keyin beshinchisi (10;15;20;25;...) o'chirib tashlanadi, o'chirib tashlanmagan son 7 dir. Bu tub son, 7 ga bo'linadigan barcha sonlar o'chirib tashlanadi, ya'ni oltita sondan keyin yettinchisi o'chiriladi va hokazo.

Bunday usul bilan tuzilgan tub sonlar jadvali “ Eratosfen g'alviri “ nomi bilan ma'lumdir. Chunki Eratosfen sonlarni mum bilan qoplagan taxtachaga yozib, qayerda murakkab sonlar bo'lsa, teshikchalar teshadi. Shuning uchun taxtachasi xuddi g'alvirdek bo'lib qoladi, undan barcha murakkab sonlar elanib tushib ketadi, tub sonlarga qoladi.

Eratosfen tub sonlar jadvalini faqat 1000 ichida keltirdi. Hozirgi vaqtda tub sonlar jadvali ancha kengaygan.

Tub sonlar jadvalini ko'zdan kechirganda tub sonlar 1 dan 100 gacha tez-tez uchrashini, 100 dan 1000 gacha oraliqda kam uchrashini va natural sonlar qatori bo'yicha qancha uzoq borilsa, tub sonlar shuncha siyrak uchrashini ko'rish mumkin.

100 dan kichik 25 ta tub son bor, 1000 dan kichik 168 ta, 9000000 gacha sonlar orasida 602567 ta tub son bor.

Egizak tub sonlarni o'rganish natural qatorda tub sonlar taqsimlanishi xarakteri haqidagi ayrim tasavvurlarni beradi. (Egizak tub sonlar deb, ayirmalari 2 ga teng bo'lgan tub sonlarga aytiladi. Masalan, 3 va 5; 5 va 7; 11 va 13 va hokazo) Egizak tub sonlar to'plami chekli yoki cheksizligi fanga ham ma'lum emas. Hozircha bizga ma'lum bo'lgan eng katta egizak tub sonlar 3029867 va 3029869 sonlaridir.

Berilgan son tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun bajariladigan hisoblashlarni ancha soddalashtirish imkonini beradigan usullardan birini ko'rsatamiz.

Har bir murakkab sonning hech bo'lmaganda bitta tub bo'luvchisi borligi ko'rsatilgan edi.

Berilgan murakkab A sonning birdan boshqa eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{A}$ dan oshmasligini isbotlaymiz.

Haqiqatan A sonning eng kichik tub bo'luvchisi q bo'lsin.

$$A=q \cdot A_1, \text{ bunda } A_1 \geq q$$

Bundan

$AA_1 \geq q^2 A_1$ ga ega bo'lamiz. Tengsizlikning ikkala tomonini A_1 ga qisqartirib $A \geq q^2$ yoki $q \leq \sqrt{A}$ ni hosil qilamiz.

A sonning tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash uchun A ni $\sqrt{A}$ dan kichik bo'lgan tub sonlarga bo'lish shart. Agar A son $\sqrt{A}$ dan kichik bo'lgan birorta tub songa bo'linmasa, bu holda A tub son bo'ladi.

Misol: 919 sonni tub yoki murakkab son ekanligini aniqlash kerak bo'lsin.

$\sqrt{919}$ dan kichik bo'lgan barcha tub sonlar 2;3;5;7;11;13;17;19;23;29
919 sonini bu sonlarning har biriga bo'lib tekshiramiz. 919 soni bu tub sonlarning hech biriga bo'linmaganligi sababli 919 soni tub son bo'ladi.

Mavzu: Sonlarning EKUB va EKUK i xossalari.

Muammoli savollar:

1. Ikki sonning eng katta umumiy bo'luvchisi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki sonning eng katta umumiy bo'luvchisini topish usullaridan qaysilari ko'proq qo'llaniladi?
3. Ikki sonning eng katta umumiy bo'luvchisining qanday xossalarini bilasiz?
4. Ikki sonning eng kichik umumiy bo'linuvchisi deb nimaga aytiladi?
5. EKUKning qanday xossalarini bilasiz?

Reja:

1. Ikki sonning umumiy bo'luvchisi.
2. Yevklid algoritmi.
3. EKUB xossalari.
4. Sonning umumiy bo'linuvchisi(karralisi) va xossalari.

Tayanch iboralar:

Bo'luvchi, umumiy bo'luvchi, eng katta umumiy bo'luvchi(EKUB), bo'linuvchi(karrali), umumiy bo'linuvchi, eng kichik umumiy bo'linuvchi(EKUK), o'zaro tub sonlar.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Н.Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: «Просвещение»,1977.
2. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т. «Ы=итувчи», 1991.
3. И.К.Андронов. Арифметика. М.: Учпедгиз, 1962.
4. К.Муцхаммедов. Элементар математикадан ыпланма. Т.: «Ы=итувчи», 1972
5. Т.Тылаганов. Элементар математика. Т.: «Ы=итувчи», 1999.

6. Ўрта мактаб «Математика» дарсликлари.

a – natural son bo'lsin; a bo'lganligidan 1 va a sonlari a sonining bo'luvchilaridir. Agar $a > 1$ bo'lsa, a soni 1 va a dan boshqa bo'luvchilarga ega bo'lgan bo'lishi mumkin, masalan,

30 soni shunday bo'luvchilarga ega:

1, 2, 3, 5, 6, 15, 30. .

a soni a dan katta bo'lgan bo'luvchiga ega bo'lishi mumkin bo'lmaganidan, bu sonning barcha bo'luvchilari 1 va a sonlari orasida bo'ladi va demak, a soni bo'luvchilarining soni cheklidir.

Ikki natural son a va b ni olamiz. Bular umumiy bo'luvchi 1 ga ega; a va b sonlarning birdan boshqa umumiy bo'luvchilari bo'lishi mumkin. a va b sonlarning bo'luvchilari soni chekli bo'lganidan ularning umumiy bo'luvchilarining soni ham cheklidir. Demak, agar bu umumiy bo'luvchilar bir nechta bo'lsa, ularning orasida eng kattasi bor va shu bilan birga bittadir.

Ta'rif. Ikki sonning eng katta umumiy bo'luvchisi deb berilgan sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kattasiga aytiladi. Ikki natural sonning eng katta umumiy bo'luvchi-si mavjud ekanini yuqorida ko'rsatdik. A va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bunday belgilanadi: (a, b) .

$(a, b) = (b, a)$ ekani ravshan. Maktab praktikasida “eng katta umumiy bo'luvchi” o'rniga qisqacha EKUB deb yozadilar.

Ta'rif. Eng katta umumiy bo'luvchisi 1 ga teng bo'lgan ikki sonni o'zaro tub sonlar deyiladi. Masalan, 10 va 21 ikkita o'zaro tub sonlardir, chunki $(10, 21) = 1$.

Teorema. Agar a b ga bo'linsa, a va b ning umumiy bo'luvchilari b ning bo'luvchilari bilan bir xil bo'ladi, xususiyl holda $(a, b) = b$.

Isbot. Teoremaning shartiga asosan, shunday natural son q mavjudki,

$a = bq$ t soni b sonining bo'luvchisi bo'lsin; $b : t$ bo'lganidan, $bq : t$ ya'ni $a : t$

Demak, b sonining har qanday bo'luvchisi a va b sonlarning umumiy bo'luvchisidir. Aksincha, a va b sonlarning umumiy bo'luvchisi xuddi shuningdek, b sonining bo'luvchisidir; b ning eng katta bo'luvchisi b ning o'zi bo'ladi, demak, $(a, b) = b$

Yevklid algoritmi

Ikki a va b son berilgan bo'lsin; $a > b$ deb faraz etamiz. Berilgan sonlarning EKUB ini topish talab etiladi. Bu sonlarning EKUB ini topish Yevklid algoritmi (algoritmi) deb ataluvchi hisoblash protsessi bilan bog'liq.

Dastlab ba'zi teoremlarni isbotlaymiz.

1-teorema. Agar berilgan a va b sonlarning $(a > b)$ biri ikkinchisiga bo'linmasa, bu sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi ularning kichigi bilan a ni b ga bo'lishdan qolgan qoldiqning eng katta umumiy bo'luvchisiga teng.

Isbot. $a = bq_1 + r_1$ bo'lsin; bunda $r_1 < b$. Ilgari isbot qilinganlarga asosan a va b sonlarning har qanday bo'luvchilari qoldiq r_1 ning ham bo'luvchisidir va b , r

sonlarning har qanday bo'luvchilari a sonining ham bo'luvchisidir. a va b sonlarining EKUBi r_1 va b sonlarning ham EKUB i bo'lishini isbotlaymiz.

b va r_1 sonlarning EKUB i (a, b) ga qaraganda katta bo'lsin deylik. Ammo bu vaqtda a va b bunga bo'linadi, ya'ni (a, b) a va b sonlarning EKUB i bo'la olmaydi, bu shartga ziddir.

Demak, $(a; b) = (b, r_1)$.

Lemma. Agar ketma-ket birinchi (a) sonni ikkinchi (b) soniga, ikkinchi (b) sonni birinchi qoldiq (r_1) ga va hokazo bo'lib borsak:

$$a = bq_1 + r_1 \quad \dots\dots\dots$$

$$b = r_1q_2 + r_1 \quad r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad r_k = r_{k+1}q_{k+2} + r_{k+2}$$

bu vaqtda $r_1, r_2, \dots, r_{k+1}, r_{k+2}$

qoldiqlar	qatori	kamayuvchi	qatordir,
Isbot.			

$$R_1 < b \quad r_1 < b$$

$$r_2 < r_1 \quad r_2 < r_1 < b$$

$$r_3 < r_2 \quad r_3 < r_2 < r_1 < b$$

..... demak,

$$r_{k+2} < r_{k+1} \quad r_{k+2} < r_{k+1} < \dots < r_1 < b$$

Izoh. Barcha qoldiqlar $r_{k+2} < \dots < r_1 < b$ bo'lganda, butun sonlardan iborat bo'lgani sababli kamayadi va bularning barchasi b dan kichikdir, shunga ko'ra bular cheksiz kamaya olmaydi, chunki b dan kichik bo'lgan natural sonlar chekli sonidir. Demak, bu protsess chekli protsess bo'lib, biror

$$n + 1 \text{ da } r_{n+1} = 0.$$

2- teorema. Agar ikkita a va b ($a > b$) teng bo'lmagan son berilgan bo'lsa, shu bilan birga a soni b soniga bo'linmasa, bu holda bu sonlarning EKUB i ketma-ket birinchi sonni ikkinchi songa, ikkinchi sonni birinchi qoldiqqa, birinchi qoldiqni ikkinchi qoldiqqa va hakazo bo'lishdan hosil bo'lgan nolga teng bo'lmagan oxirgi qoldiqqa tengdir, ya'ni agar

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

.....

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

bo'lsa, bunda r_n oxirgi qoldiq, bu vaqtda

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \dots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Isbot. r_{n-2} soni r_n ga bo'linadi, chunki r_{n-1} soni r_n ga bo'linadi; r_{n-3} soni r_n ga bo'linadi va hokazo.

Demak, r_n soni a va b sonlarning umumiy bo'luvchisidir, r_n soni a va b sonlarning EKUB i ekanligini isbotlash oson. $(a, b) = d$ va $d > r_n$ bo'lsin deylik. Bu vaqtda 1-teoremaga asosan $r_1, r_2, \dots, r_n$ d ga bo'linadi. Demak, r_n qoldiq d ga bo'linadi. Ya'ni $r_n > d$, lekin bu holda d son a va b sonlarning EKUB i bo'la olmaydi, bu esa shartga ziddir.

Misol. 816 va 323 sonlarning EKUBini topish talab etilsin. Bu erda Yevklid algoritmi EKUB ni topish uchun xizmat qiladi. Odatda EKUB ni topish vaqtida hisoblashlarni bunday joylashtiriladi:

$$\begin{array}{r} 816 \overline{) 323} \\ \underline{646} 2 \\ 323 \overline{) 170} \\ \underline{170} 1 \\ 170 \overline{) 153} \\ \underline{153} 1 \\ 153 \overline{) 17} \\ \underline{153} 9 \\ 0 \end{array}$$

r_i qoldiq 17 dir. Demak, $(816, 323) = 17$,

EKUB xossalari

1- teorema, a va b sonlarni ularning EKUB siga bo'lishdan hosil bo'lgan bo'linmalar o'zaro tub sonlar, ya'ni $\frac{a}{(a,b)}$ va $\frac{b}{(a,b)}$

sonlar o'zaro tub sonlardir.

Isbot. $(a, b) = d$ bo'lsin; bu vaqtda $a = du$; $b = dv$. u va v sonlar o'zaro tub sonlar ekanligini, ya'ni $(u, v) = 1$ ni isbotlash talab etiladi.

Teskarisini faraz qilamiz. $(u, v) = d' > 1$ bo'lsin. Demak, ikkita shunday u' va v' sonlar mavjudki, $u = d'u'$; $v = d'v'$

bo'ladi; u vaqtda $a = dd'u'$, $b = dd'v'$

Bundan dd' son a va b sonlarning umumiy bo'luvchisi ekanini kelib chiqadi. Ammo $dd' > d$, bunda d berilgan sonlarning EKUBi dir. Biz, berilgan sonlar o'zlarining EKUBidan katta bo'lgan umumiy bo'luvchisini topdik, buning bo'lishi mumkin emas. Demak, $d' > 1$ degan farazimiz noto'g'ri.

2- teorema, a va b sonlarning har qanday umumiy bo'luvchisi ularning EKUBlarining ham bo'luvchisidir.

Isbot. Berilgan sonlarning umumiy bo'luvchilarini d orqali belgilaymiz. Yevklid aloritmiga binoan:

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$$

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi, agar a va b lar δ ga bo'linsa, r_1 ham δ ga bo'linadi, agar b va r_1 lar δ ga bo'linsa, bu holda r_2 ham δ ga bo'linadi va hokazo; agar r_{n-1} va r_{n-2} lar δ ga bo'linsa, bu holda r_n ham δ ga bo'linadi. Ammo r_n qoldiq berilgan a va b sonlarning EKUBidir,

3- teorema. Agar $a = ud$ va $b = vd$, shu bilan birga u va v sonlarning EKUBi 1 ga teng bo'lsa, bu holda: $(a, b) = d$

bo'ladi, ya'ni agar a va b sonlarni d ga bo'lishdan hosil bo'lgan bo'linmalar o'zaro tub sonlar bo'lsa, bu vaqtda d son a va b sonlarning EKUBidir.

Isbot. Teskarisini faraz etamiz, a va b sonlar boshka d' EKUBga ega, ya'ni $(a, b) = d'$, shu bilan birga $d' > d$ bo'lsin. Bu vaqtda $a = u'd'$; $b = v'd'$ bo'ladi.

D son a va sonlarning EKUBi bo'lgani sababli $d' = dk$ bunda $k > 1$. Demak, $a = u'kd$ $b = v'kd$

Ammo $a = ud$ va $b = vd$, demak, $ud = u'kd$ $vd = v'kd$ bundan $u = u'k$, $v = v'k$ ammo bu holda u va v lar k umumiy bo'luvchiga ega, shu bilan birga $k > 1$, lekin bu u va v o'zaro tub sonlar degan shartga qarama-qarshidir. Demak, $d = d'$.

4- teorema. Agar berilgan sonlardan har birini qandaydir songa bo'lsak, bu vaqtda bu sonlarning EKUBi ham o'sha songa bo'linadi, ya'ni agar

$(a, b) = d$, $a: \delta$ va $b: \delta$ d bo'lsa, bu holda:

$$\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{d}{\delta}$$

Isbot. $(a, b) = d$ bo'lsin. Bu holda: $a = ud$; $b = vd$ bo'ladi. U va v sonlar o'zaro tub sonlar bo'lganidan bularning EKUBi 1 ga teng bo'ladi. 2- teoremaga asosan berilgan sonlarning har qanday bo'luvchisi bular EKUBining bo'luvchisi bo'ladi: $d = k\delta$. Demak,

$$a = ud = uk\delta \quad b = vd = vk\delta$$

$$\text{Bundan: } \frac{a}{\delta} = uk; \frac{b}{\delta} = vk$$

ya'ni k soni $\frac{a}{\delta}$ va $\frac{b}{\delta}$ sonlarning eng katta umumiy bo'luvchilaridir, chunki u

va v sonlar o'zaro tub sonlardir. Shunday qilib, $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = k$

Ammo $k = \frac{d}{\delta}$, demak, $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = \frac{d}{\delta}$ Shuni isbotlash talab etilgan edi.

5-teorema. Agar berilgan sonlarni o'zgarmas songa ko'paytirsak bu vaqtda bularning EKUB lari ham shu songa ko'payadi, ya'ni agar $(a, b) = d$ bo'lsa, $(am, bm) = dm$ bo'ladi.

Isbot. $(a, b) = d$ bo'lsin.

$(am, bm) = d'$ deb belgilaymiz. Oldingi teoremalarga asosan: $\left(\frac{am}{m}, \frac{bm}{m}\right) = \frac{d'}{m}$

yoki $(a, b) = \frac{d'}{m}$

Ammo $(a, b) = d$, demak, $d = \frac{d'}{m}$, ya'ni $d' = md$.

Bundan $(am, bm) = dm = m(a, b)$, shuni isbotlash talab etilgan edi.

6- teorema. Agar ab ko'paytma c ga bo'linsa hamda a va c sonlar o'zaro tub sonlar, ya'ni $(a, c) = 1$, bo'lsa, bu holda b soni c ga bo'linadi.

7- teorema. Agar ikki son uchinchi son bilan o'zaro tub bo'lsa, bu holda ularning ko'paygmasi ham o'sha uchinchi son bilan o'zaro tub son bo'ladi, ya'ni agar $(a, c) = 1$ va $(b, c) = 1$ bo'lsa, bu vaqtda $(ab, c) = 1$ bo'ladi.

Isbot. $(ab, c) = d$ bo'lsin. Bu vaqtda ab ko'paytma d ga bo'linishi kerak; shuningdek c ham d ga bo'linishi kerak, Demak, ac ham d ga bo'linishi kerak. Shartga asosan $(b, c) = 1$, u vaqtda $(ab, ac) = a$. Lekin ab ko'paytma d ga bo'linadi, ac ham d ga bo'linadi. Demak, ularning EKUBi (ab, ac) ham d ga bo'linishi kerak, ya'ni $a : d$ bo'ladi. $C:d$ dan 2-teoremaga asosan (a, c) ham d ga bo'linadi. Lekin, $(a, c) = 1$, demak, bir so-ni d ga bo'linishi kerak, bu esa faqat $d=1$ bo'lishi mumkin. Shunday qilib, $(ab, c) = 1$. Shuni isbotlash kerak edi.

8- teorema. Natural sonlarning ikkita

$a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$

to'plami berilgan bo'lib, shu bilan birga $(a_k, b_n) = 1$, ya'ni a_k ning har bir soni b_1 ning har bir soni bilan o'zaro tub sonlar bo'lsin, bu vaqtda $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$ bo'ladi.

9-teorema. Agar c son a va b sonlarga bo'linsa, shu bilan birga a va b o'zaro tub sonlar bo'lsa $[(a, b) = 1]$, bu vaqtda c son ab ga bo'linadi.

Sonlarning umumiy bo'linuvchisi(karralisi)

Ikki natural son m va n ni olamiz. m va n ga bo'linadigan istalgan son, ya'ni m va n ga karrali bo'lgan son shu sonlarning umumiy bo'linuvchisi deb ataladi.

Ravshanki, m va n sonlarning umumiy bo'linuvchilari cheksiz ko'pdir. Masalan, mn soni m va n sonlarning umumiy bo'linuvchisidir; demak, mn ga bo'linadigan istalgan son m va n ning ham umumiy bo'linuvchisi bo'ladi.

Ta'rif: ikki sonning eng kichik umumiy bo'linuvchisi deb, berilgan sonlarning har biriga bo'linadigan eng kichik songa aytiladi. M va n sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisi $[m, n]$ simvol bilan belgilanadi.

Misol: $[6, 4] = 12$

Teorema. Ikki sonning umumiy bo'linuvchisi shu sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisiga bo'linadi.

Isbot s son m va n sonlarning qandaydir umumiy bo'linuvchisi, bo'lsin, t – bu sonlarning eng kichik umumiy, bo'linuvchisi bo'lsin.

S son t ga bo'linmaydi deb faraz etamiz. Bu vaqtda s ni t ga bo'lganda q bo'linma va r qoldiq hosil bo'ladi. $S=qt+r$, $r<t$. s mga bo'linadi va t mga bo'linadi, bu holda r ham m ga bo'linadi, ya'ni $r:m$, ekanini ham xuddi shunday aniqlaymiz. Demak, r son m va n sonlarning bo'linuvchisidir, chunki bu son berilgan sonlarning har biriga bo'linadi. Ammo $r<t$, demak, biz berilgan sonlarning eng kichik bo'lgan sonni topdik, bu berilgan sonlarga bo'linadi, buning bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, s son t ga bo'linmaydi deb, qilgan farazimiz noto'g'ri. Demak $s:t$ shuni isbotlash talab etilgan edi.

Eng kichik umumiy bo'linuvchini topish

1-teorema, a va b sonlarning har qanday umumiy bo'linuvchilari $\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ ga bo'linadi.

Isbot. $(a, b) = d$ deb belgilaymiz. U vaqtda: $a = ud$; $b = vd$, bunda $(u, v) = 1$. M soni a va b sonlarning umumiy bo'linuvchisi bo'lsin; demak, M son a ga bo'linishi kerak, ya'ni $M = as$. Ammo $a = ud$, shuning uchun $M = uds$. Lekin M son $b = av$ ga ham bo'linadi.

Demak, $\frac{M}{b} = \frac{uds}{b} = \frac{uds}{dv} = \frac{us}{v}$.

$\frac{us}{v}$ natural son, $(uv) = 1$ bo'lganidan, s son v ga bo'linishi kerak, ya'ni $s = vk$, bunda k -natural son. $M = as$ tenglikdagi a va s o'rniga ularning qiymatlarini qo'yamiz. Bu holda $M = udvk$ bo'ladi.

Ammo $dv = b$ va $u = \frac{a}{d} = \frac{a}{(a,b)}$

demak, $M = \frac{a \cdot b}{(a,b)} \cdot k$

k -butun son bo'lganidan, M soni $\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ ga bo'linadi, shuni isbotlash talab etilgan edi.

Natija. A va b sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisi $\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ ga eng.

Haqiqatan, o'tgan teoreмага asosan a va b ga umumiy bo'linuvchi bo'lgan har qanday son $\frac{a \cdot b}{(a,b)} \cdot k$

ko'rinishga ega, bunda k ko'paytuvchi qiymatini ixtiyoriy tanlash mumkin. Ravshanki, $k=1$ bo'lganda umumiy bo'linuvchi eng kichik bo'ladi.

Demak, $[a,b] = \frac{a \cdot b}{(a,b)}$.

Natija. Ikkita o'zaro tub sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisi bu sonlarning ko'paytmasiga teng.

Haqiqatdan, $(a, b) = 1$ bo'lganda $[a, b] = \frac{a \bullet b}{(a, b)} = ab$ bo'ladi. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

2- teorema. Agar berilgan sonlarni qandaydir songa bo'lsak, u holda ularning eng kichik umumiy karralisi o'sha songa bo'linadi.

Isbot. Oldingi teoremaga asosan: $\left[\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta} \right] = \frac{\frac{a}{\delta} \bullet \frac{b}{\delta}}{\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta} \right)} (\delta \neq 0)$

Ammo $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta} \right) = \frac{a, b}{\delta}$

Demak, $\left[\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta} \right] = \frac{\frac{a}{\delta} \bullet \frac{b}{\delta}}{\frac{(a, b)}{\delta}} = \frac{a \bullet b}{(a, b)} = \frac{a \bullet b}{\delta} = \frac{[a, b]}{\delta}$

Shuni isbotlash talab etilgan edi.

3- teorema. Agar berilgan sonlarni qandaydir uchinchi songa ko'paytirsak, bu holda bu sonlarning eng kichik umu-miy bo'linuvchisi ham shu songa ko'paytiriladi.

Isbot: 1-teoremaga asosan:

$[am, bm] = \frac{am \bullet bm}{(am, bm)}$ bunda $m \neq 0$. Ammo $(am, bm) = (a, b)m$,

demak, $[am, bm] = \frac{am \bullet bm}{(am, bm)} = \frac{am \bullet bm}{(a, b) \bullet m} = \frac{ab}{(a, b)} \bullet m = [a, b] \bullet m$.

Biz yuqorida ikki sonning eng katta umumiy bo'lubchisi va eng kichik umumiy karralisini topishni bayon etdik. 3 va undan ortiq sonlarning eng katta umumiy bo'lubchisi va eng kichik umumiy karralisini topish ikki sonning EKUB va EKUKini topishga keladi. Buni o'rganishni talabalarning o'zlariga havola etiladi.

MUNDARIJA:

1. Mavzularning taxminiy taqsimoti	3
2. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida tarixiy ma'lumot. Z_0 ni tuzishdagi har xil yondoshishlar	4
3. Matematikada aksiomatik metod. Piano aksiomalari.....	7
4. Nomanfiy butun sonlar to'plamining tartiblanganligi	13
5. Nomanfiy butun sonlar yigindisi va ko'paytmasi.....	17
6. Manfiy bo'lmagan butun sonlarni ayirish va uning xossalari.....	20
7. Manfiy bo'lmagan butun sonlarni natural sonlarga bo'lish.	23
8. Natural son va nol tushunchasining nazariy to'plam ma'nosi....	27
9. Qo'shish, o'shish qonunlari, "teng", kichik, "katta" munosabatlari.....	30
10. Ayirish. Ayirish xossalari. (To'plamlar nazariyasi nuqtai nazarida).....	36
11. Ko'paytirish. Ko'paytirish xossalari.....	42
12. Bo'lish. "...marta katta", "...marta kichik" munosabatlar.....	45
13. Qoldiqli bo'lish. Z_0 ning asosiy xossalari.....	52
14. Natural sonning ma'nosi va sonlar-kattaliklarni o'lchash natijalari ustida amallar ma'nosi.....	54
15. Sanoq sistemalari.....	61
16. O'nli va turli sanoq sistemalarida ko'p xonali sonlar ustida amallar.....	68
17. Bo'linish munosabati va uning xossalari.....	78
18. Bo'linish alomatlari.....	80

19. Tub va murakkab sonlar.....	85
20. Sonlarning EKUB va EKUK i xossalari.....	90
21. Foydalanilgan adabiyotlar.....	98
22. Mundarija.....	99

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Н.Я. Виленкин, А.М.Пышкало. Математика. М.: «Просвещения»,1977.
2. Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. Бошланғич математика курси асослари. Т. «Ўқитувчи», 1991.
3. И.К.Андронов. Арифметика. М.: Учпедгиз, 1962.
4. К.Мушаммедов. Элементар математикадан тўйланма. Т.: «Ўқитувчи», 1972
5. Т.Тылаганов. Элементар математика. Т.: «Ўқитувчи», 1999.
6. Ўрта мактаб «Математика» дарсликлари.
7. А.А.Столяр, Л.П.Лельчук. Математика. Минск, 1975.
8. И.И.Архипов и др. Математика . Минск.1976.
9. М.К.Гребенча, С.Е.Ляпин. Арифметика. Т.1957.
10. Л.П.Стойлова, Н.Я.Виленкин. Целые неотрицательные числа. МГЗПИ. 1986.
11. Л.П.Чекмарёв, Б.А.Туленов. Арифметика . Т.1967.
12. А.М.Пышкало.1-IV синфларда геометрия. Т.1976.
13. А.Худойбергганов. Математика . Т.1980.
14. Н.Н.Лаврова, Л.П.Стойлова.Задачник практикум по математике.МГЗПИ.1988.
15. В.А.Игнатъев, Н.И.Игнатъев, Я.А.Шар. Сборник задач и упражнений по арифметики. М. «Просвещение». 1966.
16. Н.Я.Виленкин и др. Задачник –практикум по математике. М. «Просвещение». 1978.
17. Р.Иброшимов. Матемакадан масалалар туплами. Т.1996.

