

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Qo'lyozma huquqida

Atoyev Dilshod Dilmurodovich

**O'RAMA KO'RINISHDAGI INTEGRO-DIFFERENSIAL
TENGLAMALARNI SONLI YECHISH**

***Mutaxassislik:* 5A130202-“Amaliy matematika va axborot texnologiyalari”**

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy rahbar:
f. –m.f.d,professor
D.Q.Durdiyev

Buxoro-2019y.

Mundarija.

KIRISH.....	3
I BOB. INTEGRAL TENGLAMALAR HAQIDA BOSHLANG'ICH MA'LUMOTLAR.	7
1.1 Integral tenglamalarning umumiy ko'rinishlari.....	7
1.2 Integral tenglamalarni yechish usullari.....	10
II BOB. INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH.....	22
2.1. Kvadratur formulalar.	22
2.2 kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar.....	44
III BOB. O'RAMA KO'RINISHDAGI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH.....	53
3.1 Volterranning ikkinchi tur tenglamalarini sonli yechish	53
3.2 Volterranning ikkinchi tur tenglamalarini sonli yechish algoritmining integral tenglamalar sistemasiga tatbiqi.....	63
3.3 O'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamalarni sonli yechish.....	68
XULOSA.....	74
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.	75

KIRISH.

O'zbekiston Prezidentining 2017-yil 30-iyundagi farmoniga asosan tashkil etilgan "Mirzo Ulug'bek innovatsiya markazi"da 140 dan ortiq korxonaga rezident maqomi berilib, ularda ayni vaqtda mingdan ortiq dasturchi mutaxassis ishlamoqda. Muhammad al-Xorazmiy nomi berilgan Toshkent axborot texnologiyalari universitetida eng zamonaviy texnologiyalar va ta'lim uslublari keng joriy etilmoqda.

2018-yilda xalqaro tajribani, zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlanish tendensiyalarini inobatga olgan holda, "2018–2021-yillarda 'Elektron hukumat' tizimini yanada rivojlantirish strategiyasi"ni ishlab chiqish, "Mirzo Ulug'bek innovatsiya markazi" rezidentlari tomonidan ko'rsatiladigan ishlar va xizmatlar hajmini kamida 2 barobarga hamda eksport hajmini 1,8 barobarga oshirish, rezidentlar uchun chet el kompaniyalari bilan hamkorlik qilishda va yangi bozorlarga chiqishda ko'maklashish bo'yicha tegishli topshiriqlar berildi [1].

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi Farmoni, hukumat qarorlarida belgilangan va davlatimiz rahbari ta'kidlagan "...ilmiy va ijodiy izlanishlarni har tomonlama qo'llab-quvvatlash, ular uchun zarur shart-sharoitlar yaratish vazifa"si [2] har bir fan sohasi kabi, AKT sohasida ham yangi izlanishlar olib borishga undaydi. Shunday ekan, mustaqillik davrida shakllangan AKTda dasturlash sohasi tadqiqi yangi bosqichda rivojlantirilishi lozim.

Mustaqil Respublikamizda yuz berayotgan siyosiy, iqtisodiy, ilmiy-texnikaviy va madaniy o'zgarishlar Oliy ta'lim tizimida ham o'z aksini topmoqda. O'zbekistonda uzluksiz ta'lim-tarbiya tizimini yaratish, shu asosida ta'lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta'lim sistemasining eng dolzarb vazifasiga aylandi. Bu esa barcha mutaxassisliklar qatori kompyuter texnologiyalari bo'yicha kadrlar tayyorlash sifatini oshirishni ham taqazo etadi. Shu maqsadda Kadrlar tayyorlash milliy modeli talablariga muvofiq hamda yangi Davlat ta'lim

standartlari asosida ishlab chiqilgan "Uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quv adabiyotlarini yangi avlodini yaratish kontseptsiyasi" ning asosiy vazifasi qilib o'quv adabiyotlarining yaratish uchun ilmiy-g'oyaviy, uslubiy-didaktik, psixologik-pedagogik, sanitariya-gigienik talablarni ishlab chiqish, elektron darsliklardan to'g'ri va ratsional foydalanish maqsadida ularning mavjud shakllari va turlariga aniq ta'riflar berish hamda mamlakatimiz miqiyosida zamonaviy elektron darsliklar tayyorlash bo'yicha strategik masalalar ko'lamini aniqlash belgilangan.

Vatanimizning kelajagi xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak. Respublikamiz mustaqillikka erishgach, ta'lim tizimida tub o'zgarishlar sodir bo'ldi. Jamiyat taraqqiyotini yoshlar hayotida ishlab chiqarish milliy hamda umuminsoniy munosabatlarda zamonaviy qarash imkoniyatlari kengaydi. Yoshlar ta'lim tarbiyasi bilan mashg'ul bo'ladigan ijtimoiy institutlar son va sifat jihatdan o'sdi. Davlat standartlari tanlanib, pedagogik amalyotda tadbqiq etila boshlandi. Mustaqillik yillarida axborot texnologiyalari sohasida juda katta o'zgarishlar yuz bermoqda, shu bilan bir qator bu yoshlarga keng imkoniyatlar yaratilmoqda. Ijtimoiy hayotning barcha sohalarida axbarot texnologiyalari har yerda jadallik bilan kirib kelmoqda va bilimlarni oshishi jamiyat a'zolarini o'z ustlarida ko'proq ishlashga yangi-yangi o'zgarishlar bilan undashga olib kelmoqda.

Mavzuning dolzarbligi va o'rganilganlik darajasi. Hisoblash matematikasi sohasida nazariy izlanishlar asosan, tipik matematik masalalarni yechishning sonli metodlar atrofida guruhlanadi. Bu sohaning klassik masalalaridan biri bu integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini qurishdan iborat.

Bir karrali integrallarni son qiymatlari geometrik nuqtai nazardan qisqacha kvadratura deb ataladi.

Bunday masalalar bilan ko'plab matematik olimlar shug'ullanganlar.
Masalan: Gauss, Chebishev, Eyler, Nyuton va boshqalar.

Kvadratur formular deganda quyidagi taqribiy tenglikni tushunamiz:

$$\int_B f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (0.1)$$

bu yerda C_{λ} - kvadratur formulaning koeffitsientlari, $x^{(\lambda)}$ - tugun nuqtalari, N - tugun nuqtalar soni.

Faraz qilaylik $f(x)$ uzluksiz funksiyani $[a, b]$ kesmada aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulani qurish talab qilinsin.

Integralning eng sodda taqribiy ifodasi asosan $[a, b]$ kesma balandligi $f(x)$ ning $\frac{a+b}{2}$ nuqtadagi $f(\frac{a+b}{2})$ qiymatiga teng bo'lgan to'g'ri turtburchak yuzasining kattaligidan iborat.

Quyidagi kvadratur formulani hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (0.2)$$

Ushbu kvadratur formulani integro-differensial tenglama va Volterra integral tenglamasi yechimlarini taqribiy hisoblashga qo'llab yangi natijalarga erishish va uni aniq yechim bilan taqqoslash dolzarb izlanishlardan hisoblanadi. Integral tenglamalar va Volterraning ikkinchi tur tenglamalari haqida yetarli ma'lumotlar mavjud ammo o'rama ko'rinishdagi tenglamalar va ularning sonli yechimlari haqida deyarli ma'lumotlar uchramaydi.

Tadqiqot ob'yekti. Volterraning ikkinchi tur tenglamalari, o'rama ko'rinishdagi integro - differensial tenglamalar, kvadratur formulalar, optimal interpolatsion formulalar.

Tadqiqot predmeti. Hisoblash matematikasi, integro - differensial tenglamalar nazariyasi, kvadratur formulalar, .

Magistrlik dissertatsiyasining maqsadi va vazifalari: Magistrlik

dissertatsiyasining maqsadi integral tenglamalar nazariyasining chiziqli maxsus integral tenglamalarga oid natijalarni batafsil o'rgangan holda bu nazariyaga asosan ularning aniq yechimlarini topish yoki aniq yechim topilmaganda ularni sonli usulda yechimini topishdan iborat va tuzilgan algoritmni boshqa tenglamalar va tenglamalar sistemasiga tadbiq etish asosiy maqsad qilib olingan.

Tadqiqotning metodologik asosi. Tadqiqotning metodologik asosi sifatida hisoblash matematikasining asosiy metodlari, umumlashgan funksiyalar va ularning qo'llanilishi, kvadratur va kubatur formulalar qurish metodlari, xatolik funksionali uchun norma va ekstremal funksiyani topish va optimal interpolyatsion formulalar qurish algoritmlari asos qilib olindi.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati. Interpolyatsion kvadratur uchun algoritmi va dasturlar tuzildi. Ushbu formulalarning xatoliklari baholandi. Ushbu dissertatsiya ishida integro – differensial tenglama va tenglamalar sistemasini sonli yechish algoritmi va dasturi tuzildi. Taqribiy va aniq yechimlari topildi va ularni grafik usulda taqqoslandi. O'rama ko'rinishdagi tenglamalar yechish usullari aniqlandi va sonli usulda yechimi topildi, amaliyotda aniq va taqribiy yechimlari taqqoslandi.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Dissertatsiya nazariy xarakterga ega. Amaliyotda juda ko'p masalalar aniq integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Lekin har doim ham aniq integrallarni analitik usulda aniq yechib bo'lmaydi. Shuning uchun taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi. Funksiyalarni integrallashda, agar funksiya jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, integral tenglamalarni yechishda foydalanish mumkin.

Ishning hajmi va tuzilishi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasi kirish, 3 ta bob, xotima, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I BOB. INTEGRAL TENGLAMALAR HAQIDA

BOSHLANG'ICH MA'LUMOTLAR.

1.1 Integral tenglamalarning umumiy ko'rinishlari.

Integral tenglamalar nazariyasini o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi. Hammaga ma'lumki, hozirgi vaqtda mexanika, fizika, ekanomika, kimyo, bialogiya, meditsina va boshqa sohalarda uchraydigan ko'plab masalalarning matematik modellarini o'rganish integral tenglamalarni tekshirishga olib keladi.

1.1-ta'rif. Ushbu integral tenglama Fredgolmning 1-tur tenglamasi [4] deyiladi:

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.1)$$

Bunda $\varphi(x)$ – noma'lum funksiya, $f(x)$ – ozod had va $K(x, y)$ tenglamaning yadrosi – ma'lum funksiyalar, integrallash chegaralari a va b berilgan haqiqiy o'zgarmas sonlar.

1.2-ta'rif. Ushbu integral tenglama Fredgolmning 2-tur tenglamasi [4] deyiladi:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.2)$$

Bunda $\varphi(x)$ – noma'lum funksiya integral ishorasidan tashqarida ham ishtirok etmoqda. (1.1) va (1.2) dagi λ tenglamaning parametri deyiladi.

Bu tenglamalardagi $f(x)$ funksiya $I(a \leq x \leq b)$ kesmada, $K(x, y)$ yadro esa $R(a \leq x \leq b, a \leq y \leq b)$ yopiq sohada berilgan deb hisoblanadi.

1.3-ta'rif. Agar I kesmada $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, (1.2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.3)$$

Bunday tenglama bir jinsli integral tenglama deyiladi

1.4-ta'rif. Ushbu integral tenglama Fredgolmning 3-tur tenglamasi deyiladi:

$$\psi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \quad (1.4)$$

Agar I kesmada

a) $\psi(x) \equiv 0$ bo'lsa, undan (1.1) tenglama;

b) $\psi(x) \equiv 1$ bo'lsa, undan (1.2) tenglama kelib chiqadi

Integral tenglamada ishtirok etadigan noma'lum funksiya ko'p argumentli, jumladan ikki argumentli bo'lishi ham mumkin.

Masalan:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^b \int_c^d K(x,y,t_1,t_2)\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2 \quad (1.5)$$

bu yerda $f(x,y)$ funksiya $R(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ sohada, $K(x,y,t_1,t_2)$ yadro esa $P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, a \leq t_1 \leq b, c \leq t_2 \leq d)$ sohada berilgan deb hisoblanadi; a,b,c,d va λ lar berilgan o'zgarmas haqiqiy sonlardir [6].

1.5-ta'rif. Agar tenglamada noma'lum funksiya shu funksiyaning argumeneti bo'yicha olinadigan integral belgisi ostida albatta qatnashsa, bunday tenglama integral tenglama deb ataladi.

1.6-ta'rif. Agar integral tenglamada integral belgisi ostidagi funksiya va tenglamaning boshqa qismlari (hadlari) noma'lum funksiya nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda tegishli tenglama chiziqli integral tenglama deyiladi.

1.7-ta'rif. Ushbu

$$f(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds \quad (1.6)$$

ko'rinishdagi tenglama Vol'terraning birinchi tur chiziqli integral tenglamasi [5,56] deyiladi. Unda integral ostidagi funksiya noma'lum $\varphi(t)$ funksiya nisbatan chiziqli. (1.6) tenglamada $f(t)$ funksiya $I(a \leq t \leq b)$ segmentda, $K(t,s)$ funksiya esa $R(a \leq t \leq b, a \leq s \leq t)$ sohada berilgan hamda o'z argumentlari bo'yicha uzluksiz funksiyalardir. Undan tashqari, λ – o'zgarmas son (parametr),

a, b – berilgan haqiqiy o'zgarmas sonlar, $K(t, s)$ funksiya (1.6) tenglamaning yadrosi, $f(t)$ esa ozod hadi deyiladi.

1.8-ta'rif. Ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) \varphi(s) ds \quad (1.7)$$

ko'rinishdagi tenglama Vol'terraning ikkinchi tur chiziqli integral tenglamasi deb ataladi [4], [5,56]. Bunda $\varphi(t)$ noma'lum funksiya integral belgisidan tashqarida ham alohida va chiziqli bo'lib qatnashmoqda.

Agar (1.7) tenglamada ixtiyoriy $t \in I$ uchun $f(t) \equiv 0$ bo'lsa, (1.7) dan

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s) \varphi(s) ds \quad (1.8)$$

tenglama hosil bo'ladi va u Vol'terraning bir jinsli chiziqli integral tenglamasi deb ataladi.

1.9-ta'rif. Ushbu

$$\psi(t) \varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) \varphi(s) ds \quad (1.9)$$

ko'rinishdagi tenglama Vol'terraning uchunchi tur chiziqli integral tenglamasi deb ataladi [5,51].

Agar ixtiyoriy $t \in I$ uchun $\psi(t) \equiv 0$ bo'lsa, (1.9) dan (1.6) tenglama, $\psi(t) = 1$ bo'lsa, (1.9) dan (1.7) tenglama kelib chiqadi.

Ba'zi hollarda $K(t, s)$ yadro xususan $K(t-s)$, ya'ni $t-s$ ayirmaning funksiyasi ko'rinishiga ega bo'lishi mumkin. Bu holda, jumladan, ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t-s) \varphi(s) ds \quad (1.10)$$

tenglama Vol'terraning o'ram (yig'ma) tipidagi integral tenglamasi deb yuritiladi.

Agar Vol'terra tenglamalarida $a \rightarrow -\infty$ yoki $b \rightarrow \infty$ bo'lsa, ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_t^\infty K(t, s) \varphi(s) ds \quad (1.11)$$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^t K(t,s)\varphi(s)ds \quad (1.12)$$

tenglamalarga, agar $K(t,s)$ yadro qaralayotgan sohaning bir yoki bir nechta nuqtasida cheksizlikka aylansa, masalan ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t \frac{\varphi(s)}{s-a} ds, \quad (1.13)$$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t \frac{H(t,s)}{(s-a)^\alpha} \varphi(s)ds, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.14)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. Ularga Vol'terraning *maxsus integral tenglamalari* deyiladi.

Vol'terra tenglamalarida integrallash chegaralaridan biri yoki ikkalasi ham funksiyaning iborat bo'lishi mumkin. Ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^{g(t)} K(t,s)\varphi(s)ds, \quad (1.15)$$

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{t-a}^t K(t,s)\varphi(s)ds, \quad \alpha > 0, \quad (1.16)$$

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{pt}^t K(t,s)\varphi(s)ds, \quad 0 < p < 1 \quad (1.17)$$

tenglamalar ana shunday tenglamalardir [8].

1.2 Integral tenglamalarni yechish usullari.

Integral tenglamalar nazariyasi matematikaning eng rivojlangan sohalaridan biri bo'lib, fan va texnikaning rivojlanishida katta rol o'ynaydi. Bunda Vol'terra tenglamalari muhim o'rin egallaydi. Biz bu yerda Vol'terra tenglamalariga oid dastlabki ma'lumotlardan ba'zilarini keltiramiz.

Ketma-ket o'rniga qo'yish usuli.

Quyidagi

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds \quad (1.18)$$

ikkinchi tur Vol'terra tenglamasini qaraymiz. Bu yerda va kelgusida uchraydigan barcha Vol'terra tenglamalarining ozod hadi va yadrosi haqiqiy o'zgaruvchili noldan farqli funksiyalardan, λ parametr esa haqiqiy sondan iborat deb faraz qilamiz.

1.10-teorema. Agar (1.18) tenglamada $f(t)$ funksiya $I(a \leq t \leq b)$ segmentda, $K(t, s)$ funksiya esa $R(a \leq t \leq b, a \leq s \leq t)$ sohada uzluksiz bo'lib, $f(t) \neq 0$, $K(t, s) \neq 0$, $\lambda = \text{const}$ bo'lsa, u holda (1.18) tenglama I segmentda yagona uzluksiz yechimga ega bo'ladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash usuli ketma-ket o'rniga qo'yish usuli deb yuritiladi. Bu usul bilan (1.18) tenglamaning yagona uzluksiz yechimi quriladi. Izlanuvchi $\varphi(t)$ funksiyaning (1.8) tenglamadagi ifodasini shu tenglamaning o'ng tomoniga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) \left[f(s) + \lambda \int_a^s K(s, s_1) ds_1 \right] ds = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + \\ + \lambda^2 \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \varphi(s_1) ds_1 ds. \end{aligned}$$

Bu yerdagi $\varphi(s_1)$ o'rniga yana uning (1.18) tenglamadagi ifodasini qo'ysak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \left[f(s_1) + \lambda \int_a^{s_1} K(s_1, s_2) \varphi(s_2) ds_2 \right] ds_1 ds = \\ = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) f(s_1) ds_1 ds + \\ + \lambda^3 \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) \int_a^{s_1} K(s_1, s_2) \varphi(s_2) ds_2 ds_1 ds. \end{aligned}$$

Bu jarayonni davom ettirib, n marta o'rniga qo'yishni bajarsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^t K(t, s) \int_a^s K(s, s_1) f(s_1) ds_1 ds + \dots +$$

$$+\lambda^n \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-2}} K(s_{n-2},s_{n-1}) f(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds + R_{n+1}(t) \quad (1.19)$$

bu yerda

$$R_{n+1}(t) = \lambda^{n+1} \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-1}} K(s_{n-1},s_n) \varphi(s_n) ds_n \dots ds.$$

Bunga asosan quyidagi qatorni qaraymiz:

$$f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s) f(s) ds + \dots + \lambda^n \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-2}} K(s_{n-2},s_{n-1}) f(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds + \dots \quad (1.20)$$

Teoremaning shartlariga asosan, bu qatorning har bir hadi t ning I segmentda uzluksiz funksiyasidan iborat. Demak, agar bu qator I segmentda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi ham shu segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyadan iborat bo'ladi.

$K(t,s)$ va $f(t)$ funksiyalar mos ravishda yopiq R va I sohalarda uzluksiz ekanidan quyidagini yozish mumkin:

$$\max_{(t,s) \in R} |K(t,s)| = M, (\text{yoki } |K(t,s)| < M);$$

$$\max_{t \in I} |f(t)| = N, (\text{yoki } |f(t)| < N).$$

Bularga asosan (1.1.20) qatorning n -hadi ($f(t)$ 0-had)

$$V_n(t) = \lambda^n \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-2}} K(s_{n-2},s_{n-1}) f(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds \quad (1.21)$$

quyidagicha baholanadi:

$$|V_n(t)| \leq |\lambda^n| N M \frac{(t-a)^n}{n!} \leq |\lambda|^n N \frac{[M(b-a)]^n}{n!}, t \in I.$$

Bundan ko'rinadiki, umumiy hadi (n -hadi) ushbu

$$|\lambda|^n N \frac{[M(b-a)]^n}{n!}$$

ko'rinishda bo'lgan musbat hadli sonli qator λ, M, N va $b-a$ larning har qanday musbat chekli qiymatlarida yaqinlashuvchi ekani ravshan (bunga Dalamber alomatini bevosita qo'llanish yordamida ishonch hosil qilish mumkin). Shuning

uchun Veyershtrass teoremasiga asosan umumiy hadi (1.21) dan iborat bo'lgan (1.20) qator I da absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar (1.18) tenglama uzluksiz yechimga ega bo'lsa, bu yechim (1.19) tenglamaning ham yechimi bo'lishi kerak, ya'ni bu yechim qoldiq hadi $R_{n+1}(t)$ dan iborat bo'lgan (1.19) qator bilan ifodalanishi kerak. Agar (1.18) tenglama uzluksiz yechimga ega bo'lsa, o'sha yechim (1.19) ko'rinishda yozilishi mumkin. $\varphi(t)$ ning I da uzluksizligi esa ushbu munosabatni yozishga asos bo'ladi: $\max_{t \in I} |\varphi(t)| = Q$.

Shuning uchun ushbuga egamiz:

$$|R_{n+1}(t)| \leq |\lambda|^{n+1} Q M^{n+1} \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq |\lambda|^{n+1} Q \frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(t) = 0$.

Shunday qilib, ixtiyoriy n uchun (1.18) tenglamaning yechimi (bu yechim mavjud bo'lganda) (1.20) qatorga yoyildi.

Endi (1.20) qatorning yig'indisidan iborat uzluksiz $\varphi(t)$ funksiya (1.18) tenglamaning yechimi ekanini ko'rsatamiz. Bunga ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) f(s_1) ds_1 ds + \dots \quad (1.22)$$

qatorni (1.18) tenglamadagi $\varphi(t)$ ning o'rniga bevosit qo'yish natijasida ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan, yuqoridagi (1.22) tenglikning har ikkala tomonini $\lambda K(t,s)$ ga ko'paytirib, uning har ikkala tomonini a dan t gacha integrallaymiz.

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^t K(t,s) \varphi(s) ds &= \lambda \int_a^t K(t,s) \left[f(s) + \lambda \int_a^s K(s,s_1) f(s_1) ds_1 + \dots \right] ds = \\ &= \lambda \int_a^t K(t,s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) f(s_1) ds_1 ds + \dots = \varphi(t) - f(t). \end{aligned}$$

Bu esa (1.22) tenglik bilan aniqlanuvchi $\varphi(t)$ funksiya (1.18) tenglikning yechimi ekanini ko'rsatadi [14].

Ketma-ket yaqinlashish usuli

Vol'terra tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligi ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida ham ko'rsatiladi.

Ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds \quad (1.23)$$

Vol'terraning chiziqli tenglamasini qaraymiz [5,27], [14].

1.1.2-teorema. Agar $f(t)$ funksiya $I(a \leq t \leq b)$ segmentda, $K(t,s)$ funksiya (yadro) esa $R(a \leq t \leq b, a \leq s \leq t)$ sohada uzluksiz bo'lib, $f(t) \neq 0$, $K(t,s) \neq 0$, $\lambda = \text{const}$ bo'lsa, u holda (1.23) tenglama I segmentda yagona uzluksiz yechimga ega bo'ladi va bu yechim $\varphi_0(t)$ ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lganda ushbu

$$\varphi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds \quad (n=1,2,3,\dots)$$

recurrent formula yordamida aniqlanuvchi $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlikning $n \rightarrow \infty$ dagi limitidan iborat bo'ladi.

Isbot. Teoremaning yechimi mavjudligi haqidagi qismi yangi tasdiq emas. Biz uning ikkinchi qismini isbotlashimiz lozim. I segmentda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy $\varphi_0(t)$ funksiyaning tanlaymiz. Bu funksiyaning (1.18) tenglamaning o'ng tomonini $\varphi(s)$ ning o'rniga qo'yib,

$$\varphi_1(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi_0(s)ds$$

tenglikni hosil qilamiz. Shu tarzda topilgan $\varphi_1(t)$ funksiya I segmentda uzluksiz funksiya iborat.

Endi topilgan $\varphi_1(t)$ funksiyaning yana (1.23) tenglamaning o'ng tomonidagi $\varphi(s)$ ning o'rniga qo'yib,

$$\varphi_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi_1(s)ds$$

$$R_n(t) = \lambda^n \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-3}} K(s_{n-2}, s_{n-1}) \varphi_0(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds_1 ds.$$

Shartga ko'ra $K(t,s)$ va $\varphi_0(t)$ funksiyalar mos ravishda R va I larda uzluksiz, demak,

$$|K(t,s)| \leq M, |\mu_0(t)| \leq Q.$$

Bularga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|R_n(t)| \leq QM^n |\lambda|^n \int_a^t ds \int_a^s ds_1 \dots \int_a^{s_{n-1}} ds_{n-2} = QM^n |\lambda|^n \frac{(t-a)^n}{n!},$$

ya'ni

$$|R_n(t)| \leq QM^n |\lambda|^n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Shuning uchun ravshanki, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) = 0$.

Buni nazarda tutib, (1.25) tenglikning har ikkala tomonida $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $\varphi_n(t)$ funksiyalarning limiti

$$f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s) f(s) ds + \dots + \lambda^n \int_a^t K(t,s) \int_a^s K(s,s_1) \dots \int_a^{s_{n-1}} K(s_{n-2}, s_{n-1}) f(s_{n-1}) ds_{n-1} \dots ds + \dots \quad (1.26)$$

qatorning yig'indisiga teng ekanligi va uning (1.23) tenglamaning yechimi ekaniga ishonch hosil qilamiz. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t).$$

Ko'rinib turibdiki, topilgan $\varphi(t)$ yechim I segmentda uzluksiz funksiyadir.

Yuqorida bayon etilgan usul Vol'terraning chiziqli integral tenglamasini yechishning ketma-ket yaqinlashish usuli deyiladi.

Bu usul har bir $\varphi_n(t)$ funksiya tanlangan $\varphi_0(t)$ uzluksiz boshlang'ich funksiyaga bog'liq, lekin $\varphi(t)$ yechim esa $\varphi_0(t)$ ning tanlanishiga bog'liq emas.

Xususiyl holda $\varphi_0(t)$ sifatida $f(t)$ funksiya olinsa, $\varphi_n(t)$ lar (1.26) qatorning xususiyl yig'indilaridan iborat bo'ladi.

Boshlang'ich $\varphi_0(t)$ funksiyani qulay qilib tanlash $|\varphi_n(t)|$ ketma-ketlikning tenglama yechimiga tezroq yaqinlashishini taminlaydi [6],[8].

Integral tenglamalarni yechishning usullardan baʼzilarini misollarda koʻrib chiqamiz.

1-misol. Ushbu tenglama yechilsin:

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 (1 + xt)u(t)dt.$$

Berilgan aynigan yadroli integral tenglamani chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirib yechish usulidan foydalanib yechamiz.

Bu misoldagi λ parametr umumiy holda berilgan boʻlib, $K(x, t) = 1 + xt$ yadro yuqoridagi (10) koʻrinishda ifodalangan. Tenglamaning oʻng tomonidagi integralni ikkiga ajratib,

$$\int_0^1 (1 + xt)u(t)dt = \int_0^1 u(t)dt + x \int_0^1 tu(t)dt$$

soʻngra quyidagicha

$$Q_1 = \int_0^1 u(t)dt, \quad Q_2 = \int_0^1 tu(t)dt$$

belgilaymiz. U holda berilgan integral tenglama

$$u(x) = x^2 + \lambda Q_1 + \lambda Q_2 x$$

koʻrinishda yoziladi. Nomaʼlum funksiyaning mana shu ifodasidan foydalanib, Q_1 bilan Q_2 ni hisoblaymiz:

$$Q_1 = \int_0^1 u(t)dt = \int_0^1 (t^2 + \lambda Q_1 + \lambda Q_2 t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \lambda Q_1 t + \frac{1}{2}\lambda Q_2 t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \lambda Q_1 + \frac{1}{2}\lambda Q_2$$

yoki

$$(1 - \lambda)Q_1 - \frac{1}{2}\lambda Q_2 = \frac{1}{3}.$$

Xuddi shuningdek,

$$Q_2 = \int_0^1 u(t)dt = \int_0^1 (t^2 + \lambda Q_1 + \lambda Q_2 t)dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda Q_1 + \frac{1}{3}\lambda Q_2$$

yoki

$$-\frac{1}{2}\lambda Q_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\lambda\right)Q_2 = \frac{1}{4}$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ldi:

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)Q_1 - \frac{1}{2}\lambda Q_2 &= \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2}\lambda Q_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\lambda\right)Q_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemaning yechimini Kramer formulalariga asosan yozamiz:

$$Q_1 = \frac{D_1}{D} \quad Q_2 = \frac{D_2}{D}$$

Bu erda

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda & 1-\frac{1}{3}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{12}(\lambda^2 - 16\lambda + 12) \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{4} & 1-\frac{1}{3}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{72}(\lambda + 24),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}(3-\lambda),$$

Demak,

$$Q_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda + 24}{\lambda^2 - 16\lambda + 12}, \quad Q_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3-\lambda}{\lambda^2 - 16\lambda + 12}$$

Bularni izlanayotgan noma'lum funksiyaning (11) ifodasiga qo'yib, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$u(x) = x^2 + \frac{\lambda(3-\lambda)}{\lambda^2 - 16\lambda + 12}x + \frac{\lambda(24+\lambda)}{6(\lambda^2 - 16\lambda + 12)},$$

Bu esa berilgan masalaning yechimidir. Yechim ifodasidagi kasrlarning maxraji nolga teng bo'lmasligi uchun λ parametr

$$\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizi bo'lmashligi shart, ya'ni $\lambda \neq 8 \pm 2\sqrt{3}$ xususiyl holda $\lambda = 2$ deb faraz qilsak, yechim quyidagicha yoziladi:

$$u(x) = x^2 - \frac{x}{8} - \frac{13}{24}$$

2-misol. Ushbu tenglamani yeching.

$$u(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 \int_0^1 (xy + t_1 t_2) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Aynigan yadroli ushbu integral tenglamani ko'effitsiyentlarni tenglash usuli bilan yechamiz.

O'ng tomondagi qavslarni ochib ikkala integralni ham qisqacha Q_1 va Q_2 orqali belgilaymiz:

$$u(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 \int_0^1 (xy + t_1 t_2) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_0^1 \int_0^1 (xy + t_1 t_2) u(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{xy}{2} - \frac{1}{3} + xyQ_1 + Q_2,$$

$$\left(Q_1 + \frac{1}{2}\right)xy + \left(Q_2 - \frac{1}{3}\right) = \alpha \cdot xy + \beta$$

u ning mana shu ifodasini berilgan integral tenglamaga qo'yamiz:

$$\alpha \cdot xy + \beta = \frac{xy}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 \int_0^1 (xy + t_1 t_2) (\alpha t_1 t_2 + \beta) dt_1 dt_2.$$

Bu yerdagi integrallar hisoblab chiqilsa, quyidagi ayniyat

$$\alpha \cdot xy + \beta = \left(\frac{1}{4}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right)xy + \left(\frac{1}{9}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{3}\right).$$

Hosil bo'ladi. Uning ikki tomonidagi xy ning ko'effitsentlarini o'zaro hamda ozod hadlarni o'zaro tenglash natijasida quyidagi tenglamalar

$$\alpha = \frac{1}{4}x + \beta + \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{9}x + \frac{1}{4}\beta - \frac{1}{3}$$

yoki

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4}\alpha - \beta &= \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{9}\alpha - \frac{3}{4}\beta &= \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo`ladi. Bu sistemaning yechimi

$$\alpha = \frac{6}{65}; \quad \beta = -\frac{28}{65}$$

Demak, integral tenglamaning yechimi

$$u(x, y) = \alpha \cdot xy + \beta = \frac{6}{65}xy - \frac{28}{65}$$

bo`ladi.

3-misol. Ushbu tenglamani yeching: (Bu yerda ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanamiz).

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt,$$

bunda

$$f(x) = x \text{ va } \lambda = 1$$

Endi quyidagi munosabatlardagi hadlarni hisoblab chiqamiz:

$$u_0(x) = f(x) = x;$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x)t dt = \left[\frac{t^3}{3} - x \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} = -\frac{x^3}{3!};$$

$$u_2(x) = \int_0^x (t-x) \left(-\frac{t^3}{3!} \right) dt = \frac{x^5}{5!};$$

$$u_3(x) = \int_0^x (t-x) \left(\frac{t^5}{5!} \right) dt = -\frac{x^7}{7!};$$

va hokazo. Bu ifodalarning hosil bo`lishidagi qonuniyat ko`rinib turibdi. Ularning yig`indisini hisoblasak, izlanayotgan yechim hosil bo`ladi:

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x$$

4-misol. Ushbu tenglama rezol`venta yoradami bilan yechilsin:

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt,$$

Topamiz:

$$K_1 = K(x, t) = t - x = -(x - t)$$

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x (x-s)(s-t)ds = \int_t^x (x-s)(x+s-t-x)ds = \int_t^x (x-s)[(x-t)-(x-s)]ds \\ &= \int_t^x (x-s)[(x-t)-(x-s)]ds = (x-t) \int_t^x (x-s)ds - \int_t^x (x-s)^2 ds = -(x-t) \left[\frac{1}{2}(x-s)^2 \right]_{s=t}^x + \frac{1}{3} [(x-s)^3]_{s=t}^x \\ &= \frac{1}{2}(x-t)^3 - \frac{1}{3}(x-t)^3 = \frac{(x-t)^3}{3!} \end{aligned}$$

Xuddi shu usulda $K_3(x, t)$ ni topamiz:

$$K_3(x, t) = - \int_t^x (x-s) \frac{(s-t)^3}{3!} dt = - \frac{1}{3!} \int_t^x (x-t-s+t)(s-t)^3 ds = - \frac{(x-t)^5}{5!}$$

va hokazo bularni $\Gamma(x, t, \lambda) = K_1(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \lambda^2 K_3(x, t) + \dots$ formulaga qo`yib rezol`ventani topamiz:

$$\Gamma(x, t, \lambda) = -(x-t) + \frac{(x-t)^3}{3!} - \frac{(x-t)^5}{5!} + \dots = -\sin(x-t)$$

U holda berilgan tenglamaning yechimi

$$u(x) = x - \int_0^x \sin(x-t)tdt$$

bo`ladi. O`ng tomondagi integralni hisoblab quyidagi natijani olamiz:

$$u(x) = \sin x$$

I bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyani I bobida integral tenglamalar haqida ma'lumotlar keltirilgan. Integral tenglama turlari, volterra tenglamalari va o'rama ko'rinishdagi integral tenglamalar keltirilgan. Integral tenglamalarni yechimini aniqlash usullari haqida ma'lumotlar keltirilgan. Har bir yechimni aniqlash usullari aniq misollarda qo'llanigan va integral tenglamalar yechimi aniqlangan.

II BOB. INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH

2.1. Kvadratur formulalar.

Amaliy analizning ko'pgina masalalari differensial tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar bunday funksiyalarni integrallash kerak bo'lsa, u holda faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarining qiymatlaridan foydalanish maqsadga muvofiq deb hisoblanadiki, agar chetki nuqtalarda chegaraviy nuqtalarni biz bilsak, ketma-ket hosilalarning qiymatlarini funktsiyani aniqlovchi differensial tenglamalardan osongina hisoblashimiz mumkin. Shuning uchun bizning asosiy maksadimiz shundan iboratki, biz $f(x)$ funksiyalarning yetarlicha keng sinfi uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrallarning taqribiy qiymatini integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqning chekli songa olingan nuqtalaridagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasiga keltiriladigan metodlarni ko'rib chiqamiz [9].

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (2.1)$$

Bu yerda $x_k^{(n)}$ ($k=1,2,\dots,n$) kvadratur formulaning tugunlari $A_k^{(n)}$ kvadratur formulaning koeffitsientlari va $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ kvadratur yig'indi deyiladi. Kvadratur formulaning tugunlari $x_k^{(n)}$ va koeffitsientlari $A_k^{(n)}$ funksiyaning tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi talab qilinadi.

Ushbu

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

ifoda esa kvadratur formulaning qoldiq hadi yoki xatosi deyiladi. Odatda (2.1) formulaga nisbatan umumiyroq kvadratur formula qaraladi.

Quyida $[a,b]$ oraliqni chekli deb faraz qilib, biz kvadratur formula tuzishning ayrim yo'nalishlarini qisqacha ko'rib chiqamiz.

1.Ko'pincha kvadratur formula tuzish uchun $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda n ta $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ nuqtalar yordamida interpolatsiyalanadi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} f(x_k^{(n)}) + r_n(f, x).$$

Endi buni $\rho(x)$ ga ko'paytirib integrallasak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx$$

Kelib chiqadi, bu yerda

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} dx$$

Shu usulda tuzilgan kvadratur formulalar *interpolyatsion formulalar* deyiladi [19].

2. Veyeshtas teoremasiga asosan, chekli oraliqda uzluksiz funksiyalarni algebraik ko'phadlar bilan yetarlicha yuqori aniqlikda yaqinlashtarish mumkin. Shu bilan birga ko'phad darajasi qancha yuqori bo'lsa, aniqlik ham shuncha yuqori bo'ladi. Shuning uchun ham (2.1) formulada $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, bu tenglik yetarlicha yuqori darajali algebraik ko'phadlar uchun aniq bo'lsin. Shu usul bilan tuzilgan (2.1) formula $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ko'p funksiyalarni integrallashtirishda aniqlik jihatidan yaxshi natija beradi. Odatda, (2.1) formula barcha darajali ko'phadlar uchun aniq bo'lib, $f(x) = x^{m+1}$ uchun aniq bo'lmasa, u holda uning *algebraik aniqlik darajasi* m ga teng deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri 2π ga teng bo'lsin va $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. U holda (2.1) formulaga $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, u imkon boricha yuqori tartibli trigonometrik ko'phadlarni aniq integrallasin. Aniqlik darajasi (tartibi) eng yuqori bo'lgan kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega. Bunday formulalar *Gauss tipidagi kvadratur formulalar* deyiladi [21].

3. Kvadratur formulalar tuzishda elliginchi yillarning oxirlaridan boshlab yangi bir yo'nalish rivojlana boshladi. Uning mohiyati quyidagidan iborat. Bizga $f(x)$

funksiyalarning biror sinfi F berilgan bo'lsin. Butun F sinf uchun aniqlikni tavsiflaydigan miqdor sifatida quyidagi aniq yuqori chegara

$$R_n = \sup |R_n(f)| = \sup \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|$$

olinadi. Bu yerda $[a, b]$ da $x_k^{(n)}$ tugunlarini va $A_k^{(n)}$ koefitsientlarni shunday tanlash talab qilinadiki, R_n o'zining eng kichik qiymatiga erishsin. Bunday formulalar, tabiiy ravishda, funksiyalarning F sinfiga eng kichik xatoga ega bo'lgan formulalar deyiladi.

Masalani boshqacha tarzda ham qo'yish mumkin, ya'ni $A_k^{(n)}$ yoki $x_k^{(n)}$ larga nisbatan ayrim shartlar bilan, masalan, koefitsientlarning o'zaro teng bo'lishlari

$$A_1^{(n)} = A_2^{(n)} = \dots = A_n^{(n)} = A^{(n)}$$

yoki tugunlarning bir xil uzoqlikda joylashgan bo'lishligi kabi va hokazo.

Integrallarni (2.1) formula yordamida hisoblashda, kvadratur yig'indi umuman taqribiy ravishda hisoblanadi. Odatda $f(x_k^{(n)})$ o'rnida biror $f_1(x_k^{(n)})$ ga ega bo'lamiz, demak

$$f(x_k^{(n)}) = f_1(x_k^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)}$$

bu yerda $\varepsilon_k^{(n)}$ – yaxlitlash xatosi. Faraz qilaylik, barcha $k=1, 2, \dots, n$ uchun $|\varepsilon_k^{(n)}| \leq \varepsilon$ bo'lsin. Agar ko'paytmalarning yig'indisi $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f_1(x_k^{(n)})$ aniq hisoblansa, uholda kvadratur yig'indini hisoblashda yaxlitlash xatosi $\varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)}$ dan ortmaydi, xususan teng bo'lishi ham mumkin.

Faraz qilaylik, (2.1) formula $f(x) \equiv 1$ ni aniq integrallasin, ya'ni,

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) dx$$

Bundan, ravshanki $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)}$ eng kichik qiymatini qabul qilishi uchun barcha $k = \overline{1, n}$ lar uchun $A_k^{(n)} > 0$ bo'lishi kerak. Bu esa musbat koeffisientlarni kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

Eng sodda kvadratur formulalarni oddiy mulohazalar asosida qurish mumkin. Aytaylik, $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Agar qaralayotgan oraliqda $f(x) = \text{const}$ bo'lsa u vaqtda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula to'g'ri turtburchaklar formulasi deyiladi [9].

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo'lsin. u holda tabiiy ravishda integralning balandligi $b-a$ va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapestiya yuzi bilan almashtirish mumkin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)), \quad (2.2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula trapestiya formulasi deyiladi.

Nihoyat $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda kvadratik formulaga yaqin bo'lsin,

u holda $\int_a^b f(x)dx$ ni taqribiy ravishda Ox o'qi va $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar hamda $y=f(x)$ funksiya grafigining absstissalari $x=a$, $x=\frac{a+b}{2}$, $x=b$ bo'lgan nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi tartibli parabola orqali chegaralagan yuza bilan almashtirish mumkin. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left\{ f(a) - f\left(\frac{b-a}{2}\right) + f(b) \right\}, \quad (2.3)$$

Bu formulani ingliz matematigi **Simpson** 1743 yilda taklif etgan edi. Bu formulani hosil qilinish uslubidan ko'rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$\ell_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Ko'phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta eng sodda kvadratur formulaga ega bo'ldik.

(2.1) formulani chizishda u o'zgarmas son $f(x) = c$ ni aniq integrallashni talab qilgan edik. Lekin u $f(x) = a_0 + a_1x$ chiziqli funksiyasi ham aniq

integrallaydi, chunki $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ balandligi va o'rta chizig'i $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

bo'lgan ixtiyoriy trapeستيya yuziga teng.

Shunga o'xshash Simpson formulasi ham biz kutgandan ko'ra ham yaxshiroq formuladir. U uchunchi darajali

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3$$

u vaqtda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3 dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4), \quad (2.4)$$

Lekin bizga ma'lumki,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{2} [P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)], \quad (2.5)$$

Ikkinchi tomondan

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{2} \{a_3a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3b^3\}, \quad (2.6)$$

ayniyat o'rinlidir. Endi (1.5)-(1.6) ni (1.4) ga qo'shib,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{2} \{P_3(a) + 4P_3(\frac{a+b}{2}) + P_3(b)\}$$

ni hosil qilamiz [21],[19].

Shunday qilib biz uchta kvadratur formulani qurdik. Ulardan ikkitasi to'g'riturtburchak va trapestiya formulalari- birinchi darajali ko'phad uchun aniq formula bo'lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko'phad uchun aniq formuladir.

Buyuk matematik Gauss kvadratura nazariyasiga butunlay yangi va juda muhim g'oyani kiritdiki, u amaliy analizning kop sohalari rivojlanishi uchun asos bo'lib qoldi. Faraz qilaylik, ba'zi bir $y = f(x)$ integrallanuvchi funksiya x o'zgaruvchining uzluksiz oraliqni har bir nuqtasida emas balkim, shu oraliqda etuvchi maxsus tanlangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan bo'lsin. Biz bu yerda faqat chekli oraliqni qaraymiz. Shuning uchun uni darhol normalab qo'yamiz.

Oraliqni

$$-1 \leq x \leq 1$$

ga keltiramiz va $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalar ham qaysikim, $y = f(x)$ funksiya berilgan oraliqda tegishli bo'lsin. Umuman olganda n ning katta bo'lishidan qat'iy nazar,

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

ordinatalar $f(x)$ funlstiyani aniqlash uchun yetarli emas. Lekin biz $f(x)$ funksiyaning oraliq nuqtalari uchun integrallashga harakat qilamiz. Shu maqsadda x ning darajali funksiyalaridan foydalanamiz. Biz shunday $n-1$ darajali $P_{n-1}(x)$ ko'phad topishimiz mumkinki, u ham x_n nuqtalarda y_n qiymatga ega bo'ladi. Odatda chekli ayirmalarni hisoblashda berilgan $x = x_n$ nuqtalar teng taksimlangan qilib taksimlanadi.

Gaussning g'oyasi shundan iboratki nuqtalarning holatini oldindan belgilamasdan ushunday sondagi ordinatalar bilan yuqori aniqlikka erishish mumkinligi kabi, bu yerda nuqtalar shunday joylashtiriladiki natijada eng yaxshi natijalar olinadi. Bu yo'lda Gauss kvadratur formulalarning nafaqat eng yuqori aniqlikka erishdi, balkim bu jarayon ko'phadlar bilan teng taqsimli interpolyastiyalashda xavfdan ham holidir. Qaysikim bu xavf u davrda ham ma'lum emasdi. Faraz qilaylik $x = x_k$ interpolyastiyalash nuqtalari tamoman erkin bo'lsin va biz bu nuqtalarda $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ qiymatlarni qabul qiladigan $U = P_{n-1}(x)$ ko'phadni topamiz. Bu masalani hal qiladigan formula Lagranjning interpolyastion formulasi sifatida ma'lum. U

$$F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

fundamental ko'phadni qurishga va uni ketma-ket har bir n ta ikki hadliga bo'lishga asoslangandir.

Shunday qilib biz quyidagi xossalarga ega bo'lgan

$$Q_i(x) = \frac{F_n(x)}{F'_n(x_i)(x - x_i)} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

ko'phadni oldik. $Q_i(x)$ $x = x_i$ nuqtadan tashqari barcha $x = x_k$ nuqtalarda nolga teng, $x = x_i$ da esa birga teng. Agar f_{ik} - **Kroneker** simvolini kiritsak, ya'ni

$$Q_i(x_k) = f_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \\ 0, & \text{agar } i \neq k \end{cases}$$

Bu holda kurish mumkinki,

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \dots + y_n Q_n(x),$$

Ko'phad qo'yilgan shartni kanoatlantiradi: yani $x = x_k$ nuqtalarda $y = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) qiymatlarni qabul qiladi.

$P_{n-1}(x)$ - ko'phadning yagonaligi shu dalildan kelib chikadiki, $P_{n-1}(x)$ ko'phad bilan ikkinchi gipotetik $\bar{P}_{n-1}(x)$ ko'phad o'rtasidagi ayirma birga $x = x_k$ nuqtalarda nolga aylanadi. Lekin $P_{n-1}(x) - \bar{P}_{n-1}(x)$ ayirma ham yana $n-1$ darajali ko'phad bo'lib, u esa aynan nolga aylanmasdan $n-1$ tadan ko'p ildizga ega bo'lmaydi: bu esa

$$P_{n-1}(x) = \bar{P}_{n-1}(x)$$

ekanligini bildiradi.

Endi agar biz $P_{n-1}(x)$ ni $y = f(x)$ funkstiyaga yetarlicha yaqinlashgan deb hisoblasak,

$$\bar{A} = \int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n y_k \int_{-1}^1 Q_k(x) dx, \quad (2.7)$$

hisoblasak, amaliyotda noma'lum $f(x)$ egrilik ostidagi yuzaga ega bo'lamiz. Berilgan ayrim taksimlangan $x = x_k$ nuqtalar uchun $Q_k(x)$ ko'phadlar bir qiymatli aniqlangan va shuning uchun ham

$$\int_{-1}^1 Q_k(x) dx = \omega_k, \quad (2.8)$$

aniq integrallar ba'zi bir sonli qiymatlarga ega bo'ladiki, qaysikim ular uchun jadvallar tuzish mumkin.

Bizni qiziktiruvchi yuza uchun bu qiymatlar tamoman $y = f(x)$ funksiyaning tabiatiga bog'lik emas.

Oldingi $x = x_i$ nuqtalarni o'zgartirmasdan yangi $x = x_{n+1}$ qo'shimcha nuqtani qo'shamiz. Qo'shimcha $x = x_{n+1}$ ikki hadni kiritib, $Q_{n+1}(x)$ - qo'shimcha ko'phadni hosil qilamiz. Ta'rifdan $Q_i(x)$ uchun kelib chiqadiki, $Q_{n+1}(x)$ ko'phad $F_n(x)$ ko'phadga proporstionaldir, qaysikim $(x - x_{n+1})$

yangi ko'paytuvchi qiskarib ketadi. Xuddi shunday yangi y_{n+1} ordinata ko'paytiriladigan vaznli ω_{n+1} vaznli ko'paytuvchi

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx, \quad (2.9)$$

aniq integralga proporsionaldir.

Shunga uxshash, agar yangi

$$X = X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m} \quad (2.10)$$

nuqtalarni ularni ordinatalari bilan kiritsak, u holda ularga mos

$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots, \omega_{n+m}$ vaznlar

$$\omega_{n+i} = \int_{-1}^1 F_n(x) \xi_{m-1}^i(x) dx \quad (2.11)$$

integral bilan aniqlanadi, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x)$ - ayrim $m-1$ darajali ko'phadlardir. Ixtiyoriy $\xi_{m+1}(x)$ ko'phad, $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ darajali funksiyalarning chiziqli superpozitsiyasidan iborat ekanligidan, agar $F_n(x)$ quyidagi integrallarni qanoatlantirsa, bu hamma vaznlar avtomatik ravishda nolga aylanadi.

$$\int_{-1}^1 F_n(x) dx = 0, \dots, \int_{-1}^1 F_n(x) x^{m-1} dx = 0,$$

haqiqattan ham bizning talablarimiz $m=n$ gacha borib,

$$\int_{-1}^1 F_n(x) x^\alpha dx = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.12)$$

integral shartining bajarilishidir.

Natijada bizning boshida berilgan n ta nuqtani ixtiyoriy ravishda qo'shsak ham baribir hech bir yangi ordinata oldingi natijalarni o'zgartirmaydi.

Oldingi natija shundan iboratki, xuddi biz $2n$ ta ordinata bilan ish ko'rib, haqiqattan esa biz n ta ordinatadan foydalanamiz, yangi qurilgan ordinatalar esa hisoblanayotgan yuzaga hech nima qo'shmaydi.

Bu jarayonda biz

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \omega_k$$

yig'indiga n ta hadni tejayimz. Bu fikrlashlar yuqoridagi mulohazalar uchun yetarlicha emasdir. To'liqroq bo'lishi uchun quyidagi mulohazani tavsiya etamiz.

Haqiqattan ham yangi $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ nuqtalarning berilishi nafaqat $Q_{n+m}(x)$ ($m=1,2,\dots,n$) yangi ko'phadlarni qo'shadi, xatto oldingi $Q_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) ko'phadlar ham o'zgaradi: har bir yangi x_{n+m} nuqta $Q_i(x)$ ga qo'shimcha $\frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}$ ko'paytuvchini kiritadi.

Shunday qilib, yangi m ta $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ nuqtalarning kiritilishi oldingi $Q_i(x)$ ko'phadni

$$Q_i^*(x) = Q_i(x) \frac{x - x_{n+1}}{x_i - x_{n+1}} \cdot \frac{x - x_{n+2}}{x_i - x_{n+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n+m}}{x_i - x_{n+m}}, \quad (2.13)$$

ko'phadga aylantiradi.

Yuqoridagi mulohazalarning haqiqat ekanligi shakli o'zgartirilgan $Q_i^*(x)$ ko'phadlarning quyidagi xossalarga ega ekanligidan kelib chiqadi:

$$1^0. \quad Q_i^*(x) = \delta_{ik} \quad (k=1,2,\dots,n).$$

$$2^0. \quad \int_{-1}^1 Q_i^*(x) dx = \int_{-1}^1 Q_i(x) dx = \omega_i$$

endi bu xossalarni isbotini ko'ramiz.

Birinchi xossa bevosita (2.13) munosabatdan kelib chiqadi. Ikkinchisi uchun esa

$$\frac{x - x_{n+k}}{x_i - x_{n+k}} = 1 + \frac{x - x_i}{x_i - x_{n+k}}$$

dan foydalanamiz.

Bundan shuni xulosa qilamizki, (2.13) tenglikning o'ng tomonidagi qo'shimcha ko'paytuvchilarni ko'paytirishni $1 - \xi_{m-1}^i(x)$ ko'rinishda tasvirlash mumkin ekan, bu yerda $\xi_{m-1}^i(x) - m-1$ darajali ko'phad. (2.12) shartning kuchiga asosan 2^0 - tenglik bajariladi. Isbotlangan 1^0 va 2^0 lar ko'rsatadiki yangi ordinatalar oldingi olingan natijalarni o'zgartirmaydi.

Muhimrog'i shundan iboratki, bizlar qo'shimcha $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{2n}$ ordinatalarni bilishimiz shart emas.

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n y_k \omega_k, \quad (2.14)$$

Yig'indi n ordinata yordami bilan shunday aniqlikdagi yuzani beradiki, agar biz $2n$ - ordinata olsak ham o'zgarmaydi.

(2.12) - tipdagi integral shart ortogonallashtirish sharti deyiladi. Biz ko'rsatamizki, $F_n(x)$ ko'phad $1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ darajali funksiyalarga ortogonaldir. Bunday shartlarni oldin ortogonal funksiyalar sistemasini ko'rib chiqqanda o'rganganmiz.

Biz Yakobi ko'phadlarini tekshirib chiqdikki, u (2.12) shart ma'nosida ko'phad darajasidan past bo'lgan barcha x ning darajalariga ortogonallik xossalriga egadir. Ammo ortogonallik sharti umumiy holda yana $\rho(x)$ vazn ko'paytuvchini ham integral ostiga oladi. Faqat maxsus hollarda "Lejandr ko'phadlari" da bu vazn ko'paytuvchi 1 ga teng bo'ladi va

shunday qilib, ortogonallik oddiy ortogonallikka aylanib qoladi. Shunday qilib, $F_n(x)$ funksiyani tanlash masalasi hal qilinadi:

Gauss metodi $F_n(x)$ ni n - Lejandr ko'phadlari bilan mos qo'yishni talab qiladi: bu ko'phad ildizlari bizga shunday nuqtalarni beradiki, qaysikim $f(x)$ funksiya qiymatlari berilgan bo'ladi. ω_i koeffitsientlarning sonli qiymatlari bilan birga shu ildizlarning juda aniq jadvallari borki, u (2.8) formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma'lumki, $[a, b]$ da n nuqtali interpolatsion formulaning

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2.15)$$

tugun nuqtalari $[a, b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat'iy nazar, $(n-1)$ - darajali ko'phadlar aniq integrallanishi qaraladi. Chekli $[a, b]$ oraliq va $\rho(x) \equiv 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlar shunday tanlanganki, (2.15) formula mumkin qadar darajasi eng Yuqori bo'lgan ko'phadlarni aniq integrallasin. (2.15) formula n ta parametr - tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo'li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka ortirishni ko'rish mumkin. Haqiqatdan ham $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (2.15) formulaning darajasini $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko'phadlar uchun aniq bo'lishga erishishni Gauss ko'rsatdi.

Qanchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalar uchun umumlashtirildi. Bunday formulalar Gauss tipidagi kvadratur formulalar deyiladi. Qulaylik uchun x_n tugunlar o'rnida

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ko'phad bilan ish ko'ramiz. Agar x_k lar ma'lum bo'lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma'lum bo'ladi va aksincha. Lekin x_n larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak, u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a, b]$ oraliqda yotishini ko'rsatishimiz shart.

Teorema 2.1 (2.15) kvadratur formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir:

1) U interpolystion va 2) $\omega_n(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo'lgan barcha $Q(x)$ ko'phadlarga ortogonal bo'lishi kerak.

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0, \quad (2.16)$$

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, (2.15) formula darajasi $2n-1$ dan oshmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallasin. U holda u interpolystiondir.

Endi darajasi n dan kichik bo'lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko'phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Shuning uchun ko'rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan ko'phad. Shuning uchun ham uni (2.15) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_k(x_k) Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) ni hisobga olsak (2.16) tenglik kelib chiqadi, chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko'phad va (2.15) formula interpolystiondir.

Demak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k), \quad (2.17)$$

lekin (2.17) ga ko'ra $r(x) = f(x)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Shu bilan birga teoremaning yetarli sharti isbot bo'ldi.

$\omega_n(x)$ ko'phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlar bilan ortogonal va bosh koeffitsienti birga teng bo'lishi uchun, bunday $\omega_n(x)$ ko'phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a, b]$ oraliqda yotadi. Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda uz ishorasini saklasa, u holda har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun $2n-1$ darajali ko'phadlarni aniq integrallaydigan yagona (2.15) kvadratur formula mavjud.

Faraz qilaylik bizga $f(x)$ funktsiyaning $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nuqtalardagi $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ qiymatlari berilgan bo'lib, maqsad shu nuqtalar bo'yicha $\int_a^b f(x) dx$ integralning taqribiy qiymatini mumkin qadar

Yuqori aniqlikda topishdan iboratdir. Demak, A_k koeffitsientlar aniqlanishi kerak. Buning uchun $f(x)$ ni uning berilgan qiymatlaridan foydalanib, $(n-1)$ - darajali ko'phad bilan interpolastiyalaymiz:

$$f(x) = L_{n-1}(x) + r_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) + r_n(f, x), \quad (2.18)$$

endi bu tenglikni $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaylik:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx, \quad (2.19)$$

qoldiq hadni tashlasak,

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \\ A_k &= \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

kvadratur formulalarga ega bo'lamiz.

Bu formula qurilish usuliga ko'ra interpolystion formula deyiladi. Bunday formulalar uchun ushbu teorema o'rinlidir.

Teorema 2.2 Quyidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2.21)$$

kvadratur formulaning interpolystion bo'lishi uchun uning barcha $(n-1)$ -darajali algebraik ko'phadlarni aniq integrallashi zarur va kifoyadir [9].

Isbot. Zarurligi. Agar $f(x)$ $(n-1)$ -darajali ko'phad bo'lsa, u holla (1.18) tenglikda $r_n(f, x) \equiv 0$ bo'lib,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k)$$

tenglik urinli bo'ladi va (2.21) hamda interpolystion bo'lganidan (2.20) ga ko'ra:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Demak, (2.21) formula $(n-1)$ -darajali $f(x)$ ko'phadni aniq integrallaydi.

Yetarlighi. (2.21) formula $(n-1)$ - darajali ixtiyoriy ko'phad uchun aniq formuladir. Xususiyl holda, u $(n-1)$ - darajali ushbu

$$\omega_m(x) = \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i} \quad (m=1,2,\dots,n)$$

ko'phad uchun ham aniq bo'ladi.

Agar $\omega_m(x_k) = 0 \quad (k \neq m)$ va $\omega_m(x_m) = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i} dx = \int_a^b \rho(x) \omega_m(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_m(x_k) = A_m$$

kelib chiqadi. Demak, (2.21) ham interpoliyastiondir, shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan ko'rinadiki, n nuqtali interpoliyastion kvadratur formulaning algebraik aniqlik darajasi $n-1$ dan kichik bo'lmasligi kerak. Bularga asosan, ishonch hosil qilish mumkinki, to'g'ri turtburchak, trapeziya va Simpson formulalari interpoliyastion kvadratur formulalardir.

Amaliy analizning ko'pgina masalalari differensial tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar bunday funksiyalarni integrallash kerak bo'lsa, u holda faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarining qiymatlaridan foydalanish maqsadga muvofiq deb hisoblanadiki, agar chetki nuqtalarda chegaraviy nuqtalarni biz bilsak, ketma-ket hosilalarning qiymatlarini funksiyani aniqlovchi differensial tenglamalardan osongina hisoblashimiz mumkin. Shuning uchun bizning asosiy maksadimiz shundan iboratki, effektiv kvadratur formulalarni hosil qilish uchun biz ichki ordinatalardan emas, balkim chegaraviy ordinatalardan va bu nuqtalarda hosilalarning qiymatlaridan foydalanamiz. Bunday formulalar aniqlikni oshirish uchun emas, balki integralarni hisoblash uchun chegaraviy axborotlardan foydalaniladi. Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 2.3 Agar ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va m -tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi;

$$\int_a^b u(x) v^{(m)}(x) dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x) v^{(m-\alpha-1)}(x) (-1)^\alpha \right] \Big|_a^b + R_m(x), \quad (2.22)$$

bu yerda,

$$R_m(x) = \int_a^b (-1)^m v(x) u^{(m)}(x) dx \quad (2.23)$$

va α -hosila tartibi.

Isbot: Har bir $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda differensiallanuvchi va undan tashqari bu oraliqda $u(x)$ $v'(x)$ funksiya uchun boshlangich funksiya mavjud bo'lsin. U holda $[a, b]$ oraliqda $u(x)$ $v'(x)$ funksiya uchun boshlangich funksiya mavjud bo'lib, bo'laklab integrallash formulalari o'rinlidir. Ya'ni

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx, \quad (2.24)$$

yoki boshqacha yozsak

$$\int_a^b u(x) v'(x) = u(b) v(b) - u(a) v(a) - \int_a^b v(x) u'(x) dx, \quad (2.25)$$

Shunday qilib (2.22) formulaning ung tomoni uchun (2.25) formulani m marta qo'llasak quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) v^{(m)}(x) - \int_a^b (-1)^m v(x) u^{(m)}(x) dx &= \left[u(x) v^{(m-1)}(x) - u'(x) v^{(m-2)}(x) + \dots + \right] \Big|_a^b = \\ &= \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x) v^{(m-\alpha-1)}(x) (-1)^\alpha \right] \Big|_a^b \end{aligned} \quad (2.26)$$

Bundan esa quyidagini olamiz.

$$\int_a^b u(x)v^m(x)dx = \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} u^{(\alpha)}(x)v^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^\alpha \right] \Big|_a^b + \int_a^b (-1)^m u^{(m)}(x)v(x)dx, \quad (2.27)$$

va teorema shu bilan isbotlanadi.

(2.22) formuladan biz quyidagicha foydalanamiz. Integrallash oraligini (0,1) oraliqgacha normallaymiz. Ya'ni quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$u(x) = f(x),$$

$$v(x) = \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} \quad (2.28)$$

Bu yerda

$$g_m(x) = \beta_m^m x^m + \beta_{m-1}^m x_{m-1} + \dots + \beta_0^m, \quad (2.29)$$

ko'phadni erkin tanlaymiz

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarni bunday tanlashlar natijasida (2.22) formula quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin.

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\beta_m^m m!} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x) g_m^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^\alpha \right] \Big|_0^1 + R_m, \quad (2.30)$$

Bu yerda

$R_m(x)$ - quyidagi aniq integralni bildiradi:

$$R_m = (-1)^m \int_0^1 \frac{g_m(x)}{\beta_m^m m!} f^{(m)}(x)dx, \quad (2.31)$$

(2.30) formulani biz quyidagicha tushunamiz va u shundan iboratki oraliqning chetki nuqtalarida egri chiziqning chegaraviy qiymatlari va hosilalarining qiymatlari uchun tegishli yuzani hisoblaydigan kvadratur formulani ifodalaydi.

$$g_m \frac{1}{\beta_m^m m!} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} f^{(\alpha)}(x) g_m^{(m-\alpha-1)}(x)(-1)^\alpha \right] \Big|_0^1, \quad (2.32)$$

Shu vaqtda (2.31) formuladagi qiymat kvadratur formulaning R_m qoldigini tasvirlaydi.

Shunday qilib biz funksiya va uning hosilalarining chegaraviy qiymatlarida hisoblanadigan kvadratur formulalar va uning qoldiq hadiga ega bo'ldik.

Odatda xos qiymat deb ataluvchi nomalum doimiy λ parametrni o'z ichiga olgan chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin. Yani shunday bir jinsli chegaraviy shartlar berilganki, tenglamaning yechimi faqat λ parametrni tanlash bilan topish mumkin. Masala shundan iboratki, shunday λ eng kichik qiymatni yoki bir nechta λ eng kichik qiymatlarni topish mumkin bo'lsaki, masala yechimga ega bo'lsin.

Bunday xos qiymatlar bilan bog'liq masalalarni yechish uchun effektiv kvadratur formulalarning qo'llanilishi yaqqol yordam berishi mumkin, chunki u faqat oraliqning chetki nuqtalarida funksiya va uning hosilalarini bilishga asoslangandir. Bu qiymatlar esa berilgan differensial tenglamalar va chegaraviy shartlar asosida olinadi.

Bu metodni qo'llanishini namoyish qilish uchun biz oddiy bir misol olamiz. Lekin metod esa murakkab shartlar asosida qo'llaniladi. Bizning asosiy maqsadimiz metodning jiddiy qirralarini o'rganishdan iborat bo'ladi. Murakkablashgan texnik qiyinchiliklari bundan mustasnodir. Shuning uchun biz o'zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli differensial tenglamaga to'xtalamiz.

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad (2.33)$$

Chegaraviy shartlari quyidagicha

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2.34)$$

Berilgan oraliq $[0,1]$ ga keltirilgan. Bir jinsli chiziqli differensial tenglama o'zgarmas amplitudali ko'paytuvchi qoldirganligidan $x = 0$ nuqtadagi hosila uchun ixtiyoriy $y'(0) = 1$ qiymatni yozish mumkin. Bu shartlar bilan (2.33) differensial tenglama $x = 0$ nuqtada barcha hosilalarning qiymatlarini aniqlaydi. Biz ularni ketma-ket differensiallash bilan yoki uni quyidagi $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ darajali qatorga yoyib va o'rniga qo'yib olamiz. Barcha o'xshash hadlarni

to'playmiz va x^k oldidagi olingan koeffisientlarni nolga tenglashtiramiz. Bizning oddiy misolimizda $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1-\lambda}{6}$, $y(0)$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$, $y'''(1) = 1-\lambda$ ni topamiz.

Agar biz koeffisientlarni ketma-ket topishni qancha davom ettirsak, shuncha katta aniqlikni kutishimiz mumkin. Bizning maqsadimiz uchun bu yerda biz a_3 ga to'xtalamiz. Boshqa chetki nuqta uchun xuddi shunday

$$x = 1 + \xi, \quad y = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3$$

deb olamiz.

Oldingiga o'xshagan differentsial tenglamaga etib qo'yish metodidan foydalansak, biz b_0 ni emas balki, barcha keyingi koeffisientlar b_0 koeffisientning chiziqli funksiyasi bo'lar ekan.

$$b_0 = b_1, \quad b_2 = -\frac{\lambda b_0}{2}, \quad b_3 = -\frac{\lambda b_0}{6}$$

$$y(+1) = b_0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -\lambda b_0, \quad y'''(1) = \lambda b_0 \quad (2.36)$$

Endi biz $y''(x)$ ni $f(x)$ boshlangich funksiya sifatida qabul qilamiz va kvadratur formulani qo'llaymiz. Xuddi shunday $f(x) = y''(x)$ va $f'(x) = y'''(x)$ ikkala chetki nuqtalarda berilgan.

$$f(0) = -1 \quad f(1) = -\lambda b_0$$

$$f'(0) = 1 - \lambda \quad f'(1) = \lambda b_0$$

$n = 2$ bo'lganda effektiv kvadratur formula

$$\int_0^1 y''(x) dx = y'(1) - y'(0) = \frac{6(-1 - \lambda b_0) + 1(1 - \lambda - \lambda b_0)}{12};$$

$$-1 = \frac{-5 - 7\lambda b_0 - \lambda}{12}$$

ni hosil qilamiz, bu quyidagi munosabatga olib keladi.

$$b_0 = \frac{7 - \lambda}{7\lambda}, \quad (2.37)$$

Endi biz yana bir marta $y'(x)$ ni $f(x)$ sifatida olib, effektiv kvadratur formuladan foydalanamiz;

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = -\lambda b_0$$

$$f''(0) = 1 - \lambda, \quad f''(1) = \lambda b_0$$

Hozir biz ikkala chetkilar uchun uch juft berilganlarga egamiz va formulani $n = 3$ bo'lganda qo'llaymiz.

$$\int_0^1 y'(x) dx = y(1) - y(0) = \frac{60(1+0) + 12(-1 + \lambda b_0) + (1 - \lambda + \lambda b_0)}{120}$$

$$b_0 = \frac{49 - \lambda + 13\lambda b_0}{120}$$

Bu esa yangi munosabatni beradi.

$$b_0 = \frac{49 - \lambda}{120 - 13\lambda} \quad (2.38)$$

(2.37) va (2.38) larning o'ng tomonlarini tenglashtirib λ -xos qiymatni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglamani olamiz.

$$20\lambda^2 - 554\lambda + 840 = 0$$

Biz ikkita

$$\lambda_1 = 1,6095, \quad \lambda_2 = 26,0905, \quad (2.39)$$

ildizlarga ega bo'lamiz.

Faqat kichik ildizning o'ziga xos qiymati bor, kattasini olsak, hisoblashlarda katta o'zgarishlar bo'ladi. Kichik ildiz uchun biz differensiallash jarayonini davom ettirsak, unda o'zgarish bo'lmaydi. Biz $y'''(x)$ ga kelib qoldiq. Agar biz

yana bir qadam bajarsak, $y'''(0)$ va $y'''(1)$ ni kiritsak, effektiv kvadratur formulaning birinchi yaqinlashishi $n = 3$ da ikkinchisi esa $n = 4$ da bo'ladi. Bu uchun biz ikkita munosabatni olamiz.

$$b_0 = \frac{71-10\lambda}{\lambda(73-\lambda)} \quad \text{va} \quad b_0 = \frac{679-18\lambda}{168-201\lambda+\lambda^2}$$

Va ular λ ni aniqlash uchun

$$28\lambda^3 - 4074\lambda^2 + 80638\lambda - 119280 = 0$$

kub tenglamani beradi. Bu yerda yechimi

$$\lambda_1 = 1,608467,$$

dan iborat bo'ladi. λ_1 qiymatning kichkina o'zgarishi, (2.39) da topilganga nisbattan ko'rsatadiki, birinchi qo'pol yaqinlashish haqqatga juda yaqin ekanki, aniqlik 0,07% gacha bo'ldi. Ko'rgan oddiy misolimizda natijalarimizni tekshirishimiz mumkin. λ_1 - nazariy jihatdan

$$\lambda = \frac{1}{4} + \theta^2, \quad (2.40)$$

$$\theta \text{ esa } \operatorname{tg} \theta = 2\theta$$

transtendent tenglamani echimidir. Bu tenglamaning eng kichik ildizi

$$\theta_1 = 1,1655618 \quad \text{eki} \quad \lambda_1 = 1,608534 \quad \text{ni beradi.}$$

Shunday qilib $n = 2,3$ uchun yaqinlashish xatoligi $\eta = -0,0010$ ga, $n = 3,4$ da esa $\eta = 0,000067$ ga teng bo'ldi.

Xuddi shunday silliq $f(x) = y''(x)$ $n = 3$ funksiyalar uchun uni qo'llasak yaqinlashish juda tez bo'ladi.

Ma'lumki xos qiymatlarni olish uchun Rem- Ritst metodi ba'zi bir integrallarni minimallashtirishga asoslangandir, shuning uchun ham u metod faqat o'ziga qo'shma differensial operatorlarga qo'llanishi mumkin.

Tavsiya etilgan metod uchun esa differensial operator va chegaraviy shartlar o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi talab qilinmaydi. Shuning uchun bu metod ancha umumiy hollarda ham qo'llaniladi va xatto bu metodik qo'llash uchun differensial tenglamaning chiziqli bo'lishi shart emas.

Bu g'oyani yana ham ilgari suradigan bo'lsak shunday xulosaga kelamizki, effektiv kvadratur jarayoni nafaqat xos qiymatlarni topish uchun balkim, differensial tenglamalarning haqiqiy yechimlarini topishga ham qo'llanilishi mumkin.

2.2 kvadratur formulalar uchun algoritm va dasturlar

To'g'ri to'rtburchaklar usuli.

Volterranning ikkinchi tur tenglamasi berilgan bo'lsin [17]

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$[a,b]$ oraliqda n ta nuqtani olamiz $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$ $u(x)$ funksiyaga yaqinlashuvchi qiymatlarni topib ulardan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunday sistemani hosil qilish mumkin, agar tenglamalar tarkibiga kiruvchi integralni hisoblashga yaqin qoida topilsa. Integral x parametrga bog'liq. [20]

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = \sum_{k=1}^n c_k(x)u(x_k) + p(x) \quad (2.41)$$

bu ifodani (2.41) tenglamada qo'yib $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ uchun $u(x)$ ning qiymatlarini topamiz.

$$u(x_i) = f_i + \lambda \sum_{k=1}^n c_k(x_i)u(x_k) + \lambda p(x_i) \quad (2.42)$$

$P(x)$ qoldiq had juda kichik qiymatga ega bo'lgani uchun uni tashlab yuborishimiz mumkin va

$$u_i - \lambda \sum_{k=1}^n c_k(x_i)u_k = f_i \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

ni hosil qilamiz .

Ko'p hollarda misollarni N-tugun nuqtalarinig uncha katta bo'lmagan qiymatlarida hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun natijalarni aniq hisoblashda aniqlik darajasi yuqori bo'lgan usullardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Odatda Gauss yoki gauss Kristofel usullarining aniqlik darajasi yuqori bo'lgani uchun ko'p foydalaniladi. Shuningdek to'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiya usullaridan foydalanish mumkin. Bu usullar oddiy formulalardan tuzilib, yaxshi samara beradi, lekin Gauss usuliga qaraganda tugun nuqtalar sonini ko'p bo'lishini talab qiladi.

To'g'ri to'rtburchaklar usulida

$$h = \frac{b-a}{N}; \quad x_i = a + ih; \quad i = 0..N \quad u_i = u(x_i)$$

$$u_i = f_i + \sum_{k=0}^N K(x_i, x_k) u_k h$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$K(x_i, x_0)u_0 + K(x_i, x_1)u_1 + \dots + K(x_i, x_n)u_n = f_i$$

Chiziqli algebraik sistemalarni quyidagi ko'rinishga keltiramiz :

$$\lambda MU = V$$

Bunda

$$M_{i,j} = K(x_i, x_j) \quad M_{i,i} = K(x_i, x_i) = -1$$

$$V_i = -f(x_i)$$

ya'ni

$$\begin{pmatrix} \lambda(K(x_1, x_1) - 1)u_1 & \lambda K(x_1, x_2)u_2 & \dots & \lambda K(x_1, x_n)u_n \\ \lambda K(x_2, x_1)u_1 & \lambda(K(x_2, x_2) - 1)u_2 & \dots & \lambda K(x_2, x_n)u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda K(x_n, x_1)u_1 & \lambda K(x_n, x_2)u_2 & \dots & \lambda(K(x_n, x_n) - 1)u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_1) \\ -f(x_2) \\ \dots \\ -f(x_n) \end{pmatrix}$$

hosil bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish mumkin

Nyuton – Kotes kvadratur formulalari:

Nyuton – Kotes formulalari eng dastlabki interpolatsion kvadratur formulalardan hisoblanadi. Bu formulalarda oraliq chekli, vazn funksiyasi $\rho(x) \equiv 1$ va x_i tugunlar teng uzoqlikda joylashgandir. Lekin aksariyat adabiyotlarda Nyuton – Kotes formulasi (1.1) ko'rinishida emas, balki boshqa ko'rinishda keltiriladi. Biz ham shu ko'rinishda qaraymiz. Buning uchun $[a, b]$ oraliqni

$$x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = \overline{0, n} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$(n+1)$ ta nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va $A_k^{(n)}$ koefitsientlarni tegishli ko'rinishga keltirish uchun

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx$$

integralda $x = a + th$ almashtirish bajaramiz,

$$x - x_i^{(n)} = (t - i)h, \quad x_k^{(n)} - x_i^{(n)} = (k - i)h,$$

bo'lganligi uchun

$$\prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=0, i \neq k}^n (t - i)$$

demak,

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt.$$

Endi

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - j) dt.$$

deb olsak, u holda Nyuton – Kotes formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} f(a + kh).$$

bundagi $B_k^{(n)}$ koefitsientlar $[a, b]$ oraliqda bog'liq emas.

Kotes tomonidan $B_k^{(n)}$ koefitsientlar $n=1, 2, \dots, 10$ uchun hisoblangan. R.O. Kuzmin $B_k^{(n)}$ lar uchun $n \longrightarrow \infty$ da asimptotik formulalarni topgan edi. Bu

formulalardan jumladan, $n \longrightarrow \infty$ da $\sum_{k=1}^n |B_k^{(n)}| \longrightarrow \infty$ kelib chiqadi. Endi

$$\sum_{k=1}^n |B_k^{(n)}| = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx = 1 \text{ ekanligini hisobga olsak, bundan } n \text{ yetarlicha katta bo'lganda}$$

koeffisientlar orasida manfiylari ham, musbatlari ham mavjudligi ravshan bo'lib qoladi. Hatto, $n=8$ va $n=10$ bo'lganda ham $B_k^{(n)}$ lar orasida manfiylari mavjuddir.

Shuning uchun ham Nyuton-Kotes formulalarini katta n larda qo'llash maqsadga muvofiq emas. Ravshanki, $n=1$ va $n=2$ bo'lganda formuladan mos ravishda trapetsiya va Simpson formulalari kelib chiqadi. To'g'ri to'rtburchak formulasi esa $\rho(x) \equiv 1$ va $n=1$ bo'lganda

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{k=0}^n B_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right).$$

formuladan kelib chiqadi. $n=3$ bo'lganda (2.1) dan “Sakkizdan uch qoidasi” deb ataluvchi Nyuton formulasiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b) \right].$$

Nyuton – Kotes formulasi bilan tanishib chiqdik. Endi Mathcad dasturida formulaning yechimini va qoldiq hadini ko'ramiz.

Nyuton - Kotes formulasining dasturi:

$$T(f, a, b) := \begin{cases} h \leftarrow \frac{b-a}{8} \\ s \leftarrow 3 \cdot f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3 \cdot f\left[a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3}\right] \\ d \leftarrow f(a) + f(b) \\ (d + s) \cdot h \end{cases}$$

$$f(x) := x \cdot \ln(1 + x) \qquad y(x) := e^{-x^2}$$

$$M1 := T(f, 0.4, 1.2)$$

$$M2 := T(y, 0, 1)$$

$$M1 = 0.3948276735$$

$$M2 = 0.7469923196$$

$$N1 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) dx$$

$$N2 := \int_0^1 y(x) dx$$

$$N1 = 0.3947789587$$

$$N2 = 0.7468241328$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = 0.000049$$

$$R2 = 0.000168$$

Interpolyatsion kvadratur formulalar va umumlashgan kvadratur formulalar bilan tanishdik. Endi bu formulalar ya'ni to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya, Simpson formulalarning dasturlarini Mathcad dasturlash tilida yechimini va qoldiq hadini ya'ni xatosini ko'ramiz.

Dasturda qatnashgan o'zgaruvchilar:

M1, M2 – biz tuzgan dasturning chiqargan natijasi.

N1, N2 – Mathcad dasturining chiqargan natijasi.

R1, R2 – qoldiq hadi.

To'g'ri to'rtburchak formulasining dasturi:

$$T(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + f(a + i \cdot h) \\ \frac{b-a}{n} \cdot s \end{array} \right.$$

$$y(x) := e^{x^2}$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$$

$$M1 := T(y, -1, 1, 100)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 100)$$

$$M1 = 2.8713002687$$

$$M2 = 0.4136909658$$

$$N1 := \int_{-1}^1 y(x) dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) dx$$

$$N1 = 2.9253034918$$

$$N2 = 0.4178397619$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = 0.054$$

$$R2 = 0.00415$$

Trapetsiya formulasining dasturi

$$T(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + 2 \cdot f(a + i \cdot h) \\ s \leftarrow s + f(a) + f(b) \\ \frac{b-a}{2 \cdot n} \cdot s \end{array} \right.$$

$$y(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$$

$$M1 := T(y, -1, 1, 100)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 100)$$

$$M1 = \blacksquare$$

$$M2 = \blacksquare$$

$$N1 := \int_{-1}^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} \frac{1}{\sqrt{3+x^2}} dx$$

$$N1 = \blacksquare$$

$$N2 = \blacksquare$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = \blacksquare$$

$$R2 = \blacksquare$$

Simpson formulasining dasturi:

$$T(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{2n} \\ k \leftarrow \frac{b-a}{6 \cdot n} \\ s \leftarrow 0 \\ d \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..2n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s + 4f(a + i \cdot h) \text{ if } \text{mod}(i, 2) = 1 \\ d \leftarrow d + 2f(a + i \cdot h) \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ k \cdot (s + d + f(a) + f(b)) \end{array} \right.$$

$$y(x) := e^{0.6x} \cdot \cos(x)$$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$$

$$M1 := T\left(y, 0, \frac{\pi}{2}, 10\right)$$

$$M2 := T(f, 0.4, 1.2, 10)$$

$$M1 = \blacksquare$$

$$M2 = \blacksquare$$

$$N1 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(x) dx$$

$$N2 := \int_{0.4}^{1.2} f(x) dx$$

$$N1 = \blacksquare$$

$$N2 = \blacksquare$$

$$R1 := |N1 - M1|$$

$$R2 := |N2 - M2|$$

$$R1 = \blacksquare$$

$$R2 = \blacksquare$$

Xulosa chiqaradigan bo'lsak, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}$ funksiya orqali uchta kvadratur formulaning chiqargan natijasini ko'rdik. Demak, qoldiq hadlarni hisobga oladigan bo'lsak, to'g'ri to'rtburchakdan trapetsiya, trapetsiyadan Simpson kvadratur formulasi yaxshi natija berdi.

Chebyshev kvadratur formulas i:

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &\equiv 1 & n &:= 7 & k &:= 1..n \\ f(x) &:= e^{x^2} \\ x &:= \begin{pmatrix} -0.8838617008 \\ -0.5296567753 \\ -0.3239118105 \\ 0 \\ 0.3239118105 \\ 0.5296567753 \\ 0.8838617008 \end{pmatrix} & a &:= -1 & b &:= 1 \\ & \int_a^b f(x) dx = 2.9253034918 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) = 2.9249010416$$

II bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyani II bobida integrallarni taqribiy hisoblash usullari kvadratur formulalar haqida ma'lumotlar keltirilgan. Hisoblash usullari aniq misollarda qo'llanilgan, kvadratur formulalar xatoliklari tahlil qilinib, effektivligi ko'rib chiqilgan. Mathcad tizimida kvadratur formulalarga aniq misollar keltirilgan yechimlar taqqoslangan va xatoliklar baholangan.

III BOB. O'RAMA KO'RINISHDAGI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH

3.1 Volterranning ikkinchi tur tenglamalarini sonli yechish

Volterranning ikkinchi tur chiziqli tenglamasi quyidagi shaklga ega [13],[5]:

$$y(x) - \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), x \in [a,b]. \quad (3.1)$$

Bu yerda $y(x)$ - noma'lum funksiya, $K(x,s)$ - integral tenglamaning yadrosi, - integral tenglamaning ozod hadi (o'ng tomon). Birjinsli tenglama ($f(x) \equiv 0$) faqatgina nolga teng yechimga ega, bir jinsli bo'lmagan (3.1) tenglamaning yechimi mavjudligi sharti turli cheklanishlarga ega $K(x,s)$ yadrosiga bog'liq va $f(x)$ ga bog'liq. Xususan yechim $[a,b]$ kesmada uzluksiz sinfda mavjud va yagona, agar $s=a$, $x=b$, $x=s$, chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak tomonlarida va ichida yadro uzluksiz, $f(x)$ funksiya esa $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa [14],[8].

(3.1) tenglama quyidagi integral operatorga ega:

$$A\varphi(x) \equiv \int_a^x K(x,s)\varphi(s)d(s). \quad (3.2)$$

Ma'lumki, har qanday x uchun $\varphi(x) = A\varphi(x)$ funksiya qiymatlari faqatgina $s < x$ uchun $\varphi(s)$ funktsiyaning qiymatlari bilan aniqlanadi. Bu xossaga ega bo'lgan integral operatorlar "Volterra" operatorlari deb ataladi va davomiyli jarayonlarni tavsiflashda va teskari bog'langanlikda keng qo'llaniladi.

Integral tenglamalarning sonli yechishda ulardagi integrallar odatda chekli yig'indilar bilan almashtiriladi. Kvadratur usulga asosan integral operatorlar har xil kvadratur formulalar yordamida olingan yig'indilar bilan almashtiriladi. (3.1) tenglamani yechishda kvadratur usulilini qo'llash uchun quyidagi tenglikdan foydalaniladi:

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Bu tenglama (3.1) tenglamadan x erkli o'zgaruvchining x_i fiksirlangan qiymatlarida olinadi. To'r tugunlari maxsus yoki oldindan tanlangan bo'lishi mumkin, masalan f o'ng tomon jadval ko'rinishida berilgan bo'lsa.

x_i qiymatlarni kvadratur formula tugunlari sifatida qabul qilamiz va (3.3) dagi integralni chekli yig'indi bilan almashtiramiz. Quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Bu yerda A_j – kvadratura formula vazni, R_i – approksimatsiya xatoliklari. R_i xatoliklarni kichik deb hisoblab tashlab yuboramiz. Bu holda quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$y_i - \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Bu erda $y_i = \tilde{y}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $\tilde{y} - y$ funksiyaga yaqinlashish. (3.5) tenglamalar sistemasi yechimi x_i tugun nuqtalarda funksiyaning taqribiy qiymatlarini beradi [7].

(3.5) sistemani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$-\sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

(3.6) ni quyidagi ko'rinishga yozish mumkin,

$$\begin{pmatrix} 1 - A_1 K_{11} & & & \\ -A_1 K_{21} & 1 - A_2 K_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -A_1 K_{n1} & -A_2 K_{n2} & \cdots & 1 - A_n K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Yuqoridagidan ko'rinadiki bu sistema matritsasining koeffitsientlari uchburchak ko'rinishida. Agar matritsaning barcha diagonali elementlari noldan farqli bo'lsa, u holda $y_1, y_2, \dots, y_n$ larni quyidagi rekurent formula yordamida ketma-ket toppish mumkin.

$$y_i = (1 - A_i K_{ii})^{-1} \left(f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

$(1 - A_i K_{ii}) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, shartiga kvadratur formula tugun nuqtalarini tanlash yo'li bilan va A_i koeffisientlarni yetarlicha kichik qilib olish bilan erishiladi.

(3.7) ning xarakterli xususiyati shundan iboratki, qadamlar soni oshishi bilan yig'indi hadlari ko'payishi hisoblashlar oshishiga olib keladi, $A_j K_{ij}$ koeffisientlar qiymatlari har bir i qiymatda o'zgaradi, bu esa oldingi qadamlardagi hisoblashlar natijalaridan foydalanishga yo'l qo'ymaydi. Bundan tashqari har xil kvadratur formulalarni qo'llashda ham xarakterli tomonlari bor.

Masalan simson formulasini qo'llash toq tugun nuqtalar uchun boshqa biror bir qoida asosida o'zgarishi kerak masalan, to'g'ri to'rtburchaklar yoki trapetsiya formulasi bilan. Gauss va Chebishov formulalarini qo'llashda murakabliklar kelib chiqadi. Trapetsiya formulasini qo'llash yetarlicha soda va ko'p hollarda effektiv hisoblanadi [9].

Bir biridan h qadam masofada joylashgan tugun nuqtalarga asoslangan kvadratur trapetsiya formulasidan foydalanamiz. U holda (3.7) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y_i = (1 - \frac{h}{2} K_{ii})^{-1} \left(f_i + \frac{h}{2} K_{i1} y_1 + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Mathcad tizimida biz ijro etuvchi Volterra dasturini tuzamiz:

```

Voltera(K,f,a,b,h) :=
  x1 ← a
  i ← 1
  while xi ≤ b
    |
    | xi+1 ← xi + h
    | i ← i + 1
  y1 ← f(x1)
  for i ∈ 2..(b-a)/h + 1
    |
    | s ← 0
    | for j ∈ 2..i-1      if i > 2
    |   s ← s + K(xi,xj) · yj
    | yi ←  $\frac{1}{1 - \frac{h}{2} \cdot K(x_i, x_1)} \cdot \left( f(x_1) + \frac{h}{2} \cdot K(x_i, x_1) \cdot y_1 + h \cdot s \right)$ 
  y

```

Mathcad tizimida yaratilgan Volterra dasturi.

Mathcad tizimida yaratilgan Volterra dasturidan foydalanib, quyidagi misolni taqribiy yechimini ko'ramiz:

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds = e^{-x}, \quad x \in [0,1].$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned}
 K1(x,t) &:= e^{-(x-t)} & f1(x) &:= e^{-x} & h &:= 0.1 & r(x) &:= 0 \\
 y &:= \text{Voltera}(K1,f1,0,1,h) & a &:= 0 & b &:= 1 & n &:= \frac{b-a}{h} \\
 x_1 &:= a + (i-1) \cdot h & t(x) &:= 1 & i &:= 1..n+1
 \end{aligned}$$

Volterra funksiyasini shu misol uchun qo'llaymiz

$$y := \text{Voltera}(K1, f1, 0, 1, h)$$

va quyidagi natijani olamiz:

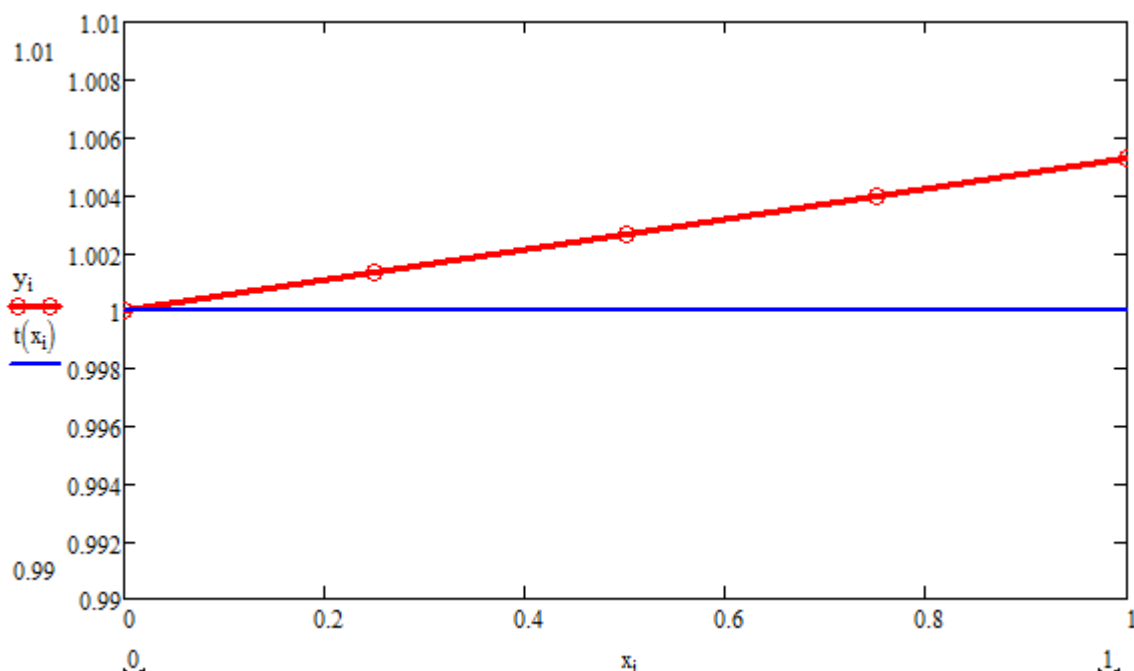
$$x =$$

	1
1	0
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.4
6	0.5
7	0.6
8	0.7
9	0.8
10	0.9
11	1

$$y =$$

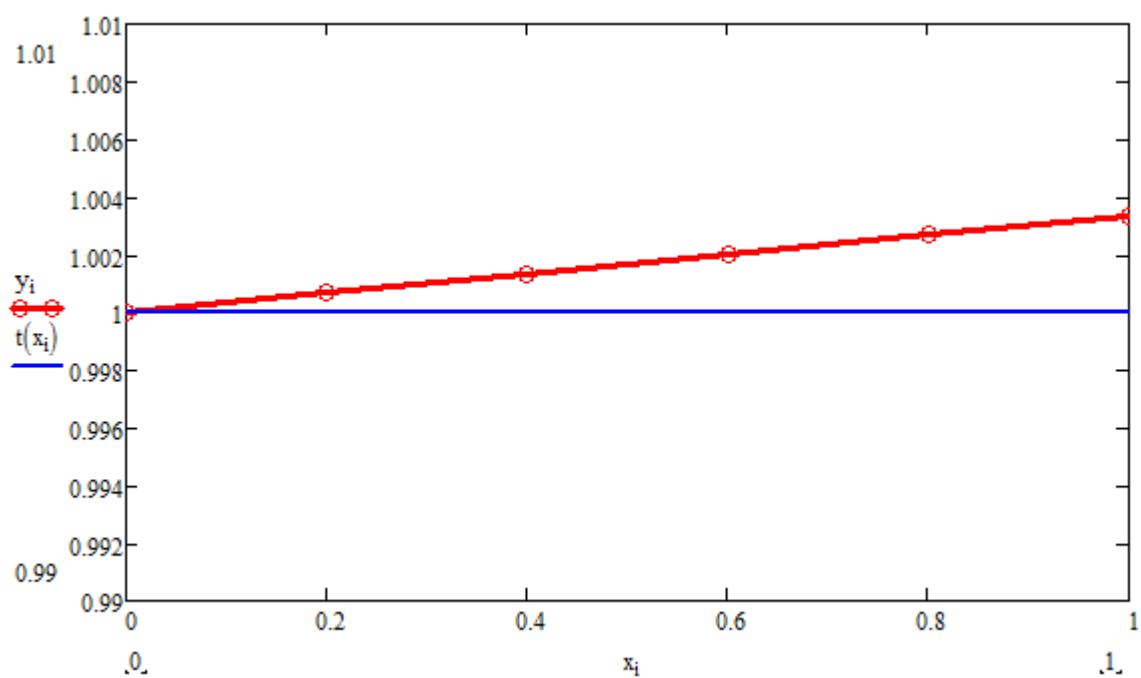
	1
1	1
2	1.000083462039745
3	1.000166931045402
4	1.000250407017552
5	1.000333889956777
6	1.000417379863659
7	1.000500876738778
8	1.000584380582718
9	1.000667891396058
10	1.000751409179381
11	1.000834933933268

Ushbu tenglamaning aniq yechimi $t(x)=1$. Tenglamaning topilgan taqribiy va aniq yechimlarini taqqoslash uchun ularni mathcad tizimida grafiglarini solishtiramiz.

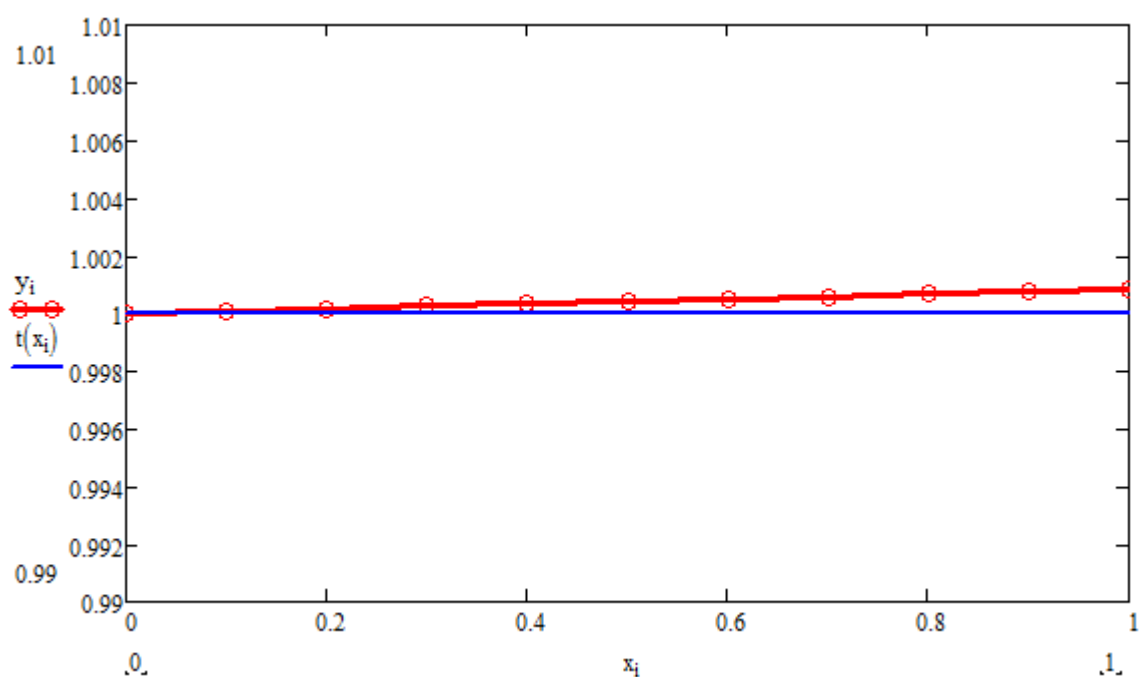


3.1-rasm: $h=0,25$ qadam, $n=1..4$ bo'lgan hol uchun.

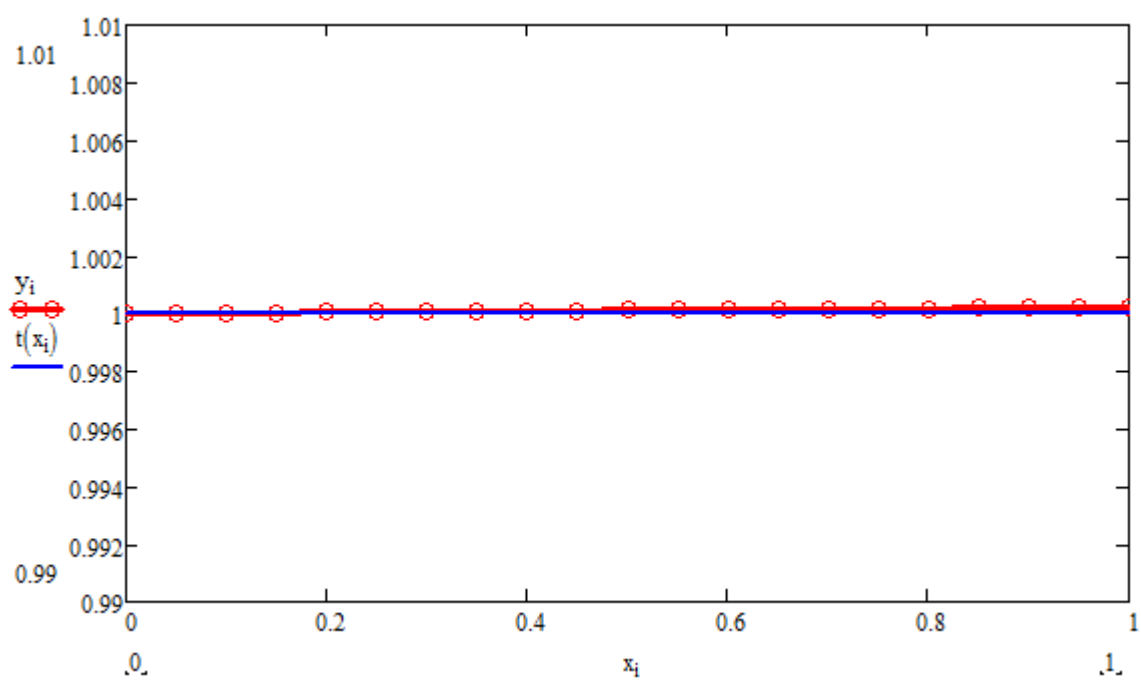
3.1-rasmda y_i – Volterra dasturi orqali topilgan tenglamaning taqribiy yechimi. $t(x_i)$ – tenglamaning aniq yechimi



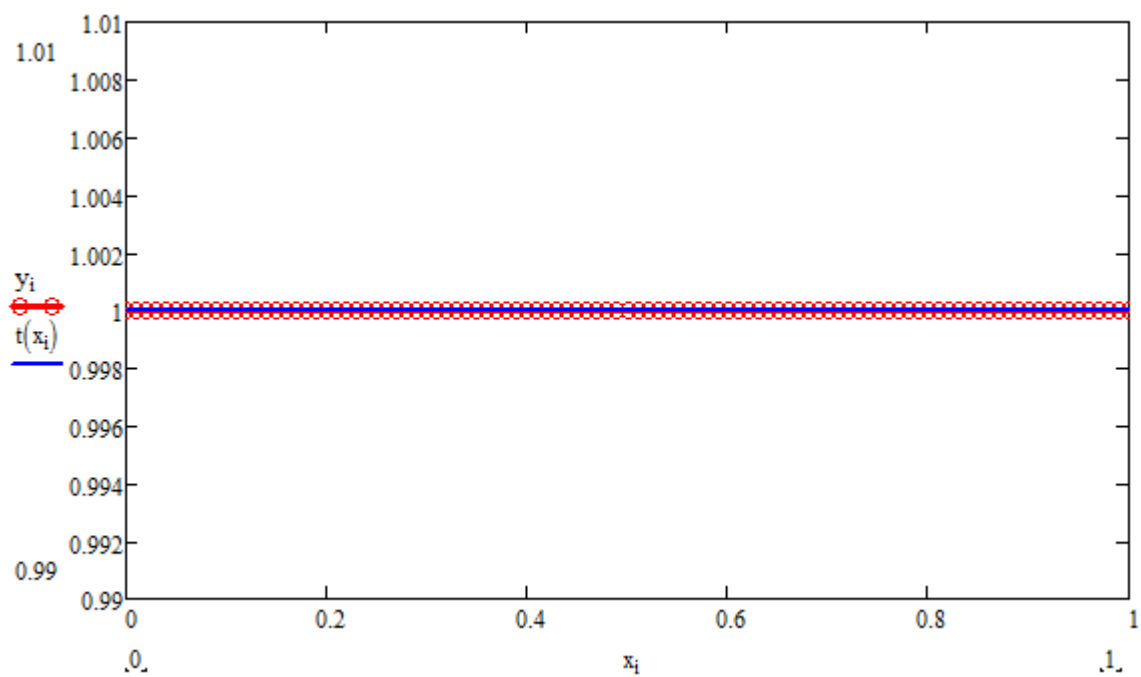
3.2-rasm: $h=0,2$ qadam, $n=1..5$ bo'lgan hol uchun.



3.3-rasm: $h=0,1$ qadam, $n=1..10$ bo'lgan hol uchun.



3.4-rasm: $h=0,05$ qadam, $n=1..20$ bo`lgan hol uchun.



3.5-rasm: $h=0,01$ qadam, $n=1..100$ bo`lgan hol uchun.

Ba'zi hollarda $K(t, s)$ yadro xususan $K(t - s)$, ya'ni $t - s$ ayirmaning funksiyasi ko'rinishiga ega bo'lishi mumkin. Bu holda, jumladan, ushbu

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t-s)\varphi(s)ds$$

tenglama Vol'terraning o'ram (yig'ma) tipidagi integral tenglamasi deb yuritiladi. O'rama ko'rinishdagi integral tenglamaga quyidagi aniq misolni qaraylik:

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

Ushbu tenglamaning aniq yechimini ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanib, $u(x) = \sin(x)$ ni aniqlaymiz. Mathcad tizimida tuzilgan Volterra dasturidan foydalanib tenglamaning taqribiy yechimini aniqlaymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} K1(x,t) &:= t - x & fl(x) &:= x & a &:= 0 & b &:= 1 & h &:= 0.1 \\ y &:= \text{Volterra}(K1, fl, 0, 1, h) & T(x) &:= \sin(x) & n &:= \frac{b-a}{h} \\ i &:= 1..n+1 & r(x) &:= 0 & x_1 &:= a + (i-1) \cdot h \end{aligned}$$

Volterra funksiyasini shu misol uchun qo'llaymiz

$$y := \text{Volterra}(K1, fl, 0, 1, h)$$

va quyidagi natijani
olamiz:

$$\mathbf{x} =$$

	1
1	0
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.4
6	0.5
7	0.6
8	0.7
9	0.8
10	0.9
11	1

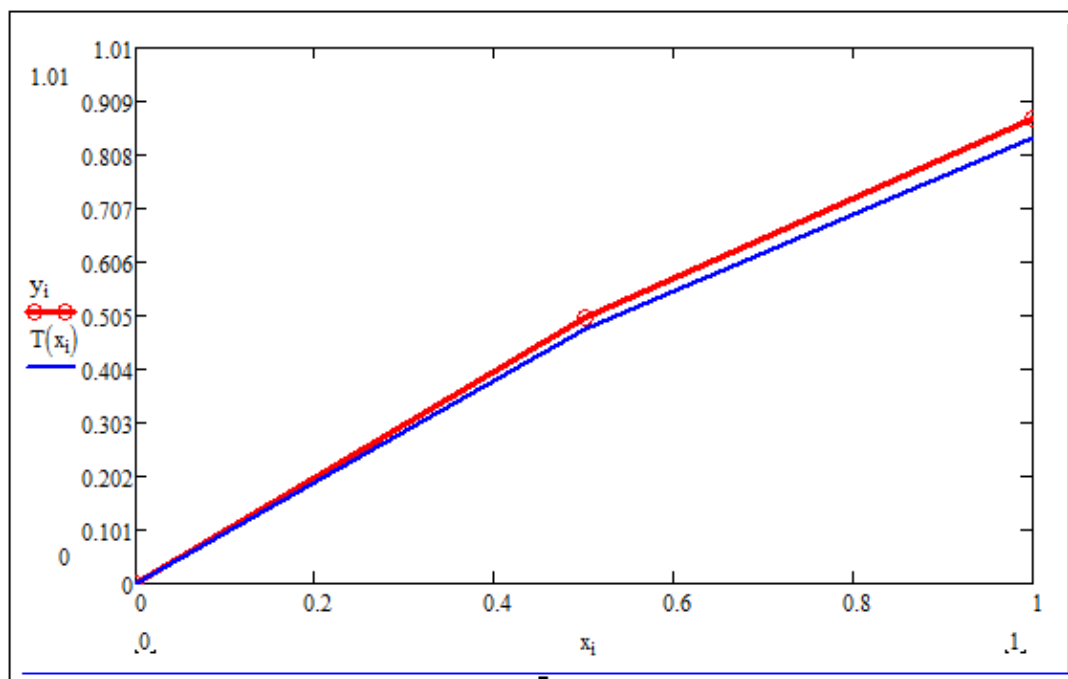
$$\mathbf{y} =$$

	1
1	0
2	0.1
3	0.199
4	0.29601
5	0.3900599
6	0.480209201
7	0.56555640999
8	0.6452480548801
9	0.718487219221399
10	0.784541511370484
11	0.842750388405864

$$\mathbf{T(x)} =$$

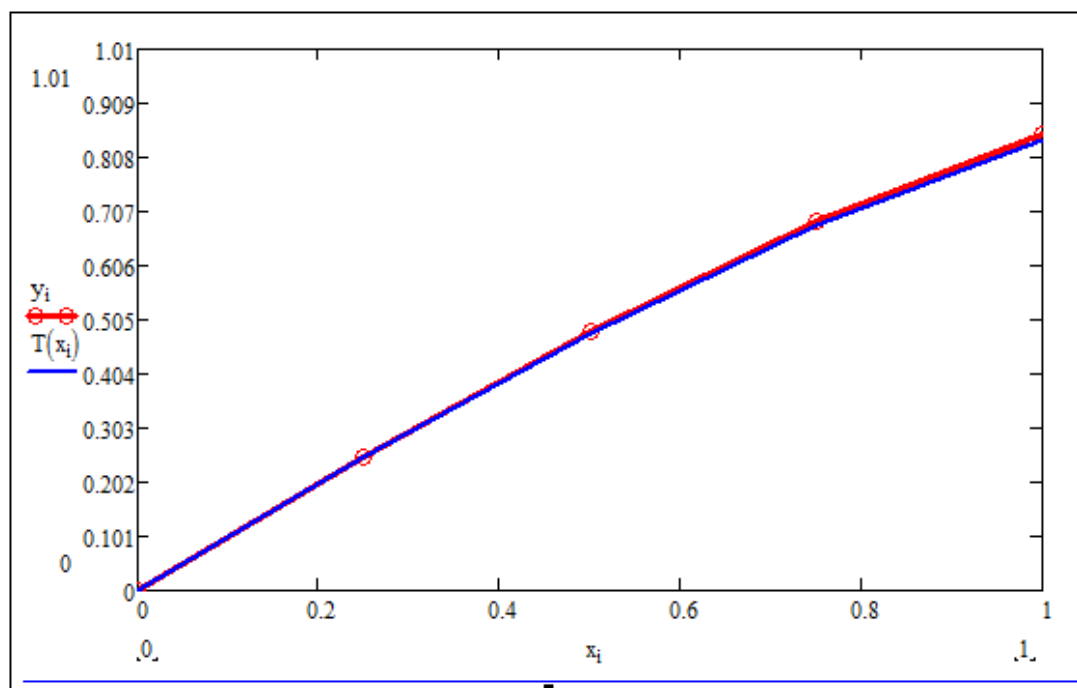
	1
1	0
2	0.099833416646828
3	0.198669330795061
4	0.29552020666134
5	0.389418342308651
6	0.479425538604203
7	0.564642473395035
8	0.644217687237691
9	0.717356090899523
10	0.783326909627483
11	0.841470984807897

Ushbu tenglamaning aniq yechimi $T(x)=\sin(x)$. Tenglamaning topilgan taqribiy va aniq yechimlarini taqqoslash uchun ularni mathcad tizimida grafiglarini solishtiramiz.

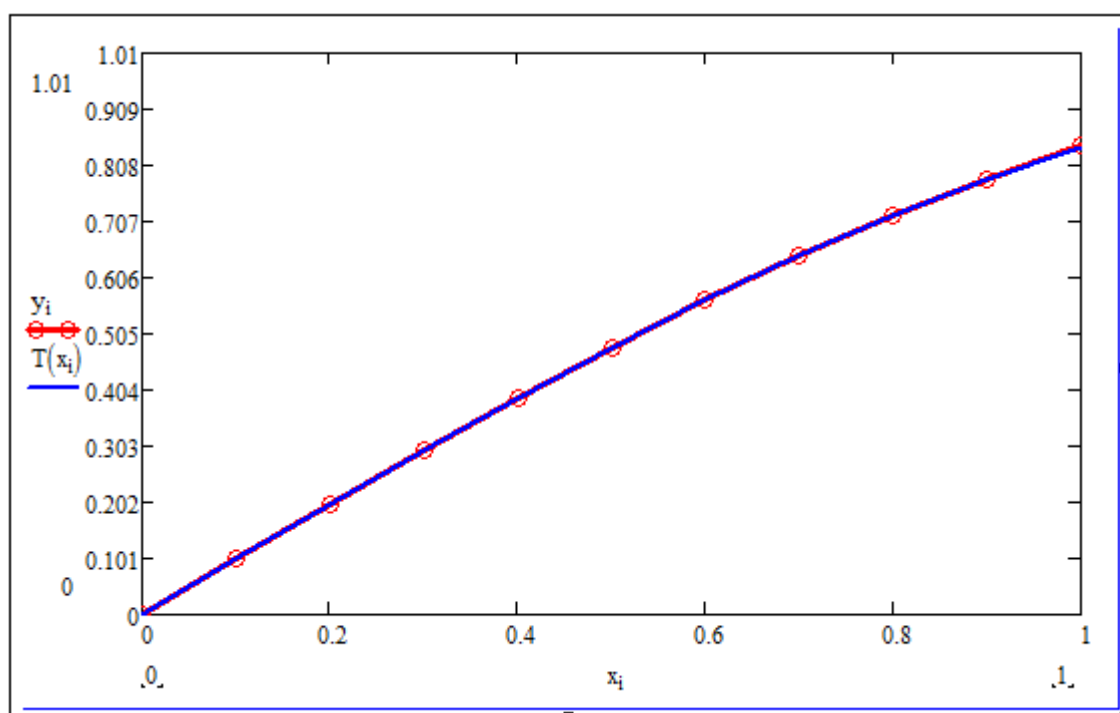


3.6-rasm: $h=0,5$ qadam, $n=1..2$ bo`lgan hol uchun.

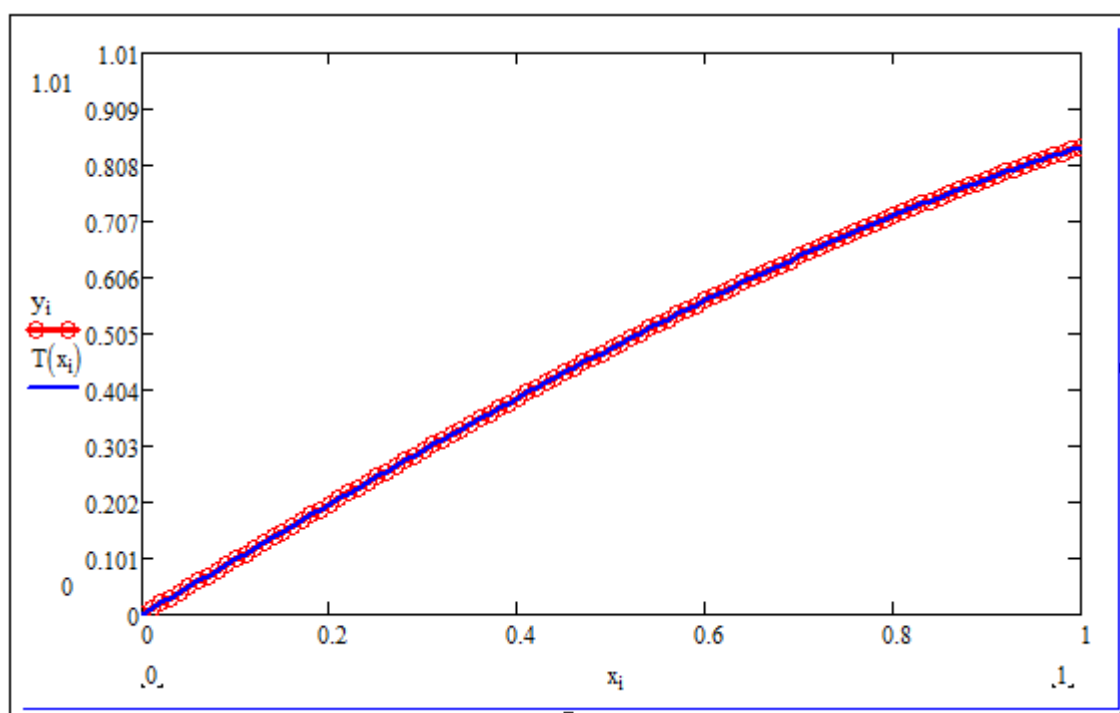
3.6-rasmda y_i – Volterra dasturi orqali topilgan tenglamaning taqribiy yechimi. $T(x_i)$ – tenglamaning aniq yechimi



3.7-rasm: $h=0,25$ qadam, $n=1..4$ bo`lgan hol uchun.



3.8-rasm: $h=0,1$ qadam, $n=1..10$ boʻlgan hol uchun.



3.9-rasm: $h=0,01$ qadam, $n=1..100$ boʻlgan hol uchun.

3.2 Volterranning ikkinchi tur tenglamalarini sonli yechish algoritmining integral tenglamalar sistemasiga tatbiqi.

Ikkita nomalum funksiya uchun yozilgan tenglamalar sistemalarini yechish usullaridan birini qaraylik. Bu usul nomalumning soni ikkitadan ortiq bo'lganda ham yaroqlidir. Bu sistemani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechamiz, chunki bu eng umumiy usullardan biridir [5].

1-misol. Ushbu chiziqli integral tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= x + \lambda \int_{\rho x}^x v(t) dt, \\ v(x) &= x + \lambda \int_{\rho x}^x u(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

bunda

$$0 < \rho < 1.$$

Sistemalarning yechimini quyidagi ikkita funksional qator ko'rinishida izlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots, \\ v(x) &= v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots + \lambda^n v_n(x) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

bunda $u_i(x)$ va $v_i(x)$ lar – aniqlanishi lozim bo'lgan nomalum funksiyalardir ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Faraz qilaylik, (3.9) sistemaning yechimi (3.10) qatorlardan iborat bo'lsin. U holda (3.10) ni (3.9) ga qo'yish natijasida quyidagi ayniyatlar hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots &\equiv x + \lambda \int_{\rho x}^x [v_0(t) + \lambda v_1(t) + \lambda^2 v_2(t) + \dots] dt, \\ v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots &\equiv x + \lambda \int_{\rho x}^x [u_0(t) + \lambda u_1(t) + \lambda^2 u_2(t) + \dots] dt, \end{aligned} \right\}$$

Har bir tenglikning ikki tomonidagi bir xil darajali $\lambda^m (m=0,1,2,\dots)$ larning koeffitsientlarini o'zaro tenglab olib, ketma-ket u_i va v_i larni topamiz:

$$u_0(x) = x, \quad v_0(x) = x;$$

$$u_1(x) = \int_{\rho x}^x v_0(t) dt = \int_{\rho x}^x t dt = \frac{1}{2}(1-\rho^2)x^2,$$

$$v_1(x) = \int_{\rho x}^x u_0(t) dt = \int_{\rho x}^x t dt = \frac{1}{2}(1-\rho^2)x^2.$$

$$\frac{1}{2}(1-\rho^2) = A_1 \text{ deb belgilasak,}$$

$$u_1(x) = A_1 x^2, \quad v_1(x) = A_1 x^2;$$

shuningdek,

$$u_2(x) = \int_{\rho x}^x v_1(t) dt = A_1 \int_{\rho x}^x t^2 dt = A_1 A_2 x^3,$$

$$v_2(x) = \int_{\rho x}^x u_1(t) dt = A_1 \int_{\rho x}^x t^2 dt = A_1 A_2 x^3,$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(1-\rho^2)$$

va hokazo

$$u_n(x) = v_n(x) = A_1 A_2 \dots A_n x^{n+1}, \quad A_n = \frac{1}{n+1}(1-\rho^{n+2}), \quad n=1,2,3,\dots$$

Endi topilgan ifodalarni (3.10) qatorlarga qo'ysak izlanayotgan yechim kelib chiqadi [4]:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= x \left[1 + A_1(\lambda x) + A_1 A_2 (\lambda x)^2 + \dots + A_1 A_2 \dots A_n (\lambda x)^n + \dots \right], \\ v(x) &= x \left[1 + A_1(\lambda x) + A_1 A_2 (\lambda x)^2 + \dots + A_1 A_2 \dots A_n (\lambda x)^n + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Faraz qilaylik, $\rho=0$ bo'lsin, u holda (1) dan Volterra tenglamalarining sistemasi hosil bo'ladi. O'sha sistemaning yechimini hosil qilish uchun (3.11) da $A_n = \frac{1}{n+1}$ deb olish kerak $n=(1,2,3,\dots)$.

Ushbu chiziqli integral tenglamalar sistemasining yechimi (3.11) qator ko'rinishiga kelib qoldi, $\rho=0$ deb Volterra tenglamalar sistemasini chekli n da

hisoblab yechimini aniqlaymiz. Buning uchun Volterra funksiyasini sistema uchun quyidagicha o'zgartiramiz:

```

Voltera(K,f,f1,a,b,h) :=
  x1 ← a
  i ← 1
  while xi ≤ b
    xi+1 ← xi + h
    i ← i + 1
  u1 ← f(x1)
  v1 ← f1(x1)
  for i ∈ 2.. $\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{\mathbf{h}} + 1$ 
    s ← 0
    s1 ← 0
    for j ∈ 2..i - 1 if i > 2
      s ← s + K(xi,xj) · vj
      s1 ← s1 + K(xi,xj) · uj
    ui ←  $\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{h}}{2} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} \cdot \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \frac{\mathbf{h}}{2} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{s} \right)$ 
    vi ←  $\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{h}}{2} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)} \cdot \left( \mathbf{f1}(\mathbf{x}_i) + \frac{\mathbf{h}}{2} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{s1} \right)$ 
  augmen(u,v)

```

Tenglamalar sistemasini sonli usulda volterra funksiyasi va (3) qatordan yechimlarini aniqlaymiz. Topilgan yechimlarni solishtirib, grafig usulda tasvirlaymiz:

$$\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) := 1 \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \qquad \mathbf{f1}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$$

Voltera(K,f,f1,0,1,0.025) =

	1	2
1	0	0
2	0.025316455696203	0.025316455696203
3	0.051273834321423	0.051273834321423
4	0.077888361772598	0.077888361772598
5	0.105176674728866	0.105176674728866
6	0.133155831051116	0.133155831051116
7	0.161843320444815	0.161843320444815
8	0.191257075392785	0.191257075392785
9	0.221415482364755	0.221415482364755
10	0.252337393310698	0.252337393310698
11	0.284042137445146	0.284042137445146
12	0.316549533329833	0.316549533329833
13	0.349879901262234	0.349879901262234
14	0.384054075977733	0.384054075977733
15	0.419093419673372	0.419093419673372
16	0.455019835361306	...

U(x) =

0
0.025314242230283
0.051263987047155
0.077859873204643
0.105112689740567
0.133033377908934
0.16163303313574
0.190922906998438
0.220914409229372
0.251619109743429
0.283048740690202
0.315215198530956
0.348130546140668
0.381807014935442
0.416257007025598
...

$$A(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s \cdot \frac{1}{n+1} \\ s \end{array} \right.$$

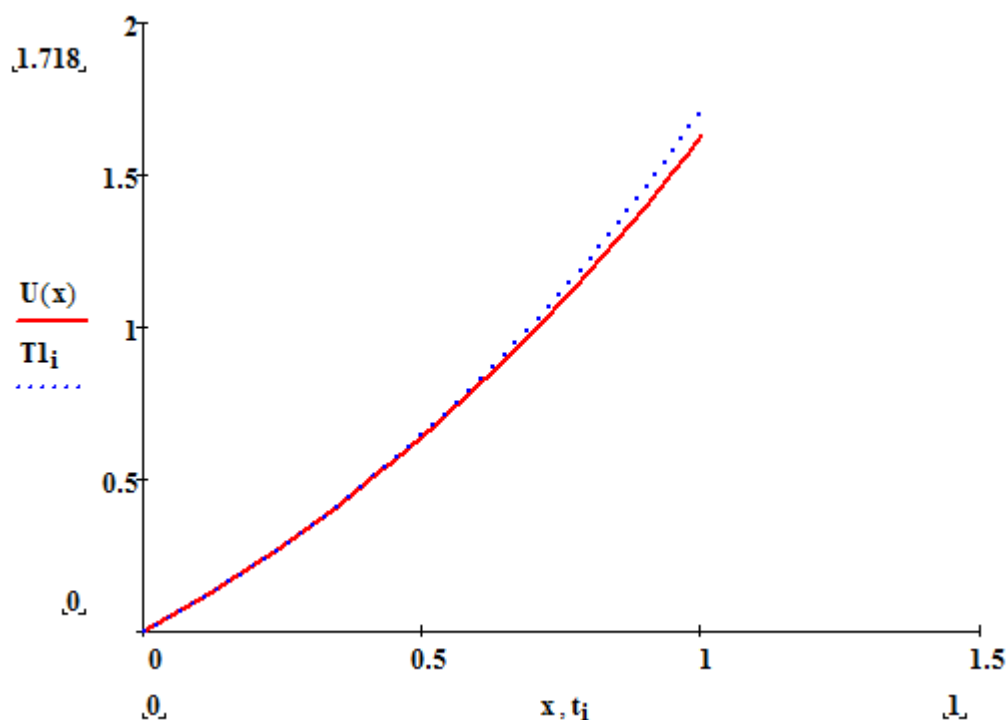
$$U(x) := f(x) + \sum_{i=1}^{25} \left(A(i) \cdot f(x)^{i+1} \right)$$

$$x := 0, 0.025..1$$

$$T := \text{Voltera}(K, f, f1, 0, 1, 0.025) \quad a := 0$$

$$T1 := T^{\langle 1 \rangle} \quad i := 1..41 \quad h := 0.025$$

$$t_i := a + i \cdot h - h$$



3.10-rasm: $h=0,025$ qadam, $n=1..100$ boʻlgan hol uchun.

3.10-rasmda $T1_i$ – Volterra dasturi orqali topilgan tenglamaning taqribiy yechimi. $U(x)$ – (3.11) qatordan aniqlangan yechim.

Grafigdan koʻrinadiki yechimlar xatoligi kichik, agar h qadamni kichraytirsak bu xatolik yanada kichrayadi. Yuqoridagi misollardan koʻrinadiki Volterra dasturini Volterra tenglamasiga qoʻllanilsa kichik xatolikdagi taqribiy yechim olinadi.

3.3 O'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamalarni sonli yechish

Agar tenglamadagi noma'lum funksiya bir vaqtda ham integral ishorasi ostida qatnashsa, ham uning hosilalari qatnashsa, bunday tenglama integro-differensial tenglama deyiladi. Bir argumentli noma'lum funksiyaning integro-differensial tenglamalarini qaraymiz. Bunday tenglamalarning yechimi ushbu

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \quad (3.12)$$

funksional qator shaklida izlaymiz, ya'ni ularni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechamiz. Yechish prosessini misollarda ko'ramiz [5],[14].

Ushbu tenglama

$$u'(x) = \lambda \int_{px}^x xt u(t) dt \quad (3.13)$$

berilgan, $0 < p < 1$, u – noma'lum funksiya.

Izlanayotgan yechimni (3.12) qator ko'rinishida olamiz va uni (3.13) tenglamaga qo'yamiz. Natijada quyidagi ayniyat hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} u'_0(x) + \lambda u'_1(x) + \lambda^2 u'_2(x) + \dots + \lambda^n u'_n(x) + \dots &\equiv \\ &\equiv \lambda \int_{px}^x xt [u_0(t) + \lambda u_1(t) + \lambda^2 u_2(t) + \dots] dt. \end{aligned}$$

Bu tenglikning ikki tomonidagi teng darajali λ^m ($m = 0, 1, 2, \dots$) larning koeffisientlarini tenglab, ketma-ket $u_0, u_1, u_2, \dots$ larni topamiz:

$$u'_0(x) = \frac{d u'_0(x)}{d(x)} = 0, \text{ bunda } u_0(x) = C_0.$$

C_0 – ixtiyoriy o'zgarmas son.

$$u'_1(x) = \int_{px}^x xt u_0(t) dt = C_0 x \int_{px}^x t dt = \frac{1}{2} C_0 (1 - p^2) x^3,$$

bundan x bo'yicha integral olinsa,

$$u_1(x) = C_1 + C_0 A_1 x^4, \quad A_1 = \frac{1}{2 \cdot 4} (1 - p^2);$$

shuningdek,

$$u_2'(x) = \int_{px}^x x t u_1(t) dt = C_1 x \int_{px}^x t dt + C_0 A_1 x \int_{px}^x t^5 dt =$$

$$\frac{1}{2} C_1 (1-p^2) x^3 + \frac{1}{6} C_0 A_1 (1-p^6) x^7,$$

bundan x bo'yicha integral olinsa,

$$u_2(x) = C_2 + C_1 A_1 x^4 + C_0 A_1 A_2 x^8, \quad A_2 = \frac{1}{6 \cdot 8} (1-p^8)$$

Shu yo'sinda $u_3(x)$ ni topish mumkin:

$$u_3(x) = C_3 + C_2 A_1 x^4 + C_1 A_1 A_2 x^8 + C_0 A_1 A_2 A_3 x^{12}$$

$$A_3 = \frac{1}{10 \cdot 12} (1-p^{10})$$

va hokazo, umuman,

$$u_n(x) = C_n + C_{n-1} A_1 x^4 + C_{n-2} A_1 A_2 x^8 + \dots C_0 A_1 A_2 \dots A_n x^{4n},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{8(2n+1)(n+1)} (1-p^{2(2n+1)}); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mana shu u_n larning ifodalarini (3.12) qatorga qo'yib va o'xshash hadlarni ixchamlash natijasida berilgan tenglamaning umumiy yechimi kelib chiqadi:

$$u(x) = C[1 + A_1(\lambda x^4) + A_1 A_2(\lambda x^4)^2 + \dots +$$

$$+ A_1 A_2 \dots A_n (\lambda x^4)^n + \dots] \quad (3.14)$$

bunda $C = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots$

Xususiyl holda, agar $p=0$ bo'lsa, (3.13) tenglama ushbu

$$u'(x) = \lambda \int_0^x x t u(t) dt$$

ko'rinishga ega bo'lib (3) yechimdagi koeffitsientlar esa

$$A_{n+1} = \frac{1}{8(2n+1)(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

bo'ladi.

Ushbu tenglama yechilsin:

$$u'(x) = e^x + \lambda \int_{x-\sigma}^x e^{x-t} u(t) dx, \quad \sigma > 0, \quad |\lambda| < \frac{1}{\sigma}.$$

Bu tenglamadagi u o'rniga ham (3.12) qatorni qo'yib, u_0, u_1, u_2 larni quyidagicha topamiz:

$$u'(x) = e^x, \text{ bunda } u(x) = e^x + C_0.$$

C_0 – ixtiyoriy o'zgarmas son; hisoblash ishlarini qisqartirish maqsadida C_0 ni va bundan keyingi ixtiyoriy o'zgarmas $C_1, C_2, \dots$ larni nolga teng deb hisoblaymiz. U holda biz tenglamaning bitta xususiy yechimini topgan bo'lamiz. Shu sababli

$$u_1'(x) = \int_{x-\sigma}^x e^{x-t} u_0(t) dt = \int_{x-\sigma}^x e^{x-t} e^t dt = e^x \int_{x-\sigma}^x dt = \sigma e^x,$$

bundan

$$u_1(x) = \sigma e^x + C_1; \quad C_1 = 0, \quad u_1(x) = \sigma e^x.$$

Buning u_0 dan farqli faqat σ ko'paytuvchidan iborat. Shuning uchun

$$u_n(x) = \sigma^n e^x, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Endi u_n larning ifodalarini (1) qatorga qo'ysak, ushbu yechim hosil bo'ladi:

$$u(x) = \frac{e^x}{1 - \lambda \sigma}. \quad (3.15)$$

hosil bo'ladi.

Quyidagi aniq misolda o'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamani sonli usulda yechimini qaraymiz:

$$y'(x) = \int_0^x (x-t) y(t) dt - 1, \quad y(0) = 1$$

Biz yuqorida Volterra tenglamasini sonli yechimini mathcad tizimida yaratdik. Ushbu tenglikning o'ng tomonini Volterra dasturi orqali x o'zgaruvchilarga mos qiymatlarni aniqlab Lagranch formulasi orqali x o'zgaruvchiga mos qiymatlar orqali ko'phadni aniqlab olamiz va tenglikni ikkala tomonidan integral olsak noma'lum $y(x)$ funksiyalarni aniqlaymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\text{K1}(x,t) := x - t \quad f1(x) := -1 \quad a := 0 \quad b := 1 \quad h := 0.1$$

$$t(x) := 1 \quad n := \frac{b-a}{h} \quad x_i := a + (i-1) \cdot h$$

$$i := 1..n+1 \quad r(x) := 0$$

Shu misolda Volterra dasturini qo'llaymiz : $y := \text{Voltera}(K1, f1, 0, 1, 0.1)$

$$x =$$

$$y =$$

Olinga natija orqali ko'phad tuzamiz:

$$L2(t) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 10 \\ \text{for } k \in 0..n \\ \quad a \leftarrow 1 \\ \quad w \leftarrow x_k \\ \quad \text{for } j \in 0..n \\ \quad \quad q \leftarrow x_j \\ \quad \quad a \leftarrow a \cdot \frac{t-q}{w-q} \text{ if } j \neq k \\ \quad w \leftarrow y_k \\ \quad s \leftarrow s + a \cdot w \end{array} \right|_s$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y := \begin{pmatrix} -1 \\ -1.005 \\ -1.02 \\ -1.045 \\ -1.081 \\ -1.128 \\ -1.185 \\ -1.255 \\ -1.337 \\ -1.433 \\ -1.543 \end{pmatrix}$$

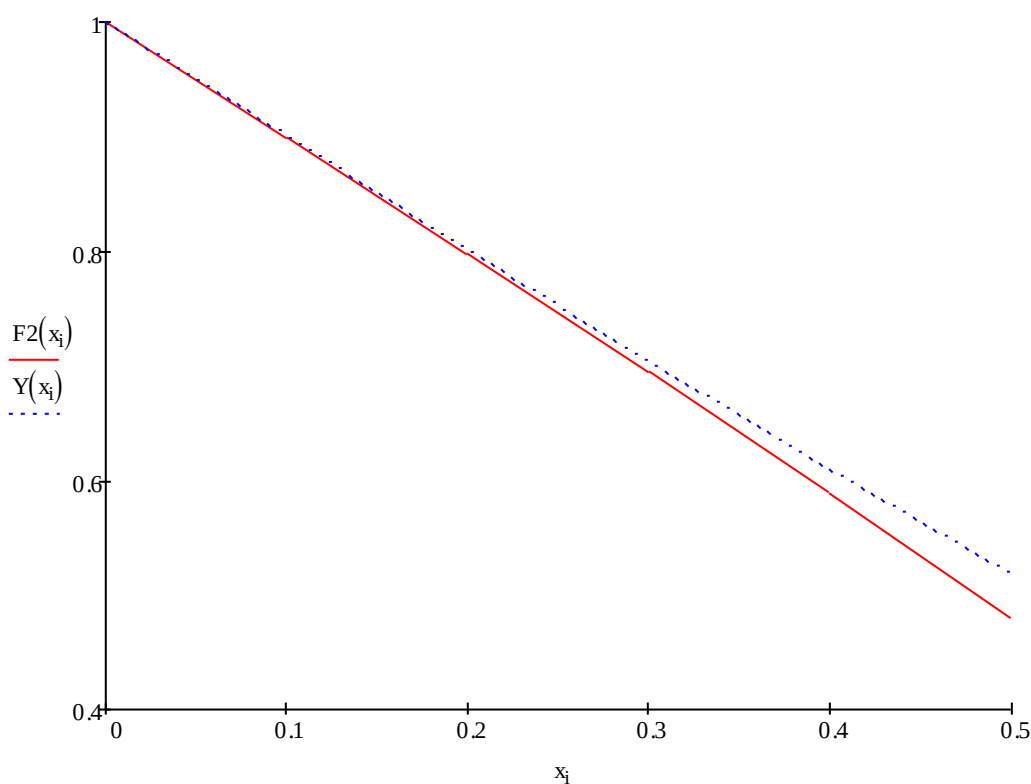
$$\begin{aligned} F1(t) := L2(t) \text{ simplify } \rightarrow & 462.96296296294589 \cdot t^{10} - 2267.9673721340387156 \cdot t^9 + 4744.5436507936506127 \cdot t^8 - \\ & - 5534.8875661375659229 \cdot t^7 + 3944.2361111111109549 \cdot t^6 - 1768.0266203703702983 \cdot t^5 + 494.45196759259257169 \cdot t^4 - \\ & - 82.449294532627862321 \cdot t^3 + 6.8563075396825393408 \cdot t^2 - 0.26314682539682538349 \cdot t - 1.0 \end{aligned}$$

Ushbu ko'phadni integrallab yechimni topamiz:

$$\begin{aligned} FF(t) := \int F1(t) dt \rightarrow & 42.08754208754208599 \cdot t^{11} - 226.79673721340387156 \cdot t^{10} + 527.17151675485006808 \cdot t^9 - \\ & - 691.86094576719574036 \cdot t^8 + 563.46230158730156499 \cdot t^7 - 294.67110339506171638 \cdot t^6 + 98.890393518518514338 \cdot t^5 - \\ & - 20.61232363315696558 \cdot t^4 + 2.2854358465608464469 \cdot t^3 - 0.13157341269841269174 \cdot t^2 - 1.0 \cdot t \end{aligned}$$

Sonli usulda aniqlangan FF(t) yechim bilan tenglamaning aniq Y(x) yechimini mathcad tizimida grafik orqali taqqoslaymiz:

$$Y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$



3.11-rasm: h=0,1 qadam, n=1..10 bo'lgan hol uchun.

3.11-rasmda O'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamani sonli usulda yechimi va aniq yechimi ko'rsatilgan. F2(x) – tenglamaning sonli yechimi. Y(x) – tenglamaning aniq yechimi.

III bob bo'yicha qisqacha xulosa

Dissertasiyani III bobida O'rganilga integral tenglamalar, integro-differensial tenglamalar va sonli yechish usullaridan foydalanib Volterranning ikkinchi tur tenglamasini trapetsiya formulasi orqali sonli yechimi aniqlangan va aniq yechimi bilan mathcad tizimida grafik usulda taqqoslangan. Integral tenglamalar sistemasi uchun Volterra tenglamasining sonli yechimi tadbiqu aniq misollarda ko'rilgan. Buning ham aniq va taqribiy yechimlari grafik usulda taqqoslangan. O'rama ko'rinishdagi integral tenglamaning sonli usulda yechish algoritmi keltirilgan aniq va taqribiy yechimlari grafik usulda taqqoslangan. O'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamalar haqida ma'lumotlar keltirilgan hamda mathcad tizimida sonli yechish dasturi tuzilgan va aniq misolda taqribiy va aniq yechimlari grafik usulda taqqoslangan.

XULOSA

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashhur. Ko'plab texnikada va tabiatda uchraydiga jarayonlarning matematik modelini tuzayotganda ko'pinch matematik modelda hisoblashlar integrallarni qiymatini hisoblashga yoki Integral tenglamalarga kelib qoladi. Har doim ham integralning aniq qiymatini aniqlab bo'lmaydi, bunda uning taqribiy qiymatini aniqlashga to'g'ri keladi. Ushbu magistrlik dissertasiyasida integrallarni, integral tenglamalarni va integro-differensial tenglamalarni sonli yechimi aniqlandi.

1-bobda integral tenglamalar, o'rama ko'rinishdagi integral tenglamalar va ularning analitik yechish usullari keltirilgan. Har bir yechish usullari aniq misollarda tadbiq etilgan yechimlari aniqlangan.

2-bobda integro-differensial tenglamalarni sonli yechish uchun integrallarni taqribiy hisoblash usullari keltirilgan. Integrallarni taqribiy yechishning Nyuton – Kotes formulasi, to'g'ri to'rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, simpson formulasi keltirilgan va aniq misollarda mathcad tizimi orqali ko'rib chiqilgan.

3-bobda esa Volterraning ikkinchi tur tenglamalasini trapetsiya formulasi orqali sonli yechimi aniqlangan va aniq yechimi bilan mathcad tizimida grafik usulda taqqoslangan. Integral tenglamalar sistemasi uchun Volterra tenglamasining sonli yechimi tadbiqi aniq misollarda ko'rilgan. Buning ham aniq va taqribiy yechimlari grafik usulda taqqoslangan. O'rama ko'rinishdagi integral tenglamaning sonli usulda yechish algoritmi keltirilgan aniq va taqribiy yechimlari grafik usulda taqqoslangan. O'rama ko'rinishdagi integro-differensial tenglamalar haqida ma'lumotlar keltirilgan hamda mathcad tizimida sonli yechish dasturi tuzilgan va aniq misolda taqribiy va aniq yechimlari grafik usulda taqqoslangan.

Matematik, iqtisodiy-matemati va fizik modellarni qurishda yuzaga keladigan integral tenglamalarni hisoblashda magistrlik dissertasiyasidagi mathcad tizimida yaratilgan algoritmdan foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi farmoni, Adolat, 2017 y
2. Mirziyoyev Sh.M. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutq.-Toshkent: "O'zbekiston" NMIU, 2016.-56b.
3. Sh.M.Mirziyoyev "Milliy taraqqiyot yo'limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz" O'zbekiston, 2017-y. 326-b.
4. Салохитдинов М.С. *Математик физика тенгламалари*. Т., «Ўзбекистон», 2002, 448 б.
5. Maqsudov Sh.T. Chiziqli integral tenglamalar elementlari. Toshkent, "O'qituvchi", 1975. -180 bet.
6. Нуримов Т. Филатов А.Н. Шарова Л.В. Интегральные неравенства. – Тошкент: 1990.-188 с.
7. Дурдиев Д. Қ, Жумаев Ж.Ж. *Интегро-дифференциал тор тебраниш тенгламаси учун тескари масалани сонли ечиш*//Бухоро ,2012,с,5-7.
8. Nurimov T. Integral tenglamalar va tengsizliklar. –Toshkent: O'qituvchi, 1985.-188 с.
9. Исроилов М.И. «Хисоблаш методлари»: -Т:Ўқитувчи, 2000 й.
10. В.А. Попов. Сборник задач по интегральным уравнениям. Казань, 2006. 30 с.
11. Pradip Roul , Peter Meyer «Numerical solutions of systems of nonlinear integro-differential equations by Homotopy-perturbation method»: [Applied Mathematical Modelling 35 \(2011\) 4234–4242](#)
12. Jian Rong Loh, Chang Phang, «A new numerical scheme for solving system of Volterra integro-differential equation»: Alexandria Engineering Journal (2017), 10 p.

13. Е.М. Карчевский, «Численные методы решения интегральных уравнений и комплекс программ на языке Matlab»: Казанский университет 2015. -40 с.
14. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «*Hisoblash matematikasi asoslari*», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
15. Soloxitdinov M.S. Nasritdinov F.N. “Oddiy differensial tenglamalar” – Toshkent: O`qituvchi 1982-yil 280 bet.
16. Самарский А.А. «Введение в численные методы»: –М: Наука, 1987 й.
17. Бахвалов Н.С. «Численные методы»: -М: Наука. 1987 й. 180 с.
18. Филатов А.Н. Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М, Наука, 1976. -170 с.
19. Филатов А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. –Тошкент: Фан, 1971.-152 с.
20. Alov R.D., Sharipov T. *Sonli usullar fanidan ta'riflar to'plami*. BuxDU.
21. Калиткин М.Н. *Численные методы*. М. Наука. 1978г. -162 с
22. Abduxamidov A., Xudonazarov S. *Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriyalar ishlari*. “Uzbekiston nashriyoti”, 1995 y. -86 bet.
23. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М. Наука 1989г. 186 с
24. Самарский А.А., *Теория разностных схем*, М., «Наука», 1977г. 156 с
25. Туаева Ж.Д. *Одномерная модель поверхностных гравитационных волн в горном водохранилище*// математический журнал. 2001.с.51-53,

Internet saytlari.

1. <http://www.lib.homelinux.org/math>.
2. <http://www.eknigu.com/lib/Mathematics>.
3. <http://www.eknigu.com/inom/Mathematics/Mc>.
4. www.elsevier.com/locate/aej
5. www.math.msu.su
6. www.sciencedirect.com/locate/aej
7. www.elsevier.com/locate/jmaa