

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika –matematika fakulteti

5130100- “Matematika” kafedrası

ABDULLAYEV SARVAR

**“Analitik funksiya haqiqiy va mavhum qisimlarning limitik qiymatlari
uchun Gilbert formulalari” mavzusida**

5130100-“Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko’rildi va himoya qilishga
ruxsat berildi”**

**Ilmiy rahbar _____
kat.o`q.H.Turdiyev
“ _____ ” _____2019 y.**

**Kafedra mudiri
_____ dots.N.H.Mamatova
“ _____ ” _____2019 y.**

**Taqrizchi _____ PhD Z.Boltayev
“ _____ ” _____2019 y.**

**“Himoya qilishga ruxsat berildi”
Fakultet dekani _____ M.I.Daminov
“ _____ ” _____2019 y.**

Buxoro-2019

MUNDARIJA

Kirish	3
I-bob. Asosiy tushunchalar	7
1.1-§ Analitik funksiyalar va ularning tasnifi	7
1.2-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integralli	27
1.3-§ Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralliga doir misollar	37
II-bob. Gilbert formulalari	42
2.1-§ Koshi tipidagi integrallar	42
2.2-§. Haqiqiy o'q bo'yicha olingan integral uchun Soxotskiy formulasi	48
2.3-§ Analitik funksiya haqiqiy va mavhum qismlarining limitik qiymatlari uchun Gilbert formulalari	56
Xotima	59
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati	60

Kirish

Ta'lim va ma'rifat tizimini takomillashtirish, mamlakatimiz kelajagi bo'lgan yoshlarni zamonaviy bilim olishga yo'naltirish, barkamol shaxsini tarbiyalash bilan bog'liq ekanini biz yaxshi anglaymiz.

SH.M.Mirziyoyev.

Mamlakatimizda istiqlolning dastlabki yillaridan boshlab ta'lim-tarbiya tizimini tubdan isloh qilishga alohida e'tibor qaratilib, farzandlarimizning jahon andozalari darajasida zamonaviy bilim va kasb-hunarlarni egallashi, jismonan va ma'nan yetuk insonlar bo'lib ulg'ayishi, ularning qobiliyat va iste'dodini, intellektual salohiyatini yuzaga chiqarish, yosh avlod qalbida Vatanga sadoqat va fidoyilik tuyg'ularini yuksaltirish borasida ulkan ishlar amalga oshirilmoqda.

Shavkat Mirziyoyevning O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutqida **“Biz yoshlarga doir davlat siyosatini hech og'ishmasdan, - qat'iyat bilan davom ettiramiz. Nafaqat davom ettiramiz, balki bu siyosatni eng ustuvor vazifamiz sifatida bugun zamon talab qilayotgan yuksak darajaga ko'taramiz. Yoshlarimizning mustaqil fikrlaydigan, yuksak intellektual va ma'naviy salohiyatga ega bo'lib, dunyo miqyosida o'z tengdoshlariga hech qaysi sohada bo'sh kelmaydigan insonlar bo'lib kamol topishi, baxtli bo'lishi uchun davlatimiz va jamiyatimizning bor kuch va imkoniyatlarini safarbar etamiz”** deb ta'kidlagan edi.

Prezidentimizning 2017-yil 7-fevraldagi "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi farmonida ijtimoiy

soha, xususan, ta'lim va ilm-fan sohalarini takomillashtirish borasida qator vazifalar 2017-2021-yillarda oliy ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish dasturini ishlab chiqish, o'quv dasturlarini yanada zamonaviylashtirish, pullik xizmatlar ko'rsatish va moliyalashtirishning qo'shimcha manbalarini izlashda oliy o'quv yurtlarining vakolatlarini kengaytirish yo'li bilan ularning mustaqilligi bosqichma-boosqich rivojlantirilib boriladi. Keyingi bir yilda O'zbekiston Respublikasi Prezidenti va Vazirlar Mahkamasining yetmishga yaqin farmon, qaror va farmoyishi qabul qilindi. Bu tom ma'noda ta'lim tizimidagi o'zgarish va yangilanishlar jarayonini boshlab berdi. Umumta'lim maktablariga joriy yilda 10-sinfga o'quvchilar qabul qilish qayta yo'lga qo'yildi. Bu akademik litsey va kasb-hunar kollejlariga qabul jarayoni bilan barobar olib borildi. Bunda ota-onalar va o'quvchilarning xohish-istaklari inobatga olindi. Prezidentimiz sohada amalga oshirilayotgan ishlarni yanada takomillashtirish bo'yicha ota-onalar va o'quvchilarning fikrlarini inobatga olish, ular bilan «ochiq eshiklar» kuni kabi tadbirlar tashkil qilib, turli uchrashuvlar o'tkazish zarurligini alohida ta'kidladilar. Harakatlar strategiyasi – ta'lim va fan sohasi islohotlarining muhim omili.

Harakatlar strategiyasida ijtimoiy soha, xususan, ta'lim va ilm-fan sohalarini rivojlantirish, ta'lim tizimining uzluksizligini yanada takomillashtirish maqsadida sifatli ta'lim xizmatlari imkoniyatlarini oshirish, mehnat bozorining zamonaviy ehtiyojlariga mos yuqori malakali kadrlar tayyorlash siyosatini davom ettirish eng muhim vazifalardan etib belgilangan. Hujjatda ta'lim muassasalarining moddiy-texnika bazasini mustahkamlash, yangi ta'lim muassasalarini qurish, ta'mirlash va kapital ta'mirlash barobarida, zamonaviy o'quv va laboratoriya jihozlari, kompyuter texnikasi va o'quv-metodik qo'llanmalar bilan ta'minlash nazarda tutilgan.

E'tiborli jihat, ushbu hujjat o'z ichiga ta'lim tizimini maktabgacha ta'lim muassasidan to oliy ta'lim muassasasigacha takomillashtirish, sifat va samaradorligini oshirish bo'yicha qator dolzarb maqsad-vazifalarni qamrab olgan.

Bundan tashqari, Harakatlar strategiyasiga asosan ishlab chiqiladigan ilm-fan sohasini yanada rivojlantirishning kompleks chora-tadbirlar dasturiga muvofiq, ilmiy-tadqiqot muassasalarining innovatsion infratuzilmasini rivojlantirish, istiqbolli sohalarda kichik innovatsion korxonalar, texnoparklarni tashkil etish hamda intellektual mulk ob'ektlariga bo'lgan huquqlarni buzganlik uchun javobgarlikni, shuningdek bu sohadagi davlat nazoratini kuchaytirish belgilangan. Biz ta'lim va tarbiya tizimining barcha bo'g'inlari faoliyatini bugungi zamon talablari asosida takomillashtirishni o'zimizning birinchi darajali vazifamiz deb bilamiz.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar kompleks analizning uzviy davomi bo'ib, bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi magistratura talabalari uchun ilmiy ishlarini davom ettirishiga zamin bo'ladi.

Ishning maqsadi va vazifasi. Bitiruv malakaviy ishi asosiy maqsadi bu Gilbert formulalarini keltirib chiqarishda kerak bo'ladigan kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali, Koshi tipidagi integrallarni o'rganish, va ushbu formulalar orqali analitik funksiya haqiqiy va mavhum qismlarining limitik qiymatlarini topish, va ushbu topilganlar orqali Gilbert formulalarini keltirib chiqarishni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiyligi. Bitiruv loyiha ishi referativ xarakterdagi ish bo'lib, bunda fundamental bilimlarga asoslanib Soxotiskiy va Koshi formulalarini o'rganish, ushbu formulalar orqali Gilbert formulalarini keltirib chiqarishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining tadqiqot usuli va uslubiyoti. Bitiruv loyiha ishining tadqiqot usuli va uslubiyoti, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, uning integrali, Koshi integrali, Soxotiskiy formulalaring biz o'rganayotgan Gilbert formulalariga bog'liqligi.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti va obykti. Mazkur malakaviy bitiruv ishi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, kompleks o'zgaruvchili funksiya

integrali, Soxotiskiy formulalari orqali analitik funksiyaning mavhum va haqiqiy qismlari limitik qiymatlari uchun Gilbert formulalarini keltirib chiqarish.

Olingan asosiy natijalar. Bitiruv loyiha ishining asosiy natijalari Koshi integrali orqali analitik funksiyaning limitik qiymatini topishda qo'llaniladigan Soxotiskiy formulalarini keltirib chiqarish va ushbu formulalar orqali Gilbert formulalarini keltirib chiqarishdan iborat.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Qo'llanish sohasi. Xulosa va takliflar. Bitiruv loyiha ishi ilmiy yangilik bo'lmasada, undan matematikaning zamonaviy bo'limlari bo'lgan matematik fizika tenglamalari, funksional analiz, kompleks analiz va boshqa sohalarda keng qo'llaniladi. Ushbu sohalarning muhim asoslari bo'lgan analitik funksiyalar, ularning limitik qiymatlarini topishda keng qo'llaniladi. Bu ish asosan magistratura talabalari uchun ilmiy ishlarini davom ettirishiga zamin bo'ladi deb o'ylayman.

Bitiruv malakaviy ishining tuzilishi va hajmi. Mazkur Bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, 6 ta reja, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan bo'lib, ishning hajmi sahifadan iborat. Bunda 15 ta teorema, 1 ta lemma, va 17 ta adabiyotlardan foydalanilgan.

I-bob. Asosiy tushunchalar

1.1-§ Analitik funksiyalar va ularning tasnifi

$W = f(z)$ funksiya E to'plamda ($E \subset C$) berilgan bo'lsin. Bu E to'plamdan z_0 nuqtani olib unga shunday Δz ortirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in E$ bo'lsin. Natijada $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ ortirmaga ega bo'ladi.

1.1.1-ta'rif. Agar Δz ni har qanday yo'l (qonun) bilan nolga yaqinlashtirganda ham $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbat faqat birgina aniq limitga intilsa o'sha limit $f'(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.1.1)$$

Mana shu hosila qisqacha w' , $f'(z_0)$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$ ko'rinishda belgilanadi.

Endi quyidagi

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

Tenglamalarga asosan (1.1.1) ni ushbu ko'rinishda yozish ham mumkin.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \quad (1.1.2)$$

1.1.2-ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, uni bu nuqtada differensiallanuvchi (yoki monoton) funksiya deyiladi.

Agar funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, (1.1.1) limit mavjud bo'lib, u

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ning qanday qonun bilan nolga intilishiga mutlaqo bog'liq emasligi ta'rifdan kelib chiqadi.

1.1.3-tarif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqtada, $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Aytaylik $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Unda, ravshanki,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha(z_0, \Delta z)$ ham nolga intiladi: $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$. natijada quydagicha tasdiqqa kelamiz.

1.1.1-teorema. $f(z_0)$ funksiyaning $z_0 \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun orttirmasi $\Delta f(z_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(z_0) = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

ko'rinishda ifodalanishi zarur va yetarli. Bunda A miqdor Δz hamda $\alpha(z_0, \Delta z)$ larga boq'liq bo'lmagan miqdordir. Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi kabi ekanligini ko'rdik. Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Bazi qoidalarga kelamiz:

1) Agar $f(z) = C - const, k = const$ bo'lsa, $f'(z) = 0$ bo'ladi,

$$2) (k \cdot f(z))' = k \cdot f'(z), k = \text{const}$$

$$3) (f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$

$$4) (f(z) \cdot g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$5) \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0$$

6) agar $w = f(z), F = \varphi(w)$ bo'lib, $F = \varphi(f(z))$ bo'lsa, u holda

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(w) \cdot f'(z)$$

bo'ladi. Garchi kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo'lsa ham, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilaga ega bo'lsin deyilishi (binobarin, diffrensiallanuvchi bo'lsin deyilishi) talabi ancha og'ir talab hisoblanadi.

Faraz qilaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya biror D sohada ($D \subset C$) berilgan bo'lib, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ bo'lsin.

Biz $z_0 + \Delta z$ nuqtani, Ox o'qqa parallel bo'lgan yo'l bilan z_0 nuqtaga

yaqinlashtirishimiz ham mumkin. Uning uchun $\Delta z = \Delta x$ ya'ni $\Delta y = 0$ deb olamiz, u holda

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1.3)$$

Shuningdek, agar $\Delta x = 0$ ya'ni $\Delta z = i\Delta y$ deb olsak, Δz ning nolga intilishi uchun $z_0 + \Delta z$ nuqta z_0 nuqtaga Oy ga parallel yo'l bilan yaqinlashishi kerak. U holda (1.1.3) tenglikdan quyidagi kelib chiqadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1.4)$$

So'nggi (1.1.3), (1.1.4) larning chap tomonlari, ta'rifga ko'ra teng bo'lgani uchun o'ng tomonlari ham o'zaro teng bo'ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1.5)$$

Mana shu ikala tenglik Dalamber-Eyler shartlari deb ataladi, ularni ba'zan Koshi Riman shartlari ham deyiladi.

Shunday qilib, agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bundan (1.1.5) zaruriy shartlari kelib chiqar ekan. Boshqacha aytganda biz quyidagini isbot qildik.

Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (x_0, y_0) nuqtada $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ hususiy hosilalar mavjud bo'ladi.

Yetarli shartlar. Agar biror ikki argumentli $F(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada hususiy hosilalarga ega bo'lsa ham, undan funksiyaning o'sha nuqtada to'la differensialga ega degan natija kelib chiqmaydi.

Shuning uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarga qo'shimcha talab qo'yamiz, ya'ni ular (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi, deb faraz qilamiz.

Bunday funksiyalar uchun (1.1.5) Dalamber-Eyler shartlaridan $f'(z_0)$ hosilaning mavjudligi kelib chiqishini ko'rsatish mumkin. Boshqacha aytganda, bu holda hosilaning mavjud bo'lishi uchun (1.1.5) shartlar yetarli shartlardir.

Isbot. Berilgan ikki argumentli $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi deb faraz qilganimiz uchun ularning orttirmalarini quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 |\Delta z| \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2 |\Delta z| \end{cases} \quad (1.1.6)$$

bulardagi $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, α_1 va α_2 lar esa Δz nolga intilishi bilan nolga intiladilar, ya'ni cheksiz kichiklashuvchi miqdorlardir.

(1.1.6) ga asoslanib,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$$

Tenglikni yozish mumkin. Biz endi (1.1.5) tengliklar berilgan deb faraz qilganimiz uchun so'nggi tenglikdagi $\frac{\partial u}{\partial y}$ o'rniga (1.1.5) dagi $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ni, $\frac{\partial v}{\partial y}$ o'rniga $\frac{\partial u}{\partial x}$ ni qo'ysak,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni $i^2 = -1$ ekanidan foydalanib, quyidagi holga keltira olamiz:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}$$

Bundan esa, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ekanini eslasak,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\alpha_1 + i\alpha_2) \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

tenglik kelib chiqadi. Ma'lumki,

$$\left| \frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right| = \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} = 1$$

shu sababli Δz nolga intilganda:

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| = |\alpha_1 + i\alpha_2| \rightarrow 0$$

So'nggi tenglikning ma'nosi quyidagidan iboratdir:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Shunday qilib, biz ushbu teoremani isbot qildik.

1.1.2-torema. Biror G sohada aniqlangan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning shu sohaga tegishli, z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiylarning o'sha nuqtada differensiallanuvchi bo'lishlari, shuningdek

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar $w=f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanadigan bo'lsa uning orttirmasini

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon \Delta z \tag{1.1.8}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Mana shu (1.1.8) ning ikki tomonidan limit olsak,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0$$

ekanligini ko'ramiz. Demak $w=f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u funksiya z_0 nuqtada uzluksiz ham bo'lar ekan. Ammo buning aksi har doim to'g'ri bo'lavermaydi, ya'ni berilgan $w=f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'la turib, u o'sha nuqtada hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin.

1.1.1 - misol. $w = \bar{z} = x - iy$ bu funksiyaning tekislikdagi hamma nuqtalarda uzluksizligi bizga ma'lum.

Endi $u = x, v = -y$ lardan $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ hosil bo'lib,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Dalamber-Eyler shartlaridan biri buzildi, demak, funksiya biror nuqtada ham hosilaga ega emas.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $(f(z) = u(x, y) + iv(x, y))$ $z_0 = x_0 + iy_0 \in D (D \subset C)$ nuqtada R^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'lsin. Ushbu

$$du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$$

ifoda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi differensialli deyiladi va $df(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(z_0) = du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0).$$

ravshanki,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Shuni etiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Demak,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.1.9)$$

Quyidagi $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ o'zgaruvchilarni olaylik . Ravshanki,
 $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$. Bu tengliklardan

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}), \quad (1.1.10)$$

bo'lishini topamiz. (1.1.9) va (1.1.10) tengliklardan

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

ko'rinishida belgilansa unda $f(z)$ funksiya differensial uchun ushbu

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

tenglikga kelamiz.

Aytaylik, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar uchun biror nuqtada Koshi-Riman shartlari bajarilsin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

unda (1.1.11) tenglikka ko'ra shu nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Aksincha, $f(z)$ funksiya uchun biror nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ bo'lsin. Ravshanki, (1.1.11) tenglikka ko'ra shu nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bo'ladi, ya'ni Koshi-Riman shartlari bajariladi.

Demak, biror nuqtada Koshi-Riman shartlarining bajarilishi shu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

tenglikning o'rinli bo'lishiga ekvivalent ekan. Bu hol yuqorida keltirilgan

(1.1.2)-teoremani quyidagicha ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

1.1.3-teorema. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

1) $f(z)$ ning z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida (R^2 ma'noda) differensiallanuvchi bo'lishi va

2) shu nuqtada ushbu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ bo'lib, funksiyaning hosilasi

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z},$$

Differensiali esa

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0) dz$$

ko'rinishda bo'ladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar c- differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Ko'p hollarda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi shartlarini qutb koordinatalarida ifodalash lozim bo'ladi.

Ravshanki, qutb koordinatalarida

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$$

$$|z| = \rho, \arg z = \varphi \quad (0 < \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

bo'ladi.

Analitik funksiyalar.

1.1.4-ta'rif. Agar bir qiymatli $w=f(z)$ funksiya G sohaning barcha nuqtalarida differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lsa, u funksiya o'sha sohada analitik deyiladi.

1.1.5-ta'rif. Agar $w=f(z)$ funksiya z_0 nuqtada va uning biror atrofida ham differensiallanuvchi bo'lsa, u funksiya shu nuqtada analitik deyiladi.

Agar $w=f(z)$ funksiya faqat z_0 nuqtada hosila ega bo'lib, lekin uning atrofida hosilasi mavjud bo'lmasa, u holda funksiya z_0 nuqtada monogen bo'ladi. Demak, funksiyaning z_0 nuqtada monogen bo'lishidan uning shu nuqtada analitik bo'lishi kelib chiqmaydi.

1.1.6-ta'rif. Agar bir qiymatli $w=f(z)$ funksiya tekislikning qaysi nuqtalarida analitik bo'lsa o'sha nuqtalar funksiyaning to'g'ri (regulyar) nuqtalari deyiladi. Funksiya aniqlanish sohasining ba'zi nuqtalarida analitik bo'lmay qolsa, ana shu nuqtalar funksiyaning maxsus nuqtalari deb ataladi.

1.1.2-misol. $w = x^2 + y^2 + ixy^3$ ning analitik yoki analitik emasligi tekshirilsin.

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y^3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2$$

Bulardan ko'rinadiki, Dalamber-Eyler shartlarining bajarilishi uchun $x=0, y=0$ bo'lishi kerak. Demak, $(0,0)$ nuqtadagina differensialnuvchi, boshqa nuqtalarda hosilasi yo'q, ya'ni berilgan funksiya analitik emas.

1.1.3 - misol. $w = z^2$ funksiyaning analitik yoki analitik emasligi tekshirilsin.

Ko'rish osonki

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z$$

va demak, $w = z^2$ funksiya tekislikning hammasida analitik bo'ladi.

Tekislik yoki siferadagi sohalarda chiziqlarning gomotoplighi.

1.1.7-ta'rif. Agar biror G sohada joylashgan Γ_0 va Γ_1 chiziqlarning boshlang'ich nuqtalari o'zaro va oxirgi nuqtalari o'zaro ustma – ust tushgan bo'lib, ularni bir- biriga bog'lash va oxirgi nuqtalari qo'zg'atmaydigan (joyida qoldiradigan) va G sohaning tashqarisiga chiqarmaydigan uzluksiz o'zgartirishlar (defarmatsiyalar) yordamida o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda bu chiziqlar G sohada gomotop deyiladi. Gomotoplik tushunchasi biror G sohaning mahkamlangan (qayt qilingan) nuqtasidan o'tuvchi yopiq chiziqlar uchun ham

o'rinli. (mahkamlangan nuqtani chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtasi deb qarash mumkin).

1.1.8-ta'rif. Agar biror G sohada joylashgan va uning qayt qilingan nuqtalaridan o'tuvchi Γ chiziqni soha tashqarisiga chiqarmaydigan uzluksiz o'zgartirishlar (defarmatsiyalar) yordamida shu nuqtaga tortish mumkin bo'lsa, u holda Γ chiziq G sohada holga gomotop deyiladi.

1.1.9-ta'rif. Agar biror G sohada joylashgan Γ_0 va Γ_1 chiziklarni G soha tashqarisiga chiqarmaydigan uzluksiz o'zgartirishlar (defarmatsiyalar) yordamida bir-biriga o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda ular G sohada o'zaro erkin gomotop chiziqlar deyiladi.

Endi bu ta'riflarning qat'iy matematik ifodasini keltiramiz.

Faraz qilaylik, (1.1.7) - ta'rifdagi Γ_0 va Γ_1 chiziqlarning parametrik tenglamalari

$$z = \varphi_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{va} \quad z = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1.12)$$

bo'lsin.

1.1.10-ta'rif. Agar $t \in [0,1]$ va $s \in [0,1]$ parametrlarning uzluksiz $\phi(t,s)$ funksiyasi uchun

a) $\phi(0,s)$ va $\phi(1,s)$ qiymatlar s parametrga bog'liq bo'lsa;

b) $\phi(t,0) = \varphi_1(t), \phi(t,1) = \varphi_2(t), t \in [0,1]$ bo'lsa;

v) barcha $t \in [0,1]$ va $s \in [0,1]$ lar uchun $\phi(t,s)$ funksiyaning qiymatlari G sohada yotsa, u holda Γ_0 va Γ_1 chiziqlar G sohada gomotop deyiladi.

Haqiqatdan ham, agar Γ_s bilan parametrik tenglamasi $z = \phi(t,s), 0 \leq t \leq 1$, chiziqni belgilasak, u holda 1.1.10-ta'rifning a) qismi barcha Γ chiziqlarning boshlang'ich va oxirgi nuqtalarining mos ravishda bir xil ekanligini, b) qismi –s

parametrning 0 dan 1 gacha uzluksiz o'zgarishi natijasida Γ_s chiziq ham Γ_0 chiziqdan Γ_1 chiziqqacha uzluksiz o'zgarishini va nihoyat v) qismi – barcha Γ_s chiziqlarning G sohada joylashganligini anglatadi.

Ko'p qiymatli analitik funksiyalar

1.1.11-tarif. Agar $w = F(z)$ funksiya Γ chiziqda aniqlangan va shu chiziqning har bir α nuqtasi uchun uning biror atrofida regulyar $f_\alpha(z)$ funksiya mavjud bo'lib, α nuqtani o'zida saqllovchi Γ ning biror yoyida $w = F(z)$ funksiya bilan ustma-ust tushsa, u holda $w = F(z)$ funksiya Γ chiziqda analitik deyiladi.

Agar Γ chiziq o'zaro kesishish (tugun) nuqtalariga ega bo'sa, u holda Γ da analitik $w = F(z)$ funksiya shu nuqtalarda faqat tekislik nuqtalarining funksiyasi sifatida bir qiymatli funksiya bo'lishi shart emas. Chunki tugun nuqtalar chiziqning turli nuqtalari bo'lib, ularning tegishli atroflaridagi ta'rifda qatnashgan regulyar $f_\alpha(z)$ funksiyalar aynan teng bo'lmasligi mumkin.

Chiziqda analitik funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

1. Agar $F(z)$ va $G(z)$ funksiyalar Γ chiziqda analitik bo'lsa, u holda $H(z) = F(z) \pm G(z)$, $H(z) = F(z) \cdot G(z)$ va $H(z) = F(z)/G(z)$ (oxirgi holda $\forall z \in \Gamma$ uchun $G(z) \neq 0$) funksiyalar ham Γ chiziqda analitik bo'ladi.
2. Agar $F(z)$ funksiya Γ chiziqda analitik bo'lsa, u holda uning barcha hosilalari ham shu chiziqda analitik bo'ladi.
3. Γ chiziqning boshlang'ich nuqtasidan $\xi \in \Gamma$ nuqtasigacha qismini Γ_ξ bilan belgilaymiz. Agar $F(z)$ funksiya Γ chiziqda analitik bo'lsa, u holda uning boshlang'ich funksiyasi $H(z) = \int_{\Gamma_z} F(t)dt$ ($t \in \Gamma$) ham Γ chiziq $z = \infty$ nuqtadan o'tmagan holda Γ chiziqda analitik bo'ladi.

4. Faraz qilaylik, $G(z)$ funksiya Γ chiziqda analitik va Γ chiziqning $w = G(z)$ akslantirishdagi aksi $C = G(\Gamma)$ chiziqdan iborat bo'lsin. Agar $F(z)$ funksiya C chiziqda analitik bo'lsa, u holda $H(z) = F(G(z))$ funksiya ham Γ chiziqda analitik bo'ladi.

Ta'kidlaymizki, barcha xossalarda $H(z)$ funksiyalar Γ chiziqda aniqlangan bo'lib, $\forall \alpha \in \Gamma$ nuqta uchun regulyar $h_\alpha(z)$ funksiyalar sifatida mos ravishda

$$f_\alpha(z) \pm g_\alpha(z), \quad f_\alpha(z) \cdot g_\alpha(z), \quad \frac{f_\alpha(z)}{g_\alpha(z)}, \quad f_\alpha^{(n)}(z), \quad \text{va} \quad f_\beta(g_\alpha(z))$$

($\beta = g_\alpha(z)$) funksiyalarni olish kifoyadir.

Chiziqli analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremmasi quyidagidan iborat.

1.1.4-teorema. Agar Γ chiziqda analitik $w = F(z)$ funksiya Γ chiziqning biror yoyida (bo'lgida) nolga teng bo'lsa, u holda u Γ chiziqda aynan nolga teng.

1.1.12-ta'rif. α nuqtadagi element deb shu nuqtani o'z ichida saqllovchi biror sohada regulyar $f_\alpha(z)$ funksiyaga aytilad.

1.1.13-ta'rif. Agar biror α nuqtadagi ikki element $f_\alpha(z)$ va $f_\alpha^*(z)$ α nuqtaning biror atrofida ustma-ust tushsa, u holda ular ekvivalent deyiladi.

Ta'kidlaymizki, Γ chiziqda analitik $w = f(z)$ funksiyani chiziq bo'yicha bir-biriga yetarlicha aniq nuqtalardagi elementlari o'zaro ekvivalent bo'lgan barcha $f_\alpha(z)$ elementlar majmuasi $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Gamma}$ deb qarash mumkin.

1.1.14-ta'rif. Γ chiziqda analitik $w = G(z)$ funksiyani shu chiziqning boshlang'ich nuqtasida berilgan $f_\alpha(z)$ elementning analitik davomi, chiziqning oxirgi nuqtasiga mos $f_\beta(z)$ elementni esa $f_\alpha(z)$ elementning Γ chiziq bo'yicha analitik davomi natijasi deb ataymiz.

Faraz qilaylik, ixtiyoriy boshlang'ich element $f_\alpha(z)$, α nuqtadan chiquvchi ∞ dan o'tmaydigan biror Γ bo'lakli silliq chiziq berilgan bo'lib, uning Γ chiziq bo'yicha analitik davomidan iborat $w = G(z)$ funksiyani tuzishning (hosil qilishining) nazariy jihatdan istalgan holda yaroqli, lekin amaldagi hisoblashlarni talab qiladigan bir jarayonni tavsiyalaymiz.

Boshlang'ich $f_\alpha(z)$ elementni Teylor qatori $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^0(z-a)^n$ ga yoyamiz va r_0 bian uning yaqinlashish radiusini belgilaymiz, Γ chiziqning boshlang'ich α nuqtasidan $|z-a| = r_0$ aylana bilan birinchi kesishish nuqtasigacha bo'lgan qismini γ_0 orqali belgilaymiz. Barcha $z \in \gamma_0$ uchun $F(z) = f_\alpha^*(z)$, $f_\alpha(z) = f_\alpha(z)$, ($\alpha \in \gamma_0$) deb olamiz. Keyin Γ chiziq γ_0 qismning oxirgi nuqtasidan farqli, lekin unga yaqin nuqtasini z_1 bilan belgilab, $f_\alpha(z)$ funksiya $z = z_1$ nuqtada regulyar bo'lganligidan foydalanib, uni shu nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^0(z-a)^n \quad (1.1.13)$$

Uning yaqinlashish radiusi r_1 bo'lsin, γ_1 bilan Γ ning z_1 nuqtasidan $|z-z_1| = r_1$ aylana bilan kesishish nuqtasigacha bo'lgan qismini belgilab, barcha $z \in \gamma_1$ $F(z) = f_{z_1}(z)$ uchun $f_\alpha(z) = f_{z_1}(z)$ $z \in \gamma_1$ deb aniqlaymiz. Bu yerda oldingi aniqlash bilan qarama-qarshilik yuz bermaydi, chunki γ_0 va γ_1 chiziqlarning kesishmasida $f_\alpha(z)$ va $f_{z_1}(z)$ elementlar ekvivalentdir. Shundan keyin z_2

nuqtani tanlab yuqoridagi jarayonni davom ettirib, chekli qadamlardan so'ng butun Γ chiziqda analitik bo'lgan $F(z)$ funksiyani tushunamiz.

Endi biz Veyershtass ma'nosidagi analitik funksiya ta'rifini keltirishga kerakli barcha tushunchalarga egamiz.

1.1.15-ta’rif. Kengaytirilgan kompleks tekislikning biror α nuqtasida qandaydir $f_\alpha(z)$ element berilgan bo’lsin. Bu element α nuqtadan boshlanuvchi, kengaytirilgan kompleks tekislikda yotuvchi va shu elementni analitik davom ettirish mumkin bo’lgan barcha Γ chiziqlar to’plami K ni aniqlaydi. $f_\alpha(z)$ elementda hosil qilingan Veyershtrass ma’nosidagi analitik funksiya deb barcha $\Gamma \in K$ chiziqlarda aniqlangan analitik funksiyalarga aytamiz. Bu analitik funksiyaning $\Gamma \in K$ chiziqqa mos qiymati deb boshlang’ich element $f_\alpha(z)$ ni Γ chiziq bo’yicha analitik davomi natijasining Γ chiziq oxirgi nuqtasida qabul qiladigan qiymatiga aytamiz: $(F(z))_\Gamma = f_b(b)$.

1.1.5-teorema. (Monodromiya haqidagi teorema). Agar analitik funksiya boshlang’ich elementi $f_\alpha(z)$ ni D sohada yotuvchi ixtiyoriy Γ chiziq bo’yicha analitik davom ettirish mumkin bo’lsa, u holda D sohada gomotop ixtiyoriy Γ va Γ' chiziqlar uchun

$$(F(z))_\Gamma = (F(z))_{\Gamma'}$$

tenglik o’rinlidir.

1.1.6-teorema. Kompleks tekislikning har bir nuqtasida analitik funksiya qabul qiladigan har xil qiymatlar to’plamining quvvati sanoqlidan ortiq bo’la olmaydi.

Faraz qilaylik, $F(z)$ - analitik funksiya boshlang’ich $f(z)$ elementda hosil qilingan bo’lsin.

1.1.16-ta’rif. Veyershtrass ma’nosidagi analitik $F(z)$ funksiyaning hosilasi $F'(z)$ (boshlang’ich funksiyasi) deb $f(z)$ funksiyaning hosilasi $f'(z)$ (boshlang’ich funksiyasi) hosil qilingan analitik funksiyaqa aytamiz.

1.1.17-ta’rif. Agar $F(z)$ va $G(z)$ Veyershtrass ma’nosidagi analitik funksiyalar bitta va faqat bitta nuqtada berilga $f(z)$ va $g(z)$ boshlang’ich elementlardan hosil qilingan bo’lsa, u holda $F(z) \pm G(z)$, $F(z) \cdot G(z)$, $F(z)/G(z)$, deb mos ravishda $f(z) \pm g(z)$, $(z) \cdot g(z)$, $f(z)/g(z)$, elementlardan hosil qilingan analitik funksiyalarga aytamiz.

1.1.18-ta’rif. Agar $G(z)$ analitik funksiya boshlang’ich $g_a(z)$ elementdan hosil qilingan, analitik $F(z)$ funksiya esa boshlang’ich $f_b(z)$ ($b = g_a(a)$), elementdan hosil qilingan bo’lsa, u holda murakkab $F(G(z))$ funksiya deb boshlang’ich $f_b(g_a(z))$ elementdan hosil qilingan analitik funksiyaga aytamiz.

Veyershtrass ma’nosidagi analitik funksiyalar uchun yagonalik teoremmasi quyidagidan iborat.

1.1.7-teorema. Agar analitik funksiyaning biror elementi aynan nolga ekvivalent bo’lsa, u holda uning barcha elementlari aynan nolga teng.

1.1.4-misol. z^α funksiyasi. Ko’rsatkich α ning haqiqiy qiymatlari va o’zgaruvchi z ning musbat qiymatlari uchun z^α quyidagi tenglik orqali aniqlanadi

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \quad (1.1.14)$$

bu tenglik yordamida z^α funksiyaning α ning butunmas qiymatlari (α ning butun qiymatlari uchun z^α funksiya odatdagicha aniqlangan) va α ko’rsatkichning z o’zgaruvchining barcha qabul qilishi mumkin bo’lgan kompleks qiymatlari uchun aniqlash tabiiydir.

Analitik z^α funksiyaning boshlang’ich elementi sifatida $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ funksiyanisolamiz. Yuqoridagi isbotimizga binoan ($\ln z$) logarifmning bosh qiymati $D = C(-\infty, 0)$ sohada regulyar bo’lganligidan z^α ham shu sohada regulyar bo’ladi. Bu boshlang’ich elementi z^α analitik funksiyaning bosh qiymati deb ataymiz.

Xulosa. Analitik z^α funksiyaning boshlang'ich elementi (z^α) ni $\zeta=1$ nuqtadan boshlanib, $\zeta=z$ z nuqtada tugallanuvchi, $\zeta=0$ va $\zeta=\infty$ nuqtalardan o'tmaydigan ixtiyoriy bo'lakli silliq chiziq bo'yicha analitik davom ettirish mumkin va analitik davom qiymati:

$$(z^\alpha)_\Gamma = (z^\alpha) \exp\{2\pi i \alpha v(\Gamma_{\gamma_z}^{-1}, 0)\} \quad (1.1.15)$$

formula bo'yicha hisoblanadi va qayd qilingan $z_0 \in D$ nuqtada $(z^\alpha)_\Gamma$ funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlar to'plami

$$\{z^\alpha\} = \{\exp[\alpha \ln|z| + i\alpha(\arg + 2\pi)], m \in \mathbb{Z}\}$$

dan iborat.

Endi

$$(z^\alpha)_{\Gamma_1} = (z^\alpha)_{\Gamma_2} \quad (1.1.16)$$

tenglik bajarilishi uchun Γ_1 , Γ_2 chiziqlar qanday bo'lishi kerakligini tekshiramiz. Bu tenglikning o'rinli bo'lishi uchun zarur vayetarli shart (1.1.15) formulaga muvofiq

$$\exp\{2\pi i \alpha v(\Gamma_{1\gamma_z}^{-1}, 0)\} = \exp\{2\pi i \alpha v(\Gamma_{2\gamma_z}^{-1}, 0)\}$$

dan iborat. Bu tenglik faqat va faqat

$$\alpha\{v(\Gamma_{1\gamma_z}^{-1}, 0) - v(\Gamma_{2\gamma_z}^{-1}, 0)\}$$

butun sonlar bo'lgandagina bajariladi. O'z navbatida bu sonlarning butun bo'lishi uchun $\alpha = p/q$ ratsional son bo'lib (p va q o'zaro tub butun sonlar), butun

$\{v(\Gamma_{1\gamma_z}^{-1}, 0) - v(\Gamma_{2\gamma_z}^{-1}, 0)\}$ sonlarning q ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarlidir. Xususiyl holda α butun son bo'lsa, u holda (1.1.16) tenglik har qanday

Γ_1 va Γ_2 chiziqlar uchun o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, biz quyidagi xulosaga kelamiz.

1.1.5-misol. $\arctgz$ funksiya. Bu funksiyaning boshlang'ich elementi sifatida

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}, \quad z \in U_{\frac{1}{2}}(0) := \{z: |z| < \frac{1}{2}\}$$

funksiyani olamiz. Bu funksiya regulyar boshlang'ich funksiyaning mavjudlik haqidagi teorema binoan $U_{\frac{1}{2}}(0)$ doirada regulyar bo'lib, uning gorizontal diametrida $\arctgz$ funksiya tengdir. Integral ostidagi funksiyaning quyidagi oddiy kasrlarga yoyish mumkin:

$$\frac{1}{1 + \zeta^2} = \frac{1}{2i(\zeta - i)} - \frac{1}{2i(\zeta + i)}.$$

Bu yerda $\forall z \in U_{\frac{1}{2}}(0)$ uchun

$$\begin{aligned} \arctgz &= \frac{1}{2i} \int_0^z \frac{d\zeta}{(\zeta - i)} - \frac{1}{2i} \int_0^z \frac{d\zeta}{(\zeta + i)} = \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{z - 1}{-i} \right) - \frac{1}{2i} \ln \frac{z + 1}{i} = \\ &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \end{aligned}$$

Bundan ko'rinadiki, analitik davom ettirish prinsipiga ko'ra

$$\arctgz = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad (1.1.17)$$

tenglik $z = -i$ va $z = i$ nuqtalardan tashqari kompleks tekislikning barcha nuqtalarida o'rinli bo'ladi. Demak, $\arctgz$ funksiya $\frac{c}{\{-i, i\}}$ sohada analitikdir.

1.1.6-misol. $\arcsinz$ funksiyasi. Bu funksiyaning ham $\arctgz$ funksiya kabi bizga tanish analitik funksiya orqali ifodalash uchun z ning $[-1, 1]$ oraliqdagi

qiymatlarida o'rinli bo'lishi ma'lum bo'lgan $\sin(\arcsin z) = z$ tenglikdan foydalanamiz. Analitik davom ettirish prinsipiga ko'ra, bu tenglik z ning barcha kompleks qiymatlarida ham bajariladi. Eyler formuasiga muvofiq

$\sin w = \frac{\exp iw - \exp(-iw)}{2i}$ bo'lib, $\arcsin z$ funksiyani aniqlovchi tenglikni

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$

ifodalash mumkin. Bu tenglikni e^{iw} ga nisbatan kvadrat tenglama sifatida qarab, uning yechimi $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ ekanligini topib olamiz. Bu yerdan esa :

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad (1.1.18)$$

formulaga ega bo'lamiz.

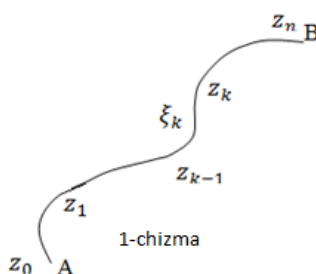
Bu formuladan kelib chiqadiki, $\arcsin z$ funksiya $C \setminus \{-1, 1\}$ sohada analitik funksiya iborat ekan, chunki $iz + \sqrt{1 - z^2} \neq 0, \quad \forall z \in C.$

1.2-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integralli

Tekislikdagi Γ to'g'ri-riluvchi chiziqda $w = f(z)$ bir qiymatli funksiya berilgan bo'lsin. Γ chiziqlarning boshlang'ich α nuqtasidan oxirgi β nuqtasiga qarab uzluksiz harakat qilinganda ketma-ket uchraydigan $\forall \alpha = z_0, z_1, \dots, z_n = \beta$ nuqtalarni olamiz va quyidagi integral yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \quad (1.2.1)$$

$\tilde{\Gamma}$ chiziqlarning z_k va z_{k+1} nuqtalarini tutashtiruvchi qismini S_k , uning uzunligini esa dS_k bilan belgilaymiz.



1.2.1-ta'rif. Agar $\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0$ da (1.2.1) yig'indi $\{z_k\}_{k=0}^n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda aniq chekli limitga intilsa, u holda $f(z)$ funksiya Γ chiziql bo'yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu limitning qiymatiga $f(z)$ funksiyaning Γ chiziql bo'yicha integrali deb ataladi va u

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\substack{\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0 \\ 0 \leq k \leq n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

kabi belgilanadi.

Integralning mavjudlik sharti.

1.2.1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya Γ to'g'ri-riluvchi chiziql uzluksiz bo'lsa, u holda $\int_{\Gamma} f(z) dz$ integral mavjuddir.

Isbot. Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$z_k = x_k + iy_k, f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + iv_k,$$

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

U holda (1.2.1) yig'indi quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \end{aligned} \quad (1.2.2).$$

Bu (1.2.2) ifodaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisienti haqiqiy analizda o'rganilgan $\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ko'rinishdagi ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning integral yig'indilaridir. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar Γ to'g'riylanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bunday integral mavjuddir. Teorema shartiga ko'ra $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar to'g'riylanuvchi Γ chiziqda uzluksiz bo'lganligi uchun bu yerdan $\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0$ da (1.2.2) tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'indining mos ravishda aniq chekli $\int_{\Gamma} udx - vdy$ va $\int_{\Gamma} vdx + udy$ limitlarga intilishi kelib chiqadi. Demak, (1.2.2) ning chap tomoni ham aniq chekli limitga ega va bu limit quyidagiga teng:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i \int_{\Gamma} vdx + udy \quad (1.2.3).$$

1.2.1-teorema isbot bo'ldi.

Integralni hisoblash. (1.2.3) formula quyidagicha yozilsa yaxshi esda saqlanadi:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy) \quad (1.2.3^1).$$

Bu integralni hisoblash maqsadida Γ chiziqni silliq va $z = z(t), (a \leq t \leq b)$ tenglamaga ega desak, (1.2.3¹) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b \{u[z(t)] + iv[z(t)]\} \{x'(t) + iy'(t)\} dt = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}\{f[z(t)] z'(t)\} dt + i \int_a^b \operatorname{Im}\{f[z(t)] z'(t)\} dt \end{aligned} \quad (1.2.4).$$

(1.2.4) formulaga ko'ra kompleks funksiya integralini hisoblash masalasi haqiqiy funksiyalarning odatdagi aniq integrallarini hisoblashga keltirilar ekan.

1.2.1-misol. $\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a}$ integral hisoblansin. Bu yerda $|z-a| = R$ aylana soat

strelkasiga teskari yo'nalishda o'tiladi.

Yechish. Aylana silliq chiziq bo'lib, uning parametrik tenglamasi $z = a + Re^{it}, (0 \leq t \leq 2\pi)$ dan iborat. $dz = z'(t)dt = iRe^{it} dt$ bo'lganligidan (1.2.4) ga asosan

$$\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Integralning asosiy xossalari. (Quyida keltiriladigan xossalarning barchasidagi integrallarni mavjud deb hisoblaymiz.)

1.2.2-Teorema. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda berilgan va uzluksiz, γ egri chiziq ushbu $z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $z'(t) \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] \cdot z'(t) dt \quad (1.2.5)$$

bo'ladi.

Quyidagi to'rtta xossa integral ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

1.2.1-xossa. Agar Γ chiziqni musbat va manfiy yo'nalishlarda o'tishdan hosil bo'lgan chiziqlarni mos ravishda Γ^+ va Γ^- desak, u holda

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = - \int_{\Gamma^+} f(z)dz$$

1.2.2-xossa. Ixtiyoriy kompleks o'zgarmas α uchun

$$\int_{\Gamma} \alpha f(z)dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z)dz.$$

1.2.3-xossa. Agar $\tilde{A}$ chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qilganda u ketma-ket uchraydigan $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ chiziqlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda

$$\int_{\tilde{A}} f(z)dz = \int_{\tilde{A}_1} f(z)dz + \int_{\tilde{A}_2} f(z)dz + \dots + \int_{\tilde{A}_n} f(z)dz.$$

1.2.4-xossa.

$$\int_{\tilde{A}} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)]dz = \int_{\tilde{A}} f_1(z)dz + \int_{\tilde{A}} f_2(z)dz + \dots + \int_{\tilde{A}} f_n(z)dz$$

1.2.5-xossa. Agar Γ chiziqda $|f(z)| \leq M$, $M = \text{const}$ tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq M \Gamma$$

tengsizlik o'rinli, bunda $d\Gamma$ – Γ chiziqning uzunligi.

Isbot.

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |z_{k+1} - z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq M \Gamma.$$

Bu tengsizlikda $\max_k ds_k \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, **1.2.5** xossa kelib chiqadi.

1.2.6-xossa. 1.2.5 xossa quyidagi yanada aniqroq tengsizlikdan ham kelib chiqadi.

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} \|f(z)\| |dz| = \lim_{\max_k dS_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \|f(z_k)\| |z_{k+1} - z_k|.$$

Bu xossaning isboti

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|f(z_k)\| |z_{k+1} - z_k|$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Kompleks analizda sohaning chegarasi bo'yicha olingan integrallar muhim rol o'ynaydi. Faraz qilaylik, D soha chegarasi chekli dona yopiq to'g'rilanuvchi Jordan chiziqlaridan iborat bo'lsin.

1.2.2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasi ∂D da uzluksiz bo'lsa, u holda ∂D bo'yicha musbat yo'nalishda $f(z)$ funksiya dan olingan integral deb, ∂D ni tashkil etuvchi barcha chiziqlar bo'yicha $f(z)$ dan olingan integrallarning yig'indisiga aytiladi:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f(z) dz,$$

bu yerda $\tilde{A}_k$ -chiziqlardagi integrallash yo'nalish shunaqaki, shu yo'nalish bo'ylab harakat qilganda soha chap tomonda qoladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya chekli va bir bog'lamli G sohada analitik bo'lsa, u holda G sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo'lakli-silliqlik C chiziq bo'yicha $f(z)$ funksiya dan olingan integral 0 ga teng, ya'ni

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

1.2.2-misol. Ushbu $I_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz$ (n – butun son)

integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho, \rho > 0\}$ aylanadan iborat (yo'nalish soat strelkasining yo'nalishiga qarama-qarshi olingan).

Yechis. γ aylananing tenglamasini quyidagi $z = z(t) = a + \rho \cdot e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) ko'rinishida yozib olamiz. Unda $dz = d(a + \rho \cdot e^{it}) = i\rho \cdot e^{it} dt$ bo'lib, (1.2.5)-formulaga

ko'ra
$$I_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$
 bo'ladi.

Agar $n \neq -1$ bo'lsa,
$$I_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i\rho^{n+1} \cdot \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

bo'ladi. Agar $n = -1$ bo'lsa
$$I_{-1} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \neq -1 \text{ bo'lsa} \\ 2\pi i, & \text{agar } n = -1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Koshi teoremasi

1.2.2-teorema. (Koshining integral teoremasi) Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya kompleks tekislik S dagi bir bog'lamli D sohada golomorf bo'lsin. U holda ixtieriy to'g'rilanuvchi yopiq egri chiziqlik $\gamma \subset D$ uchun

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

1.2.3-teorema. $D \subset \mathbb{C}$ soha bir bog'lamli, chegarasi to'g'rilanuvchi chiziqdan iborat bo'lgan soha bo'lib, $f(z)$ funksiya D da golomorf, $\overline{D}$ da uzluksiz ($f(z) \in O(D) \cap C(\overline{D})$) bo'lsin. U holda

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

1.2.4-teorema. (Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasi) Faraz qilaylik, $D \subset C$ soha chegarasi $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ to'g'rilanuvchi chiziqlardan tashkil topgan ko'p bog'lamli soha bo'lsin (2-chizma). Agar $f(z) \in O(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\Gamma \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_n^-} f(z)dz = 0$$

tenglik o'rinlidir.

Bu tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin

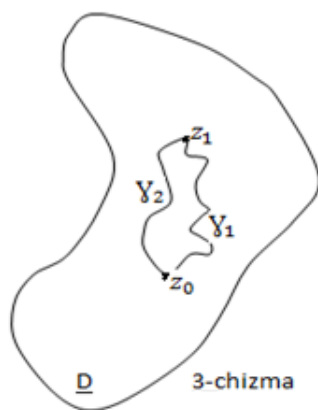
$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz \quad (1.2.6)$$



Natija. Faraz qilaylik, $D \subset C$ bir bog'lamli soha bo'lib, γ_1, γ_2 chiziqlarning har biri ($\gamma_1 \subset D, \gamma_2 \subset D$) boshi z_0 va oxiri z_1 nuqtada bo'lgan chiziqlar bo'lsin (3-chizma). Agar $f(z) \in O(D)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad (1.2.7)$$

bo'ladi.



(1.2.7)-tenglik, qaralayotgan integralning z_0 va z_1 nuqtalarigagina bog‘liq bo‘lib, integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmasligini bildiradi. SHuni e‘tiborga olib, (1.2.7)-integralni

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz \quad (1.2.7)$$

kabi belgilash ham mumkin.

1.2.3-misol. Ushbu

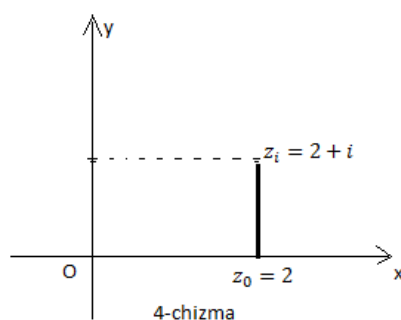
$$\int_2^{2+i} z^2 dz$$

integralni hisoblang.

Ravshanki, $f(z) = z^2 \in O(C)$. Binobarin, berilgan integral $z_0 = 2$, $z_1 = 2 + i$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo‘lga bog‘liq bo‘lmaydi. Shundan foydalanib integrallash chizig‘i γ sifatida

$$\gamma = \{z = x + iy \in C : x = 2, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

to‘g‘ri chiziq kesmasini olamiz (4-chizma)



Bu γ chiziqda $z = 2 + iy$, $dz = idy$ bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^1 (2 + iy)^2 \cdot idy = i \int_0^1 (4 + 4iy - y^2) dy = \\ &= i(4y + 2iy^2 - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^1 = -2 + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

1.2.4-misol. Ushbu

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} \quad (z \neq 0)$$

integralning qiymati $z_0 = 1$ va $z_1 = 2$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo'lga bog'liq bo'ladimi (yo'l koordinata boshidan o'tmaydi deb faraz qilinadi)?

Ravshanki,

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

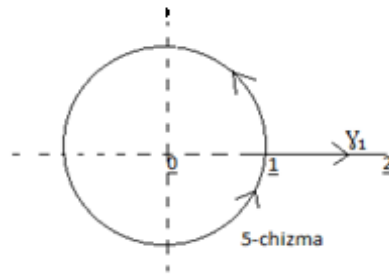
funksiya $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohada holomorf. Ayni paytda bu bir bog'lamli soha emas.

Demak, Koshining integral teoremasidan foydalanib bo'lmaydi. $z_0 = 1$ va $z_1 = 2$ nuqtalarni birlashtiruvchi ikkita γ_1 hamda γ_2 chiziqlarni

$$\gamma_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \leq x \leq 2, y = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \gamma_1$$

deb olamiz (5- chizma).



γ_1 chiziqda $z = x$, $dz = dx$ bo'lib,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$$

$|z|=1$ aylanada $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ bo'lib,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\pi i + \ln 2$$

bo'ladi. Demak, berilgan integral integrallash yo'liga bog'liq ekan.

1.3-§ Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralliga doir misollar

1.3.1-misol: Ushbu

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$$

integralni hisoblang, bunda

$$\gamma = \{z = x + iy \in C_z : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

yopiq chiziqdan iborat.

Yechish. Ravshanki, $x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Demak, $\gamma = \{z \in C_z : |z + 3i| = 3\}$ bu aylana bilan chegaralangan sohani – doirani D deylik: $D = \{z \in C_z : |z + 3i| < 3\}$.

Agar $f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$ deyilsa, unda berilgan integral quyidagicha

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz$$

bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $\bar{D}$ da holomorff bo'lgani uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = f(-2i).$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = -2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-2i - 2i} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2$$

Demak,

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2$$

1.3.2-misol: ushbu $\int_{\gamma} dz$ integralni hisoblang, bunda γ chiziq boshi a ($a \in \mathbb{C}$) nuqtada, oxiri b ($b \in \mathbb{C}$) nuqtada bo'lgan egri chiziq.

Yechish. Ravshanki $f(z) = 1$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \\ &= z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 \end{aligned}$$

Bo'ladi. Agar $\int_{\gamma} dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ va $z_0 = a$ $z_n = b$ ekanligini etiborga olsak, unda $\int_{\gamma} dz = b - a$ bo'lishini topamiz.

1.3.3-misol. Ushbu

$$\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z - 2i} dz$$

integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Yechish. Agar D ($D \subset \mathbb{C}$) soha deb quyidagi $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$ soha olinsa, unda birinchidan

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

funksiya holomorff bo'ladi, ikkinchidan qaralayotgan yopiq chiziq γ shu sohaga tegishli bo'ladi: $\gamma \subset D, 2i \notin D$.

Unda Koshi teoremasiga asosan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z - 2i} dz = 0$$

bo'ladi.

1.3.4-misol. Ushbu

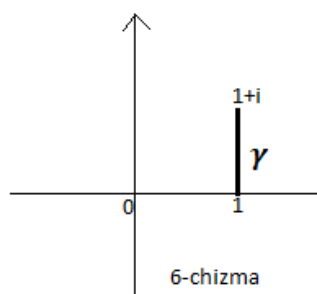
$$\int_1^{1+i} z^2 dz$$

integralni hisoblang.

Yechish. Ravshanki $f(z) = z^2$ funksiya butun kompleks tekislik C da holomorff. Binobarin berilgan integral $z_0 = 1, z_1 = 1 + i$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo'lga bog'liq bo'lmaydi. Shundan foydalanib integrallash chizig'i γ sifatida

$$\gamma = \{z = x + iy \in C: x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

to'g'ri chiziq kesmasini olamiz. (6-chizma)



Bu γ chiziqda $z = 1 + iy, dz = i dy$ bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} z^2 dz &= \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (1+iy)^2 i dy = i \int_0^1 (1+2iy-y^2) dy \\ &= i(y+iy^2-\frac{y^3}{3})_0^1 = -1 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

1.3.5-misol. Quydagi integralni hisoblang.

$$\oint \bar{z} dz$$

Bu yerda: $\gamma: x = \cos t, y = \sin t, (0 \leq t \leq \pi)$

Yechish:

$$\begin{aligned}\oint \bar{z} dz &= \oint (x-iy)d(x+iy) = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t) d(\cos t + i \sin t) = \int_0^{2\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (i \sin^2 t + i \cos^2 t) dt = 2\pi i\end{aligned}$$

1.3.6-misol. Quydagi integralni hisoblang.

$$\int_{\gamma} e^z dz \quad \gamma: y = x^2, z = 0, z = 1+i$$

Yechish:

$$y = x^2$$

$$z = x + iy = x + ix^2$$

$$dz = 1 + 2ix dx = (1 + 2ix) dx$$

$$\int_{\gamma} e^z dz = \int_0^1 e^{x+iy} (1 + 2ix) dx = \int_0^1 e^{x+ix^2} (1 + 2ix) dx =$$

$$= \int_0^1 e^{x+ix^2} d(x + ix^2) = e^{x+ix^2} \Big|_0^1 = e^{1+i} - 1$$

I-bob xulosasi.

Bitiruv malakaviy ishning 1-bobi Asosiy tushunchalar deb nomlangan bo'lib, bu bobning birinchi mavzusi analitik funksiyalar va ularning tasnifi deb nomlanib, bu mavzuda kompleks o'zgaruvchili funksiya hosilasi, analitik funksiya tarifi, uning xossalari haqida malumot berilgan. Ushbu bobning ikkinchi mavzusi kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali deb nomlanib, bu mavzuda kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali tushunchasi yoritilgan va ushbu mavzuga bog'liq bo'lgan koshi teoremasi keltrib o'tillgan, barcha tushunchalar misollar orqali tushuntirib mustahkamlangan. Bobning uchinchi mavzusida bobning oldingi mavzularini mustahkamlash va keying bobga zamin tayyorlash uchun misollar yechib ko'rsatilgan.

II-bob. Gilbert formulalari

2.1-§ Koshi tipidagi integrallar

Kompleks sonlar tekisligi C_z da chegaralangan D sohani qaraylik. Uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) chiziqdan iborat. Bu musbat egri chiziq musbat yo'nalishda olingan bo'lsin.

Aytaylik, $\bar{D} = D \cup \partial D$ to'plamda $f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

2.1.1-teorema: Agar $f(z)$ funksiya D sohada holomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (2.1.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: D sohada ixtiyoriy z nuqta olib, uning shunday

$$B_\rho = \{t: |t-z| < \rho: \rho > 0\}$$

atrofini qaraymizki, $\bar{B}_\rho \subset D$ bo'lsin. Bu sohaning chegarasi

$$\partial B_\rho = \{t: |t-z| = \rho, \rho > 0\}$$

bo'ladi. Endi chegarasi $\gamma = \partial D \cup \partial \bar{B}_\rho$ bo'lgani ushbu $D_\rho = D \setminus \bar{B}_\rho$ sohani qaraymiz. Ravshanki, bu sohada

$$\frac{f(t)}{t-z}$$

funksiya t o'zgaruvchining funksiyasi sifatida holomorf bo'lib, uning chegarasida uzluksiz bo'ladi. Unda Koshi teoremasiga binoan

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z} dt = 0,$$

ya'ni

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt + \int_{B_{\bar{\rho}}} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad (2.1.2)$$

bo'ladi. Agar

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = - \int_{B_{\bar{\rho}}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

ekanini etiborga olsak, unda (2.1.2) tenglikdan

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{B_{\rho}} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (2.1.3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ma'lumki,

$$\int_{\partial B_{\rho}} \frac{dt}{t-z}$$

integralda ∂B_{ρ} aylana uchun $t = z + \rho \cdot e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) bo'lganligi sababli

$$\int_{\partial B_{\rho}} \frac{dt}{t-z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho \cdot e^{i\varphi}}{\rho \cdot e^{i\varphi}} d\varphi$$

bo'lib,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}} \frac{dt}{t-z} = 1$$

bo'ladi. Bu integralning har ikki tomonini $f(z)$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}} \frac{f(z)}{t-z} dt = f(z) \quad (2.1.4)$$

so'ng ushbu $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z)$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirmani (2.1.3) va (2.1.4) tengliklardan foydalanib, quyidagini yozish mumkin:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \quad (2.1.5)$$

shartga ko'ra $f(z)$ funksiya z nuqtada ($z \in D$) holomorff. Binobarin funksiya shu nuqtada uzluksiz. Unda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ katta son topiladiki, $\rho < \delta$ tengsizlikni qanoatlantruvchi B_ρ aylananing ixtiyoriy nuqtasi uchun

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} |f(t) - f(z)| |dt| < \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_{\partial B_\rho} |dt| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \cdot 2\pi \rho = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demak,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) \right| = \varepsilon \quad (2.1.6)$$

shunday qilib, ρ nolga intila borganda (2.1.5) ayirmaning moduli yetarlicha kichik bo'lar ekan.

Ayni paytda, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt$ ifoda ρ ga bog'liq emas. Unda (2.1.6) munosabatdan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) = 0$$

ya'ni

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt = f(z) \quad (2.1.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Odatda (2.1.1) formula koshining integral formulasi deyiladi. Koshining integral formulasi $f(z)$ golomorf funksiyaning D sohadagi qiymatlarini uning chegarasi ∂D dagi qiymatlari orqali ifodalaydi.

Endi Koshining integral teoremasini xususiy holda, chegarasi aylanadan iborat soha uchun keltiramiz.

Kompleks tekislik C_z da ushbu $D = \{z \in C_z: |z - z_0| < r, r > 0\}$ doirani ($z \in C_z$) qaraylik. Ravshanki, bu doiraning chegarasi

$$\partial D = \{z \in C_z: |z - z_0| = r, r > 0\}$$

aylana bo'ladi. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\bar{D} = D \cup \partial D$ to'plamda berilgan bo'lsin.

2.1.2-teorema: Agar $f(z)$ funksiya D doirada golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa u holda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 - ze^{i\varphi}) d\varphi \quad (2.1.7)$$

Isbot: Koshi integral formulasiga ko'ra

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z_0} dt \quad (2.1.8)$$

bo'ladi.

Ravshanki, markazi z_0 nuqtada ($z_0 \in C_z$) radiusi r bo'lgan ∂D aylanada

$$t = z_0 + re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (2.1.9)$$

bo'lib, $dt = ire^{i\varphi}$ bo'ladi. Unda

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 - re^{i\varphi}) \cdot ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} f(z_0 - re^{i\varphi}) d\varphi$$

bo'ladi. (2.1.8) va (2.1.9) munosabatlardan ushbu kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. Bu teorema o'rta qiymat haqidagi teorema deb yuritiladi.

2.1.1-misol: Ushbu

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$$

integralni hisoblang, bunda

$$\gamma = \{z = x + iy \in C_z : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

yopiq chiziqdan iborat.

Yechish. Ravshanki, $x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Demak, $\gamma = \{z \in C_z : |z + 3i| = 3\}$. bu aylana bilan chegaralangan sohani – doirani D deylik:

$$D = \{z \in C_z : |z + 3i| < 3\}.$$

Agar $f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$ deyilsa, unda berilgan integral quyidagicha

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz$$

bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $\bar{D}$ da holomorfl bo'lgani uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz = f(-2i).$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz &= -2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-2i-2i} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2 \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2$$

2.2-§. Haqiqiy o'q bo'ycha olingan integral uchun Soxotskiy formulasi

$\varphi(\tau)$ funksiya biror E to'plamda berilgan bo'lsin. τ va $\varphi(\tau)$ –haqiqiy yoki kompleks bo'lishi mumkin.

2.2.1-tarif. $\varphi(\tau)$ funksiya E to'plamda Gyolder ($H(\lambda)$)shartini qanoatlantiradi deyiladi, agarda $\forall \tau_1, \tau_2 \in E$ lar uchun

$$|\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)| \leq A |\tau_1 - \tau_2|^\lambda \quad (2.2.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, bunda A va λ - musbat o'zgarmas sonlar. Agar $\lambda > 1$ bo'lganda, u holda (2.2.1) shartdan $\varphi'(t) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = const$ bo'ladi. Shuning uchun $0 < \lambda \leq 1$ deb faraz qilamiz.

$\lambda = 1$ bo'lganda (2.2.1) shart, Lipshist sharti deyiladi. Agar $\varphi(\tau) \in H(\lambda)$ bo'lsa, $|\varphi(\tau)| \in H(\lambda)$ bo'ladi. Haqiqattan ham $\forall \tau_1, \tau_2 \in E$ uchun

$$\| \varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) \| \leq |\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)| \leq A |\tau_1 - \tau_2|^\lambda \Rightarrow \varphi(\tau) \in H(\lambda)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar $\varphi(\tau) \in H(\lambda)$ bo'lsa, $\varphi(\tau) \in H(\lambda_1)$ ($\lambda_1 < \lambda$) bo'ladi.

Buning teskarisi o'rinli emas. Demak, kichik λ ga katta sinf to'g'ri keladi.

Eng kichik sinf, bu Lipshist shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi bo'lib hisoblanadi.

Agar $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ funksiyalar E to'plamda mos ravishda λ_1 va λ_2 ko'rsatkichlar bilan Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda ularning yig'indisi, ko'paytmasi va $\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi_2(\tau)}$ ($\varphi_2(\tau) \neq 0, \forall \tau \in E$) ham $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ko'rsatkich bilan Gyolder shartini qanoatlantiradi.

Agar $\varphi(\tau)$ funksiya differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya Lipshist shartini qanoatlantiradi. Haqiqattan ham $\forall \tau_1, \tau_2 \in E$.

$$\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) = \varphi'(c)(\tau_1 - \tau_2),$$

$$c \in (\tau_1, \tau_2) \Rightarrow |\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)| = |\varphi'(c)| \cdot |\tau_1 - \tau_2| \leq A |\tau_1 - \tau_2|.$$

Buning teskarisi o'rinli emas.

2.2.1-misol. $\varphi(x)=|x|$ funksiya Lipshist shartini qanoatlantiradi, lekin bu funksiya koordinata boshida hosilaga ega emas, chunki o'ng hosilasi $+1$, chap hosilasi -1 .

$U = u(\xi)$ funksiya biror E_1 sohada aniqlangan bo'lib, unda u Gyolder shartini ($H(\mu)$ sharti) qanoatlantirsin. $f(u)$ funksiya esa $u(\xi)$ funksiyaning qiymatlar to'plamida aniqlangan bo'lib, u $H(v)$ shartni qanoatlantirsin. U holda $F(\xi) = f(u(\xi))$ funksiya ξ -o'zgaruvchi bo'yicha $H(\mu \cdot v)$ shartini qanoatlantiradi. Agar $v=1$ bo'lsa, u holda $F(\xi)$ funksiya $H(\mu)$ shartini qanoatlantiradi.

2.2.2-misol. 1). $\varphi(x) = \sqrt{x}$ funksiya haqiqiy o'qning har bir intervalida $H(\frac{1}{2})$, $\lambda = \frac{1}{2}$ shartini qanoatlantiradi, agar interval nolni o'z ichida saqlamasa, u holda bu funksiya intervalda analitik bo'ladi. Shuning uchun u Lipshist shartini qanoatlantiradi.

$$2). \varphi(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}, \quad \varphi(0) = 0. \text{ Bu funksiya } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ da uzluksiz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x = 0 \quad \forall \lambda > 0 \quad \text{y'ch}$$

A va λ qanday bo'lishidan qat'iy nazar x ning shunday qiymatini ko'rsatish mumkinki:

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{\ln x} \right| > A \cdot x^\lambda \Rightarrow \varphi(x)$$

funksiya qaralayotgan $[0, \frac{1}{2}]$ oraliqda Gyolder shartini qanoatlantirmaydi.

Gyolder sharti tushunchasini ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga ham tarqatish mumkin.

2.2.2-tarif. $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ funksiya biror D to'plamda aniqlangan bo'lsin. $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ funksiya D to'plamda Gyolder shartini ($H(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$) shartini qanoatlantiradi deyiladi, agarda

$$\forall (\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n), (\tau''_1, \tau''_2, \dots, \tau''_n) \in D$$

lar uchun

$$\begin{aligned} & |\varphi(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n) - \varphi(\tau''_1, \tau''_2, \dots, \tau''_n)| \leq A_1 |\tau'_1 - \tau''_1|^{\mu_1} + \\ & + A_2 |\tau'_2 - \tau''_2|^{\mu_2} + \dots + A_n |\tau'_n - \tau''_n|^{\mu_n} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, bunda $A_i, \mu_i (i=1, n)$ -musbat o'zgarmas sonlar.

$$\mu_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n.$$

Agar D to'plam chegaralangan to'plam bo'lsa, u holda (2.1.2) ni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\mu = \min\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}, \quad A = \max\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

$$\begin{aligned} & |\varphi(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n) - \varphi(\tau''_1, \tau''_2, \dots, \tau''_n)| \leq A_1 \{|\tau'_1 - \tau''_1|^{\mu} + \\ & + |\tau'_2 - \tau''_2|^{\mu} + \dots + |\tau'_n - \tau''_n|^{\mu}\} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Agar $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ funksiya $H(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ shartini qanoatlantirsa, u holda

$$|\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau'_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n) - \varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}, \tau''_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n)| \leq A_k |\tau'_k - \tau''_k| \quad \text{sh} \quad (2.2.4)$$

artini ham qanoatlantiradi, yani $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ funksiya har bir argumenti bo'yicha ham (qolganlariga nisbatan tekis) Gyolder shartini qanoatlantiradi.

$H(\mu_k)$ shartni va aksincha $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ funksiya ayrim-ayrim har bir argumenti bo'yicha $H(\mu_k)$ shartini qanoatlantirsa (qolganlariga nisbatan tekis), $H(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ shartini ham qanoatlantiradi.

Asosiy lemma. Agar $\varphi(\tau)$ Gyolder shartini qanoatlantirsa va t γ -silliqlik chiziqlik uchlariga mos tushmasa, u holda

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

funksiya γ chiziqlikning $t=z$ nuqtasidan o'tishda uzluksiz bo'ladi, ya'ni $z \rightarrow t$ ga γ -ning istalgan tomonidan istalgan yo'l bilan intilganda anik limitik qiymatga ega bo'ladi.

$$\lim \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \psi(t)$$

Isbot . $\psi(z) - \psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z-t}{\tau-z} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} d\tau$ ayirmani baholaymiz.

a) $z \rightarrow t$ ga intilishi urinma chiziqlik bo'yicha bo'ylab intilmasin, ya'ni zt kesma bilan γ ga t nuqtada o'tkazilgan urinma orasidagi burchak biror o'tkir burchak $\omega_0 > 0$ dan kichik bo'lmasin. t nuqtani markaz qilib δ radius doira chizamiz. γ ning markazi t nuqtada, radiusi δ bo'lgan doiraning ichidagi qismini γ_{δ} deb, qolgan qismini $\gamma \setminus \gamma_{\delta}$ deb belgilaymiz. δ -ni shunday kichik qilib olamizki, natijada $t\tau$ ($\tau \in \gamma_{\delta}$) vektor bilan γ ning t nuqtasidan o'tkazilgan urinma vektor orasidagi burchak dan kichik bo'lsin. $zt\tau$ uchburchakka sinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$\frac{|z-t|}{|\tau-t|} = \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \leq \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2}} = K \quad \varphi(\tau) \in H(\lambda)$$

bo'lgani uchun

$$\left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} \right| < A |\tau - t|^{\lambda-1} = A r^{\lambda-1}, \quad r = |\tau - t| \quad (2.2.5)$$

γ -chiziq silliq bo'lgani uchun $\left| \frac{ds}{dr} \right| \leq m$

$$|d\tau| = |ds| \leq m |dr| \quad (2.2.6)$$

(2.2.5) – (2.2.6) larga asosan

$$|I_1| = \left| \int_{\gamma_\delta} \frac{|z - t|}{|\tau - z|} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \right| \leq \int_{\gamma_\delta} \frac{|\varphi(\tau) - \varphi(t)|}{|\tau - t|} |d\tau| \leq KAm \int_{\gamma_\delta} r^{\lambda-1} |dr| = 2KAm \int_0^\delta r^{\lambda-1} dr = \frac{2KAm\delta^\lambda}{\lambda}$$

$\forall \varepsilon > 0$ sonni shunday olamizki unga qarab bo'linishni tanlaymiz, natijada

$$I_2 = \int_{\frac{\gamma}{\gamma_\delta}} \frac{|z - t|}{|\tau - z|} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \quad (2.2.7)$$

$\frac{\gamma}{\gamma_\delta}$ da $\tau \neq t$ bo'lgani uchun I_2 z – ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.2.8)$$

(2.2.7) bilan (2.2.8) dan

$$|\psi(z) - \psi(t)| \leq \varepsilon \quad (2.2.9)$$

$|\psi(z) - \psi(t)|$ ayirmaning baxosi t ga bog'lik emas. Shuning uchun $\psi(z) \rightarrow \psi(t)$ tekis intilish bo'ladi. Bundan $\psi(t)$ ning uzluksizligi kelib chiqadi. Haqiqatdan

ham $t_1, t_2 \in \frac{\gamma}{\gamma_\delta}$ olamiz:

$$|\psi(t) - \psi(t_1)| \leq |\psi(t) - \psi(z)| + |\psi(z) - \psi(t_1)| \quad (2.12.10)$$

ga asosga $|\psi(t) - \psi(t_1)| \leq \varepsilon$ kelib chiqadi.

b) Endi z, t ga biror v -chiziq, bo'yicha γ ga urinma bo'lib intilsin, v chiziqdan t yaqin bo'lgan z nuqtani olamiz va undan biror v_1 chiziqni shunday o'tkazamizki natijada u γ -ni t_1 nuqtada kesib o'tsin va unga urinma bo'lmasin, t_1, t ga istalgancha yaqin v_1 -chiziqni shunday olish mumkin, natijada zt_1 va zt kesmalar istalgancha kichik bo'lsin.

Biz Yuqorida z va t ga urinma bo'lmagan chiziq bo'ylab intilganda $\psi(z)$ funksiyaning limiti mavjud va uzluksiz ekanini ko'rsatdik, yani $|\psi(z) - \psi(t_1)|$ va $|\psi(t) - \psi(t_1)|$ lar istalgancha kichik bundan esa

$$|\psi(z) - \psi(t)| \leq |\psi(z) - \psi(t_1)| + |\psi(t_1) - \psi(t)| < \varepsilon$$

Demak, $\psi(z)$ funksiyaning limiti istalgan yo'l bo'yicha mavjud ekan va u t nuqtada uzluksiz bo'lar ekan. Bu tasdiqni isbotlash davrida $\varphi(\tau)$ ning t -ning istalgancha kichik atrofida Gyolder shartini qanoatlantirishidan foydalandik, chiziqning qolgan qismida esa $\varphi(\tau)$ ning uzluksiz, yoki uzilishga ega bo'lsa ham integrallanuvchi bo'lishi yetarli.

Soxotskiy formulalari

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.2.11)$$

Koshi tipdagi integral berilgan bo'lib, bunda γ -yopiq silliq chiziq $\varphi(\tau)$ esa γ -da Gyolder shartini qanoatlantirsin. Agar γ -yopiq bo'lmasa, u holda uni biror chiziq yordamida yopiq chiziqqa to'ldiramiz (bu chiziqda $\varphi(\tau) = 0$ deb olamiz). Yuqorida o'rgangan

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \quad (2.2.12)$$

funksiyani qaraymiz.

$F(z)$ va $\psi(z)$ analitik funksiyalarning γ -chiziqning ichkarisidan (tashqarisidan) $z \rightarrow t^+$ dagi limitik qiymatlarini mos ravishda $F^+(t), \psi^+(t), (F^-(t), \psi^-(t))$, bilan belgilaymiz.

(γ - ochiq bo'lganda bu γ -dan chapdan va o'ngdan deb tushinish kerak). Bu funksiyalarning γ -dagi qiymatlarini mos ravishda $F(t), \psi(t)$ deb belgilaymiz.

$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$, maxsus integralni bosh qiymat manosida tushiniladi.

Malumki,

$$\int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \\ \pi i, & z \in \gamma \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Formula o'rinli . Bunga asosan

$$\psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = F^+(t) - \varphi(t).$$

$$\psi^-(t) = \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = F^-(t)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\tau}{\tau - t} = F(t) - \frac{\varphi(t)}{2}$$

yuqoridagi isbot qilingan asosiy lemmaga asosan $\varphi(t)$ - uzluksiz, shuning uchun

yuqoridagi tengliklarning o'ng tomonlari o'zaro bir-biriga teng bo'ladi.

$$F^+(t) - \varphi(t) = F^-(t) = F(t) - \frac{\varphi(t)}{2},$$

bundan

$$F^+(t) = F(t) + \frac{\varphi(t)}{2} = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.2.14)$$

$$F^-(t) = F(t) - \frac{\varphi(t)}{2} = -\frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.2.15)$$

(2.1.14) bilan (2.1.15) ning o'ng tomonidagi maxsus integrallar bosh qiymat manosida tushiniladi. (2.1.14) bilan (2.1.15) ni 1875 yilda rus matematigi Soxotskiy isbotlagan, shuning uchun bu formulalarni Soxotskiy formulalari deyiladi. Yuqorida olingan natijani quyidagi teorema shaklida ifodalaymiz.

Teorema. γ -yopiq va ochiq silliq chiziq, $\varphi(\tau)$ - γ -da Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiya. U holda $F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$, Koshi tipidagi integral γ -ning hamma joyida (ochiq bo'lsa, uning uchlaridan tashqari) istalgan yo'l bilan $z \rightarrow t^+$ da $F^+(t)$, $F^-(t)$ limitik qiymatlarga ega va ular (2.2.14) va (2.2.15) formulalar orqali topiladi. (2.2.14) bilan (2.2.15) dan

$$F^+(t) - F^-(t) = \varphi(t) \quad (2.2.16)$$

$$F^+(t) + F^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (2.2.17)$$

$F^-(\infty) = 0$ shart, bo'lakli analitik funksiyaning Koshi tipidagi integral bilan ifodalanishi uchun zaruriy shart edi. Bu shart yetarli shart ham bo'lib hisoblandi. Haqiqatan ham, $F^+(t)$ -bo'lakli analitik funksiyaning chegaraviy qiymati bo'lsin va Gyolder shartini qanoatlantirsin. U holda (2.2.16) formulaga asosan

$\varphi(t) = F^+(t) - F^-(t)$ shaklida olib, (2.2.16) va (2.2.17) Koshi formulasiga asosan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{F^-(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F^+(\tau) - F^-(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} F^+(z), & z \in D^+ \\ F^-(z), & z \in D^- \end{cases} f$$

ormulalarga ega bo'lamiz.

2.3-§ Analitik funksiya haqiqiy va mavhum qismlarining limitik qiymatlari uchun Gilbert formulalari.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiya birlik doirada analitik bo'lsin. s va σ lar aylananing yoy uzunliklari bo'lsin. $U(s)$ - uzluksiz funksiya $f(z)$ analitik funksiyaning haqiqiy qismining doira chegarasidagi limitik qiymati bo'lsin. Malumki Shvarts formulasi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + i v_0 \quad (2.3.1)$$

bunda $z = 0$ deb, o'rta qiymat haqidagi teoremaga asosan

$$v_0 = v(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma) d\sigma \quad (2.3.2)$$

ni topamiz. $\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}$ - ifodaga Shvarts yadrosi deyiladi. Shvarts yadrosi bilan Koshi yadrosi o'rtasida quyidagicha bog'lanish bor.

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \left(-1 + \frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z}\right) d\sigma = \frac{2}{i} \frac{d\tau}{\tau - z} - d\sigma \quad (2.3.3),$$

Bu yerdan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2u(\sigma)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma \quad (2.3.4)$$

(2.3.4) formula Shvarts integrali bilan Koshi integrali orasidagi bog'lanishni beruvchi formula bo'lib hisoblanadi.

(2.3.1) va (2.3.2) formulalarda $z \rightarrow t = e^{is}$ da Soxotskiy formulasiga asosan limitga o'tamiz. Natijada

$$u(s) + iv(s) = \frac{1}{2} 2u(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2u(\sigma)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) d\sigma + iv_0$$

ga ega bo'lamiz. Mos hadlarni qisqartirib o'ng tomonda ikkala integralni birlashtirib,

$$v(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + e^{is}}{e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma + v_0 \quad (2.3.5)$$

ni hosil qilamiz. Shvarts yadrosida maxraj va suratni $e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}$ ga ko'paytirib

$$\frac{e^{i\sigma} + e^{is}}{e^{i\sigma} - e^{is}} = \frac{e^{i\frac{\sigma-s}{2}} + e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}} - e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}} = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2}$$

hosil qilamiz. Shunday qilib

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + v_0 \quad (2.3.6),$$

Bu formula analitik funksiyaning mavhum qismini haqiqiy qismi orqali ifodalash formulasi bo'lib xisoblanadi. Aksincha $u(s)$ ni $v(s)$ orqali ifodalash uchun

$$-if(z) = v - iu$$

funksiyaning haqiqiy qismi v , mavhum qismi esa $-u$ ekanligi etiborga olib (2.3.6) formuladan

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + u_0 \quad (u_0 = u(0.0)) \quad (2.3.7)$$

ni topamiz. (2.3.6) va (2.3.7) formulalarga Gilbertning qaytish formulari deyiladi, $\operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2}$ -ga esa Gilbert yadrosi deyiladi. Gilbert yadrosi $\sigma = s$ da

birinchi tartibli maxsuslikga ega. Shuning uchun Gilbert formulasidagi integrallar maxsus integrallar bo'lib hisoblanadi. Shuning uchun ularni bosh qiymat manosida tushinish kerak.

II-bobning xulosasi

Bitiruv malakaviy ishining II bobi 3 qismdan iborat bo'lib, birinchi qismi Koshi tipidagi integrallar deb nomlanib bu bo'limda Koshi tipidagi integrallar o'rganilgan va misollar orqali mustahkamlangan.

II bobning ikkinchi mavzusi haqiqiy o'q bo'yicha olingan integral uchun Soxotiskiy formulasi deb nomlangan bo'lib bu qismda Gyolder sharti va Lipshist shartlari o'rganilgan, analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarining limitik qiymatlarini topish formulalari yani Soxotiskiy formulalari keltirib chiqarilgan.

II bobning uchinchi mavzusi analitik funksiya va mavhum qismlarining limitik qiymatlari uchun Gilbert formulalari deb nomlangan bo'lib, bu bo'limda Gilbert formulalari keltirib chiqarilgan.

Xotima

Mazkur bitiruv malakaviy ishining mavzusi analitik funksiya haqiqiy va mavhum qismlarining limitik qiymatlari uchun Gilbert formulalari deb nomlanadi. Bu bitiruv malakaviy ishi 2 ta bob, 6 ta reja, 2 ta xulosa, xotima va foydalanilgan adabiyotlardan iborat.

I bob 3 ta qismdan iborat bo'lib, asosiy tushunchalar deb nomlanadi.

I bobning 1 – rejasida mavzuni yoritish davomida foydalaniladigan umumiy tushunchalar haqida ma'lumot berilgan. 2-rejasida esa kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali tushunchasi yoritib berilgan. Bobda yana misollar ishlab korsatilgan. Shuningdek bob yuzasidan xulosa yuritilgan.

II bob 3 ta rejadani iborat bo'lib, Gilbert formulalari deb nomlanadi va dastlab Koshi integrali haqida tushuncha beriladi. Undan so'ng Gyolder sharti, Lipshist shartlari yoritilgan. Undan tashqari bu bobda bitiruv malakaviy ishining asosi bo'lgan Gilbert formulalari keltirib chiqarilgan.

Yuqoridagi boblarning barchasi ta'rif va teoremlar bilan boyitilgan. Bir qancha misollar yechimi bilan keltirilgan. Shuningdek ushbu bitiruv malakaviy ishi xotima va foydalanilgan adabiyotlardan iborat.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. “Erkin va faravon, demokratik O‘zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz”. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimga bag‘ishlangan, Oliy Majlis palatalarining qo‘shma majlisidagi nutqi. Sh.M.Mirziyoev-Toshkent O‘zbekiston, 2016
2. SH.M.Mirziyoyev “Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash-yurt taraqqiyoti va xalq farovonigining garovi” Xalq so‘zi 2016-yil 8-dekabr.
3. Sh.M.Mirziyoev 2017-yil 7-fevraldagi "O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida"gi farmoni.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи (Москва.1958).
5. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Kompleks analiz. T. Universitet. 1998. 39
6. Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X.T., Vorisov A.K., Tuychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami (kompleks analiz). 3 qism. T. «O‘zbekiston» 2000
7. Волковыцкий Л.И., Лунц Г.А., Арамонович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., «Наука» 1975.
8. А. Саъдуллаев. Голоморфные функции многих переменных. Ургенч. Изд. отдел. УрГУ. 2005.
9. Sirojiddinov S.X., Saloxitdinov M.S., Maqsudov Sh. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. T. «O‘qituvchi» 1979.
10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. «Наука». 1977.
11. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекция по теории функций комплексной переменной. М. Наука. 1984.
12. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1972.

13. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. М. Наука. 1972
14. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т.1, М. Наука, 1985.
15. www.book.ru
16. www.ziyonet.ru
17. www.studentbank.ru