

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

T.H.RASULOV, Z.E.MUSTAFOYEVA

VEKTOR FAZOLAR

“Durdona” nashriyoti, 2018

T.H.Rasulov, Z.E.Mustafoyeva. Vektor fazolar. Uslubiy qo'llanma. 2018 yil, 80 bet.

Taqrizchilar:

Mamurov Boboxon Jo'rayevich	Buxoro davlat universiteti "Matematika" kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Rasulov Haydar Raupovich	Buxoro davlat universiteti "Matematika" kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

Ushbu uslubiy qo'llanma oliy ta'lim muassasalarining "Matematika" hamda "Amaliy matematika va informatika" ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan. Qo'llanmada asosan chiziqli (vektor) fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Yevklid fazolari, Gil'bert fazolari va Fok fazolariga doir nazariy ma'lumotlar, bir qancha masalalarning yechimlari, mustaqil bajarish uchun masalalar hamda har bir mavzu bo'yicha test topshiriqlari o'z aksini topgan.

Mazkur qo'llanma Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakul'teti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya etilgan. 1-sonli bayonnoma. "27" avgust 2018 yil.

MUNDARIJA

Kirish	4
1-§. Chiziqli fazolar	6
2-§. Chiziqli normalangan fazolar	19
3-§. Yevklid fazolari	31
4-§. Gil'bert fazolari	52
5-§. Fok fazolari.....	67
Test topshiriqlarining javoblari.....	77
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	78

KIRISH

Ushbu uslubiy qo'llanma Funksional analiz fanining Vektor fazolar deb ataluvchi asosiy bo'limini qamrab olgan bir qo'llanmadir. U oliy ta'lim muassasalarining "Matematika", "Amaliy matematika va informatika" ta'lim yo'nalishlarida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallab yozilgan.

Mazkur qo'llanmada biz chiziqli (vektor) fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Banax fazolari, Yevklid fazolari, Gil'bert fazolari va Fok fazolarining asosiy xossalarini o'rganamiz.

Birinchi paragrafda chiziqli fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. Chiziqli fazo o'lchamining ta'rifi bayon qilinib, chekli va cheksiz o'lchamli chiziqli fazolarga misollar keltirilgan. Chiziqli fazoning qism fazosi va faktor fazosi tushunchalari tahlil qilingan. Faktor fazoda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan va faktor fazoning chiziqli fazo tashkil qilishi ko'rsatilgan.

Ikkinchi paragrafda chiziqli normalangan fazolar mavzusi yoritilgan bo'lib, bunday fazolarga ko'plab misollar qaralgan. Normalangan fazolardagi tushunchalar metrik fazolardagi tushunchalar bilan taqqoslangan. Normalangan fazoning qism fazosi va faktor fazosiga misollar keltirilgan.

Navbatdagi uchinchi paragraf Yevklid fazolariga bag'ishlangan. Yevklid fazolarining xarakteristik xossalari ochib berilgan. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, Bessel tengsizligi, Parseval tengliklari isbotlangan. Nomdor teoremlar - Riss-Fisher, Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni haqidagi teoremlar isboti bilan berilgan. Ortogonal, ortonormal sistemalarga misollar qaralgan. Separabel Yevklid fazolarida to'la ortonormal sistema va yopiq ortonormal sistemalarning ekvivalentligi isbotlangan. Normalangan fazo Yevklid fazo bo'lishligining zarur va yetarli sharti keltirilgan.

To'rtinchi paragrafda Gil'bert fazolariga bag'ishlangan. Barcha separabel Gil'bert fazolari o'zaro izomorfligi isbotlangan. Gil'bert fazolarining qism fazosi, qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi, ortogonal qism fazolarning to'g'ri yigindilari qaralgan. Xuddi shunday Gil'bert fazolarining to'g'ri yigindilari ta'riflangan. Paragraf so'ngida haqiqiy va kompleks Yevklid fazolaridagi skalyar ko'paytmalardagi tafovutlar tahlil qilingan.

Oxirgi beshinchi paragrafda Fok fazosi va uning qirqilgan qism fazolari haqida fikr yuritilgan. Bu fazolarda elementning normasi va ikkita elementlar uchun skalyar ko'paytmasi tushunchalari keltirilgan.

Har bir paragraf uchun ta'rif, teorema, lemma va formulalar alohida nomerlangan. Barcha paragraflarda mavzuga oid tipik masalalar namuna sifatida yechib ko'rsatilgan. Bundan tashqari mavzuning mohiyatini ochib beruvchi 25 tadan masalalar va talabalar o'z bilimlarini tekshirishlari uchun 20 tadan test topshiriqlari bayon qilingan. Keltirilgan mashq va test topshiriqlarini mustaqil yechib o'rgangan talabalar o'zlarida yetarli darajada bilim va ko'nikmalar hosil qiladi.

Qo'llanmani o'qish jarayonida talabalar o'zlarining matematik analiz, chiziqli algebra va analitik geometriyadan olgan bilimlarini to'ldiradilar, hamda ularni funksional fazolarga moslab mustahkamlaydilar. Undan matematikaning ko'plab sohalari bo'yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borayotgan magistrantlar, tayanch doktorantlar va mustaqil izlanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

1-§. CHIZIQLI FAZOLAR

Chiziqli fazo (vektor fazo) tushunchasi matematikaning asosiy tayanch tushunchalardan biri hisoblanadi. Quyida C orqali kompleks sonlar, R orqali haqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

1.1-ta'rif. Agar elementlari $x, y, z, \dots$ bo'lgan L to'plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo'lsa:

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi aniq bir $x + y \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlar uchun

1) $x + y = y + x$ (kommutativlik),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (assotsiativlik),

3) L da shunday θ element mavjud bo'lib, $x + \theta = x$ (nolning mavjudligi),

4) shunday $-x \in L$ element mavjud bo'lib, $x + (-x) = \theta$ (qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;

II. ixtiyoriy $x \in L$ element va ixtiyoriy α son ($\alpha \in R$ yoki $\alpha \in C$) uchun x elementning α songa ko'paytmasi deb ataluvchi aniq bir $\alpha x \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy α, β sonlar uchun

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$,

6) $1 \cdot x = x$,

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

aksiomalar bajarilsa, u holda L to'plam chiziqli fazo yoki vektor fazo deb ataladi.

Ta'rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda yig'indi va songa ko'paytirish amallari deb ataladi.

Ta'rifda foydalanilgan sonlar zahirasi (haqiqiy sonlar R yoki kompleks sonlar C) bog'liq holda chiziqli fazo haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

1.1-misol. $L = R$ haqiqiy sonlar to'plami odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi. $L = C$ kompleks sonlar to'plami ham kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.2-misol. $L = R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ – n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlar to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ lar uchun

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (1.1)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \quad (1.2)$$

R^n - to‘plam (1.1) va (1.2) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u n - o‘lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataladi.

1.3-misol. $L = C^n \equiv \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n), z_k \in C, k = 1, 2, \dots, n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (1.1) va (1.2) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi. C^n - to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi va u n - o‘lchamli kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

1.4-misol. $L = C[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami. Funksiyalarni qo‘shish va funksiyaning songa ko‘paytirish amallari mos ravishda

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (1.3)$$

va

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (1.4)$$

ko‘rinishda aniqlanadi. (1.3) va (1.4) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C[a, b]$ to‘plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.5-misol. $l_2 \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ - kvadrati

bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots) \quad (1.5)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots), \alpha \in C. \quad (1.6)$$

Yig‘indi $x + y \in l_2$ ekanligi $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (1.5) va (1.6) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va

songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, l_2 - to'plam kompleks chiziqli fazo bo'ladi.

1.6-misol. $c_0 \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots): \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ - nolga

yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (1.5) va (1.6) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi va ular chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, c_0 - to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

1.7-misol. $c \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots): \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a\}$ - yaqinlashuvchi

ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plam ham 1.5 - misolda kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.8-misol. $L = m$ - barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plam ham 1.5-misolda kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

1.2-ta'rif. Bizga L va L^* chiziqli fazolar berilgan bo'lsin. Agar bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^* \quad \text{va} \quad y \leftrightarrow y^*, \quad (x, y \in L, x^*, y^* \in L^*)$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^* \quad \text{va} \quad \alpha x \leftrightarrow \alpha y^*, \quad (\alpha - \text{ixtiyoriy son})$$

ekanligi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolar o'zaro izomorf fazolar deyiladi.

Izomorf fazolarni aynan bitta fazoning har xil ko'rinishi deb qarash mumkin.

1.3-ta'rif. Agar L chiziqli fazoning $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \quad (1.7)$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (1.7) tenglikdan

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.

Agar $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema chiziqli erkli deyiladi.

1.4-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L ga n - o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = n$ deb yoziladi. n - o'lchamli L chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.

1.5-ta'rif. Agar L chiziqli fazoda ixtiyoriy $n \in N$ uchun n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda L cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

R^n va C^n fazolar n -o'lchamli chiziqli fazolardir. $L = C[a, b]$ fazodan boshlab 1.4-1.8 misollarda keltirilgan barcha fazolar cheksiz o'lchamli fazolardir. Masalan, l_2 fazoda

$$\{e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, \dots}_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

sistema cheksiz chiziqli erkli sistemaga misol bo'ladi.

Chiziqli fazoning qism fazosi

Bizga L chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan L' qism to'plami berilgan bo'lsin.

1.6-ta'rif. Agar L' ning o'zi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' to'plam L ning qism fazosi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a, b \in C(R)$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ bo'lsa, L' qism fazo deyiladi.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni o'zining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

1.7-ta'rif. L chiziqli fazodan farqli va hech bo'lmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.

1.9-misol. $[a, b]$ kesmada $p(p > 1)$ -darajasi bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi $\tilde{L}_p[a, b]$ ni qaraymiz. Bu fazoning deyarli hamma yerda nolga teng (nolga ekvivalent) funksiyalaridan

tashkil bo'lgan qism to'plamni $\tilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ ko'rinishda belgilaymiz. Ma'lumki, nolga ekvivalent funksiyalar yig'indisi yana nolga ekvivalent bo'lgan funksiya bo'ladi. Nolga ekvivalent funksiyaning songa ko'paytmasi ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Demak, $\tilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ to'plam $\tilde{L}_p[a,b]$ fazoning xos qism fazosi bo'ladi.

1.10-misol. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Ammo ikki monoton funksiyaning yig'indisi har doim monoton funksiya bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin. $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = -2t$ funksiyalarning har biri $[0,2]$ kesmada monoton funksiya bo'ladi, ammo ularning yig'indisi $x(t) + y(t) = (t-1)^2$ funksiya $[0,2]$ kesmada monoton emas. Demak, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'la olmaydi. Demak, chiziqli fazoning har qanday qism to'plami qism fazo tashkil qilavermas ekan.

Bizga L fazoning bo'sh bo'lmagan $\{x_i\}$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o'zida saqllovchi minimal qism fazo mavjud.

Haqiqatan ham, $\{x_i\}$ sistemani saqllovchi hech bo'lmaganda bitta qism fazo mavjud, bu L ning o'zi.

Ixtiyoriy sondagi qism fazolarning kesishmasi yana qism fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, agar

$$L^* = \bigcap_i L_i$$

bo'lib $x, y \in L^*$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy i uchun $x, y \in L_i$ bo'ladi. L_i qism fazo bo'lganligi uchun $\alpha x + \beta y \in L_i$ munosabat barcha α, β sonlar uchun o'rinli. Demak, $\alpha x + \beta y \in L^*$ bo'ladi.

Endi $\{x_i\}$ sistemani saqllovchi L ning barcha qism fazolarini olamiz va ularning kesishmasini qaraymiz hamda uni $L(\{x_i\})$ orqali belgilaymiz. $L(\{x_i\})$ qism fazo $\{x_i\}$ sistemani saqllovchi minimal qism fazo bo'ladi. Bu $L(\{x_i\})$ minimal qism fazo $\{x_i\}$ "sistemadan

hosil bo'lgan" qism fazo yoki $\{x_i\}$ sistemaning chiziqli qobig'i deyiladi.

Chiziqli fazoning faktor fazosi

Bizga L chiziqli fazo va uning L' xos qism fazosi berilgan bo'lsin. L ning elementlari orasida quyidagicha munosabat o'rnatish mumkin.

1.8- ta'rif. Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x - y$ ayirma L' ga tegishli bo'lsa, x va y ekvivalent elementlar deb ataladi.

Fazo elementlari orasida o'rnatilgan bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Haqiqatan ham, $x - x \in L'$ (refleksivlik); $x - y \in L'$ dan $y - x = -(x - y) \in L'$ (simmetriklik); $x - y \in L'$, $y - x \in L'$ dan $x - z = (x - y) + (y - z) \in L'$ (tranzitivlik). Shuning uchun bu munosabat L ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va har bir sinf o'zaro ekvivalent elementlardan tashkil topgan. Bu sinflar qo'shni sinflar deb ataladi. Barcha qo'shni sinflar to'plami L chiziqli fazoning L' qism fazo bo'yicha faktor fazosi deb ataladi va L/L' ko'rinishda belgilanadi.

Tabiiyki, har qanday faktor fazoda yig'indi va songa ko'paytirish amallari kiritiladi.

Aytaylik, ξ va η lar L/L' dan olingan ixtiyoriy qo'shni sinflar bo'lsin. Bu sinflarning har biridan bittadan vakil tanlaymiz, masalan $x \in \xi$, $y \in \eta$. ξ va η sinflarning yig'indisi sifatida $x + y$ elementni saqlovchi ζ sinf qabul qilinadi. ξ qo'shni sinfning α songa ko'paytmasi sifatida αx elementni saqlovchi sinf qabul qilinadi. Natija $x \in \xi$, $y \in \eta$ vakillarning tanlanishiga bog'liq emas, chunki, qandaydir boshqa $x' \in \xi$, $y' \in \eta$ vakillarni olsak ham

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in L'$$

bo'lgani uchun $x' + y' \in \xi$ bo'ladi. Bevosita tekshirish shuni ko'rsatadiki, L/L' da aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallar chiziqli fazo ta'rifidagi aksiomalarni qanoatlantiradi (buni mustaqil tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya qilamiz). Boshqacha aytganda, L/L' faktor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

Shunday qilib, har bir L/L' faktor fazo unda yuqorida ko'rsatilgan usulda kiritilgan yig'indi va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Shuni ta'kidlash joizki, har qanday

faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo'ladi. Ma'lumki, L' qism fazoning elementlari o'zaro ekvivalent va L' qism fazo L chiziqli fazoning nol elementini saqlaydi. Shuning uchun ξ va L' qo'shni sinf lar ning yig'indisi $x + \theta = x$ ($x \in \xi, \theta \in L'$) elementni saqlovchi qo'shni sinfga, ya'ni ξ ga teng.

1.11-misol. $[a, b]$ kesmada $p(p > 1)$ -darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plami chiziqli fazo tashkil qiladi va u $\tilde{L}_p[a, b]$ simvol bilan belgilanadi. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism fazosini $\tilde{L}_p^0[a, b]$ ko'rinishda belgilaymiz. Endi $\tilde{L}_p[a, b]$ chiziqli fazoning $\tilde{L}_p^0[a, b]$ qism fazo bo'yicha faktor fazosini qaraymiz va bu faktor fazoni $L_p[a, b]$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $[a, b]$ kesmada aniqlangan va p -darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi deb ataladi.

Agar $L - n$ - o'lchamli chiziqli fazo va L' - uning k ($0 < k < n$) - o'lchamli qism fazosi bo'lsa, u holda L/L' faktor fazo $(n - k)$ - o'lchamli bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlaymiz. Aytaylik, $x_1, x_2, \dots, x_k$ elementlar sistemasi L' da bazis bo'lsin. Bu sistemani $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \in L$ elementlar bilan L fazo bazisigacha to'ldiramiz. Bu $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \in L$ elementlar bir-biri bilan ekvivalent emas, aks holda $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ sistema chiziqli bog'langan bo'lar edi. Shuning uchun $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \in L$ elementlar har xil qo'shni sinflarga tegishli bo'ladi. ξ_i orqali $x_{k+i}, i \in \{1, 2, \dots, n - k\}$ element tegishli bo'lgan sinfni belgilaymiz.

Endi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-k}$ elementlar sistemasining L/L' da bazis bo'lishini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\xi \in L/L'$ qo'shni sinfni olaylik va $x \in \xi$ bo'lsin. U holda

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \dots + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. $\xi + L' = \xi$ (har qanday L/L' faktor fazoda L' qism fazo L/L' faktor fazoning nol elementi bo'ladi, ya'ni $\theta = L'$) bo'lgani uchun

$$x' = x - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_k x_k$$

element ξ qo'shni sinfga tegishli va

$$x' = \beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \dots + \beta_{n-k} x_n$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\xi = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \dots + \beta_{n-k} \xi_{n-k}$$

tenglik kelib chiqadi. Har qanday $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-k}) \neq \theta$ da

$$\beta_1 x_{k+1} + \beta_2 x_{k+2} + \dots + \beta_{n-k} x_n \notin L'$$

bo'lgani uchun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-k}$ chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi.

Shunday qilib, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-k}$ sistema chiziqli bog'lanmaganligi va har bir $\xi \in L/L'$ sinf $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-k}$ sinflarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-k}$ sistemaning bazis ekanligiga kelamiz. Demak, L/L' fazo $(n-k)$ - o'lchamli chiziqli fazo ekan.

1.9-ta'rif. L/L' faktor fazoning o'lchami L' qism fazoning koo'lchami deyiladi.

Agar L' qism fazo chekli n koo'lchamga ega bo'lsa, u holda L da shunday $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlarni tanlash mumkinki, ixtiyoriy $x \in L$ element $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + y$ ko'rinishda bir qiymatli ifodalanadi, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - sonlar, $y \in L'$. Haqiqatan ham, L/L' faktor fazo n - o'lchamli bo'lsin. Bu faktor fazoda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bazisni tanlaymiz va har bir ξ_k sinfdan bittadan x_k vakil olamiz. Endi $x \in L$ ixtiyoriy element bo'lsin va ξ esa x ni saqllovchi L/L' dagi qo'shni sinf bo'lsin. U holda

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n.$$

Ta'rifga ko'ra ξ sinfdagi har bir element, xususiyl holda, x element $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlarning

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

chiziqli kombinatsiyasidan L' dan olingan elementgagina farq qiladi, ya'ni

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + y, \quad y \in L'. \quad (1.8)$$

Bu tasvirning yagonaligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$x = \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \dots + \alpha'_n x_n + y', \quad y' \in L'$$

tasvir ham o'rinli bo'lsin. U holda

$$0 = (\alpha_1 - \alpha'_1) x_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) x_2 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) x_n + y - y'$$

tenglikka kelamiz. Bundan

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2, \dots, \alpha_n = \alpha'_n, y = y'.$$

1.12-misol. Ixtiyoriy L chiziqli fazoning nol elementi yagona ekanligini isbotlang.

Yechish: L chiziqli fazoning ikkita θ_1 va θ_2 nol elementlari mavjud bo'lsin. U holda nol element ta'rif va qo'shish amalining kommutativligidan,

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2.$$

Demak, $\theta_1 = \theta_2$, ya'ni nol element yagona bo'ladi.

1.13-misol. Ixtiyoriy L chiziqli fazoda har bir elementga qarama-qarshi element yagona ekanligini isbotlang.

Yechish: Aytaylik, x' va x'' elementlar x elementga qarama-qarshi elementlar bo'lsin. U holda,

$$x' = x' + \theta = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \theta + x'' = x'', \text{ ya'ni } x' = x''.$$

1.14-misol. Agar L chiziqli fazoning x, y elementlari va noldan farqli λ soni uchun $\lambda x = \lambda y$ tengligi o'rinli bo'lsa, u holda x va y elementlarning o'zaro teng bo'lishini isbotlang.

Yechish: $\lambda x = \lambda y$ tengligining ikki tomoniga $-\lambda y$ elementini qo'shsak $\lambda(x - y) = 0$ tengligiga ega bo'lamiz. $\lambda \neq 0$ bo'lgani uchun $x - y = \lambda^{-1}[\lambda(x - y)] = 0$, ya'ni $x = y$.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.1. $l_2 \subset C_0 \subset C \subset m$ fazolarning har biri o'zidan keyingilari uchun xos qism fazo bo'lishini ko'rsating.

Quyida 1.10 – 1.17 misollarda keltirilgan to'plamlar $C[-1;1]$ fazoning qism fazosi bo'ladimi?

1.2. Monoton funksiyalar to'plami.

1.3. Toq funksiyalar to'plami.

1.4. Juft funksiyalar to'plami.

1.5. Darajasi n ($n > 1$) dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami.

1.6. $x(1) = a$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

1.7. $[-1;1]$ kesmada aniqlangan barcha ko'phadlar to'plami.

1.8. Qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami.

1.9. $\int_{-1}^1 x(t)dt = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

1.10. R^n fazoda $V = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 = x_2\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, uning o'lchamini toping.

1.11. l_2 fazoda $M = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, qism fazoning koo'lchamini toping.

1.12. $c \subset m$ ekanligini isbotlang.

1.13. $l_2 \subset c_0$ ekanligini isbotlang.

1.14 – 1.25 misollarda keltirilgan to'plamlar funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi? Qaysilari haqiqiy chiziqli fazo, qaysilari kompleks chiziqli fazo bo'ladi?

1.14. $[a, b]$ kesmada aniqlangan monoton funksiyalar to'plami.

1.15. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan toq funksiyalar to'plami.

1.16. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan juft funksiyalar to'plami.

1.17. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $x(a) = b$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami, b ning qanday qiymatida chiziqli fazo bo'ladi.

1.18. P – barcha ko'phadlar to'plami.

1.19. $C^{(n)}[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami.

1.20. $[a, b]$ kesmada qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami.

1.21. $L[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan va Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

1.22. $AC[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami.

1.23. R da aniqlangan uzluksiz va davriy funksiyalar to'plami.

1.24. $M(R) - R$ da aniqlangan chegaralangan funksiyalar to'plami.

1.25. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan uzluksiz va $T = 2a$ davriy funksiyalar to'plami.

Mavzu yuzasidan test savollari

1. Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar fazosining o'lchamini toping.
A) 100 B) 101 C) 50 D) 200
2. Uch satr va uch ustundan iborat matritsalar fazosining o'lchamini toping.
A) 3 B) 6 C) 9 D) 27
3. Chekli o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.
A) $C[a, b]$, l_2 B) $C_2[a, b]$, c_0 C) C^n , R^3 D) C^n , $L_2[a; b]$
4. Cheksiz o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.
A) R^n , $C[a, b]$, l_2 B) $C[a, b]$, l_2 , c_0
C) C^n , c , m D) C^n , $L_2[a, b]$, l_p
5. $C[0, 1]$ fazoda chiziqli bog'langan vektorlar sistemasini toping.
A) $1, t, t^2$ B) t^2, t^3, t^5 C) $1+t^2, 2t, (1-t)^2$ D) $1, t^2, t^4$
6. $L' = \{x \in R^5 : x_1 = x_5 = 0\}$ qism fazoning ko'o'lchamini toping.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
7. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[a, b]$ chiziqli fazoning qism fazosi bo'ladi?
A) Monoton o'suvchi funksiyalar B) Manfiymas funksiyalar
C) Monoton kamayuvchi funksiyalar D) Barcha ko'phadlar
8. Noto'g'ri tasdiqni toping.
A) l_1 fazo l_2 fazoning qism fazosi bo'ladi
B) c_0 fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.
C) l_2 fazo C_0 fazoning qism fazosi bo'ladi.
D) m fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.
9. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1, 1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?
A) Barcha ko'phadlar to'plami.
B) $x(-1) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.
C) Monoton funksiyalar to'plami.
D) Uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar to'plami.
10. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1, 1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?

- A) Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami.
 B) $x(1) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.
 C) Toq funksiyalar to'plami.
 D) Juft funksiyalar to'plami.
- 11.** Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1,1]$ fazoda qism fazo tashkil qiladi?
- A) Monoton o'suvchi funksiyalar to'plami.
 B) Monoton kamayuvchi funksiyalar to'plami.
 C) $\{x \in C[-1,1]: \int_{-1}^1 x(t)dt = 0\}$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.
 D) Darajasi 2 bo'lgan ko'phadlar.
- 12.** Noto'g'ri tasdiqni toping.
- A) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bo'lgan bo'ladi.
 B) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning ixtiyoriy qism sistemasi ham chiziqli bo'lgan bo'ladi.
 C) Agar sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, berilgan sistema ham chiziqli bo'lgan bo'ladi.
 D) Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, bu vektorlardan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.
- 13.** E chiziqli fazo, $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ bo'lsin. Chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasining ta'rifini ko'rsating.
- A) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
 B) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
 C) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$
 D) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$
- 14.** Noto'g'ri tasdiqni toping.
- A) n -o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlardan iborat sistema bazis bo'ladi.
 B) $\{e_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0}_k)\}_{k=1}^n$ vektorlar sistemasi R^n fazoda bazis bo'ladi.
 C) n - o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta vektordan iborat sistema bazis bo'ladi.

D) R^3 fazoda ixtiyoriy to'rtta vektor chiziqli bog'langandir.

15. Chiziqli bog'langan sistemani toping.

A) $x(t) = \sin^2 2t; y(t) = \cos^2 2t; z(t) = 1 \in C[0, \pi]$

B) $x = (0, 1); y = (1, 0) \in R^2$

C) $x = (1, 1, 1); y = (0, 1, 1); z = (0, 0, 1) \in R^3$

D) $x(t) = 1; y(t) = t \in C[0, 1]$

16. Chiziqli bog'lanmagan sistemani toping.

A) $x(t) = t; y(t) = \lg(1 + t); z(t) = 1 \in C[0, 1]$

B) $x = (0, 1); y = (2, 1); z = (1, 1) \in R^2$

C) $x = (0, 1, 1); y = (1, 0, 0); z = (0, 2, 2) \in R^3$

D) $x(t) = \sin^2 2t; y(t) = \cos^2 2t; z(t) = \cos 2t \in C[0, \pi]$

17. $f : R^3 \rightarrow R, f(x) = x_1$ chiziqli funksionalning yadrosini toping.

A) $\{x \in R^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ B) $\{x \in R^3 : x_1 = 0\}$

C) $\{x \in R^3 : x_2 = 0\}$ D) $\{x \in R^3 : x_3 = 0\}$

18. Faktor fazoda elementning normasi qanday aniqlanadi.

A) $\|\xi\| = \sup_{x \in \xi} \|x\|$ B) $\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|$ C) $\|\xi\| = \|x\|$

D) $\|\xi\| = \sup_{y \in L'} \|x - y\|$

19. Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x - y$ ayirma L' ga tegishli bo'lsa, x va y ... deb ataladi.

A) chiziqli bog'langan elementlar

B) chiziqli bog'lanmagan elementlar

C) ekvivalent elementlar

D) ekvivalent bo'lmagan elementlar

20. L / L' faktor fazoning o'lchami L' qism fazoning ... deyiladi.

A) o'lchami B) qism fazosi C) faktor fazosi D) koo'lchami

2-§. CHIZIQLI NORMALANGAN FAZOLAR

Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo‘q. Ko‘plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga to‘g‘ri keladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi. Normalangan fazolar nazariyasi S.Banax va boshqa matematiklar tomonidan rivojlantirilgan.

2.1-ta’rif. Bizga L - chiziqli fazo va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli p funksional berilgan bo‘lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

$$1) p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$2) p(ax) = |a|p(x), \quad \forall a \in C, \quad \forall x \in L;$$

$$3) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L.$$

2.2-ta’rif. Norma kiritilgan L chiziqli fazoga chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.

Agar L - normalangan fazoda $x, y \in L$ elementlar jufti uchun

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

sonni mos qo‘ysak, ρ funksional metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantiradi. Metrika aksiomalarining bajarilishi normaning 1-3 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Demak, har qanday chiziqli normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Shu sababli, metrik fazolarda o‘rinli bo‘lgan barcha tasdiqlar (ma’lumotlar) chiziqli normalangan fazolarda ham o‘rinli.

2.1-misol. Ushbu $p(x) = |\arctg x|$ funksiya R da norma shartlarini qanoatlan tiradimi?

Bu funksiya normaning musbat bir jinslilik shartini qanoatlantirmaydi, chunki norma ta’rifidagi 2-shart $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

bajarilmaydi. Masalan, $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$ sonlari uchun

$$p(\lambda x) = |\arctg \lambda x| = \left| \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\pi}{6} \quad \text{va} \quad |\lambda|p(x) = \frac{1}{3} |\arctg \sqrt{3}| = \frac{\pi}{9}$$

bo'lganligi sababli $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ tenglik o'rinli emas.

2.2-misol. $L = R$ - haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in R$ soni uchun $\|x\| = |x|$ sonni mos qo'ysak, R normalangan fazoga aylanadi.

$L = C$ - kompleks sonlar to'plami bo'lsin. Bu yerda ham norma yuqoridagidek kiritiladi: $\|z\| = |z|$.

2.3-misol. $L = R^n$ - n - o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad x \in R^n$$

funksionallar norma shartlarini qanoatlantiradi. R^n chiziqli fazoda $\|\cdot\|_p$ norma kiritilgan bo'lsa, uni R_p^n , agar $\|\cdot\|_\infty$ norma kiritilgan bo'lsa uni R_∞^n deb belgilaymiz.

2.4-misol. $L = C^n$ - n - o'lchamli kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi.

2.5-misol. $L = C[a, b]$ - $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f \in C[a, b]$ elementning normasi

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar $C[a, b]$ chiziqli fazoda norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

formula vositasida kiritilgan bo'lsa, uni $C_1[a, b]$, agar norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

tenglik orqali kiritilgan bo'lsa uni $C_2[a, b]$ deb belgilaymiz.

2.6-misol. l_2 fazoda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

2.7-misol. c_0, c, m fazolarda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n < \infty} |x_n|.$$

2.8-misol. $M[a, b]$ - bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x \in M[a, b] \quad (2.1)$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi va $M[a, b]$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

2.9-misol. $C^{(n)}[a, b]$ - bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. $C^{(n)}[a, b]$ to'plam odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sum_{k=1}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|, \quad x \in C^{(n)}[a, b] \quad (2.2)$$

funksional normaning 1-3 shartlarini qanoatlantiradi.

2.10-misol. $[a, b]$ kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a, b]$ ni qaraymiz. Bu fazoda

$$p: V[a, b] \rightarrow R, \quad p(x) = |x(a)| + V_a^b[x] \quad (2.3)$$

funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi va $V[a, b]$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2.3-ta'rif. Biror $x \in X$ va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.

2.4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $p \in N$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik deyiladi.

2.11-misol. $C[-1;1]$ fazoda $x_n(t) = t^n$ ($n \in N$) ketma-ketlikni fundamentallikka tekshiring.

Yechish: $C[-1;1]$ fazo to'la normalangan fazo bo'lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan uning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. $C[-1;1]$ fazodagi yaqinlashish tekis yaqinlashishni ifodalaganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ham uzluksiz bo'lishi kerak. Qaralayotgan ketma-ketlikning limiti uzluksiz emas. Shuning uchun qaralayotgan ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatishga harakat qilamiz. Buning uchun shunday $\varepsilon_0 > 0$ soni mavjud bo'lib, istalgan $n \in N$ uchun undan katta $n_0 > n$ va shunday $p_0 \in N$ sonlari mavjud bo'lib, $\|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}\| > \varepsilon_0$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatish kerak. $\varepsilon_0 = \frac{1}{5}$ va har bir $n \in N$ dan katta biror $n_0 > n$ natural son uchun $p_0 = n_0$ deb olamiz. Ixtiyoriy $t_0 \in [0;1]$ uchun

$$\|x_{2n_0} - x_{n_0}\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |t^{2n_0} - t^{n_0}| \geq t_0^{n_0} - t_0^{2n_0}$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan $t_0 = \frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}$ bo'lganida ushbu

$$\|x_{2n_0} - x_{n_0}\| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi.

2.5-ta'rif. Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.

2.12-misol. R^n , R_p^n , $C[a,b]$, ℓ_p , $p \geq 1$, c , c_0 fazolarni to'lalikka tekshiring.

Yechish: To'la metrik fazolar mavzusidan ma'lumki R^n , R_p^n , $C[a,b]$, ℓ_p , $p \geq 1$, c , c_0 lar to'la metrik fazolar edi. Shuning uchun ular to'la normalangan fazolar, ya'ni Banax fazolari bo'ladi.

$C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan metrik fazo edi. Shuning uchun $C_2[a,b]$ to'la bo'lmagan normalangan fazoga misol bo'ladi.

2.13-misol. Normalangan fazoda $B(x_0, r)$ sharning qavariq ekanligini isbotlang.

Yechish: $B(x_0, r)$ shardan ixtiyoriy x, y elementlarni olaylik. U holda $\|x - x_0\| < r$ va $\|y - x_0\| < r$ tengsizliklari o'rinli bo'ladi. Natijada, har bir $\alpha \in [0, 1]$ uchun

$$\begin{aligned} \|\alpha x + (1 - \alpha)y - x_0\| &= \|\alpha x + (1 - \alpha)y - \alpha x_0 - (1 - \alpha)x_0\| \\ &\leq \alpha\|x - x_0\| + (1 - \alpha)\|y - x_0\| < \alpha r + (1 - \alpha)r = r. \end{aligned}$$

Demak, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in B(x_0, r)$, ya'ni $B(x_0, r)$ qavariq to'plam.

Normalangan fazoning qism fazosi

Biz yuqorida chiziqli fazoning qism fazosi tushunchasini kiritgan edik, ya'ni agar ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa, bo'sh bo'lmagan $L_0 \subset L$ qism to'plam, qism fazo deyilar edi.

Normalangan fazolarda yopiq qism fazolar, ya'ni barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlovchi qism fazolar muhim ahamiyatga ega. Chekli o'lchamli normalangan fazolarda har qanday qism fazo yopiqdir. Cheksiz o'lchamli normalangan fazolarda qism fazolar doim yopiq bo'lavermaydi. Quyida keltiriladigan misol fikrimizni tasdiqlaydi.

2.14-misol. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a, b]$ dagi barcha ko'phadlar to'plami qism fazo tashkil qiladi, lekin u yopiq emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

ko'phadlar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $\{P_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lib, uning limiti $x(t) = e^t$ ga teng. $x(t) = e^t$ funksiya esa ko'phad emas.

Normalangan fazolarda asosan yopiq chiziqli qism fazolarni qaraymiz.

2.6-ta'rif. Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlari va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa L_0 chiziqli ko'pxillilik deyiladi. Agar $L_0 \subset L$ qism to'plam yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'lsa, L_0 qism to'plam L ning qism fazosi deyiladi.

2.15-misol. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[-1, 1]$ dagi barcha toq funksiyalar to'plami $C^-[-1, 1]$ chiziqli ko'pxillilik tashkil qiladi va u yopiq. Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ toq funksiyalar ketma-ketligi biror $x \in C[-1, 1]$ elementga yaqinlashsin. U holda

$$x(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n(t)) = -\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = -x(t).$$

Normalangan fazoning faktor fazosi

Bizga L normalangan fazo va uning $L_0 \subset L$ qism fazosi berilgan bo'lsin. $P = L/L_0$ faktor fazoni qaraymiz va unda normani quyidagicha aniqlaymiz. Har bir $\xi \in P$ qo'shni sinfga

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\| \quad (2.4)$$

sonni mos qo'ysak, bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, L/L_0 faktor fazo ham normalangan fazo bo'lar ekan.

Agar L to'la normalangan fazo bo'lsa, L/L_0 faktor fazo ham (2.4) normaga nisbatan to'la fazo bo'ladi.

2.16-misol. $L = R^3$ fazoning xos qism fazosi $L' = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 = 0\}$ ni qaraymiz va L/L' faktor fazoning elementlarini, ya'ni qo'shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma'lumki, $x - y = (x_1 - x_2, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \in L'$ bo'lishi uchun $x_3 = y_3$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari Ox_1x_2 tekislikka parallel bo'lgan tekisliklardan iborat. Masalan, $(a, b, c) \in R^3$ nuqtani o'zida saqlovchi ξ qo'shni sinf Ox_1x_2 tekisligiga parallel bo'lgan $x_3 = c$ tekislikdan iborat. Bu faktor fazoda ξ elementning normasi

$$p(\xi) = \inf_{x \in \xi} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \inf_{x_1, x_2 \in R} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |x_3|$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu faktor fazoning o'lchami 1 ga teng va u to'la normalangan fazo.

2.17-misol. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a, b]$ ni qaraymiz. Unda o'zgarmas funksiyalardan iborat $L' = \{x \in V[a, b] : x(t) = \text{const}\}$ bir o'lchamli qism fazoni olamiz. Endi $V[a, b]$ chiziqli fazoning L' qism fazo bo'yicha faktor fazosini qaraymiz. Faktor fazo ta'rifiga ko'ra, $x, y \in V[a, b]$ elementlar bitta qo'shni sinfda yotishi uchun $x(t) - y(t) \equiv \text{const}$ bo'lishi zarur va yetarli. Boshqacha aytganda, $y \in V[a, b]$ element x elementni saqlovchi ξ qo'shni sinfda yotishi uchun $y(t) \equiv x(t) - C$, $C = \text{const}$ ko'rinishda tasvirlanishi zarur va yetarli. Ma'lumki, har qanday faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\xi\| = \inf_{y \in \xi} \|y\| = \inf_{C \in R} (|x(a) - C| + V_a^b[x - C]). \quad (2.5)$$

O'zgarishi chegaralangan funksiyalar xossaligidan ma'lumki, istalgan C o'zgarmas uchun

$$V_a^b[x - C] = V_a^b[x]$$

tenglik o'rinli. $|x(a) - C|$ ning aniq quyi chegarasi esa nolga teng. Bulardan foydalanib, (2.5) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\|\xi\| = V_a^b[x], \quad x \in \xi \quad \text{va} \quad x(a) = 0. \quad (2.6)$$

Shunday qilib ξ qo'shni sinfga, shu sinfnig a nuqtada nolga aylanuvchi x elementini mos qo'yish bilan $V[a, b]/L'$ faktor fazo va $V_0[a, b]$ fazolar o'rtasida izomorfizm o'rnatiladi. Demak, $V[a, b]/L'$ va $V_0[a, b]$ fazolar o'zaro izomorf ekan.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi akslantirishlar norma shartlarini qanoatlantiradimi?

2.1. Har qanday normalangan fazoda ochiq shar ochiq to'plam, yopiq shar yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

2.2. $p: P_{\leq n} \rightarrow R$, $p(x) = \max \{|a_1|, \dots, |a_n|\}$, bu yerda $P_{\leq n}$ - darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi.

2.3. $p: C^{(1)}[a; b] \rightarrow R$, $p(x) = |x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$.

2.4. $p: C[a; b] \rightarrow R$, $p(x) = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

2.5. $p: R^n \rightarrow R$, $p(x) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

2.6. $p: M[a, b] \rightarrow R$, $p(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.

2.7. $p: C[a; b] \rightarrow R$, $p(x) = \int_a^b |x(t)| dt$.

2.8. $p: C^{(1)}[a, b] \rightarrow R$, $p(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$.

2.9. $p: \Phi_C(R) \rightarrow R$, $p(x) = \max_{-\infty \leq t \leq \infty} |x(t)|$. Bu yerda $\Phi_C(R)$ - sonlar o'qida aniqlangan uzluksiz va finit funksiyalar to'plami.

2.10. $p: C^{(2)}[a, b] \rightarrow R$, $p(x) = |x(a)| + |x'(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$.

2.11. $p: C^{(2)}[a, b] \rightarrow R$, $p(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$.

Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi $x(t) \equiv 0$ funksiyaga ko'rsatilgan fazoda yaqinlashuvchimi?

$$2.12. \quad x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2+t^2}, \quad C[0;1].$$

$$2.13. \quad x_n(t) = te^{-nt}, \quad C_1[0;10].$$

$$2.14. \quad x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}, \quad C_1[-\pi; \pi].$$

$$2.15. \quad x_n(t) = t^n - t^{2n}, \quad C_2[0,1].$$

$$2.16. \quad x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{2+n}}{2+n}, \quad C[0,1].$$

$$2.17. \quad x_n(t) = \frac{t}{1+n^2t^2}; \quad C_1[0;1].$$

$$2.18. \quad x_n(t) = \sqrt{t^n - \frac{1}{n^2}} - t; \quad C_1[0;1].$$

$$2.19. \quad x_n(t) = t^n - t^{n+1}; \quad C_2[0;1]$$

$$2.20. \quad x_n(t) = n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2nt} \cdot e^{-\frac{1}{2}nt}; \quad C_2[0;1]$$

$$2.21. \quad x_n(t) = 2n \cdot t \cdot e^{-nt^2}; \quad C_1[0;1].$$

$$2.22. \quad X \text{ normalangan fazo va } x_n, x, y_n, y \in X \text{ bo'lsin.}$$

Quyidagiarni isbotlang:

a) agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa, u holda x_n chegaralangan ketma-ketlik;

b) agar $x_n \rightarrow x, \lambda_n \rightarrow \lambda, \lambda_n \in C$ bo'lsa, u holda $\lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda \cdot x$;

c) agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa, u holda $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$;

d) agar $x_n \rightarrow x$ va $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $y_n \rightarrow x$;

e) agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa, u holda $\|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$;

f) agar $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ bo'lsa, u holda $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$.

2.23. Ixtiyoriy $x, y \in X$ lar uchun $\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

2.24. Shunday $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$ ketma-ketlikka misol keltiringki, u:

a) m da yaqinlashuvchi, l_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

b) m da yaqinlashuvchi, l_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

- c) l_2 da yaqinlashuvchi, l_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;
d) c_0 da yaqinlashuvchi, l_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;
e) c_0 da yaqinlashuvchi, l_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin.

2.25. Ixtiyoriy $x, y \in X$ lar uchun $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ tengsizlikni isbotlang.

Mavzu yuzasidan test savollari

1. To'la bo'lmagan normalangan fazoni toping.

- A) $C_1[a, b]$ B) l_2 C) R^n D) $C[a, b]$

2. E normalangan fazo. Noto'g'ri tasdiqni toping.

- A) E dagi ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchidir
B) Agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ bo'lsa, u holda $x_n + y_n \rightarrow x + y$
C) $x, y \in E$ uchun $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ tengsizlik o'rinli
D) $x_n \rightarrow x$ va $\lambda_n \rightarrow \lambda$ bo'lsa, u holda $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$

3. $C_1[0, 1]$ fazoda $x(t) = t^2 + 1$ elementning normasini hisoblang.

- A) 1/3 B) 2/3 C) 1 D) 4/3

4. $C[0, 1]$ fazoda $x(t) = t^2 + 1$ elementning normasini hisoblang.

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

5. Qanday fazo Banax fazosi deyiladi?

- A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo
B) To'la normalangan fazo
C) Har qanday normalangan fazo
D) Istalgan metrik fazo

6. Quyidagi $P(x)$ akslantirishlardan qaysi biri norma emas?

- A) $C[a, b]$ da $P(x) = \sqrt{\int_a^b |x(t)| dt}$ B) $C[a, b]$ da $P(x) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$
C) $l_p (p > 1)$ da $P(x) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^p}$ D) c_0 da $P(x) = \sup |x_n|$

7. Quyidagi $P(x)$ akslantirishlardan qaysi biri norma emas?

- A) R^n da $P(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|$ B) R^n da $P(x) = \max_{k=1, n} |x_k|$
C) R^n da $P(x) = \sum_{k=1}^{n-1} |x_k|$ D) R^n da $P(x) = \max_{k=1, n} |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k|$

8. $x = (1, 1, -1, 0, \dots) \in \ell_1$ va $y = (1, 2, 3, 4, 0, \dots) \in \ell_1$ bo'lsa, $\|x - y\|$ ni hisoblang.

- A) -9 B) 0 C) 5 D) 9

9. $x = (1, 1, -1, 0, \dots) \in \ell_2$ va $y = (-1, 0, 1, 0, \dots) \in \ell_2$ bo'lsa, $\|x - y\|$ ni hisoblang.

- A) 3 B) 6 C) 5 D) 4

10. $x = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ normasini hisoblang.

- A) $\sqrt{2}$ B) 0 C) 2 D) 3

11. $x = (i, 1, 0) \in \mathbb{C}^3$ normasini hisoblang

- A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 4 D) 3

12. $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ va $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ bo'lsa, $\|x - y\|$ ni toping.

- A) $\|x + y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k + y_k)^2}$ B) $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2}$
 C) $\|x - y\| < \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2}$ D) $\|x - y\| > \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2}$

13. Normalangan fazoda qaysi tengsizlik har doim o'rinli.

- A) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ B) $\|x + y\| > \|x\| + \|y\|$
 C) $\|x + y\| > \|x\| - \|y\|$ D) $\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$

14. Normaning ta'rifidagi xossani ko'rsating:

- A) $\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ B) $\|x + y\| = \|y - x\|$
 C) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ D) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

15. ℓ_1 fazoda aniqlangan $f(x) = x_1 + x_2$ chiziqli funksional normasini hisoblang.

- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3

16. ℓ_2 fazoda aniqlangan $f(x) = x_1 - x_2$ chiziqli funksional normasini hisoblang.

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 0 D) 3

17. $C[0, 1]$ fazoda aniqlangan $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$ chiziqli funksional normasini hisoblang.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$

18. $L_2[0,1]$ fazoda aniqlangan $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$ chiziqli funksional normasini hisoblang.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

19. L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plami qachon L ning qism fazosi bo'ladi?

A) Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlari va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa.

B) L normalangan fazo qism fazoga ega emas.

C) Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlari va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa L_0 chiziqli ko'pxillilik bo'lib, $L_0 \subset L$ qism to'plam yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'lsa.

D) $L_0 \subset L$ bo'lishi yetarli.

20. Quyidagilardan qaysi biri to'la bo'lmagan normalangan fazoga misol bo'ladi?

- A) $C_2[a, b]$ B) R^n C) R_p^n D) $C[a, b]$

3-§. YEVKLID FAZOLARI

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

3.1-ta'rif. Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa:

- 1) $p(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$
- 2) $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in L;$
- 3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \quad \forall \alpha \in R, \quad \forall x, y \in L;$
- 4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in L,$
unga skalyar ko'paytma deyiladi.

3.2-ta'rif. Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Yevklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi $p(x, y) = (x, y)$ orqali belgilanadi.

3.1-misol. $C^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n), x_k \in C, k = 1, 2, \dots, n\}$ chiziqli fazoni qaraylik.

$$p(x, y) = (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}, \quad x, y \in C^n \quad (3.1)$$

formula yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Bunda biz kompleks sonlar xossalaridan foydalanamiz.

$$1) (x, x) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \geq 0, \quad \forall x \in C^n$$

tengsizlik $|x_k| \geq 0$ ekanligidan kelib chiqadi. Endi

$$(x, x) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = 0$$

bo'lsin. Qo'shiluvchilarning manfiy emasligidan har bir k uchun $x_k = 0$, ya'ni $x = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Aksincha, har bir k uchun $x_k = 0$ bo'lsa, u holda $(x, x) = 0$ bo'lishi ko'rinib turibdi.

$$2) (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^n \overline{\overline{x_k} y_k} = \sum_{k=1}^n \overline{y_k x_k} = \overline{(y, x)}.$$

Bu xossa ko'paytmaning qo'shmasi qo'shmalar ko'paytmasiga, yig'indining qo'shmasi esa qo'shmalar yig'indisiga tengligidan kelib chiqadi.

3)

$$x, y, z \in C^n, \quad (x + y, z) = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) \bar{z}_k = \sum_{k=1}^n x_k \bar{z}_k + \sum_{k=1}^n y_k \bar{z}_k = (x, z) + (y, z),$$

$$4) \quad x, y \in C^n, \quad \lambda \in C, \quad (\lambda x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda x_k \bar{y}_k = \lambda \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k = \lambda (x, y).$$

Bu tengliklarning bajarilishi ham 2-xossa kabi tekshiriladi. Demak, (3.1) tenglik yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantiradi va C^n kompleks Yevklid fazosi bo'ladi.

Yevklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (3.2)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Skalyar ko'paytmaning 1-4 shartlaridan normaning 1-2 shartlari bevosita kelib chiqadi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (3.3)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Endi (3.3) tengsizlikni, ya'ni Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz. $\lambda \in R$ ning barcha qiymatlarida nomanfiy bo'lgan kvadrat uchhadni qaraymiz:

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda (x, y) + \|y\|^2.$$

Bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$D = 4[(x, y)]^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

Bundan

$$|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2, \quad \text{ya'ni} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Endi (3.2) norma uchun uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Bundan

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Shuni ta'kidlaymizki, Yevklid fazosida yig'indi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari uzluksizdir, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$

(norma bo'yicha yaqinlashish ma'nosida), $\alpha_n \rightarrow \alpha$ (sonli ketma-ketlik sifatida) bo'lsa, u holda

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \alpha_n x_n \rightarrow \alpha x, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Bu tasdiqlarning isboti quyidagicha:

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \\ \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leq \|(\alpha - \alpha_n)x_n\| + \|\alpha(x_n - x)\| = \\ &= |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Yevklid fazolarida nafaqat vektorning normasini (ya'ni uzunligini), balki vektorlar orasidagi burchak tushunchasini ham kiritish mumkin. Noldan farqli x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (3.4)$$

formula bilan aniqlanadi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra (3.4) ning o'ng tomoni moduli bo'yicha birdan oshmaydi va demak (3.4) formula haqiqatan ham, nolmas x va y vektorlar orasidagi φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ burchakni aniqlaydi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

3.3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.

Agar $\{x_\alpha\}$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil qilsa, u holda $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$$

bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismini x_i ga skalyar ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_i (x_i, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$(x_i, x_i) \neq 0$ bo'lgani uchun, barcha $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ larda $\alpha_i = 0$ bo'ladi.

3.4-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\} \subset E$ sistemani o'zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.

3.5-ta'rif. Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal (ortogonal normalangan) bazis deyiladi.

Ravshanki, agar $\{x_\alpha\}$ - ortogonal sistema bo'lsa, u holda

$$\{x_\alpha \| x_\alpha\|^{-1}\}$$

ortonormal sistema bo'ladi.

3.2-misol. $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$ - n - o'lchamli Yevklid fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Bu fazoda

$$\{e_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0}_k)\}_{k=1}^n$$

vektorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil qiladi.

3.3-misol. Kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosi ℓ_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

l_2 fazoda ortonormal bazis sifatida

$$\{e_n = (\underbrace{0, 0, \dots, 1, 0, \dots}_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

vektorlar sistemasini olish mumkin.

3.4-misol. $C_2[a, b]$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Bu fazoda ortogonal (normalanmagan) bazisga

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi nt}{b-a}, \sin \frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n=1,2,\dots$$

funksiyalardan tashkil topgan trigonometrik sistema misol bo'la oladi.

3.6-ta'rif. Agar E Yevklid fazosining hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Yevklid fazosi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan R^n , l_2 , $C_2[a,b]$ va $L_2[a,b]$ fazolar separabel Yevklid fazolariga misol bo'ladi. Har qanday separabel Yevklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqlidir.

3.1-teorema. (Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni). Bizga E Yevklid fazosida chiziqli bog'lanmagan

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (3.5)$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda E Yevklid fazosida quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (3.6)$$

sistema mavjud:

1) (3.6) ortonormal sistema.

2) Har bir ϕ_n element $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n, \quad a_{nn} > 0;$$

3) har bir f_n element

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} > 0$$

ko'rinishda tasvirlanadi.

4) (3.6) sistemaning har bir elementi 1-3 shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. ϕ_1 element $a_{11}f_1$ ko'rinishda izlanadi va a_{11}

$$(\phi_1, \phi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1$$

shartdan aniqlanadi. Bu yerdan

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\|f_1\|}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ϕ_1 bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi $\phi_k, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ elementlar qurilgan bo‘lsin. Ushbu

$$\psi_n = f_n - (f_n, \phi_1)\phi_1 - (f_n, \phi_2)\phi_2 - \dots - (f_n, \phi_{n-1})\phi_{n-1}$$

elementni kiritamiz. Ko‘rinib turibdiki, agar $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ bo‘lsa, $(\psi_n, \phi_k) = 0$ va $(\psi_n, \psi_n) > 0$ bo‘ladi. Chunki $(\psi_n, \psi_n) = 0$ tenglik (3.5) sistemaning chiziqli erkli ekanligiga zid.

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}$$

deymiz. ψ_n vektorning qurilishiga ko‘ra u $f_1, f_2, \dots, f_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi va demak, ϕ_n ham ularning chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n, \text{ bu yerda } a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}} > 0$$

Bundan tashqari $(\phi_k, \phi_k) = 1, (\phi_n, \phi_k) = 0, (k < n)$ va

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)} > 0,$$

ya'ni ϕ_n teorema shartlarini qanoatlantiradi. (3.5) sistemadan 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi (3.6) sistemaga o‘tish ortogonallashtirish jarayoni deyiladi. Ko‘rinib turibdiki, (3.5) va (3.6) sistemalardan hosil bo‘lgan qism fazolar ustma-ust tushadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sistemalar bir vaqtda to‘la bo‘ladi.

3.1-natija. Har qanday separabel Yevklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

Isbot. ϕ_n - E Yevklid fazosining hamma yerida zich sanoqli to‘plam bo‘lsin. Undan chiziqli bog‘langan elementlarni chiqarib tashlab, qolgan $\{f_n\}$ sistemaga ortogonallashtirish jarayonini qo‘llab, ortonormal bazisni hosil qilamiz.

3.5-misol. R^3 Yevklid fazosida $f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (0, 1, 1), f_3 = (1, 1, 1)$ vektorlar sistemasiga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo‘llayliz.

Ma'lumki, R^n fazoda n ta vektordan iborat sistemaning chiziqli erkli bo'lishi uchun bu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. Berilgan vektorlar uchun bu determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

bo'lganligi sababli, ular chiziqli erkli. Endi bu elementlarga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llaymiz. $\varphi_1 = f_1 = (1,1,0)$ deb olsak, $\|\varphi_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ bo'ladi. φ_2 elementni $\varphi_2 = f_2 - a_{21}\varphi_1$ ko'rinishda olib, a_{21} koeffitsiyentni $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz:

$$0 = (\varphi_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - a_{21}(\varphi_1, \varphi_1), \text{ yoki } a_{21} = \frac{(f_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1}{2}.$$

U holda

$$\varphi_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad \|\varphi_2\|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\|\varphi_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

bo'ladi. φ_3 vektorni quyidagicha izlaymiz:

$$\varphi_3 = f_3 - a_{31}\varphi_1 - a_{32}\varphi_2. \quad (3.7)$$

Bunda a_{31} , a_{32} koeffitsiyentlarni shunday tanlaymizki, $(\varphi_3, \varphi_1) = (\varphi_3, \varphi_2) = 0$ bo'lsin. Buning uchun (3.7) ni avval φ_1 ga, keyin esa φ_2 ga skalyar ko'paytirib, a_{31} , a_{32} koeffitsiyentlarni topamiz:

$$a_{31} = \frac{(f_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{2} = 1, \quad a_{32} = \frac{(f_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Demak,

$$\varphi_3 = (1,1,1) - (1,1,0) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad \|\varphi_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hosil bo'lgan $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vektorlar ortogonaldir. Ulardan ortonormal sistemani hosil qilamiz:

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \psi_2 = \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \psi_3 = \frac{\varphi_3}{\|\varphi_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Bessel tengsizligi. Yopiq ortogonal sistema

Bizga n - o'lchamli E Yevklid fazosi va uning $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bazisi berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in E$ elementni

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$$

yoyilma ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $c_k = (x, e_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bu yoyilmani cheksiz o'lchamli Yevklid fazolari uchun qanday umumlashtirish mumkinligini ko'rib chiqamiz. Bizga E Yevklid fazosining

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (3.8)$$

ortonormal sistemasi va $f \in E$ ixtiyoriy elementi berilgan bo'lsin. f elementga

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (3.9)$$

sonlar ketma-ketligini mos qo'yamiz va c_k sonlarni f elementning koordinatalari yoki $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fur'ye koeffitsiyentlari deb ataymiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \quad (3.10)$$

formal qatorni esa f elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema bo'yicha Fur'ye qatori deb ataymiz.

Quyidagicha savol tug'iladi. (3.10) qator yaqinlashuvchimi? Ya'ni qatorning qisman yig'indilar ketma-ketligi

$$\sum_{k=1}^n c_k \phi_k = f_n$$

biror elementga yaqinlashadimi? Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (3.10) qatorning yig'indisi f ga teng bo'ladimi?

Bu savollarga javob berish uchun quyidagi masalani qaraymiz. Berilgan n natural son uchun $\alpha_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ koeffitsiyentlarni shunday tanlash kerakki, f va

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad (3.11)$$

yig'indi orasidagi $\|f - S_n\|$ masofa minimal bo'lsin. Bu masofa kvadratini hisoblaymiz. (3.8) ortonormal sistema bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \right) = (f, f) - \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, f \right) + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j \right) = (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (f, \phi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned}$$

Bu ifoda

$$\alpha_k = c_k, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.12)$$

bo'lgan holda minimumga erishadi. Bu holda

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (3.13)$$

Biz isbotladikki, (3.11) ko'rinishdagi yig'indilar ichida f elementdan Fur'ye qatorining

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$$

qisman yig'indisi eng kam chetlanar ekan.

Bu tasdiqning geometrik ma'nosi shundan iboratki,

$$f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

vektor $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlarning barcha chiziqli kombinatsiyalariga ortogonal, ya'ni $f - S_n$ element $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlardan hosil bo'lgan qism fazoga ortogonal bo'lishi uchun (3.12) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$\|f - S_n\|^2 \geq 0$ bo'lgani uchun (13) tenglikka ko'ra

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ uchun o‘rinli, shunday ekan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

qator yaqinlashuvchi va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (3.14)$$

So‘nggi (3.14) tengsizlik Bessel tengsizligi deyiladi.

3.7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $f \in E$ uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \quad c_k = (f, \phi_k) \quad (3.15)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi. (3.15) tenglik Parseval tengligi deyiladi.

(3.13) tenglikdan kelib chiqadiki, $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemaning yopiq bo‘lishi uchun, har bir $f \in E$ da

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$$

Fur'ye qatorining qisman yig‘indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashishi kerak.

3.2-teorema. Separabel Yevklid fazosida har qanday to‘la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

Isbot. E dan olingan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to‘la ortonormal sistemani qaraymiz. Istalgan $f \in E$ uchun $c_k = (f, \phi_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ Fur'ye koeffitsiyentlarini olamiz. $\{\phi_n\}$ sistema to‘la bo‘lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko‘ra shunday $\sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k$ chekli yig‘indi mavjud bo‘lib,

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $n \geq N$ bo‘lganda

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N c_k^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \right\|^2 < \varepsilon.$$

Olingan bu munosabatlardan

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Parseval tengligi kelib chiqadi, ya'ni $\{\phi_n\}$ sistema yopiq ekan.

Endi $\{\phi_n\}$ - E dan olingan ixtiyoriy yopiq ortonormal sistema bo'lsin. $f \in E$ vektor qanday bo'lmasin, uning Fur'ye qatori $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ ning qisman yig'indilar ketma-ketligi f elementga yaqinlashadi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \right) = 0.$$

Shuning uchun $\{\phi_n\}$ - sistemaning barcha chekli kombinatsiyalari to'plami E ning hamma yerida zich bo'ladi. Ya'ni $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema bo'ladi.

To'la Yevklid fazolari. Riss-Fisher teoremasi

Bizni asosan to'la Yevklid fazolari qiziqtiradi.

3.8-ta'rif. E Yevklid fazosi $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Yevklid fazosi deyiladi.

3.6-misol. $C_2[a, b]$ to'la bo'lmagan separabel Yevklid fazosi bo'ladi.

3.7-misol. l_2 va $L_2[a, b]$ to'la separabel Yevklid fazolariga misol bo'ladi.

3.3-teorema. (Riss-Fisher). $\{\phi_n\}$ - E to'la Yevklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema va $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar shunday bo'lsinki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad (3.16)$$

qator yaqinlashsin. U holda shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$c_k = (f, \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot. E to'la Yevklid fazosida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k.$$

(3.16) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon) > 0$ mavjudki, barcha $n > n(\varepsilon)$ va $p \in N$ larda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\phi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli, ya'ni $\{f_n\}$ - fundamental ketma-ketlik. E ning to'laligiga ko'ra $\{f_n\}$ ketma-ketlik qandaydir $f \in E$ elementga yaqinlashadi. Istalgan $i \in N$ uchun

$$(f, \phi_i) = (f_n, \phi_i) + (f - f_n, \phi_i), \quad (3.17)$$

tenglik o'rinli. (3.17) ning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi $n \geq i$ da c_i ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, chunki

$$\|(f - f_n, \phi_i)\| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\phi_i\| = \|f - f_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(3.17) tenglikning chap tomoni n ga bog'liq emas, shuning uchun $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$(f, \phi_i) = c_i.$$

f ning aniqlanishiga ko'ra,

$$\|f - f_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Shuning uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f). \quad \Delta$$

Ortogonal sistemaning to'laligi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

3.4-teorema. *To'la separabel Yevklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun, E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas elementning mavjud bo'lmasligi yetarli va zarurdir.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\{\phi_n\}$ - to'la sistema bo'lsin, u holda 3.2-teoremaga ko'ra, u yopiq ham bo'ladi. Agar f element $\{\phi_n\}$

sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lsa, u holda uning barcha Fur'ye koeffitsiyentlari nolga teng, ya'ni $c_n = 0$ bo'ladi. U holda Parseval tengligiga ko'ra,

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

ya'ni $f = \theta$.

Teskarisi, $\{\phi_n\}$ to'la bo'lmagan sistema bo'lsin, ya'ni E da shunday $g \neq \theta$ element mavjud bo'lib,

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ bu yerda } c_k = (g, \phi_k)$$

tengsizlik bajarilsin. Riss-Fisher teoremasiga asosan, shunday $f \in E$ element mavjudki,

$$(f, \phi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

tengliklar o'rinli. Bu holda $f - g$ element barcha ϕ_k larga ortogonal bo'ladi.

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

tengsizlikdan $f - g \neq \theta$ ekanligi kelib chiqadi. Δ

3.8-misol. $L_2[-\pi, \pi]$ separabel Yevklid fazosida

$$\{\psi_n(t) = \pi^{-1/2} \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$$

ortonormal sistema to'la bo'lmashligini ko'rsatamiz.

$\{\psi_n\}$ larning barchasiga ortogonal bo'lgan $f_0(t) = 1$ nolmas element mavjud. Shuning uchun, 3.4-teoremaga ko'ra $\{\psi_n\}$ sistema to'la emas.

Yevklid fazolarining xarakteristik xossalari

Quyidagicha savolni qaraymiz. R - normalangan fazo bo'lsin. R da aniqlangan norma qanday qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsa, R - Yevklid fazosi ham bo'ladi? Boshqacha aytganda, qanday shartlarda norma orqali unga mos skalyar ko'paytma kiritish mumkin?

3.5-teorema. R normalangan fazo Yevklid fazosi bo'lishi uchun, ixtiyoriy ikkita $f, g \in R$ elementlar uchun

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad (3.18)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. $f + g$ va $f - g$ tomonlari f va g vektorlardan iborat parallelogramm diagonallaridir. (3.18) tenglik Yevklid fazosidagi parallelogrammning ma'lum xossasini ifodalaydi, ya'ni parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi barcha tomonlar kvadratlarining yig'indisiga teng.

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 &= (f + g, f + g) + (f - g, f - g) = \\ &= 2(f, f) + 2(g, g) = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.\end{aligned}$$

Yetarliligi. R normalangan fazoda norma ayniyatidan foydalanib, R da skalyar ko'paytma kiritish mumkinligini ko'rsatish kifoya. Ixtiyoriy $f, g \in R$ elementlar uchun

$$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2) \quad (3.19)$$

deymiz. Ko'rsatish mumkinki, agar (3.18) tenglik bajarilsa, (3.19) tenglik yordamida aniqlangan funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi va bu skalyar ko'paytma R fazo normasiga mos keladi. Δ

3.9-misol. R_p^n - n - o'lchamli vektor fazoni qaraymiz va unda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p > 1$ da norma aksiomalari bajariladi, lekin R_p^n normalangan fazo Yevklid fazosi bo'lishi uchun p faqat 2 ga teng bo'lishi kerak. Haqiqatan ham, R_p^n da ikkita

$$f = (1, 1, 0, \dots, 0), \quad g = (1, -1, 0, \dots, 0)$$

vektorlarni qaraymiz. U holda

$$f + g = (2, 0, 0, \dots, 0), \quad f - g = (0, 2, 0, \dots, 0).$$

Endi (3.18) tenglikning bajarilishini tekshirib ko'ramiz:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p &= (2^p)^{1/p} = 2, \quad \|f - g\|_p = 2, \quad \|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p} \\ 2^2 + 2^2 &= 2 \cdot 2^{2/p} + 2 \cdot 2^{2/p}, \quad 2 = 2^{2/p}.\end{aligned}$$

So'nggi tenglik faqatgina $p = 2$ da o'rinli.

3.10-misol. $C[0, \pi/2]$ fazoni qaraymiz. Normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |f(t)|. \quad (3.20)$$

$f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$ elementlarni olamiz. U holda $\|f\| = \|g\| = 1$,

$$\|f + g\| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t + \sin t| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\|f - g\| = \max_{0 \leq t \leq \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1.$$

Endi (3.18) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$2+1=2(1+1), \quad 3 \neq 4$$

Demak, (3.20) tenglik bilan aniqlanuvchi normani biror bir skalyar ko'paytma yordamida berish mumkin emas.

3.11-misol. ℓ_2 Yevklid fazosida $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $\dots$ ortonormal bazisning to'la ekanligini ko'rsating.

Yechish: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$ xohlagan element va

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

bo'lsin. U holda $x^{(n)}$ element $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlarning chiziqli qobig'iga tegishli va $n \rightarrow \infty$ da $\|x - x^{(n)}\| \rightarrow 0$, ya'ni $x \in \{e_n\}$. Demak, $\{e_n\} = \ell_2$.

3.12-misol. Skalyar ko'paytmaning to'rtinchi aksiomasini quyidagi aksioma bilan almashtirish mumkin ekanligini isbotlang.

$$(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Yechish: $x = 0$ bo'lsin. U holda xohlagan λ soni uchun $(0, 0) = (\lambda 0, 0) = \lambda(0, 0)$ tengligini yoza olamiz. Natijada, $(0, 0) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

3.13-misol. Yevklid fazosida x va y elementlarning ortogonal bo'lishi uchun $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ tengligining zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Yechish: Zaruriyligi. $x \perp y$ bo'lsin. U holda,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Yetarliligi. $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ tenglik o'rinli bo'lsa, $(x, y) = 0$ tengligi kelib chiqadi, ya'ni $x \perp y$.

3.14-misol. ℓ_2 fazoda $x = (x_1, x_2, \dots)$ va $y = (y_1, y_2, \dots)$ elementlarning skalyar ko'paytmasi $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ko'rinishida, norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ko'rinishida kiritiladi. ℓ_2 ning to'la ekanligini isbotlang.

Yechish: ℓ_2 fazoda metrika $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$ formula bilan aniqlanadi. Demak, ℓ_2 ning to'la ekanligi kelib chiqadi.

3.15-misol. Skalyar ko'paytma kiritilgan fazoning xohlagan x, y, z elementlari uchun Apolloniy ayniyati deb ataluvchi

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$$

tengligini isbotlang.

Yechish: Berilgan tenglikning ikki tomonini ham almashtiramiz:

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 &= (z - x, z - x) + (z - y, z - y) = (z, z) - (x, z) - (z, x) + (x, x) + \\ &+ (z, z) - (y, z) - (z, y) + (y, y) = 2((z, z) - (x, z) - (z, y)) + (x, x) + (y, y). \\ \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}(x - y, x - y) + 2\left(z - \frac{x + y}{2}, z - \frac{x + y}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}((x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y)) + 2(z, z) - (x + y, z) - (z, x + y) + \frac{1}{2}(x + y, x + y) = \\ &= 2((z, z) - (x, z) - (z, y)) + (x, x) + (y, y). \end{aligned}$$

Demak, berilgan tenglik o'rinli.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi formulalar yordamida berilgan p funksional, ko'rsatilgan haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi?

3.1. $E = \ell_2$, $p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k$, $0 < \lambda_n < 1$.

3.2. $E = C^{(1)}[a; b]$, $p(x, y) = \int_a^b x(t)y(t) dt + \int_a^b x'(t)y'(t) dt$.

3.3. $E = R^2$, $p(x, y) = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}$.

3.4. $E = C[a; b]$, $p(x, y) = \int_a^b e^t x(t)y(t) dt$.

3.5. $E = R^3$, $p(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$.

3.6. $E = R^2$, $p(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

3.7. $E = R^2$, $p(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.

3.8. $E = \ell_2$, $p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k y_k}{k}$.

3.9. $E = R^3$, $p(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$.

3.10. $E = C[a, b], \quad p(x, y) = \int_a^b x^4(t) y^4(t) dt.$

Ko'rsatilgan fazolarda berilgan vektorlarning chiziqli erkliligini tekshiring, Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal sistema hosil qiling.

3.11. $E = L_2[-1;1], \quad x_1(t)=1, \quad x_2(t)=t, \quad x_3(t)=t^2+1.$

3.12. $E = \ell_2, \quad x=(1,0,0,...), \quad y=(1,1,0,0,...), \quad z=(1,1,1,0,0,...).$

3.13. $E = C_2[-1;1], \quad x_1(t)=1, \quad x_2(t)=t^3, \quad x_3(t)=t^6.$

3.14. $E = R^3, \quad x=(-1,0,0), \quad y=(0,-1,1), \quad z=(2,0,-1).$

3.15. $E = \ell_2, \quad x=\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^n},\dots\right), \quad y=\left(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^n},\dots\right).$

3.16. $E = L_2[0,\pi]; \quad x(t)=1, \quad y(t)=\cos t, \quad z(t)=\sin t, .$

3.17. $E = R^3; \quad x=(0,0,1), \quad y=(0,1,1), \quad z=(1,1,1).$

3.18. $E = R^3, \quad x=(1,1,0), \quad y=(2, 0, -1), \quad z=(0, -1, 1)..$

3.19. $E = \ell_2, \quad x=(1,1,0,0,...), \quad y=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^n},\dots\right).$

3.20. $E = C_2[-1,1]; \quad x(t)=1, \quad y(t)=t, \quad z(t)=t^2.$

3.21. E Yevklid fazosida ixtiyoriy x, y, z elementlar uchun Apolloniy ayniyatini

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2} \|x-y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x+y}{2} \right\|^2$$

isbotlang.

3.22. E Yevklid fazosida ixtiyoriy x, y, z, t elementlar uchun Ptolemey tengsizligi

$$\|x-z\| \cdot \|y-t\| \leq \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|$$

ni isbotlang.

3.23. E Yevklid fazosida x va y elementlar ortogonal bo'lishi uchun $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

3.24. E haqiqiy normalangan fazo va ixtiyoriy x, y elementlar uchun parallelogram ayniyati $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}$ bajarilsin. U holda

$$p: E \times E \rightarrow R, \quad p(x, y) = \frac{1}{2} \{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

3.25. $C_2[-1,1]$ fazoda $f(x)=1$ va $g(x)=x$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Mavzu yuzasidan test savollari

1. Quyidagi formulalar yordamida berilgan funkcionallardan qaysi biri ko'rsatilgan fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

A) $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 y_k, x, y \in \ell_2$ B) $(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1, x, y \in R^2$

C) $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k, x, y \in C^n$ D) $(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, x, y \in C[a, b]$

2. Qanday fazo Yevklid fazosi deyiladi?

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo.

B) Har qanday normalangan fazo.

C) To'la normalangan fazo.

D) Istalgan metrik fazo.

3. Yevklid fazolari keltirilgan javobni toping.

A) $R^n, C[a, b], \ell_2$ B) $R^n, C_2[a, b], \ell_2$ C) $C^n, C_2[a, b], \ell_1$ D) $C^n, C_2[a, b], \ell_p$

4. $C_2[a, b]$ haqiqiy Yevklid fazosidagi skalyar ko'paytmani ko'rsating.

A) $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) e^{it} dt$ B) $\int_a^b x(t) y(t) dt$

C) $(x, y) = \int_a^b |x(t) y(t)| dt$ D) $(x, y) = x(a) y(a) + x(b) y(b).$

5. Haqiqiy Yevklid fazosida nolga teng bo'lmagan x va y vektorlar orasidagi burchak qanday formula bilan aniqlanadi?

A) $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ B) $\cos \varphi = \frac{(x, x) - (y, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$

C) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$ D) $\cos \varphi = \frac{\|x + y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$

6. Yevklid fazosida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini toping.

A) $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ B) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

C) $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ D) $\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$

7. E normalangan fazo Yevklid fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli?

A) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ B) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

C) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ D) $\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$

8. To'la bo'lmagan separabel Yevklid fazosini toping.

A) R^n B) $C_2[a, b]$ C) C^n D) ℓ_2

9. R Yevklid fazosidagi $\{x_n\}$ sistema uchun quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda u R da ortonormal bazis deyiladi?

A) Agar $(x_n, x_m) = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = m \\ 0, & \text{agar } n \neq m \end{cases}$ bo'lsa.

B) Agar $\{x_n\}$ ortonormal sistema bo'lib, u R da to'la bo'lsa.

C) Agar $\{x_n\}$ sistemani saqllovchi minimal yopiq qism fazo R ning xos qismi bo'lsa.

D) $\{x_n\}$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\|x_n\| = 1$ bo'lsa.

10. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Har qanday Yevklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

B) Yevklid fazosida yig'indi va songa ko'paytirish amallari uzluksizdir.

C) Yevklid fazosida skalyar ko'paytma amali uzluksizdir.

D) Har qanday separabel Yevklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

11. R to'la haqiqiy Yevklid fazosi, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ undagi ortonormal sistema va $f \in R$, $c_k = (f, \varphi_k)$ bo'lsin. Quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda berilgan sistema yopiq deyiladi?

A) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2, \forall f \in R$ B) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \forall f \in R$

C) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \geq \|f\|^2, \forall f \in R$ D) $\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

12. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to'g'ri?

A) Separabel Yevklid fazosida har qanday to'la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

B) Separabel Yevklid fazosida har qanday ortonormal sistema to'ladir.

C) Separabel Yevklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

D) To'la Yevklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

13. Quyidagilar ichidan Riss-Fisher teoremasining tasdig'ini toping.

To'la Yevklid fazosida $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ixtiyoriy ortonormal sistema va

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda

A) shunday $f \in R$ mavjud bo'lib $c_k = (f, \varphi_k)$ va $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ bo'ladi.

B) har qanday $f \in R$ uchun $c_k = (f, \varphi_k)$ va $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ bo'ladi.

C) shunday $f \in R$ mavjud bo'lib $c_k = (f, \varphi_k)$ va $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|f\|^2$ bo'ladi.

D) barcha $f \in R$ lar uchun $c_k = (f, \varphi_k)$ va $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ bo'ladi.

14. R to'la separabel Yevklid fazosida berilgan $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lishi uchun ... zarur va yetarli.

A) R da noldan farqli va barcha φ_n larga ortogonal elementning mavjud emasligi.

B) biror $f \in R$ uchun, $\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)| = \|f\|^2$ tenglikning o'rinli bo'lishi.

C) har qanday $f \in R$ element uchun $\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)| \leq \|f\|^2$ o'rinli bo'lishi.

D) R da noldan farqli va barcha φ_n larga ortogonal elementning mavjud bo'lishi.

15. Quyidagilar ichidan skalyar ko'paytma shartlarini ajrating.

1) $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$, 2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ 3) $(x, z) \leq (x, y) + (y, z)$

4) $(x, y) = (y, x)$ 5) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A) 1, 3, 4, 5 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

16. Qaysi javobda Yevklid fazosidagi norma to'g'ri keltirilgan.

A) $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ B) $\|x+y\| = |(x, y)|$ C) $\|x\| = (x, x)$ D) $\|x-y\| = |(x, y)|$

17. Quyidagilardan qaysilari $C[a, b]$ kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

1) $(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ 2) $(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} e^t dt$ 3) $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

18. Yevklid fazosida noldan farqli x va y elementlar qanday shartda ortogonal elementlar deyiladi?

A) $(x, y) = 0$ B) $(x, x) = (y, y) = 1$ C) $\|x-y\| = 0$ D) $(x, y) = \sqrt{(x, x)}(y, y)$

19. Yevklid fazosida noldan farqli $\{x_\alpha\}$ elementlar sistemasi uchun bo'lsa, u ortogonal sistema deyiladi?

A) ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ B) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan

C) ixtiyoriy α da $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$ D) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'langan

20. ℓ_2 -kompleks fazoda skalyar ko'paytmani aniqlang.

A) $(x, y) = \sum x_k \overline{y_k}$ B) $(x, y) = \sum (\overline{x_k} + \overline{y_k})$

C) $(x, y) = \sum (\overline{x_k} - \overline{y_k})$ D) $(x, y) = \sqrt{\sum |x_k - y_k|}$

4-§. GIL'BERT FAZOLARI

To'la Yevklid fazolarini qarashda davom etamiz. Bizni faqat cheksiz o'lchamli Yevklid fazolari qiziqtiradi, chunki chekli o'lchamli Yevklid fazolari R^n fazoga izomorfdir.

4.1-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la Yevklid fazosi Gil'bert fazosi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f, g, \varphi, \dots$ elementlarning H to'plami Gil'bert fazosi bo'lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

- 1) H - Yevklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo;
- 2) $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$ metrika ma'nosida H - to'la fazo;
- 3) H fazo - cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda separabel Gil'bert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Bundan keyin biz faqat separabel Gil'bert fazolarini qaraymiz.

4.1-misol. $C_2[a, b]$ Yevklid fazosi to'la emas, shuning uchun $C_2[a, b]$ Gil'bert fazosi bo'la olmaydi.

4.2-misol. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ lar cheksiz o'lchamli to'la separabel Yevklid fazolaridir. Shuning uchun ular Gil'bert fazolari bo'ladi.

4.2-ta'rif. Agar R va R^* Yevklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar izomorf fazolar deyiladi.

Boshqacha aytganda, Yevklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n - o'lchamli ixtiyoriy ikkita Yevklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Yevklid fazolari o'zaro izomorf bo'lishi shart emas. Masalan ℓ_2 va $C_2[a, b]$ fazolar izomorf emas, chunki ℓ_2 to'la, $C_2[a, b]$ esa to'la emas.

Quyidagi teorema o‘rinli.

4.1-teorema. *Ixtiyoriy ikkita separabel Gil’bert fazosi o‘zaro izomorfdir.*

Isbot. Ixtiyoriy H Gil’bert fazosini ℓ_2 fazoga izomorfligini ko‘rsatamiz. Agar shuni ko‘rsatsak, teorema isbot bo‘lgan bo‘ladi. H Gil’bert fazosidan ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ to‘la ortonormal sistemani olamiz va $f \in H$ elementga uning Fur’ye koeffitsiyentlari bo‘lgan $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ketma-ketlikni mos qo‘yamiz. Bessel tengsizligiga ko‘ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

Shuning uchun $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ ketma-ketlik ℓ_2 fazoning elementi bo‘ladi. Teskarisi, Riss-Fisher teoremasiga ko‘ra, ℓ_2 fazoning ixtiyoriy $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementiga (ketma-ketligiga) H fazoning yagona f elementi mos keladi va uning Fur’ye koeffitsiyentlari bo‘lib, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sonlar xizmat qiladi. O‘rnatilgan bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir. Agar

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots) \quad \text{va} \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$$

bo‘lsa, u holda

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots)$$

va

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots)$$

Va nihoyat, Parseval tengligidan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d)$$

ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \quad (4.1)$$

va

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Bu yerdan va (4.1) dan

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n = (c, d).$$

Shunday qilib, biz oʻrnatgan moslik izomorfizm ekan, ya'ni bu moslik chiziqli amallarni va skalyar koʻpaytmani saqlaydi. Δ

Isbotlangan teoremdan shu narsa kelib chiqadiki, izomorfizm aniqligida faqat ℓ_2 Gil'bert fazosi mavjud ekan. Boshqacha aytganda, ℓ_2 fazo H Gil'bert fazosining "koordinat koʻrinishi" desak boʻladi.

H Gil'bert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Gil'bert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

4.3-misol. $h \in H$ - ixtiyoriy element boʻlsin. h ga ortogonal boʻlgan barcha $f \in H$ elementlar toʻplami qism fazo tashkil qiladi.

4.4-misol. ℓ_2 fazoda $x_1 = x_2$ shartni qanoatlantiruvchi elementlari toʻplami qism fazo tashkil qiladi.

4.5-misol. ℓ_2 fazoning $M = \{x \in \ell_2 : x = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots, 0, x_{2n+1}, 0, \dots)\}$ toʻplami uning qism fazosi boʻladi.

Gil'bert fazosining har qanday qism fazosi yo chekli oʻlchamli Yevklid fazosi boʻladi, yo uning oʻzi Gil'bert fazosini tashkil qiladi.

4.6-misol. $L_2[-1, 1]$ Gil'bert fazosida toq funksiyalardan iborat $L_2[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(-t) = f(t)\}$ toʻplam qism fazo tashkil qiladi.

4.7-misol. $L_2[-1, 1]$ Gil'bert fazosida quyidagi toʻplam $L_0[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(t) \equiv 0, t \in [-1, 0]\}$ qism fazo tashkil qiladi.

Agar H Gil'bert fazosi separabel boʻlsa, uning ixtiyoriy qismi ham separabel boʻladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

4.1-lemma. R separabel Yevklid fazosining har qanday R' qismi yana separabeldir.

Gil'bert fazosining qism fazolari ayrim maxsus xossalarga egaki, ixtiyoriy normalangan fazoning qism fazolari bu xossalarga ega emas. Bu xossalar Gil'bert fazosida kiritilgan skalyar koʻpaytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asoslangan.

H separabel Gil'bert fazosining M qism fazosi berilgan boʻlsin. Bu qism fazoning hamma yerida zich boʻlgan sanoqli sistema olamiz va unga ortogonallashtirish jarayonini qoʻllab, quyidagi teoreмага ega boʻlamiz.

4.2-teorema. H separabel Gil'bert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobigʻining yopigʻi M ga teng.

Bizga H Gil'bert fazosining M - qism fazosi berilgan bo'lsin. Barcha $f \in M$ elementlarga ortogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^\perp = H \ominus M$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$M^\perp = \{g \in H : (f, g) = 0, \forall f \in M\}.$$

$M^\perp$ ham H ning qism fazosi ekanligini isbotlaymiz. Bu to'plamning qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqqligini ko'rsatamiz. Agar $g_1, g_2 \in M^\perp$ bo'lsa, u holda

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = \alpha_1 (g_1, f) + \alpha_2 (g_2, f) = 0.$$

Endi $M^\perp$ to'plamning yopiqqligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $g_n \in M^\perp$ elementlar ketma-ketligi $g \in H$ elementga yaqinlashsin. U holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligiga ko'ra, istalgan $f \in M$ uchun

$$(g, f) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n, f \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, f) = 0.$$

Demak, $g \in M^\perp$, ya'ni $M^\perp$ yopiq qism fazo bo'lar ekan. $M^\perp$ qism fazo M qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi deyiladi.

4.3-teorema. Agar M - H Gil'bert fazosining yopiq qism fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M$, $h' \in M^\perp$.

Isbot. Avvalo, bu yoyilmaning mavjudligini isbotlaymiz. Buning uchun M da $\{\phi_n\}$ to'la ortonormal sistema olamiz va

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = (f, \phi_n)$$

deymiz. Bessel tengsizligiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $h \in M$. Endi $h' = f - h$ deb olamiz. Ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h', \phi_n) = (f, \phi_n) - (h, \phi_n) = c_n - c_n = 0.$$

Ixtiyoriy $\xi \in M$ element uchun

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \quad \text{va} \quad (h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \phi_n) = 0,$$

ya'ni $h' \in M^\perp$.

Endi yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, boshqa bir $f = h_1 + h_1'$, $h_1 \in M$, $h_1' \in M^\perp$ yoyilma mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$(h_1, \phi_n) = (f, \phi_n) = c_n.$$

Bu yerdan kelib chiqadiki $h_1 = h$, $h_1' = h' \cdot \Delta$

4.1-natija. $M \subset H$ qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisining ortogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng, ya'ni $(M^\perp)^\perp = M$.

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchi qism fazolari haqida gapirish mumkin. Agar M va $M^\perp$ ikkita shunday bir-birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$, $\{\phi_n'\}$ - mos ravishda M va $M^\perp$ dagi to'la ortonormal sistema bo'lsa, u holda $\{\phi_n\}$ va $\{\phi_n'\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to'la ortonormal sistema bo'ladi.

4.2-natija. H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'la sistemagacha to'ldirish mumkin.

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemadan hosil qilingan M qism fazoning o'lchamiga va $M^\perp$ qism fazoning koo'lchamiga teng. Shunday qilib, quyidagiga egamiz.

4.3-natija. Chekli n - o'lchamli qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi n - koo'lchamga ega va aksincha.

4.3-ta'rif. Agar H Gil'bert fazosining ixtiyoriy $f \in H$ elementi

$$f = h + h', \quad h \in M, \quad h' \in M^\perp$$

ko'rinishda tasvirlansa, u holda H fazo o'zaro ortogonal M va $M^\perp$ qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va

$$H = M \oplus M^\perp$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun ham umumlashtirish mumkin, ya'ni H o'zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarining to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

- M_i qism fazolar juft-jufti bilan o'zaro ortogonal, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vektor M_k dagi ixtiyoriy vektorga ortogonal, $i \neq k$;
- ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \quad h_n \in M_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

(4.2)

ko‘rinishda tasvirlanadi, agar qo‘shiluvchilar soni cheksiz bo‘lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko‘rinishda yoziladi.

Osongina ko‘rsatish mumkinki, agar f uchun (4.2) yoyilma mavjud bo‘lsa, u yagona va

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Gil’bert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar H_1 va H_2 lar ixtiyoriy Gil’bert fazolari bo‘lsa, u holda ularning to‘g‘ri yig‘indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha (h_1, h_2) , $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ da skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1)_{H_1} + (h_2, h'_2)_{H_2}, \quad h_1, h'_1 \in H_1, \quad h_2, h'_2 \in H_2.$$

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n$ Gil’bert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi ham xuddi shunday aniqlanadi.

Sanoqli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ Gil’bert fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$ quyidagicha aniqlanadi

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \quad h_n \in H_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < +\infty \right\}.$$

H fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n), \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots), \quad h_n, g_n \in H_n.$$

4.8-misol. 4.6-misolda keltirilgan $L_2[-1,1]$ (toq funksiyalar to‘plami) qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisini toping.

Yechish. $L_2^+[-1,1] = \{f \in L_2[-1,1]: f(-t) = f(t)\}$ juft funksiyalardan iborat to‘plam $L_2[-1,1]$ fazoning qism fazosi bo‘ladi va $L_2^-[-1,1] \perp L_2^+[-1,1]$. Haqiqatan ham,

$$(f^-, f^+) = \int_{-1}^1 f^-(t) \cdot f^+(t) dt = 0, \quad \forall f^- \in L_2^-[-1,1], \quad \forall f^+ \in L_2^+[-1,1].$$

Bu yerdan $(L_2^-[-1,1])^\perp \supset L_2^+[-1,1]$ va $(L_2^-[-1,1])^\perp \subset L_2^+[-1,1]$ munosabatlar kelib chiqadi. Bulardan esa $(L_2^-[-1,1])^\perp = L_2^+[-1,1]$ tenglikni olamiz.

Kompleks Yevklid fazolari

Haqiqiy Yevklid fazolari bilan bir qatorda kompleks Yevklid fazolari ham qaraladi (ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan kompleks chiziqli fazo). Lekin haqiqiy Yevklid fazolaridagi skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari kompleks Yevklid fazolari uchun bir vaqtda bajarilmaydi. Haqiqiy Yevklid fazolarida skalyar ko'paytmaning 1-4 aksiomalari quyidagicha edi:

- 1) $(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in E; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$
- 2) $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in E,$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall \lambda \in C, \quad \forall x, y \in E,$
- 4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in E.$

Biz 2) va 3) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda(x, \lambda x) = \lambda(\lambda x, x) = \lambda^2(x, x),$$

bu yerdan $\lambda = i$ bo'lsa, $(ix, ix) = -(x, x)$, ya'ni x va ix vektorlarning skalyar ko'paytmasi bir vaqtda musbat bo'la olmaydi, bu esa 1)-shartga zid, ya'ni 1), 2) va 3)-shartlar bir vaqtda bajarilishi mumkin emas ekan. Demak, kompleks chiziqli fazolarda skalyar ko'paytmaning shartlarini biroz o'zgartirish kerak.

Kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytmaning shartlarini keltiramiz:

- 1) $(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in E; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$
- 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}, \quad \forall x, y \in E,$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall \lambda \in C, \quad \forall x, y \in E,$
- 4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in E.$

2) va 3) dan $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda} (x, y).$$

4.9-misol. $E = C^n$ - kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

4.10-misol. $\ell_2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots), x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ kompleks

chiziqli fazo. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

4.11-misol. $E = C_2[a, b]$ - $[a, b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4.12-misol. $E = L_2[a, b]$ - $[a, b]$ kesmada aniqlangan kompleks qiymatli va kvadrati bilan integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinfi. Bu fazoda ham f va g elementlarning skalyar ko'paytma ham

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Kompleks Yevklid fazolarida ham elementning normasi xuddi haqiqiy Yevklid fazolari holidagidek

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad \text{yoki} \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formula bilan aniqlanadi.

Kompleks Yevklid fazolarida ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi kiritilmaydi, lekin vektorlarning ortogonallik tushunchasi saqlanib qoladi. Ya'ni, agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar o'zaro ortogonal deyiladi.

4.4-ta'rif. Agar

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = m \\ 0, & \text{agar } n \neq m \end{cases}$$

bo'lsa, nolmas $\{\phi_n\} \in E$ sistema ortogonal normalangan sistema deyiladi.

Xuddi haqiqiy Yevklid fazolaridagi kabi, $c_n = (f, \phi_n)$, $n \in N$ sonlar $f \in E$ vektorning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema (ortogonal normalangan sistema) dagi Fur'ye koeffitsiyentlari deyiladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

qator f vektorining $\{\phi_n\}$ sistemadagi Fur'ye qatori deyiladi. Bu yerda ham Bessel tengsizligi o'rinli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2$$

Kompleks Yevklid fazolari holida ham Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'z kuchini saqlaydi:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

4.5-ta'rif. Cheksiz o'lchamli to'la kompleks Yevklid fazosi kompleks Gil'bert fazosi deyiladi.

Kompleks Gil'bert fazolari uchun ham izomorfizm haqidagi teorema o'rinli.

4.4-teorema. Barcha separabel kompleks Gil'bert fazolari o'zaro izomorfdir.

4.13-misol. ℓ_2 va $L_2[a, b]$ lar separabel kompleks Gil'bert fazolariga misol bo'ladi.

4.14-misol. H separabel Gil'bert fazosida har qanday ortonormal sistema ko'pi bilan sanoqli bo'lishini isbotlang.

Yechish: H separabel Gil'bert fazosida $\{\varphi_\alpha\}$ ortonormal sistema berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy φ_α va φ_β har xil elementlari uchun $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}$ tengligi o'rinli. Shuning uchun $B(\varphi_\alpha, \frac{1}{2})$ sharlari o'zaro kesishmaydi. Agar sanoqli $\{\psi_n\}$ to'plami H da zich bo'lsa, u holda $B(\varphi_\alpha, \frac{1}{2})$ sharning har birida bu to'plamning kamida bir elementi mavjud bo'ladi. Shu sababli $B(\varphi_\alpha, \frac{1}{2})$ sharlar sistemasi ko'pi bilan sanoqli. Natijada, $\{\varphi_\alpha\}$ ortonormal sistemaning sanoqli ekanligi kelib chiqadi.

4.15-misol. H Gil'bert fazosida $x_1, x_2, \dots, x_n$ ortogonal sistema berilgan bo'lsin. Agar $x = \sum_{k=1}^n x_k$ bo'lsa, u holda $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ tengligini isbotlang.

$$\text{Yechish: } \|x\|^2 = (x, x) = (\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k) = (x_1, x_1) + (x_2, x_2) + \dots + (x_n, x_n) = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

4.16-misol. H Gil'bert fazosida xohlagan M qism to'plami uchun $M \subset (M^\perp)^\perp$ munosabatining o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish: M to'plamidan ixtiyoriy x nuqtani olamiz. U holda $x \perp M^\perp$, ya'ni $x \in (M^\perp)^\perp$. Demak, $M \subset (M^\perp)^\perp$.

4.17-misol. H Gil'bert fazosida M, N to'plamlari uchun $M \subset N$ bo'lsa, $M^\perp \supset N^\perp$ munosabatining o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish: $N^\perp$ to'plamidan ixtiyoriy x nuqtani olamiz. U holda $x \perp N$. $M \subset N$ bo'lganligidan, $x \perp M$, ya'ni $x \in M^\perp$. Demak, $N^\perp \subset M^\perp$.

4.18-misol. Gil'bert fazosida $\|x\| = \|y\|$ bo'lsa, u holda $x - y \perp x + y$ (romb diagonallari perpendikulyar) bo'lishini ko'rsating.

Yechish:

$$(x + y, x - y) = (x, x) + (y, x) - (x, y) - (y, y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

4.1. x_n va y_n lar H Gil'bert fazosidagi yopiq birlik sharga tegishli va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ bo'ladi. Isbotlang.

4.2. H - Gil'bert fazosi, L uning qism fazosi bo'lsin. x element L qism fazoga orthogonal bo'lishi uchun istalgan $y \in L$ da $\|x\| \leq \|x - y\|$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

4.3. $C_2[-\pi; \pi]$ Yevklid fazosida $\varphi_n(t) = \sin nt$, $n \in N$, sistemaning orthogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

4.4. $L_2[-\pi; \pi]$ Gil'bert fazosida $\varphi_n(t) = \exp\{int\}$, $n \in Z$, sistemaning orthogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

4.5. $C_2[-\pi; \pi]$ Yevklid fazosida $\varphi(t) = \cos^2 t$ elementning

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, n \in N \right\}$$

ortonormal sistemadagi Fur'ye koeffitsiyentlarini toping.

4.6. H Gil'bert fazosidagi x_1, x_2 elementlar uchun $\operatorname{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 = x_2$ ekanligini isbotlang.

4.7. Har bir natural n da $M_n = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ to'plam ℓ_2 Gil'bert fazosining qism fazosi bo'lishini isbotlang. M_1, M_2, M_3 qism

fazolarning ortogonal to'ldiruvchilarini tafsiflang, ularning o'lchamlarini toping.

4.8. ℓ_2 Gil'bert fazosida $M = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = 0\}$ to'plamning chiziqli ko'pxillilik ekanligini hamda ℓ_2 fazoning hamma yerida zich bo'lishini isbotlang.

4.9. $L_2^-[-1;1] = \{f \in L_2[-1;1] : f(-t) = -f(t)\}$ toq funksiyalar to'plami $L_2[-1;1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping. $\dim L_2^-[-1;1]$ va $\dim (L_2^-[-1;1])^\perp$ larni hisoblang.

4.10. $L_{20}^+[-1;1] = \{f \in L_2[-1;1] : f(t) \equiv 0, t \in [0;1]\}$ to'plam $L_2[-1;1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

4.11. H - Gil'bert fazosi, $x_1, x_2, \dots, x_n$ undagi ixtiyoriy ortogonal sistema va $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ bo'lsin. $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ tenglikni isbotlang.

4.12. Gil'bert fazosi qat'iy normalangan fazo ekanligini isbotlang.

4.13. $L_2[-\pi, \pi]$ separabel kompleks Gil'bert fazosida

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sistema to'la ortonormal sistema bo'ladi. Isbotlang.

4.14. $L_2[0, 2\pi]$ Gil'bert fazosida $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=1}^\infty$ to'plam ortonormal sistema bo'lishini ko'rsating.

4.15. l_2 Gil'bert fazoda $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, ... tengliklar yordamida aniqlangan $\{e_n\}$ sistema ortonormal ekanligini ko'rsating.

4.16. $L_2[0, 2\pi]$ Gil'bert fazosida $\{e^{inx}\}$ to'la ortonormal sistema bo'lishini ko'rsating.

4.17. l_2 fazoda $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ va $y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ elementlarning ko'paytmasini hisoblang.

4.18. l_2 fazoda quyidagi x va y elementlar uchun $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ tenglikni tekshiring.

a) $x = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, $y = (1, 0, 0, \dots)$, b) $x = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$, $y = 3x$

4.19. $f(t) = \sin 2t$, $g(t) = \cos 3t$, $h(t) = \sin^4 t$, $m(t) = \sec^2 t$ funksiyalardan qaysilari $L_2[0, 2\pi]$ ga tegishli? (f, g) va (h, m) skalyar ko'paytmalarni hisoblang.

- A) H – Yevklid fazosi $d(x, y) = \sqrt{(x + y, x + y)}$ metrika ma'nosida to'la va cheksiz o'lchamli bo'lishi kerak
- B) H – Yevklid fazosi $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$ metrika ma'nosida to'la va cheksiz o'lchamli bo'lishi kerak
- C) H – Yevklid fazosi $d(x, y) = \sqrt{(x + 2y, x + 2y)}$ va cheksiz o'lchamli bo'lishi kerak
- D) H – Yevklid fazosi $d(x, y) = \sqrt{(x - 2y, x - 2y)}$ metrika ma'nosida to'la bo'lishi kerak.

7. M to'plamning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan elementlardan tashkil topgan to'plamga M to'plamning ... deyiladi

- A) Ortogonal to'ldiruvchisi
 B) Ekvivalent to'plami
 C) Ortogonal qism to'plami
 D) Qism to'plami

8. Gil'bert fazosidagi $\perp$ - ortogonallik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'la oladimi?

- A) Bo'ladi
 B) Bo'lmaydi
 C) Bunday munosabat mavjud emas.
 D) To'g'ri javob keltirilmagan

9. To'la bo'lmagan normalangan fazoni toping.

- A) $C_1[a, b]$
 B) ℓ_2
 C) R^n
 D) $C[a, b]$

10. E normalangan fazo Yevklid fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli?

- A) $\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$
 B) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
 C) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
 D) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

11. To'la bo'lmagan separabel Yevklid fazosini toping.

- A) C^n
 B) $C_2[a, b]$
 C) R^n
 D) ℓ_2

12. Agar E - Yevklid fazosi ..., u holda E ga to'la Yevklid fazosi deyiladi. Nuqtalar o'rnini to'ldiring.

- A) $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ normaga nisbatan to'la bo'lsa

B) $\|x+y\| = |(x,y)|$ munosabat o`rinli bo`lsa

C) $\|x\| = (x,x)$ normaga nisbatan to`la bo`lsa

D) $\|x-y\| = |(x,y)|$ munosabat o`rinli bo`lsa.

13. Agar L - chiziqli normalangan fazoda parallelogramm qoidasi o`rinli bo`lsa, u holda $\forall f, g \in L$ elementlar uchun ularning skalyar ko`paytmasi qanday formula orqali hisoblanadi?

A) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

B) $(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$

C) $(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2)$

D) $(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 \div \|f-g\|^2)$

14. H - Gil`bert fazosi  $M_1$  va  $M_2$  qism fazolarning to`g`ri yig`indisiga yoyilmasi qanday ko`rinishda ifodalanadi?

A) $M_1 + M_2$ B) $M_1 - M_2$ C) $M_1 \oplus M_2$ D) $M_1 \otimes M_2$

15. R^4 chiziqli fazoni ikkita qism fazolarning to`g`ri yig`indisi shaklida tasvirlash mumkin bo`lgan javobni ko`rsating.

A) $M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = 0\}$ va $M_2 = \{x \in R^4 : x_k = 0; 2 \leq k \leq 4\}$

B) $M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = 0\}$ va $M_2 = \{x \in R^4 : x_k = 0; 5 \leq k \leq 7\}$

C) $M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = 1\}$ va $M_2 = \{x \in R^4 : x_k = 0; 2 \leq k \leq 4\}$

D) $M_1 = \{x \in R^4 : x_1 = 1\}$ va $M_2 = \{x \in R^4 : x_k = 0; 1 \leq k \leq 4\}$

16. Agar $H_1 = C$, $H_2 = L_2[-\pi, \pi]$ va $H := H_1 \oplus H_2$ bo`lsa,  $f = (i, \sin t) \in H$  va  $g = (2 + 3i, \cos t) \in H$  elementlarning skalyar ko`paytmasini toping.

A) $3 + 2i$

B) $3 - 2i$

C) $2 + 3i$

D) $2 - 3i$

17. To`g`ri jumlani aniqlang

A) Chekli o`lchamli to`la Yevklid fazosiga Gil`bert fazosi deyiladi.

B) Cheksiz o`lchamli Yevklid fazosiga Gil`bert fazosi deyiladi.

C) To`la normalangan fazoga Gil`bert fazosi deyiladi.

D) Cheksiz o`lchamli to`la Yevklid fazosiga Gil`bert fazosi deyiladi.

18. Agar R va R^* Yevklid fazolari o`rtasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin bo`lib,

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \quad x, y \in R, \quad x^*, y^* \in R^*$$

ekanligidan

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \quad \text{va} \quad (x, y) = (x^*, y^*)$$

munosabatlar kelib chiqsa, R va R^* lar ... deyiladi. Nuqtalar o`rni to`ldiring.

A) Gil'bert fazolari

B) Izomorf Yevklid fazolari

C) Izomorf Gil'bert fazolari

D) Qism fazolar

19. Gil'bert fazolari uchun qaysi munosabat o`rinli?

A) $H = M \oplus M^\perp$

B) $H = M \otimes M^\perp$

C) $H = M \oplus (M^\perp)^\perp$

D) $H = M^\perp \oplus M^\perp$

20. Agar $H_1 = C$, $H_2 = L_2[-\pi, \pi]$ va $H := H_1 \oplus H_2$ bo`lib,  $\forall f \in H; f = (f_1, f_2)$  bo`lsa, $\|f\|$ ni toping, bu yerda $f_1 = i; f_2 = \sin x$.

A) $1 + \pi$

B) 1

C) $\sqrt{1 - \pi}$

D) $\sqrt{1 + \pi}$

5-§. FOK FAZOLARI

C – bir oʻlchamli kompleks sonlar fazosi boʻlsin. Ixtiyoriy $m \in N$ natural soni uchun $L_2[a, b]$ orqali $[a, b]^n$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$H_0 := C, H_n := L_2([a, b]^n), n \in N;$$

$$H^{(m)} := \bigoplus_{n=0}^m H_n, H := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n.$$

5.1-taʼrif. H Gilbert fazoga Fok fazosi deyiladi, $H^{(m)}$ Gilbert fazosiga esa Fok fazosining “qir qilgan m – zarrachali qism fazosi deyiladi.

Shunday qilib,

$$H^{(1)} := H_0 \oplus H_1 = \{(f_0, f_1) : f_k \in H_k, k = 0, 1\};$$

$$H^{(2)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 = \{(f_0, f_1, f_2) : f_k \in H_k, k = 0, 1, 2\};$$

$$H^{(3)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = \{(f_0, f_1, f_2, f_3) : f_k \in H_k, k = 0, 1, 2, 3\};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$H^{(m)} := H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_m = \{(f_0, f_1, \dots, f_m) : f_k \in H_k, k = \overline{0, m}\}.$$

Odatda, $L_2[a, b]$ fazo yordamida qurilgan Fok fazosi $F(L_2[a, b])$ kabi belgilanadi.

$m \in N$ - fiksirlangan natural son boʻlsin. Ixtiyoriy ikkita

$f = (f_0, f_1, \dots, f_m) \in H^{(m)}$ va $g = (g_0, g_1, \dots, g_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyalar uchun ularning skalyar koʻpaytmasi

$$(f, g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + \dots + (f_m, g_m)_m$$

kabi aniqlanadi, bu yerda

$$(f_0, g_0)_0 = f_0 \cdot \overline{g_0}; (f_k, g_k)_k = \int_a^b f_k(t) \cdot \overline{g_k(t)} dt, k = \overline{1, m}.$$

Xuddi shuningdek, $f = (f_0, f_1, \dots, f_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyaning normasi

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^m \|f_k\|_k^2}$$

tenglik yordamida aniqlanadi, bunda

$$\|f_0\|_0 := |f_0|, \|f_k\|_k := \sqrt{\int_a^b |f_k(t)|^2 dt}, k = \overline{1, m}.$$

Endi H Fok fazosida skalyar ko'paytma va normani aniqlaymiz. Ixtiyoriy ikkita

$F = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \in H$ va $G = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots) \in H$ elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(F, G) := \sum_{k=0}^{\infty} (f_k, g_k)_k$$

kabi, F vektor – funksiya normasi esa

$$\|F\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_k^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ko'rinib turibdiki, H_0 – bir o'lchamli chiziqli fazo, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun H_n cheksiz o'lchamli chiziqli fazo bo'ladi. Demak, $H^{(m)}$ va H chiziqli fazolar cheksiz o'lchamlidir. Masalan, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun

$$\begin{aligned} f^{(1)} &:= (0, t, 0, \dots, 0) \in H^{(m)}; \\ f^{(2)} &:= (0, t^2, 0, \dots, 0) \in H^{(m)}; \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)} &:= (0, t^n, 0, \dots, 0) \in H^{(m)}. \end{aligned}$$

elementlar chiziqli bog'lanmagan. Haqiqatdan ham, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlari uchun

$$\alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} + \dots + \alpha_n f^{(n)} = \theta$$

tenglikni qaraymiz. Mazkur tenglik

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = 0, \forall t \in [a, b]$$

tenglikka ekvivalentdir. Oxirgi tenglik ixtiyoriy $t \in [a, b]$ da o'rinli bo'lishi uchun

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu esa o'z navbatida $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ elementlarning chiziqli bog'lanmagan ekanligini bildiradi. Demak, $\dim H^{(m)} = \infty$ ekan.

Endi bozonli Fok fazo tushunchasini kiritamiz. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2^{sym}([-a, a]^n)$ orqali $[-a, a]^n$ da aniqlangan, istalgan ikkita argumenti bo'yicha simmetrik bo'lgan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Gilbert fazosini belgilaymiz.

$f_2(t_1, t_2) = \cos t_1 + \cos t_2$ funksiya $L_2^{\text{sym}}([-a, a]^2)$ ga tegishli element, $g_2(t_1, t_2) = \cos t_1 - \cos t_2$ funksiya esa $L_2^{\text{sym}}([-a, a]^2)$ ga tegishli bo'lmagan elementga misol bo'ladi.

5.2-ta'rif: Ushbu

$F_b(L_2^{\text{sym}}([-a, a]^n)) := C \oplus L_2[-a, a] \oplus L_2^{\text{sym}}([-a, a]^2) \oplus L_2^{\text{sym}}([-a, a]^3) \dots$
Gilbert fazosiga bozonli Fok fazo deyiladi.

Fok fazosining qir qilgan qism fazolaridagi elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini hisoblashga doir misollar qaraymiz.

5.1-misol. Quyidagi

$f = (1, \cos t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$, $g = (i, \sin t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$
 elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini toping.

Yechish. f va g larning skalyar ko'paytmasini hamda normasini ta'rif bo'yicha hisoblaymiz:

$$(f, g) = 1 \cdot \bar{i} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot \sin t dt = -i;$$

$$\|f\|^2 = |1|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 1 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = 1 + \pi$$

$$\|g\|^2 = |i|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = 1 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = 1 + \pi.$$

5.2-misol. Quyidagi

$f = (2, \sin t_1, \cos t_1 + \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([- \pi, \pi]^2);$
 $g = (3 + i, \cos t_1, \cos t_1 - \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([- \pi, \pi]^2)$
 elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini toping.

Yechish: f va g larning skalyar ko'paytmasini hamda normasini ta'rif bo'yicha hisoblaymiz:

$$(f, g) = 2 \cdot \overline{(3+i)} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t_1 \cdot \sin t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t_1 + \cos t_2)(\cos t_1 - \cos t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= 2 \cdot (3-i) + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 t_1 - \cos^2 t_2) dt_1 dt_2 = 6 - 2i;$$

$$\|f\|^2 = 2^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t_1 + \cos t_2)^2 dt_1 dt_2 = 4 + \pi + 2\pi^2$$

$$\|g\|^2 = |3+i|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t_1 - \cos t_2)^2 dt_1 dt_2 = 10 + \pi + 2\pi^2.$$

5.3-misol. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f^{(1)} = (1, \cos 2t)$, $f^{(2)} = (2, \cos^2 t)$, $f^{(3)} = (6, 2)$ elementlarni chiziqli bog'langanlikka tekshiring.

Yechish: Trigonometriyadan yaxshi ma'lum bo'lgan $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$ formulani inobatga olgan holda

$$\begin{aligned} f^{(1)} - 2f^{(2)} + \frac{1}{2}f^{(3)} &= (1, \cos 2t) + (-4, -2 \cos^2 t) + (3, 1) = \\ &= (1 - 4 + 3, \cos 2t - 2 \cos^2 t + 1) = (0, 0) = \theta \end{aligned}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak, $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlar chiziqli bog'langan ekan.

5.4-misol. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi

$$f^{(1)} = (1, t), \quad f^{(2)} = (2, t^2)$$

elementlarni chiziqli bog'langanlikka tekshiring.

$$\begin{aligned} \text{Yechish: } \alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} &= \theta, \quad \alpha_1(1, t) + \alpha_2(2, t^2) = (0, 0), \\ &\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0 \end{cases}; \end{aligned}$$

Ushbu $\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0$ tenglama $[-\pi, \pi]$ oraliqda cheksiz ko'p yechimga ega. Ikkinchi tomondan, algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, $\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0$ tenglama ko'pi bilan ikkita kompleks yechimga ega. Bu ziddiyatdan $\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f^{(1)}, f^{(2)}$ elementlar chiziqli bog'lanmagan ekan.

5.5-misol. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazoda

$$f^{(1)} = (1, 1), \quad f^{(2)} = (2, \sin t), \quad f^{(3)} = (-1, \cos t)$$

elementlar uchun Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llang.

Yechish: 1) $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlarni chiziqli bog'langanlikka tekshiramiz.

$$\begin{aligned} \alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} + \alpha_3 f^{(3)} &= \theta \\ (\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2 \sin t) + (-\alpha_3, \alpha_3 \cos t) &= (0, 0); \\ \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 = 0 \end{cases}, &\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

$$2) \varphi_1 = f^{(1)} = (1, 1)$$

$$\varphi_2 = f^{(2)} - a_{21} f^{(1)} = (2, \sin t) - a_{21}(1, 1) = (2 - a_{21}, \sin t - a_{21})$$

$$\varphi_3 = f^{(3)} - a_{32}f^{(2)} - a_{31}f^{(1)} = (-1, \cos t) - a_{32}(2, \sin t) - a_{31}(1, 1) =$$

$$= (-1 - 2a_{32} - a_{31}, \cos t - a_{32}\sin t - a_{31}).$$

$$(\varphi_1; \varphi_2) = 0 \quad 2 - a_{21} + \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t - a_{21}) dt = 0 \quad a_{21} = \frac{2}{2\pi + 1}.$$

$$(\varphi_1; \varphi_3) = 0 \quad -1 - 2a_{32} - a_{31} + \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - a_{32}\sin t - a_{31}) dt = 0;$$

$$(\varphi_2; \varphi_3) = 0$$

$$(2 - a_{21})(-1 - 2a_{32} - a_{31}) + \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t - a_{21})(\cos t - a_{32}\sin t - a_{31}) dt = 0.$$

$$a_{31} = -\frac{17 + 2\pi}{(1 + 2\pi)(9 + 2\pi)}, \quad a_{32} = \frac{4}{9 + 2\pi};$$

$$\text{Demak, } \begin{cases} \overline{\varphi_1} = (1, 1) \\ \overline{\varphi_2} = \left(\frac{4\pi}{2\pi + 1}, \sin t - \frac{2}{2\pi + 1} \right) \\ \overline{\varphi_3} = \left(\frac{18 + 6\pi + 4\pi^2}{(1 + 2\pi)(9 + 2\pi)}, \cos t - \frac{4}{9 + 2\pi} \sin t + \frac{17 + 2\pi}{(1 + 2\pi)(9 + 2\pi)} \right) \end{cases};$$

So`ngra, $\varphi_k = \frac{\overline{\varphi_k}}{\|\overline{\varphi_k}\|}$ tenglikdan foydalaniladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlarni chiziqli bog`langanlikka tekshiring.

5.1. $f^{(1)} = (\frac{1}{2}, \sin^2 t), f^{(2)} = (1, -2\cos^2 t), f^{(3)} = (0, -7).$

5.2. $f^{(1)} = (0, 1), f^{(2)} = (1, t^3), f^{(3)} = (2, t^6).$

5.3. $f^{(1)} = (i, 1), f^{(2)} = (3, t), f^{(3)} = (\sqrt{2}i, t^2 + 1).$

5.4. $f^{(1)} = (2, \cos 2t), f^{(2)} = (4, -\sin^2 t), f^{(3)} = (12, -2).$

5.5. $f^{(1)} = (1, \sin t), f^{(2)} = (i, \cos t), f^{(3)} = (-i, 1).$

Elementning normasini toping.

5.6. $f = (3 + i, \cos t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$

5.7. $f = (\sqrt{2}i, \sin 2t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$

5.8. $f = (1 + i, \sin t_1 + i \cos t_1, \sin 2t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$

5.9. $f = (\cos t_1, \sin t_1 - \cos t_2) \in L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$

5.10. $f = (-\sqrt{5}i, \cos^2 t_1, \sin 2t_1 + \cos 2t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$

f va g elementlarning skalyar ko'paytmasini toping.

5.11. $f = (3 - \sqrt{2}i, \sin t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (3 + \sqrt{2}i, \cos^2 t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.12. $f = (1, e^{2t}) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (i, \cos 2t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.13. $f = (3 - i, \sin(\ln t)) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (3 + i, 1) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.14. $f = (1, t_1, 2 \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2)$ va

$$g = (\sqrt{3} + 2i, \sin t_1, \sin t_1 - \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$$

5.15. $f = (-i, \arctg t_1, e^{2t_1} \cdot \sin t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2)$

va

$$g = (-\sqrt{2}i, \frac{1}{1+t_1^2}, \cos t_1 \cdot \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$$

f va g elementlar orasidagi burchak kosinusini toping.

5.16. $f = (1, \cos t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (i, \sin t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.17. $f = (2, \sin t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (-1, \cos t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.18. $f = (i, \sin 2t) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (-i, e^{2t}) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.19. $f = (\sqrt{3} + 2i, 1) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ va

$$g = (2i - \sqrt{3}, \cos(\ln |t|)) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi].$$

5.20. $f = (2, \sin t_1, \cos t_1 + \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2)$

va $g = (3 + i, \cos t_1, \cos t_1 - \cos t_2) \in C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2).$

$C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazoda $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlar uchun Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llang.

5.21. $f^{(1)} = (i, t), f^{(2)} = (2, t^2), f^{(3)} = (-i, t^3).$

5.22. $f^{(1)} = (-2, \sin 2t), f^{(2)} = (-i, 3), f^{(3)} = (i, \cos t).$

5.23. $f^{(1)} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), f^{(2)} = (2, \sin 2t), f^{(3)} = (-1, \cos 2t).$

5.24. $f^{(1)} = (2 + i, 1), f^{(2)} = (i - 1, t), f^{(3)} = (6, t^2 + 1).$

5.25. $C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2)$ fazoda $f^{(1)} = (1, 1, 1)$, $f^{(2)} = (-2, \sin t_1, 3)$, $f^{(3)} = (-1, \cos t_1, \sin 2t_2)$ elementlar uchun Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llang.

Mavzu yuzasidan test savollari

1. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazoda $f = (1, t)$ elementning normasini toping.

A) $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2\pi^3}{3}}}$

B) $\sqrt{1 + \frac{2\pi}{3}}$

C) $\sqrt{1 + \frac{2\pi^3}{3}}$

D) $\sqrt{1 - \frac{2\pi^3}{3}}$

2. $C \oplus L_2[-\pi, \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2)$ fazoda $f = (1, t_1, \sin t_1 - \cos t_2)$ elementning normasini toping.

A) $\sqrt{1 + \frac{2\pi^3}{3} + 4\pi^2}$

B) $\sqrt{\frac{2\pi}{3} + 4\pi^2}$

C) $\sqrt{1 + \frac{2\pi^3}{3} + 4\pi}$

D) $\sqrt{1 - \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi^2}$

3. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazoning qism fazosi bo'ladi?

A) $L_0 = \{(f_0, f_1) : \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = 0\}$

B) $L_0 = \{(f_0, f_1) : \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = 1\}$

C) $L_0 = \{(f_0, f_1) : \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = 2\}$

D) $L_0 = \{(f_0, f_1) : \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = 3\}$

4. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (2, t)$ va $g = (3 - i, \sin 2t)$ elementlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A) $6 - 2i$

B) $6 + 2i$

C) $3 + i$

D) $3 - i$

5. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (4, 5)$ va $g = (2 + i, \cos^2 t)$ elementlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A) $8 + 4i + 5\pi$

B) $6 - 4i + 5\pi$

C) $8 - 4i + 6\pi$

D) $8 - 4i + 5\pi$

6. Fok fazosining ikki zarrachali qism fazosidagi $f = (f_0, f_1)$ element normasi uchun formula to'g'ri keltirilgan javobni aniqlang.

A) $\sqrt{\|f_0\|_0^2 - \|f_1\|^2}$

B) $\sqrt{\|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2}$

$$C) \sqrt[3]{\sqrt{\|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2}}$$

$$D) \sqrt[3]{\sqrt{\|f_0\|_0^2 - \|f_1\|_1^2}}$$

7. Fok fazosining ikki zarrachali qism fazosidagi $f = (f_0, f_1)$ va $g = (g_0, g_1)$ elementlarning skalyar ko'paytmasi uchun qaysi formula o'rinli?

$$A) (f, g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1$$

$$B) (f, g) = (f_0, g_0)_0^2 + (f_1, g_1)_1^2$$

$$C) (f, g) = (f_0, g_0)_0 - (f_1, g_1)_1$$

$$D)$$

$$(f, g) = \sqrt{(f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1}$$

8. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (0, t)$ va $g = (\sqrt{2}i, \sin 2t)$ elementlar orasidagi burchakni toping.

$$A) 0$$

$$B) \frac{\pi}{2}$$

$$C) \frac{\pi}{3}$$

$$D) \pi$$

9. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (0, \sin t)$ va $g = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 2t)$ elementlar orasidagi burchakni toping.

$$A) \frac{\pi}{2}$$

$$B) 0$$

$$C) \pi$$

$$D) \frac{\pi}{3}$$

10. Fok fazosining uch zarrachali qism fazosidagi $f = (f_0, f_1, f_2)$ element normasi uchun formula to'g'ri ko'rsatilgan javobni aniqlang.

$$A) \sqrt{\|f_0\|_0^2 - \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2}$$

$$B) \sqrt[3]{\sqrt{\|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2}}$$

$$C) \sqrt{\|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2}$$

$$D) \sqrt[3]{\sqrt{\|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2}}$$

11. Fok fazosining uch zarrachali qism fazosidagi $f = (f_0, f_1, f_2)$ va $g = (g_0, g_1, g_2)$ elementlarning skalyar ko'paytmasi uchun qaysi formula o'rinli?

$$A) (f, g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2$$

$$B) (f, g) = (f_0, g_0)_0^2 + (f_1, g_1)_1^2 + (f_2, g_2)_2^2$$

$$C) (f, g) = (f_0, g_0)_0 - (f_1, g_1)_1 - (f_2, g_2)_2$$

$$D) (f, g) = \sqrt{(f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2}$$

12. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazoning $L_0 = \{(f_0, f_1) : \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) dt = 0\}$ qism fazosi o'lchamini toping.

- A) 1 B) 2
C) 3 D) ∞

13. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (2, 2)$, $g = (3, 3 \sin^2 t)$, $\varphi = (4, 4 \cos 2t)$ elementlar uchun $\alpha f + \beta g + \gamma \varphi = \theta$ tenglik o'rinli bo'ladigan α, β, γ larni toping.

- A) $\alpha = k, \beta = 2k, \gamma = 3k, k \in R$ B) $\alpha = \frac{k}{3}, \beta = 2k, \gamma = 3k, k \in R$
C) $\alpha = k, \beta = \frac{k}{2}, \gamma = \frac{k}{3}, k \in R$ D) $\alpha = 6k, \beta = 8k, \gamma = 3k, k \in R$

14. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (\frac{1}{2}, \sin^2 t)$, $g = (1, -2 \cos^2 t)$, $\varphi = (0, -7)$ elementlar uchun $\alpha f + \beta g + \gamma \varphi = \theta$ tenglik o'rinli bo'ladigan α, β, γ larni toping.

- A) $\alpha = 7k, \beta = -\frac{7k}{2}, \gamma = k, k \in R$ B) $\alpha = k, \beta = 2k, \gamma = 3k, k \in R$
C) $\alpha = k, \beta = 2k, \gamma = \frac{3k}{7}, k \in R$ D)
 $\alpha = \frac{7k}{2}, \beta = -\frac{7k}{2}, \gamma = \frac{k}{7}, k \in R$

15. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (2, \cos 2t)$, $g = (4, -\sin^2 t)$, $\varphi = (12, -2)$ elementlar uchun $\alpha f + \beta g + \gamma \varphi = \theta$ tenglik o'rinli bo'ladigan α, β, γ larni toping.

- A) $\alpha = k, \beta = 2k, \gamma = 3k, k \in R$ B)
 $\alpha = -k, \beta = -2k, \gamma = -3k, k \in R$
C) $\alpha = 2k, \beta = 2k, \gamma = 3k, k \in R$ D) $\alpha = 2k, \beta = -4k, \gamma = k, k \in R$

16. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi $f = (2, 2 \sin^2 t)$, $g = (1, \cos^2 t)$, $\varphi = (2, 1)$ elementlar uchun $\alpha f + \beta g + \gamma \varphi = \theta$ tenglik o'rinli bo'ladigan α, β, γ larni toping.

- A) $\alpha = 10k, \beta = -2k, \gamma = 3k, k \in R$ B) $\alpha = k, \beta = 2k, \gamma = -2k, k \in R$
C) $\alpha = -k, \beta = 5k, \gamma = 2k, k \in R$ D) $\alpha = 4k, \beta = k, \gamma = -3k, k \in R$

TEST TOPSHIRIQLARINING JAVOBLARI

№\§	1-§	2-§	3-§	4-§	5-§
1	B	A	D	A	C
2	C	A	A	A	A
3	C	D	B	D	A
4	B	C	B	B	B
5	C	B	A	B	D
6	C	A	A	B	B
7	D	C	B	A	A
8	D	D	B	A	B
9	C	A	A	A	A
10	B	A	A	D	C
11	C	A	B	B	A
12	A	B	A	A	D
13	A	A	A	B	D
14	A	D	B	C	A
15	A	B	B	A	D
16	A	A	A	A	B
17	B	C	A	D	B
18	A	D	A	B	C
19	C	C	A	A	C
20	D	A	A	D	B

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand, 2009.
2. Т.А.Саримсоқов. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1986.
3. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука». 1972.
4. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. Том 1: Функциональный анализ. Москва, Мир, 1971.
5. Sh.A.Ayupov, M.M.Ibragimov, K.K.Kudaybergenov. Funksional analizdan misol va masalalar. Nukus, "BILIM", 2009.
6. J.I.Abdullayev, Yu.X.Eshqobilov, I.A.Ikromov, R.N.G'anixo'jayev. Funksional analiz (misol va masalalar yechish). I,II-qismlar. Toshkent, 2015.
7. Barbara D. Macluer. Elementary Functional Analysis. Springer, 2009.
8. Walter Rudin. Functional Analysis. USA, 1991.

Qaydlar uchun

Rasulov Toʻlqin Husenovich
Mustafoyeva Zarinabonu Erkin qizi

VEKTOR FAZOLAR

(uslubiy qoʻllanma)

Muharrir:

G`Murodov

Texnik muharrir:

G.Samiyeva

Musahhih:

A.Qalandarov

Sahifalovchi:

M.Ortiqova

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 15.10.2018. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Tezkor bosma usulida bosildi. Ofset bosma qogʻosi. Bosma tobogʻi 5,0. Adadi 100. Buyurtma № 145.

Buxoro viloyat Matbuot va axborot boshqarmasi
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri M.Iqbol koʻchasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri M.Iqbol koʻchasi, 11-uy. tel.: 0(365) 221-26-45